# РАЗДЕЛЕНИЕ МНОЖЕСТВ С ПОМОЩЬЮ ДВУПОРОГОВЫХ НЕЙРОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

**КОЦОВСКИЙ ВЛАДИСЛАВ МИРОНОВИЧ, ГЕЧЕ ФЕДОР ЭЛЕМИРОВИЧ**
**Ужгородский национальный университет, Ужгород, Украина, kotsavlad@gmail.com**

*В работе рассматриваются вопросы, касающиеся проблемы разделения подмножеств n-мерного действительного пространства с помощью двупороговых нейронных элементов. Сформулированы достаточные условия двупороговой разделимости. Приводятся оценки числа двупороговых разбиений конечных множеств.*

*Ключевые слова: нейронный элемент, пороговый элемент, двупороговый элемент, разделимость, размерность Вапника-Червоненкиса.*

Нейронные элементы и нейросети успешно используются для решения большого количества различных практических задач [1, 2]. В связи с ограниченными возможностями классических пороговых элементов интенсивно изучались их многочисленные обобщения [1–3]. Среди этих обобщений важное место занимают двупороговые нейроэлементы (ДНЭ) с действительными весовыми коэффициентами (bithreshold neurons), которые рассматривались в работах [3–5]. В этих публикациях были установлены оценки числа двупороговых дихотомий конечных подмножеств пространства $R^n$ [3, 4] и условия, выполнение которых обеспечивает возможность разделимости множеств с помощью пары параллельных гиперплоскостей [5]. В докладе приводятся новые достаточные условия двупороговой разделимости подмножеств действительного $n$-мерного пространства и значительно улучшенная по сравнению с [4] верхняя оценка числа двупорогово разделимых разбиений конечных множеств. Впервые найдены оценки размерности Вапника-Червоненкиса для класса ДНЭ и нейросетей на их основе.

Двупороговым действительным нейронным элементом с весовым вектором $\mathbf{w} \in \mathrm{R}^n$ и порогами $t_1, t_2 \in \mathrm{R}\ (t_1 < t_2)$ будем называть функциональный элемент с $n$ действительными входами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и одним выходом $y \in \{-1, 1\}$, поведение которого описывается соотношениями

$$y = \begin{cases} -1, & \text{если } t_1 < (\mathbf{w}, \mathbf{x}) < t_2, \\ 1, & \text{если } (\mathbf{w}, \mathbf{x}) \le t_1 \text{ или } (\mathbf{w}, \mathbf{x}) \ge t_2, \end{cases}$$

где $(\mathbf{w}, \mathbf{x})$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{w}$ и $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

ДНЭ со структурой $(\mathbf{w}, t_1, t_2)$ осуществляет разбиение пространства $\mathrm{R}^n$ на два подмножества следующим образом:

$$\mathrm{R}^{n-} = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n \mid t_1 < (\mathbf{w}, \mathbf{x}) < t_2\},\ \ \mathrm{R}^{n+} = \mathrm{R}^n \setminus \mathrm{R}^{n-}.$$

Два множества $A^+ \subset \mathrm{R}^n$ и $A^- \subset \mathrm{R}^n$ назовем двупорогово разделимыми, если найдется такой ДНЭ с вектором структуры $(\mathbf{w}, t_1, t_2)$, что $A^- \subset \mathrm{R}^{n-}$, $A^+ \subset \mathrm{R}^{n+}$.

Множество всех точек, каждая из которых является аффинной комбинацией некоторых точек множества $X$, обозначим через Aff($X$).

