МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск №2 (29)

Ужгород 2016

УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. / Редкол.: В. В. Маринець (гол. ред.) та інші. – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», випуск №2 (29). – 131 с.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Рекомендовано до друку Вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет», протокол № 14 від 13.12.2016 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.

Засновник і видавець – Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет».

Виходить два рази на рік.

Збірник наукових праць видається з 1994 року.

Адреса редакційної колегії: Україна, 88020 Ужгород, вул. Університетська, 14. математичний факультет УжНУ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua.

ЗМІСТ

УДК 519.21

О. О. Синявська (Ужгородський нац. ун-т)

ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРА КОВАРІАЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ НЕГАУССОВОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ У МОДЕЛІ З ПОХИБКОЮ

An interval estimation for unknown parameter of covariance function of one non-gaussian stochastic processes in model with measurement errors was found in this article.

У цій статті для невідомого параметра коваріаційної функції одного негауссового випадкового процесу знайдено інтервальну оцінку у моделі з похибкою у вимірюваннях.

1. Вступ. Задача оцінювання параметрів коваріаційних функцій випадкових процесів та полів виникає у багатьох сучасних моделях гідрології, гідромеханіки, астрономії, радіоелектроніки, фінансової математики та інших галузях науки і техніки. В останні десятиліття поряд з класичними методами оцінювання невідомих параметрів в стасистиці випадкових процесів застосовують метод бакстерівських сум. На відміну від інших методів, статистики, побудовані за допомогою методу бакстерівських сум, дозволяють побудувати конзистентні оцінки та неасимптотичні інтервали надійності для певного класу випадкових процесів. Наприклад, цій тематиці присвячені роботи Р. Є. Майбороди [1], Ю. В. Козаченка та О. О. Курченка [2], О. О. Курченка [3], Ж.- К. Бретона, І. Нурдена та Дж. Пеккаті [4].

Останнім часом було опубліковано ряд фундаментальних робіт, присвячених вивченню моделей спостережень з похибками в регресорі. Так, у книгах Г. Шнеєвайса та Г.-Й. Міттага [5] і В. А. Фуллер [6] вивчаються нелінійні моделі — як скалярні, так і векторні; підручник Ч. Ченга та Дж. Ван Несса [7] досліджує лінійні й поліноміальні моделі. Монографія С.В. Масюка, О.Г. Кукуша та інших [8] присвячена нелінійним моделям регресії з похибками вимірювання та оцінюванню параметрів моделей, а також задачам оцінювання ризиків у моделях з похибками в дозах опромінення.

Ю. В. Козаченко та О. О. Курченко [9] у 2011 р. отримали теореми бакстерівського типу для одного класу випадкових процесів без припущення гауссовості.

2. Постановка задачі оцінювання.

Нехай (Ω, F, P) — ймовірнісний простір.

Означення 1. *[9] Випадковий вектор $(\xi, \eta) \in L_4(\Omega) \times L_4(\Omega)$ має властивість K, якщо*

1) $E\xi = E\eta = 0$,

2) $E(\xi \pm \eta)^4 \le 3\left(E\left(\xi \pm \eta\right)^2\right)^2$.

Клас усіх двовимірних векторів з властивістю K позначимо K. *Підклас K_1 класу* K *визначимо як набір з усіх векторів класу* K, *для яких* $E(\xi \pm \eta)^4 = 3\left(E\left(\xi \pm \eta\right)^2\right)^2$.

Наприклад, для незалежних рівномірно розподілених на відрізку $[-a, a]$, $a > 0$, випадкових величин ξ_1, ξ_2 випадковий вектор (ξ_1, ξ_2) належить класу K [9].

