МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Закарпатський державний університет
Факультет інформатики
Кафедра інформаційних управляючих систем та технологій

Г.Е. Копча-Горячкіна

СУЧАСНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Навчально-методичний посібник

Ужгород-2009

Копча-Горячкіна Галина Ернестівна

СУЧАСНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОГО ПРОГРАМУВАННЯ: Навчально-методичний посібник для студентів факультету інформатики напряму „Комп'ютерні науки" зі спеціальності „Інформаційні управляючі системи та технології". – Ужгород: Видавництво Закарпатського державного університету, 2009 р.

Навчально-методичний посібник містить деякі теоретичні відомості, опис предмета навчальної дисципліни у відповідності до болонського процесу, навчально-тематичний план дисципліни «Сучасні методи розв'язування задач дискретного програмування», зміст лекційних тем курсу, тем самостійної роботи студентів, перелік питань для модульного контролю, на залік, літературу.

Друкується за рішенням кафедри інформаційних управляючих систем та технологій від . .2009р., протокол № .

Вступ

В посібнику розглядаються предмет та моделі дискретного програмування, методи розв'язку задач дискретного програмування, їх класифікація та інші поняття .

Дано опис предмета навчальної дисципліни у відповідності до болонського процесу, навчально-тематичний план дисципліни «Сучасні методи розв'язування задач дискретного програмування», зміст лекційних тем курсу, тем самостійної роботи студентів, а також перелік питань на модуль і на залік.

Мета і завдання курсу

Ознайомити студентів з сучасними методами розв'язування задач дискретного програмування (прикладами різних алгоритмів).

Опис предмета навчальної дисципліни

Курс: підготовка (бакалаврів, спеціалістів, магістрів)	Напрям, спеціальності, освітньо-кваліфікаційний рівень	Характеристика навчальної дисципліни
Кількість кредитів ECTS – 1,5 **Модулів**: к-ть модулів – 1 **Змістових модулів**: к-сть модулів – 1 **Загальна кількість годин** – 54 **Тижневих годин:** кількість годин – 0,5	**0804** Комп'ютерні науки **080401** ІУСТ Спеціаліст	**Курс за вибором** **Рік підготовки** – 2007/2008 **Семестр** – 2 **Лекції** – 18 год. **Самостійна робота** – 36 год. **Вид підсумкового контролю** – залік

Навчально-тематичний план дисципліни «Сучасні методи розв'язування задач дискретного програмування»

№ п/п	Назва теми, її зміст	Всього годин	Лекційні	Практичні заняття	Лабораторні роботи	Самостійна робота	Література
Змістовий модуль 1							
1.	Вступ. Предмет курсу. Основні поняття, взаємозв'язок з іншими дисциплінами	6	2	-	-		
2.	Скінчені множини. Декартовий добуток множин. Відношення	6	2	-	-	4	[1], с.15-18
3.	Приклади відношень	6	2	-	-	4	[1], с.18-30
4.	Приклади відображень	6	2	-	-	4	[1], с.30-41
5.	Типові класи задач, що розгл. в дискретному програмуванні	6	2	-	-	4	[2]
6.	Класифікація задач дискретної оптимізації, основні методи	6	2	-	-	4	[2]
7.	Розв'язування задач лінійного цілочисельного програмування (метод гілок та границь та ін.)	6	2	-	-	8	[3]
8.	Розв'язування задач частково цілочисельного програмування (алгоритм Ленд і Дойг та ін.)	6	2	-	-	4	[3]
9.	Області застосування наближених методів розв'язування задач дискретної оптимізації	6	2	-	-	4	[2]
Модульний контроль (тестування, контрольна робота)							
Всього годин за модулем 1		**54**	**18**	**-**	**-**	**36**	

Зміст лекційних тем курсу

1. Вступ. Предмет курсу. Основні поняття, взаємозв’язок з іншими дисциплінами.
2. Скінчені множини. Декартовий добуток множин. Відношення. [1], с.15-18.
3. Приклади відношень. [1], с.18-30.
4. Приклади відображень. [1], с.30-41.
5. Типові класи задач, що розглядаються в дискретному програмуванні. [2].
6. Класифікація задач дискретної оптимізації, основні методи. [2].
7. Розв'язування задач лінійного цілочисельного програмування (метод гілок та границь та ін.). [3].
8. Розв'язування задач частково цілочисельного програмування (алгоритм Ленд і Дойг та ін.). [3].
9. Області застосування наближених методів розв’язування задач дискретної оптимізації. [2].

Теми самостійної роботи студентів

№ п/п	Назва теми	К-сть годин
Змістовий модуль1		
1.	Розв'язування задач ДП э цілочисловими та булевими змінними	2
2.	Розв'язування задач частково цілочисельного програмування	2
3.	Застосування наближеного алгоритму до задач частково цілочисельного програмування	2
4.	Метод керованого випадкового пошуку допустимих розв'язків в задачах цілочисельного опуклого програмування	2
5.	Застосування методу керованого випадкового пошуку для одержання допустимих розв'язків в задачах цілочислового лінійного програмування	2
6.	Наближений алгоритм розв'язування задач із змішаними змінними	2
7.	Застосування керованого випадкового пошуку для знаходження точки локального оптимуму в задачі про ранець	2
8.	Застосування методу вектора спаду до задач частково цілочисельного програмування	2
9.	Метод Бендерса для точного розв'язання задач із змішаними змінними	2
10.	Алгоритм Ерміта	2
11.	Методи послідовного аналізу варіантів	2
12.	Методи випадкового пошуку	2
13.	Прикладні задачі динамічного програмування	2
14.	Комплексне застосування методів динамічного програмування	2
15.	Застосування методу гілок та границь	2
16.	Методи побудови послідовності розв'язків	2
17.	Задача про комівояжера і метод гілок та границь	2
18.	Пошук локального розв'язку параметричної задачі цілочисельного лінійного програмування	2
Література: [2], [3]		
Всього за змістовий модуль 1		**36**

Література

1. Капітонова Ю.В. та ін. Основи дискретної математики, Київ, Наукова думка, 2002.
2. Заїкіна Г.М., Коло колов А.А., Льованова Т.В. Методи розв’язку і аналізу задач дискретної оптимізації, Омськ: ОМГУ, 1992.
3. Дроздов Н.Д. Алгоритмы дискретного программирования: Учебное пособие, Тверь: Твер. Гос. Ун-т, 2002.

Перелік питань на модуль

1. Дискретне програмування, основне його завдання, різноманітність задач.
2. Методи розв’язку задач дискретного програмування. Основні моделі дискретного програмування.
3. Комбінаторні методи, їх класифікація.
4. Наближені методи. Евристичні алгоритми.
5. Постановка задачі дискретного програмування. Особливості задач дискретного програмування.
6. Скінчена множина, власна підмножина. Декартовий добуток двох, … n множин.
7. Декартовий добуток n-го степеня, впорядкована і невпорядкована n-ка елементів.
8. Відношення: унарне, бінарне, n-арне; відношення, визначене на множинах.
9. Об’єднання, перетин, різниця і доповнення відношень.
10. Обернене відношення, суперпозиція відношень.
11. Властивості бінарних відношень.
12. Відношення тотожності, рефлексивне, іррефлексивне, симетричне, антисиметричне, транзитивне.

13. Відношення еквівалентності, його зв'язок з розбиттям множини на класи, індекс множини.
14. Зв'язок відношення еквівалентності з оберненим та запереченням.
15. Замикання відношень: симетричне, транзитивне, рефлексивне.
16. Відношення часткового порядку, відношення строгого порядку, зв'язок між ними.
17. Двоїстість відношення часткового порядку і оберненого до нього; елементи, порівняльні відносно відношення часткового порядку.
18. Найбільший (найменший) елемент, домінування елемента. Лінійно впорядкована множина, приклади.
19. Повністю впорядкована множина, аксіома повної впорядкованості, аксіома вибору, зв'язок між ними.
20. Метод трансфінітної індукції, метод побудови за індукцією.
21. Потужність множини, рівнопотужні множини, потужність декартового добутку скінчених множин.
22. Злічені та незлічені множини, приклади.
23. Аксіоматика Цермело-Френкеля.
24. Переріз відношення за елементом. Подання бінарного відношення за допомогою матриці та графа.

Перелік питань на залік

25. Дискретне програмування, основне його завдання, різноманітність задач.
26. Методи розв’язку задач дискретного програмування. Основні моделі дискретного програмування.
27. Комбінаторні методи, їх класифікація.
28. Наближені методи. Евристичні алгоритми.
29. Постановка задачі дискретного програмування. Особливості задач дискретного програмування.

