

РОЗПОДІЛИ ПЕРЕСТРИБКІВ ДЛЯ МАЙЖЕ НАПІВНЕПЕРЕРВНИХ ПРОЦЕСІВ, ЗАДАНИХ НА ЛАНЦЮГУ МАРКОВА

УДК 519.21

М. С. ГЕРИЧ

АНОТАЦІЯ. В статті вивчаються розподіли перестрибкових функціоналів для майже напівнеперервних знизу процесів заданих на ланцюгу Маркова. Для цих процесів отримані також граничні розподіли перестрибків через нескінченно віддалений та нульовий рівні в термінах твірних перетворень додатних стрибків та матриці, що визначає розподіл доповнення до максимуму.

АБСТРАКТ. In this paper we study the distributions of overshoots for the almost semi-continuous processes defined on a Markov chain. For these processes, we get the limit distributions of overshoots over the infinitely far and zero levels.

Аннотация. В статье изучаются совместные распределения момента достижения уровня, величины перескока, недоскока для определённого уровня и скачка, который покрывает уровень в случае почти полунепрерывного снизу процесса на цепи Маркова. Для этих процессов получены также предельные распределения перескоков через бесконечно удаленный и нулевой уровни.

1. ВСТУП

Опис процесів, заданих на ланцюгах Маркова (ЛМ) або керованих ланцюгами Маркова, наводиться в роботах [1]-[3], в [2] їх називають напівмарковськими, в [1], [3] – однорідними за другою компонентою. Граничні задачі для процесів Леві з неперервним розподілом стрибків на ЛМ вивчалися в [2]-[4]. Дослідженню розподілів граничних функціоналів для цих процесів присвячені роботи [5]-[6]. Для майже напівнеперервних процесів (з показником розподіленіми стрибками одного знаку) такі задачі були дослідженні в [6]. Для випадкових блукань S_n на ЛМ одержано факторизаційні зображення для подвійних перетворень значень блукання в момент перестрибу та в безпосередній момент перед перестрибом в [7].

Інколи замість перестрибкових функціоналів, тобто перестрибків або недострибків процесу через рівень x , розглядають значення процесу після перестрибу або безпосередньо перед перестрибом (як і для блукання в [7]), а стрибок що накриває рівень x є різницею цих значень процесу (блукання).

Мета роботи: отримати співвідношення для сумісних та маргінальних розподілів перестрибкових функціоналів у випадку майже напівнеперервних знизу процесів заданих на ЛМ, які детально описані в роботі [8], а також знайти граничні розподіли перестрибків через нескінченно віддалений та нульовий рівні.

Зауважимо, що скалярні значення $\xi(t)$ залежать від значення "керуючого" ЛМ $x(\cdot)$ в початковий момент 0 та змінного додатного моменту $t > 0$. Тому відповідні розподіли і усереднення (мат. сподівання) є матричними характеристиками, що надалі будуть позначатися жирним шрифтом: $\mathbf{P}\{\cdot\}$, $\mathbf{E}[\cdot]$. Наприклад: $\mathbf{P}\{\xi(t) = l\} =$

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 42C40; Secondary 60G12.

Ключові слова і фрази. майже напівнеперервний процес заданий на ланцюгу Маркова, перестрибкові функціонали, розподіли перестрибків через нескінченно віддалений та нульовий рівні.

$$\|P\{\xi(t) = l, x(t) = r | x(0) = k\}\| = \|p_{kr}(t, l)\|, \mathbf{E}[z^{\xi(t)}] = \|E[z^{\xi(t)}, x(t) = r | x(0) = k]\| = \|E_{kr}[z^{\xi(t)}]\|.$$

2. МАЙЖЕ НАПІВНЕПЕРЕРВНИЙ ЦІЛОЗНАЧНИЙ ПРОЦЕС ПУАССОНА

Розглянемо двовимірний процес Маркова:

$$\mathbf{Y}(t) = \{\xi(t), x(t)\}, \quad t \geq 0,$$

який детально описаний в роботі [8]. Тут $x(t)$ – скінченний ергодичний ЛМ з множиною станів $\mathbb{E} = \{1, \dots, m\}$ та матрицею перехідних імовірностей

$$\mathbf{P}(t) = \|P\{x(t) = r | x(0) = k\}\|_{k,r \in \mathbb{E}} = e^{\mathbf{Q}t}, \quad t > 0,$$

і твірною матрицею $\mathbf{Q} = \mathbf{N}(\mathbf{P} - \mathbf{I})$, де $\mathbf{N} = \|\delta_{kr} n_k\|_{k,r \in \mathbb{E}}$, $\{n_k > 0, k \in \mathbb{E}\}$ – параметри показниково розподілених випадкових величин $\zeta_k^{(\cdot)}$ – часів перебування $x(t)$ в стані k , $\mathbf{P} = \|p_{kr}\|_{k,r \in \mathbb{E}}$ – матриця перехідних ймовірностей вкладеного ЛМ $y_n = x(\sigma_n + 0)$, де σ_n – момент n -ої зміни станів $x(t)$, $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_m)$ – стаціонарний розподіл; $\xi(t)$ – однорідний процес з умовно незалежними приростами при фіксованих значеннях $x(t)$. (див. [5]).

Еволюція процесу $\mathbf{Y}(t)$ описується матричною генератрисою

$$\mathbf{g}_t(z) = \|E[z^{\xi(t)}, x(t) = r | x(0) = k]\| = \mathbf{E}z^{\xi(t)} = e^{t\mathbf{K}(z)}, \quad \mathbf{K}(1) = \mathbf{Q}. \quad (1)$$

де матрична кумулянта $\mathbf{K}(z)$ має вигляд

$$\mathbf{K}(z) = \sum_{x \neq 0} (z^x - 1) \mathbf{K}_0(x) + \mathbf{Q}, \quad \mathbf{K}_0(x) = \mathbf{\Lambda} \mathbf{p}(x) + \mathbf{N} \mathbf{f}(x); \quad (2)$$

тобто в термінах твірних функцій

$$\mathbf{K}(z) = \mathbf{\Lambda}(\tilde{\mathbf{p}}(z) - \mathbf{I}) + \mathbf{N}(\tilde{\mathbf{f}}(z) - \mathbf{P}) + \mathbf{Q}; \quad (3)$$

$\mathbf{\Lambda} = \|\delta_{kr} \lambda_k\|_{k,r \in \mathbb{E}}$, $\delta_{kr} = I_{\{k=r\}}$, λ_k – інтенсивності стрибків пуассонівських процесів $\{\xi_k(t)\}_{k=1}^m$ з розподілом стрибків $\mathbf{p}(x) = \|\delta_{kr} P\{\xi_k^{(1)} = x\}\|_{k,r \in \mathbb{E}}$, λ_k – параметри показниково розподілених випадкових величин ζ_k' , які визначають час між двома сусідніми стрибками процесу $\xi(t)$. При цьому розподіл стрибків $\chi_{kr}^{(\cdot)}$ на переходах ЛМ $x(t)$ та його генератриса незалежать від верхнього індекса цих стрибків:

$$\mathbf{f}(x) = \|p_{kr} P\{\chi_{kr}^{(\cdot)} = x\}\|_{k,r \in \mathbb{E}}; \quad \tilde{\mathbf{f}}(z) = \|p_{kr} E z^{\chi_{kr}^{(\cdot)}}\|.$$

$\tilde{\mathbf{f}}(z) = \mathbf{P}$, якщо $P\{\chi_{kr}^{(\cdot)} = x\} = 0$ при $x \neq 0$, тобто при відсутності стрибків $\chi_{kr}^{(\cdot)}$. Ще позначимо розподіл 1-го сумарного стрибка $\xi(t)$ на ЛМ через $\mathbf{\Pi}_0(x) = \mathbf{\Lambda} \mathbf{p}(x) + \mathbf{N} \mathbf{f}(x)$, що є дискретним аналогом стрибкової міри Леві $\Pi(dx) = \lambda dF(x)$ для числового складного пуассонівського процесу (див. (1.7) в [10]).