**Теорема 1.** *Пускай $A^+$ — не больше, чем счетный компакт в пространстве $\mathrm{R}^n$ и $A^- = \{\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k\}$ — множество линейно независимых векторов, $k \le n$. Тогда если найдется такой вектор $\mathbf{x}^l \in A^-$, что для произвольного $\mathbf{y} \in A^+ \cap \mathrm{Aff}(A^-)$ коэффициент $\alpha_l$ в аффинном разложении элемента $\mathbf{y}$ по элементам множества $A^-$ удовлетворяет условие*

$$\alpha_l \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty), \tag{1}$$

*то множества $A^+$ и $A^-$ являются двупорогово разделимыми.*

***Следствие.*** В условиях теоремы 1 множества $A^+$ и $\operatorname{conv} A^-$ двупорогово разделимы.

**Теорема 2.** *Пусть* $A^{+}$ *— компакт в пространстве* $\mathrm{R}^{n}$ *и* $A^{-}=\left\{\mathbf{x}^{1},\ldots,\mathbf{x}^{k}\right\}$ *— множество линейно независимых векторов,* $k\le n$. *Тогда если найдется такой вектор* $\mathbf{x}^{l}\in A^{-}$ *и такое пополнение* $\left\{\mathbf{x}^{1},\ldots,\mathbf{x}^{k},\mathbf{x}^{k+1},\ldots,\mathbf{x}^{n}\right\}$ *множества* $A^{-}$ *до базиса пространства* $\mathrm{R}^{n}$, *что для произвольного* $\mathbf{y}\in A^{+}$ *его координата* $\alpha_{l}$ *в этом базисе удовлетворяет условие* (1), *то множества* $A^{+}$ *и* $\operatorname{conv}A^{-}$ *являются двупорогово разделимыми.*

Пускай $D_{2}\left(A\right)$ — количество различных двупороговых разбиений $\left(A^{+},A^{-}\right)$ конечного $m$-элементного множества $A\subset\mathrm{R}^{n}$, $D_{2}(m,n)=\max\{D_{2}(A)\,|\,A\subset\mathrm{R}^{n},\operatorname{Card}A=m\}$. В дальнейшем будем считать, что $A\subset\mathrm{R}^{n}$ и $\operatorname{Card}A=m$.

**Теорема 3.** *При* $m>n$ *выполняется неравенство*

$$D_{2}\left(m,n\right)<2\sum_{i=0}^{n+1}C_{2m-1}^{i}\,. \qquad (2)$$

*Если элементы множества A находятся в общем положении, то*

$$D_{2}\left(A\right)\ge 2\sum_{i=0}^{n+1}C_{m-1}^{i}-1\,. \qquad (3)$$

Верхняя оценка (2) значительно улучшает верхнюю оценку, полученную в работе [5]. В случае $m>>n$ из (2) и (3) можно сделать вывод, что $D_{2}(A)=\Theta\left(m^{n+1}\right)$.

**Теорема 4.** *Пускай F — класс всех ДНЭ с n действительными входами. Тогда*

$$2n\le\operatorname{VCDim}F\le 5n\,,$$

*где* $\operatorname{VCDim}F$ *— размерность Вапника-Червоненкиса* [1] *класса F.*

*Пускай $FN$ — класс нейросетей прямого распространения, построенных из ДНЭ. Тогда*

$$\mathrm{VCDim}\, FN = O(m \ln m),$$

*где $m$ — количество свободных параметров нейронной сети (общее количество весовых коэффициентов и порогов всех нейроэлементов сети).*

**Литература**


1. Haykin S. Neural Networks. A Comprehensive Foundation. — N.Y.: Prentice Hall, Inc., 1999.
2. Руденко О. Г., Бодянський Є. В. Штучні нейронні мережі. — Харків: ТОВ "Компанія СМІТ", 2006.
3. Takiyama R. The separating capacity of multi-threshold threshold element, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., vol. PAMI-7, pp. 112-116, Jan. 1985.
4. Olafsson S., Abu-Mostafa Y. S. The capacity of multilevel threshold function, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., vol. 10, NO. 2, pp. 277-281, March 1988.
5. Deolalikar V. A Two-Layer Paradigme Capable of Forming Arbitrary Decision Regions in Input Space, IEEE Trans. on Neural Networks, vol. TNN-4, No. 2, pp. 343-347, March 2001.