30. Скінчена множина, власна підмножина. Декартовий добуток двох, … n множин.
31. Декартовий добуток n-го степеня, впорядкована і невпорядкована n-ка елементів.
32. Відношення: унарне, бінарне, n-арне; відношення, визначене на множинах.
33. Об'єднання, перетин, різниця і доповнення відношень.
34. Обернене відношення, суперпозиція відношень.
35. Властивості бінарних відношень.
36. Відношення тотожності, рефлексивне, іррефлексивне, симетричне, антисиметричне, транзитивне.
37. Відношення еквівалентності, його зв'язок з розбиттям множини на класи, індекс множини.
38. Зв'язок відношення еквівалентності з оберненим та запереченням.
39. Замикання відношень: симетричне, транзитивне, рефлексивне.
40. Відношення часткового порядку, відношення строгого порядку, зв'язок між ними.
41. Двоїстість відношення часткового порядку і оберненого до нього; елементи, порівняльні відносно відношення часткового порядку.
42. Найбільший (найменший) елемент, домінування елемента. Лінійно впорядкована множина, приклади.
43. Повністю впорядкована множина, аксіома повної впорядкованості, аксіома вибору, зв'язок між ними.
44. Метод трансфінітної індукції, метод побудови за індукцією.
45. Потужність множини, рівнопотужні множини, потужність декартового добутку скінчених множин.
46. Злічені та незлічені множини, приклади.
47. Аксіоматика Цермело-Френкеля.
48. Переріз відношення за елементом. Подання бінарного відношення за допомогою матриці та графа.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ДИСКРЕТНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Дискретне програмування – один з розділів прикладної математики, що займається дослідженням та розв’язанням екстремальних задач на скінчених множинах.

Множина А називається скінченою, якщо в ній жодним способом не можна виділити власної підмножини В, яка рівно потужна всій множині А. Якщо у множині А можна виділити рівно потужну їй частину В, то така множина називається нескінченою.

Множини А і В називаються рівно потужними (або еквівалентними), якщо існує хоча б одне всюди визначене взаємно однозначне відображення (бієкція) з множини А в множину В.

Підмножина В називається власною підмножиною множини А, якщо виконуються дві умови:

1) Підмножина В є не порожньою;

2) У множині А існує хоча б один елемент, якого нема у підмножині В.

Задачі дискретного програмування, які розглядають на практиці, дуже різноманітні і досвід показує, що не існує єдиного методу, який би був успішно застосований до широкого кола практичних задач. Цим пояснюється велика різноманітність як точних, так і наближених алгоритмів задач дискретного програмування. У термінах дискретного програмування формулюється багато задач економіки, планування, військової справи та ін.

Основна задача дискретного програмування – вибір найкращого варіанту зі скінченої, можливо, досить великої їх кількості. Екстремальні задачі, які виникають при цьому, мають ряд особливостей, які не зустрічаються в таких стандартних задачах математичного програмування, як лінійні опуклі або багатокритеріальні задачі. Сучасна техніка дослідження задач, пов’язана з поняттям нескінченно малих величин, природнім чином визначеного околу і похідних різних типів не може бути застосована в дискретному програмуванні. При цьому таке фундаментальне поняття, як окіл допустимого розв'язку в задачах даного типу не завжди вводиться природнім чином, і, як правило,визначення околу можливо лише із застосуванням різноманітних штучних побудов. Такі побудови призводять до того, що два допустимі розв'язки з деякого околу можуть сильно відрізнятися значеннями цільової функції. Звідси випливає, що мірою близькості двох допустимих розв'язків являються лише значення функції для них.

Друга особливість задач полягає в тому, що вони мають перебірний характер, і для їх розв'язку необхідно застосовувати спеціальним чином організовані алгоритми перебору, які одержали назву комбінаторних. Основна ідея таких алгоритмів полягає в тому, щоби виділити з множини допустимих розв'язків підмножини, що не містять оптимальних розв'язків. Відсікання таких підмножин дозволяє зменшити об'єм перебору. Процедури виділення таких підмножин та їх відкидання складають зміст комбінаторного алгоритму. Але може трапитись, що об'єм перебору, тобто число варіантів для реалізації цієї ідеї, настільки велике, що його неможливо виконати на ЕОМ як завгодно великої потужності. Тобто оптимум потрібно знайти, але при цьому великий перебір неможливий.

Третя особливість полягає в тому, що для ряду задач невідомо, чи існує розв'язок. В цих випадках пошук хоча б одного допустимого розв'язку по праце ємності можна порівняти з пошуком оптимального розв'язку.

Постановка задачі дискретного програмування. Методи розв’язку задач дискретного програмування. Моделі дискретного програмування.

Під задачею дискретного програмування (дискретної оптимізації) розуміють задачу математичного програмування

$$f(x)=min\ f(x),\ x\in G,$$

множина допустимих розв’язків якої скінчена і тому всі допустимі розв’язки можна пронумерувати:

$$x^1\ ,\ x^2\ ,\ldots,\ \ x^N,$$

обчислити $f(x^i)$, i=1, 2, …, N, і знайти найменше значення.

Основні методи розв’язку задач дискретного програмування:

1. Методи відсікання.
2. Комбінаторні методи.
3. Наближені методи.

Основні моделі дискретного програмування:

1. Задачі транспортного типу.
2. Задача про ранець.
3. Задачі теорії графів.
4. Задача про покриття скінченої множини системою її підмножин.

Задачі транспортного типу розділяються на:

а) транспортну задачу в матричній постановці;

б) задачу про призначення (задачу вибору);

в) задачу комівояжера;

г) транспортну задачу з фіксованими доплатами;

д) розподільну задачу.

Задача про ранець поділяється на

а) задачу про одновимірний ранець;

б) задачу про багатовимірний ранець.

Задачі теорії графів поділяються на:

а) задачі про покриття графів;

б) задачу про ізоморфізм графів;

в) задачі про розкраску графів.

Класифікація комбінаторних методів:

1. Метод послідовного аналізу варіантів.
2. Метод гілок та границь.
3. Методи, що базуються на послідовнісних схемах.
4. Метод динамічного програмування.
5. Апроксимаційно-комбінаторний метод.
6. Метод послідовних розрахунків.

Декартовий добуток множин. Відношення.

Нехай A і B – множини. Множина $C = \{ (a, b) \mid a \in A,\ b \in B \}$ називається *декартовим добутком множин* A *і* B, і позначається $A*B$.

Якщо A *і* B скінченні і складаються відповідно з m *і* n елементів, то C складається із mn елементів.

Розглянемо випадок, коли множина $A=B$. для цього введемо показники впорядкованої пари.

Упорядкованою порою елементів множини А називається об'єкт (a, a'), що складаються з двох , не обов'язково різних, елементів – a і a' множини А, для яких вказано, який треба ввести першим, а який – другим.

Наприклад, якщо $A= \{1, 2, 3, 4, 5\}$, то впорядковані пари $(3, 4)$ і $(4,3)$ вважаються різними, оскільки в першій парі першим елементом є 3, другим – 4, а в другій парі - навпаки.

Впорядкованими є також пари $(1,1), (2, 2), (3, 3), (4,4), (5, 5)$.

Множина $C= \{ (a, a') \,/\, a, a' \in A \}$ всіх упорядкованих пар (a, a') елементів із множини А називають декартовим квадратом множини A, і позначають $\boldsymbol{A^2}$.

Поняття упорядкованої пари можна розширити на упорядковані трійки елементів (a_1, a_2, a_3, a_4) і т. д.

Впорядкована кількість елементів з множини A – це n не обов'язково різних елементів з A, заданих в певній кількості.

Якщо $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1', a_2', \ldots, a_n')$, то $a_1= a_1', a_2 = a_2', \ldots, a_n = a_n'$.

Для того, щоб відрізняти впорядковані пари, трійки,…, від невпорядкованих, введемо такі позначення: якщо A – деяка множина, то $A^{(2)}, A^{(3)}$, будуть відповідно означати множину неупорядкованих пар елементів, трійок елементів і т.д. з множини A (тобто $A^{(2)}$ – це множина всіх двохелементних підмножин множини А, $A^{(3)}$ – множина всіх трьохелементних і т.д.).

Узагальнимо довільної скінченної сукупності множин.

Як відомо:

Декартовим добутком $A_1 * A_2 * \ldots * A_n$ множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називають сукупність послідовностей (тобто сукупність n – ок елементів) вигляду $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, де $a_i \in A, 1 \leq i \leq n$.

Елементи декартового добутку називають ще кортежами.

Довільна підмножина множини $A_1*A_2*\ldots*A_n$ називається відношенням, заданим або визначеним на множинах $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Якщо $A_1=A_2=\ldots=A_n=A$, то декартовий добуток $A_1*A_2*\ldots*A_n$ називається декартовим добутком n – го степеня множини A (A^n), а відношення R, задане на множинах $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - парним відношенням на множині A.

Якщо $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R$, то кажуть, що елементи a_i $(i=1,\ldots n)$ знаходяться між собою у відношенні R або відношення R істинне для $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Якщо $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \notin R$, то вважається, що R хибне для $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

При $n = 1$ відношення називається унарним, при $n = 2$ – бінарним, при $n = 3$ – торнарним.

Оскільки відношення , задані на $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – підмножини множини $A_1 * A_2 * \ldots * A_n$, то для них визначені опції $\cap$, $\cup$, різниці і доповнення:

$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R \cup R_1 \Leftrightarrow (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R$ *або*

$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R_1;$

$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R \cap R_1 \Leftrightarrow (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R$ *і*

$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R_1;$

$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R \setminus R_1 \Leftrightarrow (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R$ *і*

$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \notin R_1;$

$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R'$ *в* $A_1 * A_2 * \ldots * A_n \Leftrightarrow (a_1, a_2, \ldots, a_n) \notin R.$

Часто R' позначають – R і називається запереченням відношення R.

Частіше використовуються бінарні відношення.