Означення 2.1. Введений таким чином процес $\mathbf{Y}(t)$ називається складним цілозначним(гратчастим) процесом Пуассона, заданим на скінченному ЛМ.

Означення 2.2. Складний цілозначний процес Пуассона $\mathbf{Y}(t)$, заданий на ЛМ, називається майже напівнеперервним зверху, якщо компонента $\xi(t)$ перетинає додатний рівень лише додатними геометрично розподіленими стрибками, тобто кумулянта якого має вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(z) = & \mathbf{\Lambda}_1[(\mathbf{I} - \mathbf{C})z(\mathbf{I} - \mathbf{C}z)^{-1} - \mathbf{I}] + \mathbf{\Lambda}_2 \sum_{x < 0} (z^x - 1) \mathbf{p}_2(x) + \\ & + \mathbf{N} \sum_{x < 0} (z^x - 1) \mathbf{f}(x) + \mathbf{Q}, \quad \mathbf{C} = \|\delta_{kr} c_k\|, \quad 0 < c_k < 1. \end{aligned}$$

або

$$\mathbf{K}(z) = \mathbf{\Lambda}_1[(\mathbf{I} - \mathbf{C})z(\mathbf{I} - \mathbf{C}z)^{-1} - \mathbf{I}] + \mathbf{\Lambda}_2[\tilde{\mathbf{p}}_2(z) - \mathbf{I}] + \mathbf{N}[\tilde{\mathbf{f}}(z) - \mathbf{P}] + \mathbf{Q}.$$

Означення 2.3. Складний цілозначний процес Пуассона $\mathbf{Y}(t)$, заданий на ЛМ, називається майже напівнеперервним знизу, якщо компонента $\xi(t)$ перетинає від'ємний рівень лише від'ємними геометрично розподіленими стрибками, тобто кумулянта якого має вигляд

$$\mathbf{K}(z) = \mathbf{\Lambda}_1 \sum_{x>0} (z^x - 1) \mathbf{p}_1(x) + \mathbf{\Lambda}_2[(\mathbf{I} - \mathbf{B})(z\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} - \mathbf{I}] + \mathbf{N} \sum_{x>0} (z^x - 1) \mathbf{f}(x) + \mathbf{Q}, \quad (4)$$

або

$$\mathbf{K}(z) = \mathbf{\Lambda}_1[\tilde{\mathbf{p}}_1(z) - \mathbf{I}] + \mathbf{\Lambda}_2[(\mathbf{I} - \mathbf{B})(z\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} - \mathbf{I}] + \mathbf{N}[\tilde{\mathbf{f}}(z) - \mathbf{P}] + \mathbf{Q}, \quad \mathbf{B} = \|\delta_{kr} b_k\|,$$

$0 < b_k < 1$.

Введемо позначення деяких функціоналів для $\xi(t)$: екстремуми процесу на інтервалі $[0; t]$ та їх доповнення:

$$\xi^+(t) = \sup_{0 \leq u \leq t} \xi(t), \quad \bar{\xi}(t) = \xi(t) - \xi^+(t);$$

$$\xi^-(t) = \inf_{0 \leq u \leq t} \xi(t), \quad \check{\xi}(t) = \xi(t) - \xi^-(t);$$

функціонали, пов'язані з перетином рівня $x \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$:

$$\tau^+(x) = \inf\{t > 0 : \xi(t) > x\}, \quad \gamma^+(x) = \xi(\tau^+(x)) - x,$$

$$\gamma_+(x) = x - \xi(\tau^+(x) - 0), \quad \gamma_x^+ = \gamma^+(x) + \gamma_+(x).$$

З останніх позначень випливає, що:

$$\xi(\tau^+(x) - 0) = x - \gamma_+(x); \quad \xi(\tau^+(x) + 0) = x + \gamma^+(x), \quad \gamma_x^+ = \xi(\tau^+(x) + 0) - \xi(\tau^+(x) - 0).$$

В подальших викладках для спрощення позначень інтегральних та твірних перетворень будемо користуватися відповідно показниково та геометрично розподіленими випадковими величинами $\theta_s, \tilde{\nu}_\varepsilon$:

$$P\{\theta_s > t\} = e^{-st}, \quad s > 0, \quad t \geq 0,$$

$$P\{\tilde{\nu}_\varepsilon = k\} = (1 - \varepsilon)\varepsilon^k, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Розподіли екстремумів в момент θ_s позначимо

$$\mathbf{p}_x^+(s) = \mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) = x\} = \|P\{\xi^+(\theta_s) = x, x(\theta_s) = r|x(0) = k\}\| = \|P_{kr}\{\xi^+(\theta_s) = x\}\|,$$

$$\check{\mathbf{p}}_x^+(s) = \mathbf{P}\{\check{\xi}(\theta_s) = x\}, \quad x \in \mathbb{Z}^+;$$

$$\mathbf{p}_x^-(s) = \mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) = x\}, \quad \check{\mathbf{p}}_x^-(s) = \mathbf{P}\{\bar{\xi}(\theta_s) = x\}, \quad x \in \mathbb{Z}^-;$$

$$\mathbf{p}_x(s) = \mathbf{P}\{\xi(\theta_s) = x\}, \quad x \in \mathbb{Z};$$

$$\mathbf{p}_+(s) = \mathbf{p}_0^+(s), \quad \mathbf{p}_-(s) = \mathbf{p}_0^-(s), \quad \mathbf{p}^-(s) = \check{\mathbf{p}}_0^-(s), \quad \mathbf{p}^+(s) = \check{\mathbf{p}}_0^+(s);$$

$$\mathbf{P}(s, x) = \mathbf{P}\{\xi(\theta_s) < x\}, \quad \bar{\mathbf{P}}(s, x) = \mathbf{P}_s - \mathbf{P}(s, x);$$

$$\mathbf{q}_\pm(s) = \mathbf{P}_s - \mathbf{p}_\pm(s), \quad \mathbf{q}^\pm(s) = \mathbf{P}_s - \mathbf{p}^\pm(s).$$

Їх відповідні матричні твірні функції позначимо

$$\mathbf{g}(s, z) = \mathbf{E}z^{\xi(\theta_s)} = \|E[z^{\xi(\theta_s)}, x(\theta_s) = r|x(0) = k]\| = \|E_{kr}[z^{\xi(\theta_s)}]\|,$$

$$\mathbf{g}_+(s, z) = \mathbf{E}z^{\xi^+(\theta_s)}, \quad \mathbf{g}_-(s, z) = \mathbf{E}z^{\xi^-(\theta_s)}, \quad \mathbf{g}^+(s, z) = \mathbf{E}z^{\check{\xi}(\theta_s)}, \quad \mathbf{g}^-(s, z) = \mathbf{E}z^{\bar{\xi}(\theta_s)}.$$

Для функціональних послідовностей $\{\mathcal{R}_x, x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ введемо поняття кілець, розширених кілець і відповідних півкілець та їх проєкцій. А саме, позначимо кільце твірних функцій $\tilde{\mathcal{R}}(z)$

$$\mathbb{L} : \{\tilde{\mathcal{R}}(z) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} z^x \mathcal{R}_x, \sum_{x=-\infty}^{+\infty} |\mathcal{R}_x| < \infty, |z| = 1\}$$

із операцією "множення" типу згортки та звичайною операцією додавання. А розширення кільця \mathbb{L} :

$$\mathbb{L}_{\mathbf{I}} : \{\mathbf{I} \pm \tilde{\mathcal{R}}(z) = \tilde{\mathcal{R}}_{\mathbf{I}}(z), \det \tilde{\mathcal{R}}_{\mathbf{I}}(z) \neq 0\}.$$

Аналогічно позначимо підкільця на півосях та їх розширення

$$\mathbb{L}^{\pm} : \left\{ \tilde{\mathcal{R}}_{\pm}(z) = \sum_{x=0}^{\pm\infty} z^x \mathcal{R}_x \right\}, \mathbb{L}_{\mathbf{I}}^{\pm} : \{\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{R}}_{\pm}(z), \det[\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{R}}_{\pm}(z)] \neq 0\},$$