Лема 1. *[9] Нехай ξ_1, ξ_2 — незалежні випадкові величини з нульовим середнім та скінченими моментами 4-го порядку такі, що $E(\xi_i)^4 = 3\left(E\xi_i^2\right)^2$, $i = 1,2$. Тоді випадковий вектор (ξ_1, ξ_2) належить класу K_1.*

Лема 2. *[9] Нехай $\xi = (\xi_1, \xi_2), \eta = (\eta_1, \eta_2)$ — незалежні випадкові вектори класу K_1. Тоді випадковий вектор $\xi + \eta$ також належить класу K_1.*

Означення 2. *[9] Випадковий процес $\{Y(t), t \in [0,1]\}$ з нульовим середнім називається процесом з приростами класу K (відповідно K_1), якщо для довільних $0 \le s < t < u < v < 1$ випадкові вектори (ξ, η), де $\xi = Y(t) - Y(s), \eta = Y(v) - Y(u)$, мають властивість K (відповідно K_1).*

Наприклад, гауссовий випадковий процес з нульовим середнім є прикладом випадкового процесу з приростами класу K_1.

Розглянемо випадковий процес $\{B(t), t \in [0,1]\}$ з нульовим середнім значенням, коваріаційною функцією:

$$EB(t)B(s) = \frac{1}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right), \, t, s \in [0,1], \, H \in (0,1), \tag{1}$$

і приростами класу K_1.

Нехай ми спостерігаємо значення випадкових величин $Y(0), Y\left(\frac{1}{a_n}\right), \ldots, X(1)$, які відрізняються від справжніх значень випадкового процесу $\{B(t), t \in [0,1]\}$ з приростами класу K_1, в точках

$$\left\{\frac{k}{a_n} \middle| 0 \le k \le a_n - 1, \, n \ge 1\right\},$$

де $(a_n) \in \mathbb{N}, a_n \to \infty, n \to \infty$, на величину похибки вимірювання $\{\delta_{k,n} | 0 \le k \le a_n\}$, причому

$$Y\left(\frac{k}{a_n}\right) = B\left(\frac{k}{a_n}\right) + \delta_{k,n}, \tag{2}$$

де $\delta_{k,n}$ — незалежні випадкові величини з нульовим середнім та скінченими моментами 4–го порядку, для яких $E\delta_{k,n}^2 = \sigma^2$, σ^2 — відоме, та $E\delta_{k,n}^4 = 3\left(E\delta_{k,n}^2\right)^2$, $0 \le k \le a_n$.

Задача оцінювання формулюється так. За спостереженнями в моделі (2) за випадковим процесом $\{Y\left(\frac{k}{a_n}\right) | 0 \le k \le a_n\}$ потрібно побудувати інтервальну оцінку для невідомого параметра $H, H \le H^* < 1$ з відомим H^*, коваріаційної функції (1) випадкового процесу $\{B(t), t \in [0,1]\}$ з приростами класу K_1. Припустимо також, що для довільного $\alpha > 0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-\alpha}$ — збіжний.

Дробовий броунівський рух є прикладом випадкового процесу з коваріаційною функцією (1) і приростами класу K_1.

У роботі [10] наведений приклад негауссового випадкового процесу з коваріаційною функцією (1) і приростами класу K_1.

3. Основний результат.

Для зручності введемо наступні позначення:

$$\Delta B_{k,n} = B\left(\frac{k+1}{a_n}\right) - B\left(\frac{k}{a_n}\right), \, \Delta\delta_{k,n} = \delta_{k+1,n} - \delta_{k,n},$$

$$\Delta Y_{k,n} = Y\left(\frac{k+1}{a_n}\right) - Y\left(\frac{k}{a_n}\right), 0 \leq k \leq a_n - 1.$$

Пропонована оцінка параметра H коваріаційної функції (1) для розглядуваної моделі з похибкою грунтується на статистиці:

$$S_n = \sum_{k=0}^{a_n-1} (\Delta Y_{k,n})^2 - 2a_n\sigma^2,\ \hat{S}_n = a_n^{2H-1} S_n, n \geq 1.$$

Для оцінки дисперсії бакстерівських сум $\hat{S}_n$ ми застосуємо таку лему.