Якщо R – бінарне відношення, то запис aRb означає, що $(a, b) \in R$, тобто R істинне для a,b.

Нехай $R \leq A*B$, $R_1 \leq B*C$.

Відношення R^{-1}, задане на множині B*A, називається оберненим до R, якщо: $R^{-1} = \{ (b, a) / aRb \}$,

а відношення $R*R_1 = \{ (a, c) / a \in A,\ c \in C$ *і* $(\exists b \in B)\ (aRb$ *і* $bR_1C) \}$.

Зауваження. Операція множення відношень може бути і невизначеною, якщо в множині B для заданих елементів a із A і c із C не існує відповідного елемента в.

Але, якщо $A=B=C$, то ця опція завжди визначена.

Властивості бінарних відношень.

Теорема1.1.3.: Якщо R, R_1, R_2 – бінарні відношення, задані на множині A, то:

1) $(R_1 \cup R_2) * R = R_1 * R \cup R_2 * R;\ R_1 \leq R_2 \Rightarrow R_1 * R \leq R_2 * R;$

2) $(R^{-1})^{-1} = R;\ R \leq R_1 \Rightarrow R^{-1} \leq R_1^{-1};$

3) $(R * R_1)^{-1} = (R_1^{-1}) * (R^{-1})$;

4) $(R_1 \cup R_1)^{-1} = (R^{-1}) \cap (R_1^{-1})$;

5) $(R*R_1) * R_2 = R * (R_1 * R_2)$.

Доведення:

1) якщо $(a, b) \in (R_1 \cup R_2) * R$, то F елемент $c \in A$ такий, що $(a, c) \in R_1 \cup R_2$ i $(c, b) \in R$.

Отже, $(a, b) \in R_1 * R$ *або* $(a, b) \in R_2 * R$, тобто

$(a,) b \in R_1 * R \cup R_2 * R$. Обернене включення доводиться аналогічно.

Друга частина твердження:

1) випливає з того, що коли $R_1 \leq R_2$, *то* $R_1 \cup R_2$, звідки маємо (в силу доведеного вище), що $(R_1 \cup R_2) * R = R_1 * R \cup R_2 * R$, тобто $R_1 * R \leq R_2 * R$.

2) $(a, c) \in R^{-1} \Leftrightarrow (b, a) \in (R^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (b, a) \in R$, звідки випливає, що $R = ((R^{-1})^{-1})$.

Для доведення другої частини зауваження, що $(a, b) \in R \Leftrightarrow (b, a) \in (R^{-1}) \Rightarrow$ $\Rightarrow (a, b) \in R \Rightarrow (a, b) \in R_1 \Rightarrow (b, a) \in R^{-1} \Rightarrow (b, a) \in R_1^{-1}$, *тобто* $R^{-1} \leq R_1^{-1}$.

3) $(a, b) \in (R * R_1)^{-1} \Leftrightarrow (,b\ a) \in (R * R_1) \Rightarrow (Fc \in A)\ (b, c) \in R$ i $(c, a) \in R_1$.

Але тоді $(c, b) \in (R^{-1})$;

$(a, c) \in R_1^{-1} \Rightarrow (a, b) \in (R_1^{-1}) * (R^{-1})$, *тобто* $(R * R_1)^{-1} \leq (R_1^{-1}) * (R^{-1})$.

Обернене включення доводиться аналогічно.

4) $(a, b) \in (R \cap R_1)^{-1} \Leftrightarrow (b, a) \in R \cap R_1 \Leftrightarrow (b, a) \in R$ i $(b, a) \in R_1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (a, b) \in (R^{-1})$ i $(a, b) \in (R_1^{-1})$, тобто $(R \cap R_1)^{-1} = (R^{-1}) \cap (R_1^{-1})$.

5) Нехай $(a, d) \in (R * R_1) * R_2$, тобто $Fc \in A$ такий, що $(a, c) \in R * R_1$ і $(c, d) \in R_2$.

Отже, F в такий, що $(a, b) \in R$, $(b, c) \in R_1$ i $(c, d) \in R_2$, а це означає, що $(b, d) \in R_1 * R_2$ i $(a, d) \in R * (R_1 * R_2)$, тобто $(R * R_1) * R_2$. обернене включення доводиться аналогічно.

<u>Приклади відношень.</u>

1. *Відношення тотожності.* Бінарне відношення тотожності, із всіх пар, що мають вигляд *(a, a),* де $a \in A$, і позначається i_A або просто і, **А** фіксовано. Такі пари *(a, a)* називаються діагональними, а відношення i_A – діагоналлю.

Очевидно, що для $\forall$ бінарного відношення *R*, визначеного на множині *A*, справджується рівність:

$$i_A * R = R * i_A = R.$$

2. *Рефлексивне відношення.* Бінарне відношення *R*, задане на множині *A*, називається рефлексивне, якщо $i_A \leq R$, тобто коли воно включає діагональ.

Наприклад: а) пряма ***x*** $//$прямій ***y*** в площині ***z.***

б) студент *x* - ровесник студента ***y***.

Дійсне, у випадку а) з елементарної геометрії видно, що дві прямі, які лежать в одній площині, паралельні, якщо вони або збігаються, або не мають жодної спільної точки, скільки б їх не продовжували. Оскільки пряма *x* збігається сама з собою, то пряма *(x, x)* належить даному відношенню.

У випадку б) очевидно, що кожен студент сам собі ровесник.

3. *Іррефлексивні відношення.* Бінарне відношення *R* називається іррефлексивним, якщо *aRa* не має сенсу.

Наприклад, відношення строгого порядку $x < x$ на множині дійсних чи раціональних чисел не має сенсу тому, що воно завжди хибне.

4. *Симетричні відношення.* Бінарне відношення *R*, задане на множині *A*, називається симетричним, якщо $aRb \Rightarrow bRa$ $(R \leq R^{-1})$.

Наприклад: а) пряма ***a*** $\perp$ до прямої **y** в площині *z***.**

б) студент *x* є сусідом по парті студента *y*.

Дійсно, у випадку: а) з елементарної геометрії відомо: якщо пряма $x \perp y$**,** то пряма $x \perp y$**;**

у випадку б) ясно, що коли студент є сусідом іншого студента, то останній є сусідом першого.

Ні а), ні б) не є рефлексивне.

5. *Транзитивні відношення.*

Бінарне відношення R, задане на A, називається <u>транзитивним,</u> якщо з aRb і bRc випливає aRc $(R^2 \leq R)$.

Наприклад: а) місто x зв'язане з містом y шосейною дорогою;

б) студент x є ровесником студента y;

в) Δx подібний Δ - *ку* y;

г) дійсне число x більше дійсного числа y.

У випадку а) якщо між містами x *і* y є шосейна дорога, і між містами y, z теж є шосейна дорога, яка, наприклад, пролягає через місто y.

У випадку б), в), г) транзитивність очевидна.

6. *Антисиметричні відношення.*

Бінарне відношення R, задане на множині A, називається <u>антисиметричним,</u> якщо з aRb *і* $bRa \Rightarrow a = b$ $(R \cap R^{-1} \leq i_A)$.

Наприклад, бінарне відношення включене для множин, тобто відношення *«множина A є підмножиною множини B»* .

Справді, якщо $A \leq B$ *і* $B \leq A$, то з аксіоми об′ємності $\Rightarrow$ що множини A *і* B складаються з одних і тих же елементів, тобто $A = B$.

7.Відношення еквівалентності.

Бінарне відношення R, задане на множині A, називається <u>відношення еквівалентності</u> або просто <u>еквівалентністю</u> на A, якщо для бінарних елементів a, b і c із А справджуються такі властивості:

а) aRa (рефлексивність);

б) $aRb \Rightarrow bRc$ (симетричність);

в) aRb aRb *і* $bRc \Rightarrow aRc$ (транзитивність),

де i_A – відношення тотожності, а $R^2 = R * R$.

Умови а), б), в) еквівалентні таким: $i_A \leq R_1$ $R = (R^{-1})$, $R^2 = R$.

Відношення еквівалентності, задане на множині A, тісно пов'язане з розбиттям множини A на класи. Цей зв'язок виражається твердженням:

*Лема1.1.1.*Всяке розбиття множини A на класи визначає на множині A відношення еквівалентності.

Доведення.

Нехай $a,\ b\ \in A$, покладаємо $aRb \Leftrightarrow a$ і b лежать в одному класі розбиття. Покажемо, що бінарне відношення є відношенням еквівалентності. Для цього треба довести, що вони рефлексивні, симетричні та транзитивні.

Дійсно, оскільки a лежить в деякому класі розбиття, то aRa, тобто воно рефлексивне.

Нехай K – деякий клас розбиття і $a,\ b\ \in K$, тоді і $b,\ a\ \in K$, тобто $aR\,b \Rightarrow bRa$. симетричність доведено.

Із aRb *і* $bRc \Rightarrow a,\ b,\ c\ \in K$ звідси aRc, що і треба було довести.

Лема1.1.2. Всяке відношення еквівалентності R, визначене на множині A, задає розбиття множини A на класи.

Теорема1.1.4.: Між розбиттям множини на класи і відношенням еквівалентності, заданим на цій множині, F взаємно - однозначну відповідність.