які допускають аналітичне продовження на $|z| \geq 1$ ($|z| \leq 1$) $\tilde{\mathcal{R}}_{\pm}^{\pm 1}(z) \in \mathbb{L}_{\mathbf{I}}^{\pm}$. Визначимо також операції проєктування

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathcal{R}}(z)]_+ &= \sum_{x=1}^{+\infty} z^x \mathcal{R}_x, & [\tilde{\mathcal{R}}(z)]_- &= \sum_{x=-1}^{-\infty} z^x \mathcal{R}_x, \\ [\tilde{\mathcal{R}}(z)]_+^0 &= \sum_{x=0}^{+\infty} z^x \mathcal{R}_x, & [\tilde{\mathcal{R}}(z)]_-^0 &= \sum_{x=-\infty}^0 z^x \mathcal{R}_x, \\ \tilde{\mathcal{R}}(z) &= [\tilde{\mathcal{R}}(z)]_+ + [\tilde{\mathcal{R}}(z)]_-^0 = [\tilde{\mathcal{R}}(z)]_- + [\tilde{\mathcal{R}}(z)]_+^0, \end{aligned}$$

Після застосування інтегрального перетворення Лапласа-Карсона по t до $\mathbf{g}_t(z)$ в (1) та $\mathbf{P}(t)$ отримаємо

$$\mathbf{g}(s, z) = s \int_0^{+\infty} e^{-st} \mathbf{g}_t(z) dt = \mathbf{E} z^{\xi(\theta_s)} = s(s\mathbf{I} - \mathbf{K}(z))^{-1}, \quad (5)$$

$$\mathbf{P}_s = s \int_0^{+\infty} e^{-st} \mathbf{P}(t) dt = s(s\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}. \quad (6)$$

Теорема 2.1. [5] Для двовимірного процесу $Y(t)$ при $s > 0$ має місце матрична о. ф. т. на $|z| = 1$:

$$\mathbf{g}(s, z) = \mathbf{E} z^{\xi(\theta_s)} = \begin{cases} \mathbf{g}_+(s, z) \mathbf{P}_s^{-1} \mathbf{g}^-(s, z), \\ \mathbf{g}_-(s, z) \mathbf{P}_s^{-1} \mathbf{g}^+(s, z). \end{cases} \quad (7)$$

Зауважимо, що розподіли екстремумів для майже напівнеперервних процесів на ЛМ були встановлені в [11].

Надалі будемо позначати

$$\mathbf{p}_*^-(s) = \mathbf{P}_s^{-1} \mathbf{p}^-(s), \mathbf{p}_*^+(s) = \mathbf{p}_-(s) \mathbf{P}_s^{-1}, \mathbf{p}_*^+(s) = \mathbf{P}_s^{-1} \mathbf{p}^+(s), \mathbf{p}_+^*(s) = \mathbf{p}_+(s) \mathbf{P}_s^{-1};$$

$$\mathbf{q}_*^-(s) = \mathbf{P}_s^{-1} \mathbf{q}^-(s), \mathbf{q}_*^+(s) = \mathbf{q}_-(s) \mathbf{P}_s^{-1}, \mathbf{q}_*^+(s) = \mathbf{P}_s^{-1} \mathbf{q}^+(s), \mathbf{q}_+^*(s) = \mathbf{q}_+(s) \mathbf{P}_s^{-1}.$$

Причому ці матриці зв'язані наступними співвідношеннями:

$$\mathbf{p}_*^{\pm}(s) + \mathbf{q}_*^{\pm}(s) = \mathbf{I}, \mathbf{p}_{\pm}^*(s) + \mathbf{q}_{\pm}^*(s) = \mathbf{I}.$$

$$\mathbf{V}(s, x, u_1, u_2, u_3) = \mathbf{E}[e^{-s\tau^+(x)} u_1^{\gamma^+(x)} u_2^{\gamma^+(x)}, u_3^{\gamma_x^+}, \tau^+(x) < \infty],$$

$$\mathbf{v}(s, z, u_1, u_2, u_3) = \sum_{x=0}^{+\infty} z^x \mathbf{V}(s, x, u_1, u_2, u_3),$$

$$\tilde{\mathbf{v}}(s, \varepsilon, u_1, u_2, u_3) =$$

$$\begin{aligned}
 &= (1 - \varepsilon) \sum_{x=0}^{+\infty} \varepsilon^x \mathbf{V}(s, x, u_1, u_2, u_3) = \mathbf{E}[e^{-s\tau^+(\tilde{\nu}_\varepsilon)} u_1^{\gamma^+(\tilde{\nu}_\varepsilon)} u_2^{\gamma^+(\tilde{\nu}_\varepsilon)} u_3^{\gamma_{\tilde{\nu}_\varepsilon}^+}, \tau^+(\tilde{\nu}_\varepsilon) < \infty], \\
 \mathbf{V}_i(s, x, u_i) &= \mathbf{V}_i(s, x, u_1, u_2, u_3)|_{u_r=1, r \neq i}, \quad \tilde{\mathbf{v}}_i(s, x, u_i) = \tilde{\mathbf{v}}_i(s, x, u_1, u_2, u_3)|_{u_r=1, r \neq i}, \\
 \mathbf{A}(x, u_1, u_2, u_3) &= \sum_{l=x+1}^{+\infty} u_1^{l-x} u_2^x u_3^l \mathbf{\Pi}_0(l), \quad x \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}, \tag{8}
 \end{aligned}$$

Функції $\mathbf{A}(x, u_1, u_2, u_3)$ є правими частинами різницевих рівнянь сумісних генератрис розподілу перестрибкових функціоналів з оператором \mathbf{L} (див. (3) у [8] і [9]) і виражаються через відповідні твірні перетворення розподілу $\mathbf{\Pi}_0(l)$ додатних стрибків.

$$\mathbf{a}(z, u_1, u_2, u_3) = \sum_{x=0}^{+\infty} z^x \mathbf{A}(x, u_1, u_2, u_3), \quad \tilde{\mathbf{a}}(\varepsilon, u_1, u_2, u_3) = (1 - \varepsilon) \sum_{x=0}^{+\infty} \varepsilon^x \mathbf{A}(x, u_1, u_2, u_3),$$

$$\mathbf{A}(x, 1, 1, 1) = \sum_{l=x+1}^{+\infty} \mathbf{\Pi}_0(l) = \mathbf{A}_x(1), \quad \mathbf{a}(z) = \sum_{x=0}^{+\infty} z^x \mathbf{A}_x(1),$$

$$\mathbf{A}_i(x, u_i) = \mathbf{A}_i(x, u_1, u_2, u_3)|_{u_r=1, r \neq i}, \quad \tilde{\mathbf{a}}_i(\varepsilon, u_i) = \tilde{\mathbf{a}}_i(\varepsilon, u_1, u_2, u_3)|_{u_r=1, r \neq i},$$

$$\tilde{\mathbf{\Pi}}_+^0(z) = \sum_{x=0}^{+\infty} z^x \mathbf{\Pi}_0(x) = \mathbf{\Lambda}_1 \tilde{\mathbf{p}}_1(z) + \mathbf{N} \tilde{\mathbf{f}}(z) + \mathbf{P}, \quad \tilde{\mathbf{\Pi}}_+^0(1) = \sum_{x=0}^{+\infty} \mathbf{\Pi}_0(x) = \mathbf{\Lambda}_1 + \mathbf{N} \mathbf{P} + \mathbf{P},$$

$$\mathbf{W}(s, x, u_1, u_2, u_3) = \sum_{y=-\infty}^0 \check{\mathbf{p}}_y^-(s) \mathbf{A}(x - y, u_1, u_2, u_3),$$

$$\mathbf{w}(s, z, u_1, u_2, u_3) = \sum_{x=0}^{+\infty} z^x \mathbf{P}_s^{-1} \mathbf{W}(s, x, u_1, u_2, u_3),$$

$$\tilde{\mathbf{w}}(s, \varepsilon, u_1, u_2, u_3) = (1 - \varepsilon) \sum_{x=0}^{+\infty} \varepsilon^x \mathbf{P}_s^{-1} \mathbf{W}(s, x, u_1, u_2, u_3),$$

$$\mathbf{W}_i(s, x, u_i) = \mathbf{W}_i(s, x, u_1, u_2, u_3)|_{u_r=1, r \neq i}, \quad \tilde{\mathbf{w}}_i(s, \varepsilon, u_i) = \tilde{\mathbf{w}}_i(s, \varepsilon, u_1, u_2, u_3)|_{u_r=1, r \neq i},$$

$$\mathbf{K}(s, x) = \mathbf{W}(s, x, 1, 1, 1) = \sum_{y=-\infty}^0 \check{\mathbf{p}}_y^-(s) \mathbf{A}_{x-y}(1), \quad \mathbf{k}(s, z) = \sum_{x=0}^{+\infty} z^x \mathbf{K}(s, x),$$