Лема 3. *[9] Нехай випадковий вектор* (ξ, η) *належить класу* K. *Тоді виконується наступна нерівність:*

$$E\left(\xi^2\eta^2\right) \leq 2\left(E\xi\eta\right)^2 + E\xi^2 E\eta^2 + \frac{1}{2}\left(\left(E\xi^2\right)^2 - \frac{1}{3}E\xi^4\right) + \frac{1}{2}\left(\left(E\eta^2\right)^2 - \frac{1}{3}E\eta^4\right).$$

Із цієї леми випливає, що для випадкового процесу $\{B(t), t \in [0,1]\}$ з приростами порядку класу K_1 випадковий вектор (ξ, η) із означення 2 задовольняє нерівність:

$$E\left(\xi^2\eta^2\right) \leq 2\left(E(\xi\eta)\right)^2 + E\xi^2 E\eta^2. \tag{3}$$

Лема 4. *Нехай* $H^* \in (0,1)$. *Тоді*

$$\sup_{H \in (0, H^*]} Var\hat{S}_n \leq \frac{10}{a_n} + 8a_n^{2H^*-1}\sigma^2 + 8a_n^{4H^*-1}\left(2 - \frac{1}{a_n}\right)\sigma^4 +$$

$$+\begin{cases} \frac{2}{a_n}\,\zeta(4-4H^*), & H^* \in (0, \frac{3}{4}); \\ \frac{2}{a_n}(1 + \ln a_n), & H^* = \frac{3}{4}; \\ \frac{2}{a_n}\left(1 + \frac{a_n^{4H^*-3}}{4H^*-3}\right), & H^* \in \left(\frac{3}{4}, 1\right), \end{cases}$$

де $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, s > 1.$

Доведення. Знайдемо спочатку математичне сподівання випадкової величини $\hat{S}_n$:

$$E\hat{S}_n = a_n^{2H-1} ES_n = a_n^{2H-1} E\left(\sum_{k=0}^{a_n-1} (\Delta Y_{k,n})^2 - 2a_n\sigma^2\right) =$$

$$= a_n^{2H-1}\left(\sum_{k=0}^{a_n-1} E\left(Y^2\left(\frac{k+1}{a_n}\right) + Y^2\left(\frac{k}{a_n}\right) - 2Y\left(\frac{k+1}{n}\right)Y\left(\frac{k}{n}\right)\right) - 2a_n\sigma^2\right).$$

Із вигляду моделі (2) та стохастичної незалежності випадкових величин $\{B\left(\frac{k}{n}\right), \delta_{k,n} \middle| 0 \leq k \leq a_n\}$ випливає, що математичні сподівання для добутків $EB\left(\frac{k}{a_n}\right)\delta_{k,n} = 0, E\delta_{k,n}\delta_{k+1,n} = 0, 0 \leq k \leq a_n$, звідки:

$$E\hat{S}_n = a_n^{2H-1}\left(\sum_{k=0}^{a_n-1} E\left(\left(B\left(\frac{k+1}{a_n}\right) + \delta_{k+1,n}\right)^2 + \left(B\left(\frac{k}{a_n}\right) + \delta_{k,n}\right)^2 - \right.\right.$$

$$-2\left(B\left(\frac{k+1}{a_n}\right)+\delta_{k+1,n}\right)\left(B\left(\frac{k}{a_n}\right)+\delta_{k,n}\right)-2a_n\sigma^2\Bigg)=$$

$$=a_n^{2H-1}\left(\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(EB^2\left(\frac{k+1}{a_n}\right)+E\delta^2_{k+1,n}+EB^2\left(\frac{k}{a_n}\right)+E\delta^2_{k,n}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2EB\left(\frac{k+1}{a_n}\right)\left(\frac{k}{a_n}\right)\right)-2a_n\sigma^2\right).$$

Тоді з формули (1) для коваріаційної функції випадкового процесу $\{B(t), t\in[0,1]\}$ та визначення випадкової величини $\delta_{k,n}$ випливає, що:

$$E\hat{S}_n-a_n^{2H-1}\left(\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(\left|\frac{k+1}{a_n}\right|^{2H}+\sigma^2+\left|\frac{k}{a_n}\right|^{2H}+\sigma^2-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\left(\left|\frac{k+1}{a_n}\right|^{2H}+\left|\frac{k}{a_n}\right|^{2H}-\left|\frac{1}{a_n}\right|^{2H}\right)\right)-2a_n\sigma^2\right)=$$

$$=a_n^{2H-1}\left(\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(2\sigma^2+\left|\frac{1}{a_n}\right|^{2H}\right)-2a_n\sigma^2\right)=1$$