Якщо R еквівалентність на A, то класи розбиття, визначені відношенням R називаються класами еквівалентності відношення R.

Число класів еквівалентності відношення еквівалентності R називають індексом множини A.

Якщо число класів еквівалентності, то A називають множиною скінченого індексу.

Перевіримо, які з операцій теорії множин зберігають властивість відношення бути відношенням еквівалентності, а які ні.

*Теорема1.1.5.:*Якщо $R,\ R_1$ – відношення еквівалентності, задане на множині A, то:

1) R^{-1} – відношення еквівалентності на A;

2) $R\ *\ R_1$ - відношення еквівалентності на A тоді і тільки тоді,коли $R*R_1 = R_1*R$, тобто коли відношення R *і* R_1 можна міняти місцями;

3) $R \cap R_1$ – відношення еквівалентності на A;

4) R' не є відношенням еквівалентності на A.

Доведення:

1. Оскільки R – відношення еквівалентності, то $R^{-1} = R$, і значення R^{-1} – теж відношення еквівалентності.

2. Якщо $R^* R_1$ – відношення еквівалентності, то за доведеним вище $(R^* R_1)^{-1}$ теж відношення еквівалентності.

$$(R^* R_1)^{-1} = (R_1^{-1}) * (R^{-1}) = R_1^* R.$$

Навпаки, якщо $R^* R_1 = R_1^* R$, то з того, що xRx *і* $xR_1x \Rightarrow xR * xR_1$, і, отже, $R^* R_1$ – рефлекс.

Далі, з того, що $(R^* R_1)^{-1} = (R_1^{-1}) * (R^{-1}) = R_1^* R$, випливає симетричність $R^* R_1$.

І, нарешті, $(R^* R_1) * (R^* R_1) = R * R * R_1 * R_1 = R * R_1$, оскільки їх можна міняти місцями і множення відношення – асоціативне. Отже, $R * R_1$, транзитивне.

Аналогічно – 3.

Об'єднання відношень еквівалентності не завжди є відношенням еквівалентності (за наступною теоремою)

Теорема1.1.6. Об'єднання $R \cup R_1$, відношень еквівалентності R і R_1 є еквівалентністю тоді і тільки тоді, коли перетин будь – якого класу еквівалентності по R з будь – яким класом еквівалентності по R_1 або збігається з одним із них, або пустий. Якщо $R \cup R_1$ – еквівалентність, то:

$$R \cup R_1 = R * R_1$$

8. Замикання відношень.

Нехай R – деяке бінарне відношення на множині A:

а) <u>рефлексивним замиканням</u> R_i відношення R називається відношення $R \cup i$, де i – відношення тотожності на A (діагональ);

б) <u>симетричним замиканням</u> R_s відношення R називається відношення $R \cup R^{-1}$, тобто якщо $(a, b) \in R$, то $(a, b) \in R_s$ *і* $(b, a) \in R_s$;

в) <u>транзитивним замиканням</u> R_t відношення R називається відношення

$$R_t = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n \cup \ldots,$$

тобто $(a, b) \in R_t$ тоді і тільки тоді, коли існують елементи $a_1 = a, a_2, \ldots, a_n = b \in A$, такі, що $a_1 R a_2, a_2 R a_3, \ldots, a_{n-1} R a_n$.

Якщо деяке відношення містить своє симетричне, рефлексивне і транзитивне замикання, то воно є відношенням еквівалентності і навпаки.

Приклад.

Нехай $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$,

$$R = \{ (a_1, a_3), (a_3, a_4), (a_4, a_2), (a_3, a_3)\}.$$

Тоді

$$R_i = \{ (a_1, a_3), (a_3, a_4), (a_4, a_2), (a_3, a_3), \{ (a_1, a_1), (a_2, a_2), (a_4, a_4)\},$$

$$R_s = \{ (a_1, a_3), (a_3, a_1), (a_3, a_4), (a_4, a_3), \{ (a_4, a_2), (a_2, a_4), (a_3, a_3)\},$$

$$R_t = \{ (a_1, a_3), (a_3, a_4), (a_4, a_2), (a_3, a_3), \{ (a_1, a_4), (a_1, a_2), (a_3, a_2)\}.$$

9. Відображення операції.

Відображення F, задане на множинах $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$, називається функціональним, якщо для будь – якого елемента $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то він позначається $F (a_1, a_2, \ldots, a_n)\ b \}$ i $Dom (F) = \bigcup_{b \in B} F^{-1}(b)$

Очевидно для всякого функціонального відношення F, заданого на $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$, виконується включення

$$Dom (F) \leq A_1 * A_2 * \ldots * A_n.$$

У випадку, коли $Dom (F) \leq A_1 * A_2 * \ldots * A_n$, відношення F називається повністю визначеним, а коли $Dom (F) < A_1 * A_2 * \ldots * A_n$ – частково визначеним або просто частковим.

Відношення F, задане на множинах $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$, називається відображенням або функцією із $A_1 * \ldots * A_n$ в B $(F: A_1 * \ldots * A_n \to B)$, якщо F функціональне і повністю визначене.

Відношення F називається частковим відображенням або частковою функцією, якщо F функціональне і часткове.

Число n називається арністю функції F.

Якщо $F: A_1 * A_2 * \ldots * A_n \to B$ і існує b із B, такий, що

$F (a_1, a_2, \ldots, a_n) = b$, то елемент b називається образом елемента $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ при відображені F, а елемент $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – прообразом елемента b.

Множину $F^{-1}(b) = \{ (a_1, a_2, ..., a_n) / F(a_1, a_2, ..., a_n) = b\}$, називається повним прообразом елемента в множині $A_1 * A_2 * ..... * A_n$.

Відношення $F: A_1 * A_2 * ..... * A_n \rightarrow B$ називається відображенням на B, якщо $\forall\, b \in B\ F^{-1}(b) \neq \varnothing$.

Що таке добуток відображень?

Нехай $F_1: A \rightarrow B$, а $F: B \rightarrow C$ – деякі відображення.

За означенням добутку відношень маємо:

$(a, c) \in F_1 * F \Leftrightarrow \exists$ елемент $b \in B$, такий, що

$(a, b) \in F_1$ і $(b, c) \in F$, тобто $F_1(a) = в$ і $F(b) = c$, або $F(F_1(a)) = c$ згідно з прийнятими позначеннями.

Таким чином, добуток відображення являє собою добре відому операцію суперпозицій функцій.

Покажемо, що добуток відображення є _________ операцією.

Нехай $F: A \rightarrow B$, $F_1: B \rightarrow C$, $F_2: C \rightarrow D$ – довільне відображення.

Треба показує, що $F * F_1 * F_2 = F * (F_1 * F_2)$.

Знайдемо чому = права і ліва частина цієї рівності для довільного елемента a із A. для правої частини маємо:

$$F * (F_1 * F_2)(a) = F * ((F_1 * F_2)(a)) = (F_1 * F_2) F(a)) = F_2 (F_1 * F(a))),$$

для лівої частини:

$$(F * F_1) * F_2(a) = F_2((F * F_1)(a)) = F_2(F_1(F(a))).$$

Отож, обидві частини рівняння мають один і той же вираз і тому рівні між собою.

Прикладом відображення «на» і взаємно – однозначного відношення може служити відображення, яке зв’язує множину A з її фактор – множиною A/R, де R – деяке відношення еквівалентності на А.

Відображення $F: A/R$, яке задає для будь – якого елемента a із A той клас розбиття, якому належить a, називається натуральним відношенням A на A/R.

Якщо $F: A^n \to B$, то F називається n -<u>парною функцією</u> з A в B, а якщо при цьому $B = \{0,1\}$, то F називається n<u> – арним предикатом </u>на множині A, а елементи $0, 1$ – відповідно <u>хибністю </u>та<u> істиною.</u>

Якщо предикат F має таку властивість, що для всіх $(a_1, a_2, ..., a_n) \in A$

$F(a_1, a_2, ..., a_n) = 1$ $(F(a_1, a_2, ..., a_n) = 0)$, то предикат F називається <u>тотожно істинним (хибним)</u> на A.

Твердження. Між відношеннями і предикатами, заданими на одній і тій же множині A, $\exists$ взаємно – однозначна відповідність.

Доведення. Дійсно, нехай F – парний предикат на A. сукупність тих послідовностей з A^n, для яких

$$F(a_1, a_2, ..., a_n) = \begin{cases} 1, \text{якщо} (a_1, a_2, ..., a_n) \in R \\ 0, \text{якщо} (a_1, a_2, .., a_n) \notin R \end{cases}$$

Отримуємо n - арний предикат, який відповідає відношенню R.

Таким чином, n - арні відношення і n - арні предикати на довільній множині знаходяться у взаємно – однозначній відповідності.

Якщо F - n - арна функція з A^n в A, то F ще називається n – арною операцією на A.

При $n = 0$ функція F нуль – арною операцією, значенням якої є фіксований елемент множини A.

Операція F називається <u>частковою</u>, якщо F – часткова функція.

Нехай $F: A_1 * A_2 * ..... * A_n \to B$ і $F^{-1}(b)$ – повний прообраз елемента b в $A_1 * A_2 * ..... * A_n$ при відображення F.