Множина значень ланцюга $y_x^* = x(\tau^\pm(x))$ може зв'язатися за рахунок недосяжності рівня $x > 0$ ($x < 0$) процесом $\xi(t)$. Тому будемо накладати наступну умову:

$$\forall k \in \mathbb{E} : P\{y_x^* = k\} > 0.$$

Крім того будемо припускати, що

$$\|E[|\xi(t)|, x(t) = r|x(0) = k]\| < \infty. \tag{9}$$

Генератрис $\tau^\pm(x)$ розглядаються на ланцюгу y_x^* відповідно

$$\mathbf{T}_*^\pm(s, x) = \mathbf{E}[e^{-s\tau^\pm(x)}, \tau^\pm(x) < \infty] = \|E[e^{-s\tau^\pm(x)}, x(\tau^\pm(x)) = r|x(0) = k]\|.$$

Зв'язок між розподілами $\xi^\pm(\theta_s)$ та генератрисами $\tau^\pm(x)$ визначається наступними співвідношеннями:

$$\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) > x\} = \mathbf{E}[e^{-s\tau^+(x)}, \tau^+(x) < \infty] \mathbf{P}_s = \mathbf{T}_*^+(s, x) \mathbf{P}_s. \tag{10}$$

$$\mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) < x\} = \mathbf{E}[e^{-s\tau^-(x)}, \tau^-(x) < \infty] \mathbf{P}_s = \mathbf{T}_*^-(s, x) \mathbf{P}_s. \tag{11}$$

В [9] встановлені наступні твердження

Теорема 2.2. [9] Для довільного цілозначного пуассонівського процесу $\xi(t)$ на ЛМ $x(t)$ пара функціоналів $\{\tau^+(x), \gamma^+(x)\}$, зв'язана з $\xi^+(\theta_s)$ наступними співвідношеннями:

$$\mathbf{E}[e^{-s\tau^+(x)}u^{\gamma^+(x)}, \tau^+(x) < \infty] = \mathbf{E}[u^{\xi^+(\theta_s)-x}, \xi^+(\theta_s) > x](\mathbf{g}_+(s, u))^{-1}, \quad (12)$$

$$\mathbf{E}[e^{-s\tau^+(\tilde{\nu}_\varepsilon)}u^{\gamma^+(\tilde{\nu}_\varepsilon)}, \tau^+(\tilde{\nu}_\varepsilon) < \infty] = \frac{(1-\varepsilon)u}{u-\varepsilon}(\mathbf{g}_+(s, u) - \mathbf{g}_+(s, \varepsilon))(\mathbf{g}_+(s, u))^{-1}. \quad (13)$$

Співвідношення (13) є матричним узагальненням другої факторизаційної тотожності (2 ф. т.) (7.17) в [10].

Лема 2.1. [9] Для довільного цілозначного пуассонівського процесу $\xi(t)$ на ЛМ $x(t)$ твірне перетворення спільної генератриси функціоналів $\{\tau^+(x), \gamma^+(x), \gamma_+(x), \gamma_x^+\}$ виражається наступним чином

$$sv(s, z, u_1, u_2, u_3) = \mathbf{g}_+(s, z)\mathbf{P}_s^{-1}[\mathbf{g}^-(s, z)\mathbf{a}(z, u_1, u_2, u_3)]_+^0, \quad (14)$$

де $\mathbf{a}(z, u_1, u_2, u_3)$ має вигляд

$$\mathbf{a}(s, x, u_1, u_2, u_3) = \frac{u_1}{u_1 - zu_2}(\tilde{\Pi}_+^0(u_1u_3) - \tilde{\Pi}_+^0(u_2u_3z)), \quad (15)$$

а $\mathbf{V}(s, x, u_1, u_2, u_3)$ визначається через згортку

$$s\mathbf{V}(s, x, u_1, u_2, u_3) = \sum_{y=0}^x \mathbf{p}_y^+(s)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{W}(s, x-y, u_1, u_2, u_3). \quad (16)$$

На підставі леми 2.1 встановлюється

Теорема 2.3. Якщо виконується умова (9), тоді

$$\mathbf{g}_+(s, z) = [\mathbf{I} + (1-z)s^{-1}\mathbf{k}(s, z)]^{-1}\mathbf{P}_s, \quad \mathbf{p}_+(s) = [\mathbf{I} + s^{-1}\mathbf{k}(s, 0)]^{-1}\mathbf{P}_s. \quad (17)$$

$$\mathbf{g}_+(s, z) = (\mathbf{I} - \mathbf{V}_1(s, 0, z))^{-1}\mathbf{p}_+(s). \quad (18)$$

Доведення. Підставимо замість $u_1 = u_2 = u_3 = 1$ в (14) і отримаємо

$$sv(s, z, 1, 1, 1) = \mathbf{g}_+(s, z)\mathbf{P}_s^{-1}[\mathbf{g}^-(s, z)\mathbf{a}(z)]_+^0. \quad (19)$$

Розглянемо множник

$$\begin{aligned} [\mathbf{g}^-(s, z)\mathbf{a}(z)]_+^0 &= \left[\sum_{x=0}^{+\infty} z^x \check{\mathbf{p}}_x^-(s) \sum_{x=0}^{+\infty} z^x \mathbf{A}_x(1) \right]_+^0 = \sum_{x=0}^{+\infty} z^x \sum_{k=-\infty}^0 \check{\mathbf{p}}_k^-(s) \mathbf{A}_{x-k}(1) = \\ &= \sum_{x=0}^{+\infty} z^x \mathbf{W}(s, x, 1, 1, 1) = \sum_{x=0}^{+\infty} z^x \mathbf{K}(s, x) = \mathbf{k}(s, z). \end{aligned}$$

Використовуючи (9) та (10) і означення $\mathbf{v}(s, z, u_1, u_2, u_3)$ отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(s, z, 1, 1, 1) &= \sum_{x=0}^{+\infty} z^x \mathbf{V}(s, x, 1, 1, 1) = \sum_{x=0}^{+\infty} z^x \mathbf{E} \left[e^{-s\tau^+(x)}, \tau^+(x) < \infty \right] = \\ &= \sum_{x=0}^{+\infty} z^x \mathbf{P} \{ \xi^+(\theta_s) > x \} \mathbf{P}_s^{-1} = \sum_{x=0}^{+\infty} z^x \sum_{k=x+1}^{+\infty} \mathbf{p}_k^+(s) \mathbf{P}_s^{-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{p}_k^+(s) \sum_{x=0}^{k-1} z^x \mathbf{P}_s^{-1} = \\ &= \frac{1}{1-z} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{p}_k^+(s) - \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \mathbf{p}_k^+(s) \right] \mathbf{P}_s^{-1} = \frac{1}{z-1} [\mathbf{g}_+(s, z)\mathbf{P}_s^{-1} - \mathbf{I}]. \end{aligned}$$

Підставляючи отримані співвідношення в (19) одержимо перше співвідношення в (17). Друге співвідношення в (17) впливає з першого при граничному переході $z \rightarrow 0$. (18) отримаємо з (13) при граничному переході $\varepsilon \rightarrow 0$ \square

В роботах [8] і [11] одержано вигляди для матричних параметрів:
у випадку майже напівнеперервного зверху процесу

$$\mathbf{Z}_s^{-1} = \mathbf{q}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1} + \mathbf{p}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{C}, \quad \mathbf{R}_s^{-1} = \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{q}^+(s) + \mathbf{C}\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{p}^+(s);$$

у випадку майже напівнеперервного знизу процесу

$$\mathbf{Z}(s) = \mathbf{q}_-(s)\mathbf{P}_s^{-1} + \mathbf{p}_-(s)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{B}, \quad \mathbf{R}(s) = \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{q}^-(s) + \mathbf{B}\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{p}^-(s).$$

$\mathbf{R}(s)$ служить матричним параметром розподілу $\bar{\xi}(\theta_s)$.