З властивостей дисперсії випадкових величин маємо:

$$Var\hat{S}_n=Var\left(a_n^{2H-1}S_n\right)=a_n^{4H-2}VarS_n,$$

$$VarS_n=E\left(S_n-ES_n\right)^2=E\left(\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(\Delta Y_{k,n}\right)^2-\sum_{k=0}^{a_n-1}E\left(\Delta Y_{k,n}\right)^2\right)^2=$$

$$=E\left(\sum_{k,j=0}^{a_n-1}\left(\left(\Delta Y_{k,n}\right)^2-E\left(\Delta Y_{k,n}\right)^2\right)\left(\left(\Delta Y_{j,n}\right)^2-E\left(\Delta Y_{j,n}\right)^2\right)\right)=$$

$$=\sum_{k,j=0}^{a_n-1}\left(E\left(\Delta Y_{k,n}\right)^2\left(\Delta Y_{j,n}\right)^2-E\left(\Delta Y_{k,n}\right)^2E\left(\Delta Y_{j,n}\right)^2\right).$$

Внаслідок нерівності (3) для приростів негауссового випадкового процесу $\{B(t), t\in[0,1]\}$ випливає, що

$$VarS_n\le 2\sum_{k,j=0}^{a_n-1}\left(E\Delta Y_{k,n}\Delta Y_{j,n}\right)^2=2\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(E\left(\Delta Y_{k,n}\right)^2\right)^2+$$

$$+4\sum_{\substack{k,j=0,\\ j<k}}^{a_n-1}\left(E\Delta Y_{k,n}\Delta Y_{j,n}\right)^2. \tag{4}$$

Тоді з визначення випадкового процесу $\{B(t), t\in[0,1]\}$ та незалежності випадкових величин $\left\{B\left(\frac{k}{n}\right), \delta_{k,n}\middle|0\le k\le a_n\right\}$, одержимо:

$$E\left(\Delta Y_{k,n}\right)^2=E\left(Y\left(\frac{k+1}{a_n}\right)-\left(\frac{k}{a_n}\right)\right)^2=$$

$$= E\left(Y^2\left(\frac{k+1}{a_n}\right) + Y^2\left(\frac{k}{a_n}\right) - 2Y\left(\frac{k+1}{a_n}\right)Y\left(\frac{k}{a_n}\right)\right) =$$

$$= EB^2\left(\frac{k+1}{a_n}\right) + E\delta^2_{k+1,n} + EB^2\left(\frac{k}{a_n}\right) + E\delta^2_{k,n} -$$

$$-2E\left(B\left(\frac{k+1}{a_n}\right) + \delta_{k+1,n}\right)\left(B\left(\frac{k}{a_n}\right) + \delta_{k,n}\right) = a_n^{-2H} + 2\sigma^2. \qquad (5)$$

Оскільки, випадкові величини $\Delta B_{k,n}$ та $\Delta\delta_{k,n}, 0 \le k \le a_n - 1$ є незалежними, то

$$E\Delta Y_{k,n}\Delta Y_{j,n} = E\left(\Delta B_{k,n} + \Delta\delta_{k,n}\right)\left(\Delta B_{j,n} + \Delta\delta_{j,n}\right) =$$
$$= E\Delta B_{k,n}\Delta B_{j,n} + E\Delta\delta_{k,n}\Delta\delta_{j,n}, k \ne j.$$

Далі, використовуючи формулу (1), маємо:

$$E\Delta B_{k,n}\Delta B_{j,n} = E\left(B\left(\frac{k+1}{a_n}\right) - B\left(\frac{k}{a_n}\right)\right)\left(B\left(\frac{j+1}{a_n}\right) - B\left(\frac{j}{a_n}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{(k-j)+1}{a_n}\right|^{2H} - \left|\frac{k-j}{a_n}\right|^{2H} + \frac{1}{2}\left|\frac{(k-j)-1}{a_n}\right|^{2H}. \qquad (6)$$