Введена вище множина $Dom(F) = \bigcup\limits_{b \in B} F^{-1}(b)$ називається <u>областю визначення</u> F, а $Im(F) = \{ в (F^{-1}(b) \neq \varnothing\}$ - <u>областю значень.</u>

Якщо $F: A_1 * A_2 * ..... * A_n \to B$ і $F_1: A_1 * A_2 * ..... * A_n \to B$, *то* $F = F_1$ тоді і тільки тоді, коли $Dom(F) = Dom(F_1)$, $Im(F) = Im(F_1)$ і $F(a_1, a_2, ..., a_n) = F_1(a_1, a_2, ..., a_n)$ $\forall (a_1, a_2, ..., a_n) \in A_1 * A_2 * ..... * A_n$.

Будемо позначати предмети, функції, операції,малими латинськими літерами.

Якщо Ω - деяка множина функцій або операцій, то функція $ar: \Omega \to N$, *де* N – множина натуральних чисел, називається функцією арності n, тобто $ar\ (W) = n$, якщо $W \in \Omega$ і має арність n.

10. Відношення часткового порядку.

Бінарне відношення O, визначене на множині A, називається часткoвим порядком на A, якщо $\forall a, b, c \in A$ виконує властивості:

$a_1)$ aOa $(i_A \le 0)$ (рефлективність);

$a_2)$ aOb *і* $bOc \Rightarrow aOc$ $(O^2 \le O)$ (транзитивність);

$a_3)$ aOb *і* $bOa \Rightarrow a = b$ $(O \cap O^{-1} \le i_A)$ (антисиметричний).

Частковий порядок на множині A, позначається символом $\le$. Якщо $a \le b$ для деяких $a, b \in A$, то кажемо, що a менше або дорівнює b, а також, що a включається в b або $= b$.

Якщо $a \le b$ *і* $a \ne b$, то кажуть, що a строго менше b $(a < b)$.

Транзитивне та іррефлексивне відношення називається відношенням строгого порядку. Це відношення позначається $<$.

З кожним відношення часткового парного $\le$ зв'язане відношення строгого парного $<$ (цей порядок називається строгою частиною відношення $\le$):

$(a < b) \Leftrightarrow a \le b$ *і* $a \ne b$.

Навпаки, з кожним відношення строгого парного $<$ зв'язане відношення строгого часткового парного $\le$:

$(a \le b) \Leftrightarrow a < b$ *або* $a \ne b$.

Найпростіші властивості частково впорядкованих множин.

Теорема 1.1.8. (принцип двоїстості) Відношення, обернене до відношення часткового парного, теж буду відношенням часткового парного.

Доведення. Нехай O^{-1} - відношення або обернене до відношення O:

1) оскільки $i_A \le O$, *то* $i_A \le i_A^{-1} \le O^{-1}$;

2) якщо $O * O \le O$, то за теоремою 1.1.3.

$$O^{-1} * O^{-1} = (O * O)^{-1} \leq O^{-1};$$

3) якщо О $\cap O^{-1} \leq i_A \geq O^{-1} \cap (O^{-1})^{-1}$ за теоремою 1.1.3., що і треба було довести.

Відношення часткового парного O^{-1} називається <u>двоїстим</u> до відношення часткового парного O.

Відношення часткового парного $\leq^{-1}$ називається <u>двоїстим</u> до відношення часткового парного $\leq$.

Відношення $\leq^{-1}$ позначається $\geq$.

Якщо $a \leq b$ то $b \leq a$, то a, b називається елементарними, порівняльними відносно порядку $\leq$.

З принципу двоїстості $\Rightarrow$ що коли в якому – небудь твердженні про частково упорядковану множину замінити частковий порядок на двоїстий до нього порядок, то одержане твердження теж буде справедливим.

Теорема 1.1.9. Всяка підмножина частково впорядкованої множини теж буде частково впорядкованою множиною.

Елемент x із множини A називається <u>найбільшим (найменшим)</u>, якщо $\forall a \in A \; x \geq a \; (x \leq a)$.

Теорема 1.1.10. В кожній частково впорядкованій множині існує не більше одного найменшого (а згідно з принципом двоїстості і найбільшого) елемента.

Доведення.

Припустимо, що a і b – два найменші елементи в множині A. Тоді $a \leq b$, оскільки a – найменший елемент, і $b \leq a$, оскільки b – найменший елемент. Але тоді із антисиметричної властивості відношення часткового порядку $\Rightarrow$, що $a = b$.

Якщо довільні два елементи з множини A порівнюються між собою відносно $\leq$, то таке відношення називається <u>лінійним порядком</u> на A, а множина А – <u>впорядкованою</u> або <u>лінійно –впорядкованою</u> або <u>ланцюгом.</u>

Нехай $(A,\leq)$ – частково впорядкована множина і $a, b \in A$.

Кажуть, що <u>елемент b</u> <u>домінує над елементом a,</u> якщо $b > a$ і для кожного елемента x із A не виконується, що $b > x > a$.

Наступна теорема показує, що відношення часткового порядку $\leq$ може одночасно відновити за відношенням домінування в будь – якій скінченній частково впорядкованій множині.

Теорема 1.1.11. Нехай $a < b$ в скінченній частково упорядкованій множині $(A,\leq)$. Тоді в $(A,\leq)$ існує хоча б один ланцюг $a < x_1 < x_2 < .... < x_n < b$, в якому кожний x_i домінує над x_{i-1}, $i = 1, 2, ..., n$.

Доведення.

Індукцією за числом n елементів y, які задовольняють умову $a < y < b$ (див. нижче метод трансформаційної індукції).

При $n = 0$ b домінує над a за означенням.

<u>Крок індукції.</u> Припустимо, що теорема справедлива для всіх $m < n$. Розглянемо випадок $m = n$, де $n > 0$. Оскільки $n > 0$, то існує елемент $c \in A$, що $a < c < b$, і число елементів y, z, що задовольняють умову $a < y < c$ та $c < z < b$, не перевищує n -1. за принципом індукції існують скінчені ланцюги, які зв'язують a і c та c і b, середні елементи яких знаходяться у відношення домінування. З'єднавши ці два ланцюги, одержуємо шуканий ланцюг.

<u>Приклад лінійно впорядкованої множини</u>:

Множина точок числової осі (прямої).

<u>Приклади частково впорядкованих множин:</u>

1. Булеан $B(A)$, тобто множина всіх підмножин деякої множини A з відношенням теоретико – множинного включення $\leq$ як відношенням часткового порядку.
2. Множення N^+ з відношенням $n \leq n_1, \Leftrightarrow n_1$ ділиться націло на n.

Лінійно впорядкована множина A називається <u>повністю впорядкованою</u>, якщо всяка її непуста підмножина B має найменший елемент.

З поняттям повністю впорядкованої множини пов'язаний один з основних постулатів теорії множин.

Аксіома повної впорядкованості:

Всяку наступну множину можна повністю впорядкувати.

Аксіома вибору:

Якщо дана множина A. то існує функція φ, яка ставить у відповідність кожній наступній підмножині *B,* з множини A один визначений елемент $\varphi(B)$ з множини B.

Логічну еквівалентність аксіоми треба розуміти так: коли одну з них вибрати за аксіому, то другу можна строго довести як теорему і навпаки. Так, якщо береться аксіома вибору, то аксіома повної впорядкованості стає твердженням, яке в теоретичних множинах відоме як теорія Цермела.

Завдяки аксіомі повної впорядкованості багато властивостей повністю впорядкованих множин можна доводити методом транс фінітної індукції.

Теорема 1.1.12. Метод транс фінітної індукції.

Нехай е – найменший елемент повністю впорядкованої множини A і $P(x)$ – деяка властивість елемента $x \in A$. тоді якщо з істинності $P(e)$ і $P(x)$ для всіх $x < a$ випливає істинність $P(a)$. то $P(x)$ істинне для всіх x із A.

Доведення.

Припустимо противне: існує така наступна підмножина A' елементів із A, що для всіх $y \in A'$ властивість $P(y)$ хибне при виконанні умов теореми.

Нехай b – мінімальний елемент в A'. Оскільки $P(e)$ істинне, то $b \neq e$ і $b > e$. Із умов теореми $\Rightarrow$ що $P(x)$ істинне для всіх $x < b$, але тоді з цих же умов повинна випливати істинність *і* $P(y)$, а це суперечить нашому припущенню.

Виконувати побудову за індукцією, або давати означення за індукцією.

Дійсно, нехай A – повністю впорядкована множина, і нехай потрібно визначити на цій множині функцію $f(x)$, яка ставиться у відповідність кожному елементу X і A деякі елементи множини B. Припустимо також, що $f(x)$, повністю задовольняє деякі рекурентні відношення, тобто співвідношення, які однозначно визначають для всякого $a \in A$ значення $f(n)$, за значенням $f(b)$ для всіх $b \prec a$

Метод побудови за індукцією.

Існує єдина функція *f(x)*, яке визначена на всій множині *A*, задовольняє вказані рекурентні співвідношення і набуває заданих значень на мінімальному елементі множини *A*.

Доведення.

Покажемо спочатку єдність такої функції. Припустимо, що існують дві різні функції *f(x)*, і *g(x)* на множині *A*, які задовольняють наші умови.

Нехай існує непуста підмножина елементів *x* із *A*, для яких $f(x) \neq g(x)$.