Згідно властивостей цих параметрів встановлюється

Теорема 2.4. *Для майже напівнеперервного зверху процесу:*

- 1). Якщо $m_1^0 \geq 0$, тоді $|\mathbf{p}_+^*(0)| = |\mathbf{p}_*^+(0)| = 0$;
- 2). Якщо $m_1^0 < 0$, тоді $|\mathbf{p}_+^*(0)| \neq 0$ та $|\mathbf{p}_*^+(0)| \neq 0$.

Для майже напівнеперервного знизу процесу:

- 3). Якщо $m_1^0 \leq 0$, тоді $|\mathbf{p}_-^*(0)| = |\mathbf{p}_*^-(0)| = 0$;
- 4). Якщо $m_1^0 > 0$, тоді $|\mathbf{p}_-^*(0)| \neq 0$ та $|\mathbf{p}_*^-(0)| \neq 0$.

Доведення. Розглянемо майже напівнеперервний зверху процес.

Якщо $m_1^0 \geq 0$ тоді при $s \rightarrow 0$ (згідно результатів в [8]) маємо

$$\mathbf{p}_+^*(0) = (\mathbf{I} - \mathbf{Z}_0^{-1})(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_* = -(\mathbf{P}_* - \mathbf{I}) = -\mathbf{Q}_*,$$

$$\mathbf{p}_*^+(0) = (\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{R}_0^{-1}) = \mathbf{I} - \mathbf{P}_* \mathbf{S} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_* = -\mathbf{Q}_*.$$

А звідси випливає, що $|\mathbf{p}_+^*(0)| = |\mathbf{p}_*^+(0)| = 0$.

Якщо $m_1^0 < 0$ (згідно результатів в [8] і [11]) маємо $|\mathbf{p}_+^*(0)| \neq 0$ та $|\mathbf{p}_*^+(0)| \neq 0$.

Нехай $Y(t) = \{\xi(t), x(t)\}$ – майже напівнеперервний знизу процес, тоді $\dot{Y}(t) = \{-\xi(t), x(t)\}$ – майже напівнеперервний зверху процес, при цьому $m_1^0 = -\dot{m}_1^0$ та $\dot{\mathbf{p}}_+^*(s) = \mathbf{p}_-^*(s)$, $\dot{\mathbf{p}}_*^+(s) = \mathbf{p}_*^-(s)$. Тому з 1), 2) випливає 3), 4) відповідно. \square

Далі для майже напівнеперервних зверху процесів розглянемо

$$\mathbf{m}_-(\varepsilon) = \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1}(1 - \varepsilon)\mathbf{g}_-(s, \varepsilon), \quad \text{якщо } m_1^0 < 0,$$

$$\mathbf{m}_0(\varepsilon) = \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1}(1 - \varepsilon)\mathbf{g}_-(s, \varepsilon)\mathbf{p}_*^+(s), \quad \text{якщо } m_1^0 = 0.$$

а для майже напівнеперервних знизу процесів

$$\mathbf{m}_+(\varepsilon) = \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1}(1 - \varepsilon)\mathbf{g}_+(s, \varepsilon), \quad \text{якщо } m_1^0 > 0,$$

$$\mathbf{m}^0(\varepsilon) = \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1}(1 - \varepsilon)\mathbf{g}_+(s, \varepsilon)\mathbf{p}_*^-(s), \quad \text{якщо } m_1^0 = 0,$$

то з теорем 1-4 в [8] випливає

Наслідок 2.1. *Для майже напівнеперервного зверху процесу справедливі наступні співвідношення*

$$\mathbf{m}_-(1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \mathbf{m}_-(\varepsilon) = -\frac{1}{m_1^0}\mathbf{P}_0, \quad \mathbf{m}_0(1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \mathbf{m}_0(\varepsilon) = \frac{2}{\sigma_0^2}\mathbf{P}_0(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}, \quad (20)$$

для майже напівнеперервного знизу процесу маємо

$$\mathbf{m}_+(1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \mathbf{m}_+(\varepsilon) = \frac{1}{m_1^0}\mathbf{P}_0, \quad \mathbf{m}^0(1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \mathbf{m}^0(\varepsilon) = \frac{2}{\sigma_0^2}\mathbf{P}_0(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}. \quad (21)$$

Доведення. Розглянемо майже напівнеперервний знизу процес.

Згідно з лемою 2 в [12] та теоремою 3 в [8] у випадку $m_1^0 > 0$ маємо

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_+(1) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \mathbf{m}_+(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1}(1 - \varepsilon) \mathbf{g}_+(s, \varepsilon) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} (1 - \varepsilon) \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} s (\mathbf{sI} - \mathbf{K}(\varepsilon))^{-1} (\varepsilon \mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} (\varepsilon \mathbf{I} - \mathbf{R}(s)) (\mathbf{I} - \mathbf{R}(s))^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{B}) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} (1 - \varepsilon) (-\mathbf{K}(\varepsilon))^{-1} (\varepsilon \mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} [s \mathbf{I} + s(\varepsilon - 1)(\mathbf{I} - \mathbf{R}(s))^{-1}] (\mathbf{I} - \mathbf{B}) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} (1 - \varepsilon) (-\mathbf{K}(\varepsilon))^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{B}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} (1 - \varepsilon) (-\mathbf{K}(\varepsilon))^{-1} = \frac{1}{m_1^0} \mathbf{P}_0, \end{aligned}$$

а при $m_1^0 = 0$ згідно з лемою 2 в [12] та співвідношенням (55) із [8] отримуємо

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^0(1) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \mathbf{m}^0(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1}(1 - \varepsilon) \mathbf{g}_+(s, \varepsilon) \mathbf{p}_*^-(s) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} (1 - \varepsilon) \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} s (\mathbf{sI} - \mathbf{K}(\varepsilon))^{-1} (\varepsilon \mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} (\varepsilon \mathbf{I} - \mathbf{R}(s)) (\mathbf{I} - \mathbf{R}(s))^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{B}) \mathbf{P}_s^{-1} \mathbf{p}^-(s) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} (1 - \varepsilon) (-\mathbf{K}(\varepsilon))^{-1} (\varepsilon \mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} \lim_{s \rightarrow 0} (\mathbf{I} + (\varepsilon - 1)(\mathbf{I} - \mathbf{R}(s))^{-1}) (\mathbf{I} - \mathbf{R}(s)) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} (1 - \varepsilon)^2 (\mathbf{K}(\varepsilon))^{-1} (\varepsilon \mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} = \frac{2}{\sigma_0^2} \mathbf{P}_0 (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}. \end{aligned}$$

Формули (20) отримуємо із (21), після відповідних перепозначень, якщо розглянути замість $Y(t) = \{\xi(t), x(t)\}$ – майже напівнеперервного зверху процесу, $\dot{Y}(t) = \{-\xi(t), x(t)\}$ – майже напівнеперервний знизу процес. \square

3. ГЕНЕРАТРИСИ ПЕРЕСТРИБКІВ ДОДАТНОГО РІВНЯ ДЛЯ МАЙЖЕ НАПІВНЕПЕРЕРВНОГО ЗНИЗУ ПРОЦЕСУ

Надалі розглядаються майже напівнеперервні знизу процеси з кумулянтною (4). Знайдемо для цих процесів вигляд для спільної генератриси перестрибкових функціоналів та генератрис пар функціоналів $\{\tau^+(x), \gamma^+(x)\}$, $\{\tau^+(x), \gamma_+(x)\}$, $\{\tau^+(x), \gamma_x^+\}$ при $x \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$.