Покладемо

$$v_l := \frac{1}{2}\left|\frac{l+1}{a_n}\right|^{2H} - \left|\frac{l}{a_n}\right|^{2H} + \frac{1}{2}\left|\frac{l-1}{a_n}\right|^{2H}, l \ge 1.$$

Звідси випливає наступне співвідношення:

$$E\Delta Y_{k,n}\Delta Y_{j,n} = \frac{1}{2}a_n^{-2H}v_{k-j} + E\Delta B_{k,n}\Delta B_{j,n}, 1 \le k, j \le a_n - 1.$$

Знайдемо середнє для добутку незалежних випадкових величин $\Delta\delta_{k,n}$ та $\Delta\delta_{j,n}$, $1 \le k, j \le a_n - 1$:

$$E\Delta\delta_{k,n}\Delta\delta_{j,n} = E\left(\delta_{k+1,n} - \delta_{k,n}\right)\left(\delta_{j+1,n} - \delta_{j,n}\right) =$$

$$= E\Big(\delta_{k+1,n}\delta_{j+1,n} - \delta_{k+1,n}\delta_{j,n} - \delta_{k,n}\delta_{j+1,n} + \delta_{k,n}\delta_{j,n}\Big) =$$

$$= \begin{cases} 2\sigma^2, & \text{якщо } k = j; \\ -\sigma^2, & \text{якщо } k = j-1; \\ 0, & \text{якщо } |j-k| > 1. \end{cases} \qquad (7)$$

Таким чином, враховуючи співвідношення (5)–(7) та нерівність $(a+b)^2 \le 2\left(a^2 + b^2\right), a, b \in \mathbb{R}$, із рівності (4) ми отримаємо, що:

$$VarS_n = 2\Bigg(\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(a_n^{-2H} + 2\sigma^2\right)^2 + 2\sum_{\substack{k,j=0,\\ j<k}}^{a_n-1}\Big(\frac{1}{2}a_n^{-2H}v_{k-j} +$$

$$+ E\Delta\delta_{k,n}\Delta\delta_{j,n}\Big)^2\Bigg) \le 2\Bigg(\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(a_n^{-4H} + 4a_n^{-2H}\sigma^2 + 4\sigma^4\right) +$$

$$+4\sum_{\substack{k,j=0,\\ j<k}}^{a_n-1}\left(\frac{1}{4}a_n^{-4H}v_{k-j}^2+\left(E\Delta\delta_{k,n}\Delta\delta_{j,n}\right)^2\right)\Bigg) = 2a_n^{1-4H}+8a_n^{1-2H}\sigma^2+8a_n\sigma^4+$$

$$+8\sum_{\substack{|k-j|=1,\\ j<k}}^{a_n-1}\left(\frac{1}{4}a_n^{-4H}v_{k-j}^2+\sigma^4\right)+8\sum_{\substack{|k-j|>1,\\ j<k}}^{a_n-1}\left(\frac{1}{4}a_n^{-4H}v_{k-j}^2\right)=$$

$$=2a_n^{1-4H}+8a_n^{1-2H}\sigma^2+8a_n\sigma^4+8(a_n-1)\sigma^4+2a_n^{-4H}\sum_{\substack{k,j=0,\\ j<k}}^{a_n-1}v_{k-j}^2.$$

Покладаючи $k-j=l, j<k$, з попередніх міркувань отримаємо:

$$VarS_n \le 2a_n^{1-4H}+8a_n^{1-2H}\sigma^2+8\left(2a_n-1\right)\sigma^4+2a_n^{-4H}\sum_{\substack{k,j=0,\\ j<k}}^{n-1}(a_n-l)v_l^2\le$$

$$\le 2a_n^{1-4H}+8a_n^{1-2H}\sigma^2+8\left(2a_n-1\right)\sigma^4+2a_n^{1-4H}\sum_{l=1}^{a_n-1}v_l^2.$$