Оскільки А повністю впорядковується, то ця підмножина має мінімальний елемент *a*. Цей елемент не може бути мінімальним для всієї множини *A*, тому що тоді, за умов, на цьому елементі *f(a)* і *g(a)* збігалися б.

Отже, існує $b \prec a$, такий, що $f(b) = g(b)$. За умовами теореми рекурентні співвідношення однозначно визначають значення наших функцій для $x = a$ за їх значеннями для всіх $b<a$, отже $f(a)= g(a)$. Одержана суперечливість доводить єдність *f(x)*.

Доведемо тепер існування функції.

Припустимо, що на мінімальному елементі множини *A* значення шуканої функції уже задано. Позначимо через *P* таку властивість елемента $a \in A$ і а має властивість *P*, якщо на множині *C* всіх таких *x*, що $x \leq a$, може бути визначення функції $f_a(x)$, яке задовольняє рекурентні співвідношення і набуває заданого значення на min-му елементі множени *A*.

За припущенням *P* істинне на min-му елементі $a \in A$. Далі, якщо елементи *b* і *c* задовольняють властивість *P* і $b<a$, то згідно з даною вище єдністю шуканої функції, не на множині *A*, а на множині В = { xЄA x≤b} $B = \{x \in A | x \leq b\}$маємо $f_{b\,(x)=}\, f_q\,(x)$. Звідси ⇨ що коли всі елементи b строго менші елемента *a*, мають властивість *P*, то і сам елемент *a* має цю властивість.

Одержуємо функцію $f_a(x)$, яке задовольняє всі вимоги, якщо для всякого $b<a$ покласти $f_a(b) = f_b(b)$, а за $f_a(a)$ взяти те значення, яке однозначно визначається за рекурентними співвідношеннями.

На основі методу трансформації функції індукції можна говорити, що для всіх *a* із *A* істинне *P(a).* Покладаючи тепер $a \in A$ $f_a(a) = f(a)$ визначаємо функцію *f(x)*, яке має необхідні властивості.

Зауваження:

Метод трансфінітної індукції, як і метод побудови за індуктивним можна застосовувати і до частково впорядкованих множин.

Сформулюємо ці факти.

Теорема 1.1.14. (умова індуктивності).

Всі елементи частково-впорядкованої множини *A* мають властивість *P,* якщо:

1. всі мінімальні елементи з множини *A* задовольняють властивість *P* (в тому випадку коли вони існують)
2. з того, що *P(x)* істинне для всіх *x<a*, де *x*, $a \in A$, випливає істинність *P(a)*.

Теорема 1.1.15. (побудова за індукцією).Існує єдина функція *f(x)*, яка визначена на всій множині *A*, задовольняє вказані рекурентні співвідношення і набуває доведених заданих значень на всіх мінімальних елементах множини *A*.

Приклади відображень

5.1. *Потужність множини*

Нехай *A* і *B* – деякі множини.

Означення 1.1.7.

Множини *A* і *B* називаються рівнопотужними, якщо між Їх елементами взаємо означена відповідь.

Відношення рівності є відношенням еквівалентності, і тому рівно потужні величини часто називаються еквівалентними.

Означення 1.1.8.

Потужністю, або кардинальним числом множини *A* називають клас еквівалентності, якому належить множина *A* ,за відношенням рівно потужності.

Якщо *A* і *B* – скінченні множини, то їх рівнопотужність означає, що вони мають одне й те ж саме число елементів.

При цьому пустій множині функції відповідає число нуль, а скінченній множині, яке складається з^{n} елементів число *n*.

Право на таке співвідношення дає така теорема:

<u>*Теорема 1.1.16.*</u>Всяка складна множина не може бути еквівалентна жодній своїй власній над множині.

<u>Доведення:</u>

Припустимо що *B* є деяка скінченна множина надмножина скінченої множини *A*, яка еквівалентна *A*, тобто існує взаємооднозначна відповідь $f: A \to B$

Нехай $a_1, \ldots a_n$ – елементи множини *A*, а $f(a_1), f(a_2), \ldots f(a_n)$ - їх образи.

Серед образів повинні бути всі елементи множини і хоча б один елемент множини який позначимо $a_{n+1.}$

Для $n=1$ суперечність очевидна оскільки єдиний елемент a_1 не може мати два різних образи – a_1, a_2.

Нехай неможливість існування відображається *f* із вказаними властивостями доведена для множини *A* з *n-1* елементами.

Можна вважати що $f(a_n)=a_{n+1}$, і значення а має інший прообраз a', а всі інші не будуть відрізнятися від *f*.

Підмножина $A'=\{a_1, a_2 \ldots a_{n+1}\}$ відображається функцією *f* на деяку множину $f(A') = B$ за допомогою відкидання елемента $f(a_n)=a_{n+1.}$

Множина $f(A')$ містить елементи $a_1, \ldots a_n$ і значить є власною надмножиною множини *A* і водночас її взаємно однозначним образом.

Але за припущенням індукції це неможливо.

З цієї теореми ⇨ що скінченна множина ніколи не може бути еквівалентна двом різним відрізкам натурального ряду, тому що в противному випадку ці відрізки були б рівнопотужними, при цьому один з них мав би містити другий. В тому числі всяка скінченна множина *A* еквівалентна одному і тільки одному відрізку *(0,1,…., n)* натурального ряду. Однозначно визначене число *m* – число елементів множини *A* може служити мірою потужності цієї множини.

*Теорема 1.1.17.*Якщо $A_1, A_2 ... A_n$ - спільні множини, то

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = |A_1| \; |A_n| .... |A_n|$$

Доведення :

Спочатку покажемо, що $|A_1 \times A_2| = |A_1| \; |A_2|$.

Нехай $A_1 = \{a_{11}, a_{12,} ..., a_{1n}\}$, $A_2 = \{a_{21,} a_{22,..}, a_{2k} \;\}$

$B(a_{1i}) = \{(a_{1i}, \; a_{2j}) \;\}$, де a_{1i}- деякий фіксований елемент множини A_1

Тоді $|A_2| = |B(a_{1i})|$, оскільки ці множини еквівалентні елементу $(a_{1i}, \; a_{2j})$ відповідає елемент a_{2j}.

Звідси маємо: $|A_1 \times A_2| = i^{'} B(a_{12})| + ... + |B(a_{12}) = |A_1||A_2|$, тому що множини $B(a_{1j})$ *і* $B(a_{1j})$ попарно не перетинаються при $i \neq j$.

Звертаючи увагу на те, що множини $A_1 \times (A_2 \times ... \times A_n)$ і $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$

еквівалентні (елементу $[a_1, (a_2, ..., a_n)]$ відповідний елемент $(a_1, a_2, ... a_n)$), можемо записати:

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = |A_1| \; |A_n| ... |A_n| = |A_1||A_2| \quad (|A_3 \times ... \times A_n|) = ... = |A_1||A_2| ... |A_n|$$

Означення:

Множина, еквівалентна множині натуральних чисел, називається зліченною множиною.

З означення ⇨ твердження.

Підтвердження 1.1.1.

Всяка нескінченна множина зліченної множини сама зліченна.

Дійсний перерахунок елементів підмножини B зліченної множини A можна виконати в порядку їх слідування в множині A.

У випадку нескінченних множин аналогічна теорема 1.1.16. не має місця, як показує така теорема.

<u>*Теорема1.1.18.*</u> об'єднання скінченої, або зліченної множини зліченних множин знову є множиною зліченною.

<u>Доведення:</u>

Розглянемо спочатку випадок скінченого числа зліченних множин. Нехай $A_1,...,A_k$ - зліченні множини і $a_{ij} \in A_i$ - їх елементи. Розглянемо п-сть:

$$a_{11},..,a_{k1},..,a_{12},..,a_{k2},..,a_{in},..,a_{kn},..$$

Таку п-сть можна перерахувати, і якщо деякий елемент при переліку вже зустрічався раніше і одержав номер, то далі він пропускатиметься. Отже множина $A = \underset{i=1}{\overset{K}{\upsilon}} A_i$ зліченна.

Нехай маємо зліченну множину зліченних множин $\boldsymbol{A_1, A_2 ... A_n ..}$, де $A_i = \{a_{s1}, a_{i2}...\}$. Існує лише скінченне число елементів a_{ik}, для яких $i+k=2$, аналогічно існує лише скінченне число елементів a_{ik}, для яких $i+k=3,$ і т. д.

Пронумеруємо спочатку всі елементи, для яких $i+k=2$ (наприклад, за зростанням значення і), а потім (за допомогою інших чисел)- елементи для яких $i+k=3,$ і т. д.

При цьому кожен елемент a_{ik} одержить деякий номер, і різні елементи будуть мати різні номери. Звідси ⇨теорема.

<u>Наслідок1.1.1.</u>

Множення Z всіх цілих чисел зліченності.

Дійсно NWN', де $N' = \{-1,-2,...,-n,...\}$

<u>Наслідок 1.1.2.</u>

Множення Q всіх раціональних чисел зліченності.