Лема 3.1. Для процесу $Y(t)$ з кумулянтною (4) має місце співвідношення (16), де $\mathbf{W}(s, x, u_1, u_2, u_3)$ визначаються через $\mathbf{A}(x, u_1, u_2, u_3)$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(s, x, u_1, u_2, u_3) &= \mathbf{p}^-(s) \left[\mathbf{A}(x, u_1, u_2, u_3) + u_1(u_1 \mathbf{I} - u_2 \mathbf{R}(s))^{-1} \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left\{ \mathbf{R}(s) (\mathbf{A}(x + 1, u_1, u_2, u_3) - (\mathbf{R}(s))^{-x-1} \mathbf{A}_3(x + 1, u_2 u_3 \mathbf{R}(s))) + \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{l=x+2}^{+\infty} \left((\mathbf{R}(s))^{l-(x+1)} u_2^l - u_1^{l-(x+1)} u_2^{x+1} \right) u_3^l \mathbf{B} \Pi_0(l) \right\} \right]. \quad (22) \end{aligned}$$

Доведення. Формула (16) випливає з (14) після обернення по z . Використовуючи співвідношення для $\check{\mathbf{p}}_y^-(s)$ (див. теорема 3 в [11]) і означення $\mathbf{W}(s, x, u_1, u_2, u_3)$ маємо

$$\mathbf{W}(s, x, u_1, u_2, u_3) = \mathbf{p}^-(s) \mathbf{A}(x, u_1, u_2, u_3) + \mathbf{p}^-(s) \mathbf{d}(s, x, u_1, u_2, u_3), \quad (23)$$

де $\mathbf{d}(s, x, u_1, u_2, u_3)$ виражається через згортку $\mathbf{A}(x, u_1, u_2, u_3)$ і геометричний розподіл $\bar{\xi}(\theta_s)$ з матричним параметром $\mathbf{R}(s)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(s, x, u_1, u_2, u_3) &= \sum_{y=-\infty}^{-1} (\mathbf{R}(s))^{-y} (\mathbf{I} - (\mathbf{R}(s))^{-1} \mathbf{B}) \mathbf{A}(x - y, u_1, u_2, u_3) = \\ &= (\mathbf{I} - u_1^{-1} u_2 \mathbf{R}(s))^{-1} \sum_{l=x+2}^{\infty} \left[u_1^{l-(x+1)} u_2^{x+1} - (\mathbf{R}(s))^{l-(x+1)} u_2^l \right] u_3^l (\mathbf{R}(s) - \mathbf{B}) \Pi_0(l) = \\ &= u_1 (u_1 \mathbf{I} - u_2 \mathbf{R}(s))^{-1} \left\{ \mathbf{R}(s) (\mathbf{A}(x+1, u_1, u_2, u_3) - (\mathbf{R}(s))^{-x-1} \mathbf{A}_3(x+1, u_2, u_3 \mathbf{R}(s))) + \right. \\ &\quad \left. \sum_{l=x+2}^{+\infty} \left((\mathbf{R}(s))^{l-(x+1)} u_2^l - u_1^{l-(x+1)} u_2^{x+1} \right) u_3^l \mathbf{B} \Pi_0(l) \right\}. \end{aligned}$$

Підставивши в (23) останнє співвідношення отримаємо (22). \square

Позначимо $\gamma_1(x) = \gamma^+(x)$, $\gamma_2(x) = \gamma_+(x)$, $\gamma_3(x) = \gamma_x^+$. Розглянемо обернення генератрис $\mathbf{V}_i(s, x, u_i) = \mathbf{E} \left[e^{-s\tau^+(x)} u_i^{\gamma_i(x)}, \tau^+(x) < \infty \right]$, які для скалярного випадку визначають багатозначну функцію банкрутства (див. [10]). Для цього спочатку розглянемо наступні представлення функцій $\mathbf{W}_i(s, x, u_i)$, зручні для обернення по u_i .

Лема 3.2. Для майже напівнеперервного знизу процесу $Y(t)$ з кумулянтною (4) спільна генетатриса $\{\tau^+(x), \gamma_i(x)\}$ визначається співвідношенням

$$s \mathbf{V}_i(s, x, u_i) = \sum_{y=0}^x \mathbf{p}_y^+(s) \mathbf{P}_s^{-1} \mathbf{W}_i(s, x - y, u_i), \quad i = \overline{1, 3}, \quad (24)$$

де функції $\mathbf{W}(s, x, \dots)$ мають вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(s, x, u_1, u_2) &= \mathbf{p}^-(s) [\mathbf{A}(x, u_1, u_2) + \\ & (\mathbf{I} - u_1^{-1} u_2 \mathbf{R}(s))^{-1} \sum_{l=x+2}^{+\infty} \left(u_1^{l-(x+1)} u_2^{x+1} - (\mathbf{R}(s))^{l-(x+1)} u_2^l \right) (\mathbf{R}(s) - \mathbf{B}) \Pi_0(l)], \quad (25) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_1(s, x, u_1) &= \mathbf{p}^-(s) [\mathbf{A}_1(x, u_1) + u_1 (u_1 \mathbf{I} - \mathbf{R}(s))^{-1} \cdot \\ & \cdot \{ \mathbf{R}(s) (\mathbf{A}_1(x+1, u_1) - \mathbf{A}_1(x+1, \mathbf{R}(s))) + \\ & + \sum_{l=x+2}^{+\infty} \left((\mathbf{R}(s))^{l-(x+1)} - u_1^{l-(x+1)} \right) \mathbf{B} \Pi_0(l) \}], \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_2(s, x, u_2) &= \mathbf{p}^-(s) [\mathbf{A}_2(x, u_2) + (\mathbf{I} - u_2 \mathbf{R}(s))^{-1} \cdot \\ & \cdot \{ \mathbf{R}(s) (\mathbf{A}_2(x+1, u_2) - (\mathbf{R}(s))^{-x-1} \mathbf{A}_3(x+1, u_2 \mathbf{R}(s))) + \\ & + \sum_{l=x+2}^{+\infty} \left((\mathbf{R}(s))^{l-(x+1)} u_2^l - u_2^{x+1} \right) \mathbf{B} \Pi_0(l) \}], \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_3(s, x, u_3) &= \mathbf{p}^-(s) [\mathbf{A}_3(x, u_3) + (\mathbf{I} - \mathbf{R}(s))^{-1} \cdot \\ & \cdot \{ \mathbf{R}(s) (\mathbf{A}_3(x+1, u_3) - (\mathbf{R}(s))^{-x-1} \mathbf{A}_3(x+1, u_3 \mathbf{R}(s))) + \\ & + \sum_{l=x+2}^{+\infty} \left((\mathbf{R}(s))^{l-(x+1)} - \mathbf{I} \right) u_3^l \mathbf{B} \Pi_0(l) \}]. \quad (28) \end{aligned}$$

Доведення. З (22) при $u_3 = 1$ випливає (25). Оскільки $\mathbf{W}_1(s, x, u_1) = \mathbf{W}(s, x, u_1, 1, 1)$, $\mathbf{W}_2(s, x, u_2) = \mathbf{W}(s, x, 1, u_2, 1)$, $\mathbf{W}_3(s, x, u_3) = \mathbf{W}(s, x, 1, 1, u_3)$ то із (22) отримуємо відповідно (26)-(28). \square

Врахувавши (26)-(28) в (24) отримаємо необхідні представлення для відповідних генератрис $\mathbf{V}_i(s, x, u_i)$ пар функціоналів.