Оскільки $v_1^2=\left(2^{2H}-2\right)^2\le 4$ при $H\in(0,1)$, то для дисперсії послідовності бакстерівських сум S_n маємо

$$VarS_n \le 2a_n^{1-4H}+8a_n^{1-2H}\sigma^2+8\left(2a_n-1\right)\sigma^4+2a_n^{1-4H}\left(4+\sum_{l=2}^{a_n-1}v_l^2\right). \quad (8)$$

Далі, так як v_l — приріст другого порядку функції $f(x)=x^{2H}$, $x\ge 1$ на відрізку $[l-1,l+1]$, то з формули для приросту n-го порядку при $n=2$ [див. [11], с. 244] випливає, що $v_l=2H(2H-1)\theta_l^{2H-2}$, де $\theta_l\in(l-1,l+1)$. Враховуючи, що

$$\sup_{H\in(0,1)}|2H(2H-1)|=2,$$

отримаємо

$$v_l^2\le\frac{4}{(l-1)^{4-4H}},\ l\ge 2.$$

Тоді з останньої нерівності та нерівності (8) випливає наступна оцінка зверху для дисперсії випадкової величини S_n:

$$VarS_n\le 10a_n^{1-4H}+8a_n^{1-2H}\sigma^2+8\left(2a_n-1\right)\sigma^4+2a_n^{1-4H}\sum_{l=2}^{a_n-1}\frac{1}{(l-1)^{8-4H}}.$$

Таким чином для випадкової величини $\hat{S}_n=a_n^{2H-1}S_n$ отримаємо

$$\sup_{H\in(0,H^*]}Var\hat{S}_n\le\frac{10}{a_n}+8a_n^{2H^*-1}\sigma^2+8a_n^{4H^*-1}\left(2-\frac{1}{a_n}\right)\sigma^4+\frac{2}{a_n}\sum_{l=2}^{a_n-1}\frac{1}{(l-1)^{4-4H^*}}. \quad (9)$$

Оскільки

$$\sum_{l=1}^{a_n} \frac{1}{l^{4-4H^*}} \le \begin{cases} \zeta(4-4H^*), & H^* \in (0, \frac{3}{4}); \\ 1 + \ln a_n, & H^* = \frac{3}{4}; \\ \frac{a_n^{4H^*-3}}{4H^*-3}, & \text{якщо } H^* \in (\frac{3}{4}, 1). \end{cases}$$

де $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, $s > 1$, то із нерівності (9) отримуємо твердження леми. Лема доведена.

3. Довірчі інтервали. Перейдемо до побудови довірчого інтервалу для параметра H, що входить показником до коваріаційної функції випадкового процесу $\{B(t), t \in [0,1]\}$ з приростами класу K_1 у моделі спостереження (2).

Теорема 1. *Нехай $H \in (0, H^*]$, де $H^* \in (0,1)$ — фіксовано. Тоді інтервал $(H_{n,l}, H_{n,r}) \cap (0,1)$ є довірчим інтервалом для параметра H з рівнем довіри $1 - p \in (0,1)$, де*

$$H_{n,l} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\ln(1-\gamma) - \ln S_n}{\ln a_n}\right), \ H_{n,r} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\ln(1+\gamma) - \ln S_n}{\ln a_n}\right),$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{\theta_n(H^*)}{p}}, \ \theta_n(H^*) = \sup_{H \in (0, H^*]} Var \hat{S}_n.$$

Доведення. Нехай $1 - p \in (0,1)$ — заданий рівень довіри та нерівність $|\hat{S}_n - 1| = |a_n^{2H-1} S_n - 1| < \gamma$, виконується з великою ймовірністю. Це означає, що нерівність

$$P\left\{|\hat{S}_n - 1| > \gamma\right\} \le p \tag{10}$$

буде виконуватись з малою ймовірністю $p \in (0,1)$.