Множення раціональних чисел – це об'єднання зліченної сукупності зліченних множин

$Q = ZVR_2VR_3V...VIR_nV...,$ де

$IR_n = \left\{ \frac{m}{n} \; | m \in Z, n = 2,3... \right\}.$

<u>Наслідок 1.1.3.</u>

Декарт. Доб. A×B зліченних множин є множина зліченна. Дійсно, якщо $A_1 = \{(a_1,..,a_n,..\}$ і $B = \{b_1,..,b_n,...\}$, то множину всіх елементів множини $A \times B$ можна представити як об'єднання зліченної сукупності зліченних множин що мають вигляд:

$A_1 = \{(a_1,b_1),(a_1,b_2),..,(a_1,b_n),..\}, A_2 = \{(a_2,b_1),(a_2,b_2),..,(a_2,b_n),..\},$
$A_n = \{(a_n,b_1),(a_n,b_2),..,(a_n,b_n),..\}$

Згідно теореми 1.1.18. робимо <u>висновок</u> , що множина $A \times B$ зліченна.

Наслідок 1.1.1.

Декарт. доб . $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$, зліченних множин $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ є множина зліченна υ_n .Далі будемо мати справу, або зі скінченними, або нескінченними зліченними множинами. Але зауважимо, що, існують множини, елементи яких перерахувати неможливо. Такі множини називаються <u>незліченними</u>. Існування таких множин показує наступна теорема.

<u>Теорема Кантора</u>

<u>Теорема.</u>

Множення всіх дійсних чисел, з інтервалу *(0,1)* незліченна.

<u>Доведення:</u>

теорема базується на діагональному методі Кантора. З курсу шкільної математики відомо, що кожному дійсному числу з інтервалу (0,1) можемо одночасно поставити у відповідність правильний нескінченний десятковий дріб. $0,a_1a_2...a_n$ який має нескінченно багато відмінних від *0* цифр.

(Якщо число нескінчений десятковий дріб, наприклад *0,243* то йому ставимо у відповідність нескінченний десятковий дріб виду *0,24299…99…*).

Припустимо що теоретично хибне і множення дійсних чисел з інтервалу *(0,1)* зліченне тоді для цієї множини повинен бути перелік:

$x_1 = 0, a_{11}a_{12}...a_{1n}....,$

$x_2 = 0, a_{21}a_{22}...a_{2n}....,$

$x_n = 0, a_{n1}a_{n2}...a_{nn}....,$

Прямуючи діагоналлю (тобто елементами $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}....,)$ складаємо новий дріб $0, a_{11}', a_{22}', ..., a_{nn}'....,$

Побудований дріб не входить до розглянутого переліку, оскільки відрізняється від всякого елемента x_i.

.

Отже переліку для всіх чисел з інтервалу *(0,1)* не існує, і припущення про зліченність цієї множини хибне.

Наслідок 1.1.5.

Якщо а незліченна множина $B \subset A$= деяка зліченна підмножина множини *A*, то множина *C=A\B* незліченна.

Наслідок 1.1.6.

Множення IR всіх ірраціональних чисел незліченне.

<u>Означення:</u>

Множення, еквівалентна множині дійсних чисел з інтервалу *(0,1)* називається <u>множиною потужності континецизму.</u>

<u>Теорема про Булеан</u>

Булеан *B(U)* деякої зліченної множини *U* – незліченна множина. Не обмежуючи загальності , можна взяти в якості множини *U* множину N.Поставимо у відповідність кожній підмножині $N_j \subset N$ ланцюжок, який складається з нулів і одиниць таким чином: Елемент ,

$$a_{ij}\begin{cases} = N, \text{ÿêùî ñòî¿òüíà ³– ì³ñö³ } N_j \\ =1 \;, \text{ÿêùî } a_{ij} \in N_j \\ =0, \text{ ÿêùî } a_{ij} \notin \mid N \end{cases}$$

Така відповідність взаємно однозначна.

Використовують діалоговий метод Кантора, побудовані новими ланцюгами.

$a_{11}', a_{22}', ..., a_{nn}' ....,$

де $a_{ii}' = \begin{cases} 1, \; \textit{якщо} \quad a_{ii} = 0 \\ 0, \; \textit{якщо} \quad a_{ss} = 0 \end{cases}$

Такий ланцюг не збігається ні з якими ланцюгами для N_j і відповідає деякій множині $N'CIN$

Яка не збігається ні з однією

$N_j \quad (j = 1,..,n)$.

Отже елементи *B(U)* неможливо перерахувати

<u>**Аксіоматика Цермело-Френкеля через місток**</u>

Саму матрицю А задають за допомогою таблиці елементів-образів з множини *P*, які відповідають відображенню *A*.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}... & a_{1g} \\ a_{21} & a_{22}... & a_{2g} \\ a_{p1} & a_{p2}... & a_{pg} \end{vmatrix}$$

Кажеться, що матриця складається з *p* рядків і g стовпців і має розмірність $p \times g$.

Якщо $p = g$ то матриця *A* називається <u>квадратною.</u>

Якщо елементи квадратної матриці такі, що $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$ і $a_{ij} \neq 0$ при $i = j$ то матриця називається <u>діагональною.</u>

Діагональна матриця називається <u>одиничною,</u> якщо $a_{ii} = 1$

Матриця являє собою один з зручних способів задання бінарних відношень на складних множинах.

Нехай R бінарне відношення задане на скінченних множинах $A = \{a_1,...,a_p\}$ і $B = \{b_1,...,b_g\}$

Розглянемо матрицю $A(R): N_P \times N_g \Rightarrow \{0,1\}$, яка зв'язана з відношенням R (за допомогою відображення A) таким чином

$$a'_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ÿêùî} \quad (a_i, b_j) \in R \\ 0, & \text{ÿêùî} \quad (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Наприклад, якщо $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$,

$R = \{(a_1, b_2), (a_{1,} b_3), (a_2, b_1), (a_3, b_1), (a_4, b_2)\}$, $\text{òî} \quad A(R) \quad \text{òàêå}$:

$$A(R) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

В окремому випадку, коли R бінарне відношення, задана скінченна множина A, то:

А) якщо R =*i*-відношення тотожності на A, то

$$A(i) = \begin{vmatrix} 1 & 0... & 0 & 0 \\ 0 & 1... & 0 & 0 \\ 0 & 0... & 1 & 0 \\ 0 & 0... & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ - є одинична діагональна матриця (звідси і назва відношення)

Звідси легко знайти рефлексорне замикання деякого заданого відношення R на множину A.Для цього в матриці $A(R)$ треба скрізь поставити на діагоналі *1* замість *0*.

Б) якщо R симетричне відношення, то матриця $A(R)$ буде симетричною. Дійсно оскільки R - симетричне ,то: якщо $(a_i, b_j) \in R(a_{ij} = 1)$,то $(b_{j,} a_i) \in R(a_{ij} = 1)$.

Звідси легко побудувати матрицю симетричного замикання $A(R_s)$, при умові, що $A(R)$ є матриця деякого відношення R .

Для цього треба в $A(R)$ замінити 0 на 1 на відповідних місцях з урахуванням симетрії.

Наприклад: якщо $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ $R=\{(a_1,a_3),(a_1,a_4),(a_2,a_2),(a_2,a_4),(a_3,a_4)\}$ і

$$A(R)=\begin{vmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{vmatrix},\quad \text{то } A(R_s)=\begin{vmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&1\\1&0&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}$$

Більше того, якщо відношення R має k елементів серед яких $r(r\prec|A|)$ діагональних, то R_s має

$2\ (k-r)+r=2k-r$ елементів.

Отже коли $A(R_s)$ має непарне число елементів які =1, то R_s повинно включати хоча б одну діагональну пару.

Додаток. Аксіоматика Цермело-Френкеля.

Наведемо для повноти повний перелік аксіом теорії множин, який має назву аксіоматика Цермело-Френкеля.

1. Аксіома об'ємності: Дві множини рівні тільки тоді, коли вони складаються з одних і тих же елементів.
2. Аксіома згортки : Будь-яка властивість *P(x)* визначає деяку множину *A* за допоміжної умови елементами множини *A* є ті і тільки ті предмети *a*, які мають властивість *P*.
3. Аксіома пари : Якщо a і b - різні предмети, то існує множина $\{a,b\}$, які склалися точно з предметів a і b.
4. Аксіома об'єднання Для доведення множини *A* існує множина *B*, яка склалася точно з усіх елементів, що входять до елементів множини *A*.

5. <u>Аксіома нескінченності</u>: Існує хоча б одна нескінченна множина – множина натуральних чисел N.

6. <u>Аксіома булеана:</u> Для будь-якої множини *A* існує множина *B(A)* всіх підмножин множини *A*.

7. <u>Аксіома вибору</u>: Якщо дана множина *A*, то існує функція f, яка ставиться у відповідність кожній непустій підмножині *B* з множини *A* один певний елемент f *(B)* з множини *B*.

8. <u>Аксіома підстановки</u>: Для всякої множини *A* і однозначної функції f, визначеної на множині *A*, існує множина, яка склалася точно з елементів f *(x)*, для $x \in A$.

Дана система аксіом є недостатньо визначеною.

Це пов'язано з питанням висловлювання, яке використовується в аксіомі згортки.

Мова висловлювань повністю описується точніше, інакше це призведе до суперечностей, які відомі як **парадокси теорії множин типу**:

- нехай *A* множина всіх множин, що не є елементами самих себе, тоді кожне з двох можливих висловлювань є суперечливим. *A* є елементом *A* і *A* не є елементом A''
- (парадокс Рассела) і т. д.