Обернувши (24) по u_1, u_2, u_3 отримаємо (29)-(31)

Наслідок 3.1. *Для процесу $Y(t)$ з кумулянтною (4) мають місце наступні формули ($l \in \mathbb{Z}_+ \cup 0$)*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\gamma_1(x) = l, \xi^+(\theta_s) > x\} &= \mathbf{E} \left[e^{-s\tau^+(x)}, \gamma_1(x) = l, \tau^+(x) < \infty \right] = \\ &= s^{-1} \sum_{y=0}^x \mathbf{p}_y^+(s) \mathbf{P}_s^{-1} \sum_{j=-\infty}^0 \check{\mathbf{p}}_j^-(s) \mathbf{\Pi}_0(x - y - j + l), \quad l \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_1(x) = 0, \xi^+(\theta_s) > x\} = \mathbf{E} \left[e^{-s\tau^+(x)}, \gamma_1(x) = 0, \tau^+(x) < \infty \right] = 0;$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\gamma_2(x) = l, \xi^+(\theta_s) > x\} &= \mathbf{E} \left[e^{-s\tau^+(x)}, \gamma_2(x) = l, \tau^+(x) < \infty \right] = \\ &= s^{-1} \sum_{y=0}^l \mathbf{p}_{x-y}^+(s) \mathbf{P}_s^{-1} \check{\mathbf{p}}_{y-l}^-(s) \mathbf{A}_l(1), \quad l \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\gamma_3(x) = l, \xi^+(\theta_s) > x\} &= \mathbf{E} \left[e^{-s\tau^+(x)}, \gamma_3(x) = l, \tau^+(x) < \infty \right] = \\ &= s^{-1} \sum_{y=0}^l \mathbf{p}_{x-y}^+(s) \mathbf{P}_s^{-1} \sum_{j=y-l+1}^{\infty} \check{\mathbf{p}}_j^-(s) \mathbf{\Pi}_0(j), \quad l \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}. \end{aligned} \quad (31)$$

4. ПЕРЕСТРИБКИ ЧЕРЕЗ НЕСКІНЧЕННО ВІДДАЛЕНИЙ РІВЕНЬ

Розглянемо маргінальні розподіли функціоналів $\gamma_i(x)$ у випадку $x = \infty$. Для цього спочатку доведемо наступну лему.

Лема 4.1. *Для майже напівнеперервного знизу процесу $\mathbf{Y}(t)$ з кумулянтною (4) має місце співвідношення*

$$\tilde{\mathbf{v}}(s, \varepsilon, u_1, u_2, u_3) = s^{-1} \mathbf{g}_+(s, \varepsilon) \tilde{\mathbf{w}}(s, \varepsilon, u_1, u_2, u_3), \quad (32)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{w}}(s, \varepsilon, u_1, u_2, u_3) &= \mathbf{p}_*^-(s) \left[\tilde{\mathbf{a}}(\varepsilon, u_1, u_2, u_3) + (1 - \varepsilon) u_2 (\mathbf{I} - u_1^{-1} u_2 \mathbf{R}(s))^{-1} \cdot \right. \\ &\quad \cdot \sum_{l=2}^{\infty} u_3^l \left\{ (1 - \varepsilon u_1^{-1} u_2)^{-1} (u_1^{l-1} - (\varepsilon u_2)^{l-1}) - \right. \\ &\quad \left. \left. (\mathbf{I} - \varepsilon (\mathbf{R}(s))^{-1})^{-1} ((u_2 \mathbf{R}(s))^{l-1} - (\varepsilon u_2)^{l-1}) \right\} (\mathbf{R}(s) - \mathbf{B}) \mathbf{\Pi}_0(l) \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Доведення. З формули (21) випливає (32) наступним чином

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{w}}(s, \varepsilon, u_1, u_2, u_3) &= (1 - \varepsilon) \sum_{x=0}^{\infty} \varepsilon^x s^{-1} \sum_{y=0}^x \mathbf{p}_y^+(s) \mathbf{P}_s^{-1} \mathbf{W}(s, x - y, u_1, u_2, u_3) = \\ &= s^{-1} (1 - \varepsilon) \sum_{y=0}^{\infty} \varepsilon^y \mathbf{p}_y^+(s) \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \mathbf{P}_s^{-1} \mathbf{W}(s, l, u_1, u_2, u_3) = \\ &= s^{-1} \mathbf{g}_+(s, \varepsilon) \tilde{\mathbf{w}}(s, \varepsilon, u_1, u_2, u_3).\end{aligned}$$

Згідно з (22) отримаємо

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{w}}(s, \varepsilon, u_1, u_2, u_3) &= (1 - \varepsilon) \sum_{x=0}^{\infty} \varepsilon^x \mathbf{P}_s^{-1} \mathbf{p}^-(s) \left[\mathbf{A}(x, u_1, u_2, u_3) + u_1 (u_1 \mathbf{I} - u_2 \mathbf{R}(s))^{-1} \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left. \left\{ \mathbf{R}(s) \left(\mathbf{A}(x + 1, u_1, u_2, u_3) - (\mathbf{R}(s))^{-x-1} \mathbf{A}_3(x + 1, u_2 u_3 \mathbf{R}(s)) \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{l=x+2}^{+\infty} \left((\mathbf{R}(s))^{l-(x+1)} u_2^l - u_1^{l-(x+1)} u_2^{x+1} \right) u_3^l \mathbf{B}\Pi_0(l) \right\} \right] = \sum_{k=1}^5 \mathbf{I}_k,\end{aligned}$$

де кожен доданок останнього співвідношення після відповідних перетворень виражається через $\mathbf{R}(s)$ та значення функцій $\mathbf{A}(1, u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{A}_3(1, \varepsilon u_2 u_3)$, $\mathbf{A}_3(1, \mathbf{R}(s) u_2 u_3)$ та деякі складніші згортки з $\mathbf{B}\Pi_0(l)$. $\mathbf{I}_1 = (1 - \varepsilon) \sum_{x=0}^{\infty} \varepsilon^x \mathbf{A}(x, u_1, u_2, u_3) = \tilde{\mathbf{a}}(\varepsilon, u_1, u_2, u_3)$;

$$\mathbf{I}_2 = \sum_{x=0}^{\infty} \varepsilon^x \mathbf{A}(x + 1, u_1, u_2, u_3) = (1 - \varepsilon u_1^{-1} u_2)^{-1} \left(\mathbf{A}(1, u_1, u_2, u_3) - \varepsilon^{-1} \mathbf{A}_3(1, \varepsilon u_2 u_3) \right);$$

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_3 &= \sum_{x=0}^{\infty} (\varepsilon (\mathbf{R}(s))^{-1})^x \mathbf{A}_3(x + 1, u_2 u_3 \mathbf{R}(s)) = \\ &= (\mathbf{I} - \varepsilon (\mathbf{R}(s))^{-1})^{-1} \left(\mathbf{A}_3(1, u_2 u_3 \mathbf{R}(s)) - \varepsilon^{-1} \mathbf{R}(s) \mathbf{A}_3(1, \varepsilon u_2 u_3) \right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_4 &= \sum_{x=0}^{\infty} \varepsilon^x \sum_{l=x+2}^{\infty} (u_2 u_3)^l (\mathbf{R}(s))^{l-(x+1)} \mathbf{B}\Pi_0(l) = \\ &= (\mathbf{I} - \varepsilon (\mathbf{R}(s))^{-1})^{-1} \sum_{l=2}^{\infty} (u_2 u_3)^l \left((\mathbf{R}(s))^{l-1} - \varepsilon^{l-1} \right) \mathbf{B}\Pi_0(l);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_5 &= \sum_{x=0}^{\infty} \varepsilon^x \sum_{l=x+2}^{\infty} u_1^{l-(x+1)} u_2^{x+1} u_3^l \mathbf{B}\Pi_0(l) = \\ &= (1 - \varepsilon u_1^{-1} u_2)^{-1} u_2 \sum_{l=2}^{\infty} u_3^l \left(u_1^{l-1} - (\varepsilon u_2)^{l-1} \right) \mathbf{B}\Pi_0(l).\end{aligned}$$

Підставляючи $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3, \mathbf{I}_4, \mathbf{I}_5$ в співвідношення для $\tilde{\mathbf{w}}(s, \varepsilon, u_1, u_2, u_3)$ отримаємо (33). \square

Зауважимо, що підставляючи в (32) замість $u_2 = u_3 = 1, u_1 = u_3 = 1, u_1 = u_2 = 1$, отримаємо

$$\tilde{\mathbf{v}}_i(s, \varepsilon, u_i) = s^{-1} \mathbf{g}_+(s, \varepsilon) \tilde{\mathbf{w}}_i(s, \varepsilon, u_i), \quad (34)$$