Використовуючи наші припущення в даній моделі спостереження (2), з аналогічних міркувань, проведених у роботі [12] щодо побудови довірчого інтервалу для параметру Хюрста в моделі з похибкою в регресорі, отримаємо інтервальну оцінку для параметра H, $H \le H^* < 1$:

$$H \in \left(\frac{1}{2} + \frac{\ln(1-\gamma) - \ln S_n}{2\ln a_n}, \frac{1}{2} + \frac{\ln(1+\gamma) - \ln S_n}{2\ln a_n}\right).$$

Знайдемо оцінку для величини γ. Для цього за допомогою нерівності Чебишова із нерівності(10) отримаємо:

$$P\left\{|\hat{S}_n - 1| > \gamma\right\} \le \frac{Var\left(\hat{S}_n - 1\right)}{\gamma^2} \le p.$$

Далі, використовуючи отриману в лемі 4 оцінку для дисперсії випадкової величини $\hat{S}_n$ та останню нерівність, ми маємо

$$P\left\{|\hat{S}_n - 1| > \gamma\right\} \le \frac{\theta_n(H^*)}{\gamma^2} \le p, \quad \text{де } \theta_n(H^*) \ge \sup_{H \in (0, H^*]} Var \hat{S}_n.$$

Тому справедливою буде нерівність

$$\gamma \ge \sqrt{\frac{\theta_n(H^*)}{p}}.$$

Отже, при відповідних значеннях величин σ та H^*, а також при оптимальному числі спостережень n за допомогою останньої нерівності знайдено оцінку для величини γ. Звідси, використовуючи проведені вище міркування, отримаємо довірчий інтервал з рівнем довіри $1 - p \in (0, 1)$ для розглядуваного параметра H коваріаційної функції (1). Теорему доведено.

4. Висновок. В роботі на базі бакстерівських статистик побудовано неасимптотичні довірчі інтервали для параметра коваріаційної функції випадкового процесу класу K_1 в одній моделі спостереження із похибкою у вимірюваннях.

Список використаної літератури

1. *Майборода Р. Є.* Асимптотична нормальність бакстерівських оцінок параметрів нестаціонарних процесів // Теорія ймовірностей і математична статистика. – 1995. – Вип. № 53. – С. 97–102.
2. *Козаченко Ю. В., Курченко О. О.* Оцінювання параметрів однорідних гауссівських випадкових полів // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, №8. – С. 1082–1088.
3. *Курченко О. О.* Одна сильно конзистентна оцінка параметра Хюрста дробового броунівського руху // Теорія ймовірностей і математична статистика. – 2002. – Вип. № 67. – С. 45–54.
4. *Breton J.-C., Nourdin I., Peccati G.*, Exact confidence intervals for the Hurst parameter of a fractional Brownian motion // Electronic J. Statist. – 2009. – Вип. № 3. – С. 416–425.
5. *Schneeweiss H., Mittag H. J.* Lineare Modelle mit fehlerbehafteten Daten. – Heidelberg: Physica-Verlag, 1986.
6. *Fuller W. A.* Measurement Error Models. – New York: Yohn Wiley & Sons, 1987. – 440 p.
7. *Cheng C. L., Van Ness J. W.* Statistical Regression with Measurement Error. – London: Arnold Publishers, 1999. – 262 p.
8. *Масюк С. В., Кукуш О. Г., Шкляр С. В., Чепурний М. І., Ліхтарьов І. А.* Моделі регресії з похибками вимірювання та їх застосування до оцінювання радіаційних ризиків. – К.: ДІА, 2015. – 288 с.
9. *Kozachenko Y. V., Kurchenko O. O.* Levy-Baxter theorems for one class of non-Gaussian stochastic processes // Random Oper. Stoch. Equ. – 2011. – Vol. 4. – С. 313–326.
10. *Синявська О. О.* Бакстерівська оцінка невідомого параметра коваріаційної функції у негауссовому випадку // Теорія ймовірностей і математична статистика. – 2013. – Вип. № 88. – С. 155–164.
11. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т. 1. – М.: Наука, 1969. – 607 с.
12. *Synyavska O. O.* Interval estimation of the fractional Brownian motion parameter in a model with measurement error // Theory of Stochastic Processes. – 2016. – Vol. 21(37), no 1. – С. 155–164.

Одержано 19.09.2016