<u>**Переріз відношення**</u>

Нехай задане відношення $A \subset X \times Y$. Нехай елемент $x_i \in x$.

Перерізом відношення *А* за елементом x_i назвемо множення елементів *у* з *У*, для яких пара $(x_1, y) \in A$.

$A(x_i) = \{y \in Y | (x_i y) \in A\}$

Множення всіх перерізів відношення *А* повністю визначає відношення *А*.

<u>Приклад:</u> $X = \{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5\}$

<u>Відношення:</u>

$A = \{(x_1, y_1), (x_1, y_3), (x_2, y_1), (x_2, y_3), (x_2, y_4), (x_3, y_1), (x_3, y_2), (x_3, y_4), (x_4, y_3), (x_5, y_2), (x_5, y_4)\}$

<u>Наприклад:</u> $A(x_1) = \{y_1, y_3\}$ випишемо перерізи за всіма елементами множини х у вигляді таблиці:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\{y_1, y_3\}$	$\{y_1, y_3, y_4\}$	$\{y_1, y_2, y_4\}$	$\{y_3\}$	$\{y_2, y_4\}$

<u>Подання бінарних відношень за допомогою матриці та границі.</u>

<u>Матричний спосіб</u> ґрунтується на поданні відношення $A \subset X \times Y$ відповідного йому прямокутною таблицею (матрицею), що складається з нулів та одиниць, де стовпці-перші координати, а рядки-другі , причому на перетині *і*-го рядка і *і*-го стовпця буде *1*, якщо виконується співвідношення $x_i A_{yi}$, або 0 –якщо воно не виконується.

<u>Наприклад</u>: для попереднього прикладу матриця відношення *А* має такий вигляд:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_1	1	1	1	0	0
y_2	0	0	1	0	1

y_3	1	1	0	1	0
y_4	0	1	1	0	1

Означення:

Матриця *повного відношення* (це відношення ще називають універсальним, яке справджується для будь-якої пари елементів. Наприклад, відношення «вчитися в одній групі І » у множині x , де x множина студентів групи)- це квадратна матриця, що складається лише з одиниць.

Матриця *тотожного відношення* – це квадратна матриця, яка складається з нулів та одиниць по головній діагоналі.

Матриця *порожнього відношення* (це відношення, якому не задовільне жодне значення з перелічених елементів Х, наприклад *А* – відношення «бути братом» у множині *Х*, де *Х*- «множина жінок») – це квадратна матриця, що складається лише з нулів.

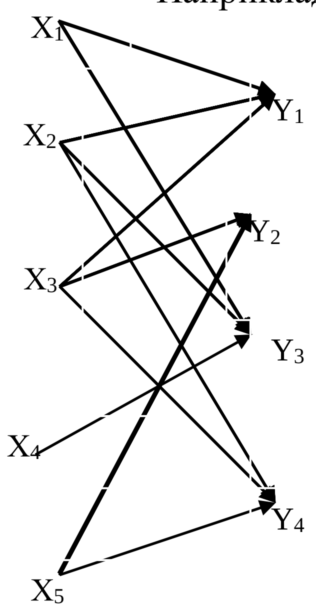
ІІ спосіб:

Зобразимо відношення за допомогою орієнтованого графіка.

Його вершини відповідають елементам множин *X* та Y, а друга спрямована від вершини x_i до y_j, означає, що співвідношення $x_i A_{yj}$ виконується.

Наприклад:

Графік відношення має такий вигляд:

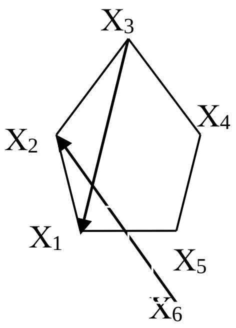


Наприклад:

Бінарне відношення

$$A = \{(x_1, x_2), (x_1, x_5), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_6, x_2)\} \ ,$$

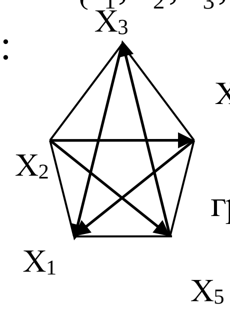
подається таким



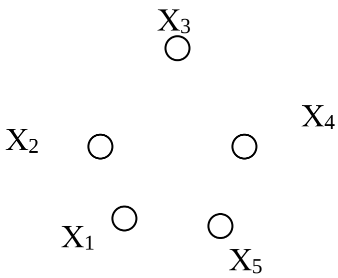
Наприклад: графік повного відношення

$A = X * X, \ddot{a}\mathring{a}\ X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

задається так:



графіком:



Графік порожнього відношення

Твердження:

Матриця композиції відношень $C=B\times A$ утворюється як добуток матриці відношень B й A з подальшого заміною відмінних від нуля елементів одиницями.

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\},$

$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$

$Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$

Наприклад для композиції відношень *A* та *B*

$$A=\{(x_1,y_1),(x_1,y_3),(x_2,y_1),(x_2,y_3),(x_2,y_4),(x_3,y_1),(x_3,y_2),(x_3,y_4),(x_4,y_3),(x_5,y_2),(x_5,y_4)\}$$

$B=\{(y_1,z_2),(y_2,z_1),(y_2,z_2),(y_3,z_3),(y_4,z_3)\}$, матриця композиції утворюється так:

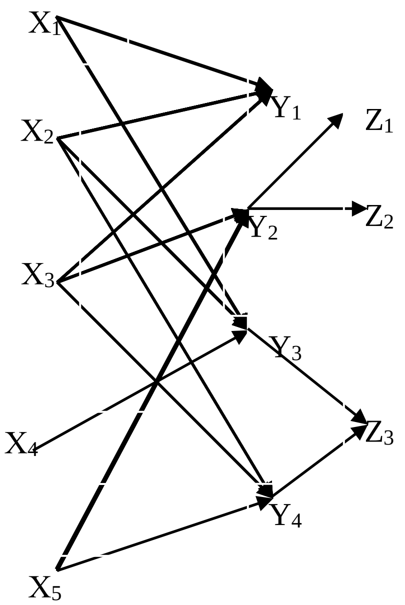
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Нехай $A \subset X \times Y$, $B \subset Y \times Z$. Щоб побудувати графік $C=B\times A$, потрібно до графіка відношення *A* добудувати графік відношення *B*.

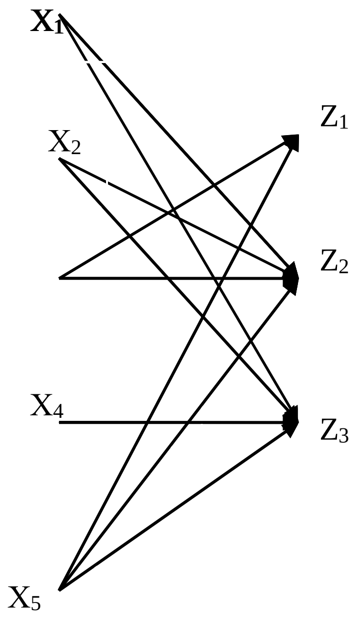
Графічні композиції відношень одержимо, якщо вилучимо вершини, які відповідають елементам множини Y.

При вилученні вершини y_i кожний шлях, що проходить через неї від вершини множини *X* до вершин множини Z, замінюється однією дугою з ти самим напрямком.

Побудова графіка композиції $C=B\times A$



Вилучаємо всі y_i



Наприклад:

побудуємо графік композиції для відношення.

$A=\{(x_1,x_1),(x_1,x_5),(x_2,x_2),(x_2,x_4),(x_2,x_5),(x_5,x_1),(x_5,x_4)\}$

відношення $B=\{(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_2,x_4),(x_4,x_3),(x_4,x_5),(x_5,x_2)\}$

Знаходимо матрицю композиції відношень *A* та *B*.

A=

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	0	0	0	1
x_2	0	1	0	0	0
x_3	0	0	0	0	0
x_4	0	1	0	0	1
x_5	1	1	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	0	0	0	0
x_2	1	0	0	0	1
x_3	0	1	0	1	0
x_4	0	1	0	0	0

x_5	0	0	0	1	0

B=

$A \times B$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	0	0	0	1
x_2	0	1	0	0	0
x_3	0	0	0	0	0
x_4	0	1	0	0	1
x_5	1	1	0	0	0

Література

основна

1. Капітонова Ю.В. та ін. Основи дискретної математики, Київ, Наукова думка, 2002.
2. Заїкіна Г.М., Коло колов А.А., Льованова Т.В. Методи розв’язку і аналізу задач дискретної оптимізації, Омськ: ОМГУ, 1992.
3. Дроздов Н.Д. Алгоритмы дискретного программирования: Учебное пособие, Тверь: Твер. Гос. Ун-т, 2002.

ЗМІСТ

Копча-Горячкіна Галина Ернестівна – викладач кафедри інформаціійних управляючих систем та технологій факультету інформатики Закарпатського державного університету

СУЧАСНІ МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Навчально-методичний посібник для студентів факультету інформатики напряму „Комп’ютерні науки” зі спеціальності „Інформаційні управляючі системи та технології” Закарпатського державного університету

Відповідальний за випуск: **Василенко Ю.А.** – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інформаційних управляючих систем та технологій.