де відповідно $\tilde{\mathbf{w}}_1(s, \varepsilon, u_1)$, $\tilde{\mathbf{w}}_2(s, \varepsilon, u_2)$, $\tilde{\mathbf{w}}_3(s, \varepsilon, u_3)$ мають наступні зображення

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{w}}_1(s, \varepsilon, u_1) = & (1 - \varepsilon)\mathbf{p}_*^-(s) \left[\mathbf{a}_1(\varepsilon, u_1) + \right. \\ & + (\mathbf{I} - u_1^{-1}\mathbf{R}(s))^{-1} \sum_{l=2}^{\infty} \left\{ (1 - u_1^{-1}\varepsilon)^{-1} (u_1^{l-1} - \varepsilon^{l-1}) - \right. \\ & \left. \left. (\mathbf{I} - (\mathbf{R}(s))^{-1}\varepsilon)^{-1} ((\mathbf{R}(s))^{l-1} - \varepsilon^{l-1}) \right\} (\mathbf{R}(s) - \mathbf{B})\mathbf{\Pi}_0(l) \right]; \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{w}}_2(s, \varepsilon, u_2) = & (1 - \varepsilon)\mathbf{p}_*^-(s) \left[\mathbf{a}_2(\varepsilon, u_2) + \right. \\ & + u_2(\mathbf{I} - u_2\mathbf{R}(s))^{-1} \sum_{l=2}^{\infty} \left\{ (1 - u_2\varepsilon)^{-1} (1 - (u_2\varepsilon)^{l-1}) - \right. \\ & \left. \left. (\mathbf{I} - (\mathbf{R}(s))^{-1}\varepsilon)^{-1} ((u_2\mathbf{R}(s))^{l-1} - (u_2\varepsilon)^{l-1}) \right\} (\mathbf{R}(s) - \mathbf{B})\mathbf{\Pi}_0(l) \right]; \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{w}}_3(s, \varepsilon, u_3) = & (1 - \varepsilon)\mathbf{p}_*^-(s) \left[\mathbf{a}_3(\varepsilon, u_3) + \right. \\ & + (\mathbf{I} - \mathbf{R}(s))^{-1} \sum_{l=2}^{\infty} u_3^l \left\{ (1 - \varepsilon)^{-1} (1 - \varepsilon^{l-1}) - \right. \\ & \left. \left. (\mathbf{I} - (\mathbf{R}(s))^{-1}\varepsilon)^{-1} ((\mathbf{R}(s))^{l-1} - \varepsilon^{l-1}) \right\} (\mathbf{R}(s) - \mathbf{B})\mathbf{\Pi}_0(l) \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Згідно з (35)-(37) після граничного переходу в (34) отримується

Теорема 4.1. *Якщо $Y(t)$ майже напівнеперервний знизу процес з кумулянтною (4), тоді*

1. При $m_1^0 > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[u_1^{\gamma_1(\infty)}] &= \mathbf{m}_+(1)\mathbf{p}_*^-(0) \left[\mathbf{a}_1(1, u_1) + \right. \\ &\left. (\mathbf{I} - u_1^{-1}\mathbf{R}(0))^{-1} \sum_{x=1}^{\infty} \left(u_1^x - (\mathbf{R}(0))^x \right) (\mathbf{I} - \mathbf{B})\mathbf{q}_*^-(0)\mathbf{A}_x(1) \right], \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[u_2^{\gamma_2(\infty)}] &= \mathbf{m}_+(1)\mathbf{p}_*^-(0) \left[\mathbf{a}_2(1, u_2) + \right. \\ &\left. (\mathbf{I} - u_2\mathbf{R}(0))^{-1} \sum_{x=1}^{\infty} u_2^x \sum_{l=x+1}^{\infty} \left(\mathbf{I} - (\mathbf{R}(0))^x u_2^{l-x} \right) (\mathbf{I} - \mathbf{B})\mathbf{q}_*^-(0)\mathbf{\Pi}_0(l) \right], \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[u_3^{\gamma_3(\infty)}] &= \mathbf{m}_+(1)\mathbf{p}_*^-(0) \left[\mathbf{a}_3(1, u_3) + \right. \\ &\left. (\mathbf{p}_*^-(0))^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{l=x+1}^{\infty} \left(u_2^l \mathbf{I} - (\mathbf{R}(0))^x \right) (\mathbf{I} - \mathbf{B})\mathbf{q}_*^-(0)\mathbf{\Pi}_0(l) \right]. \end{aligned} \quad (40)$$

2. При $m_1^0 = 0$, $m_2^0 < \infty$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[u_1^{\gamma_1(\infty)}] &= \mathbf{m}^0(1) \left[\mathbf{a}_1(1, u_1) + \right. \\ &\left. (\mathbf{I} - u_1^{-1}\mathbf{R}(0))^{-1} \sum_{x=1}^{\infty} \left(u_1^x - (\mathbf{R}(0))^x \right) (\mathbf{I} - \mathbf{B})\mathbf{P}^*\mathbf{A}_x(1) \right], \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[u_2^{\gamma_2(\infty)}] &= \mathbf{m}^0(1) \left[\mathbf{a}_2(1, u_2) + \right. \\ &\left. (\mathbf{I} - u_2\mathbf{R}(0))^{-1} \sum_{x=1}^{\infty} u_2^x \sum_{l=x+1}^{\infty} \left(\mathbf{I} - (\mathbf{R}(0))^x u_2^{l-x} \right) (\mathbf{I} - \mathbf{B})\mathbf{P}^*\mathbf{\Pi}_0(l) \right], \end{aligned} \quad (42)$$

$$\mathbf{E}[u_3^{\gamma_3(\infty)}] = \mathbf{E}[u_3^{\gamma_1(\infty) + \gamma_2(\infty)}]. \quad (43)$$

3. При $m_1^0 < 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \mathbf{E} \left[u_1^{\gamma^+(\tilde{\nu}_\varepsilon)} u_2^{\gamma^+(\tilde{\nu}_\varepsilon)} u_3^{\gamma_{\tilde{\nu}_\varepsilon}^+}, \tau^+(\tilde{\nu}_\varepsilon) < \infty \right] = 0. \quad (44)$$

Матриці $\mathbf{m}_+(1)$, $\mathbf{m}^0(1)$ визначені в наслідку 2.1.

Доведення. Якщо $m_1^0 > 0$, тоді згідно з теоремою 2.4 $|\mathbf{p}_*^-(0)| \neq 0$ формули (38)-(40) впливають з (34) та відповідно (35)-(37) після граничного переходу при $s \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 1$.

Якщо $m_1^0 = 0$, $m_2^0 < \infty$, тоді згідно з теоремою 2.4 $|\mathbf{p}_*^-(0)| = 0$ формули (41)-(42) впливають з (34) та відповідно (35)-(36) після граничного переходу при $s \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 1$, (43) визначається згідно через розподіл суми недострибку та перестрибку процесу.

Якщо $m_1^0 < 0$, то (44) очевидно. \square

5. ПЕРЕСТРИБКИ ЧЕРЕЗ НУЛЬОВИЙ РІВЕНЬ

Для випадку $x = 0$ має місце твердження

Теорема 5.1. Для процесу $Y(t)$ з кумулянтною (4) маємо

$$\mathbf{P}\{\gamma_1(0) = l, \xi^+(\theta_s) > 0\} = \mathbf{E} \left[e^{-s\tau^+(0)}, \gamma_1(0) = l, \tau^+(0) < \infty \right] = s^{-1} \mathbf{p}_+(s) \mathbf{P}_s^{-1} \sum_{j=-\infty}^0 \check{\mathbf{p}}_j^-(s) \mathbf{\Pi}_0(l-j), \quad l \in \mathbb{Z}_+, \quad (45)$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_1(0) = 0, \xi^+(\theta_s) > 0\} = \mathbf{E} \left[e^{-s\tau^+(0)}, \gamma_1(0) = 0, \tau^+(0) < \infty \right] = 0;$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_2(0) = l, \xi^+(\theta_s) > 0\} = \mathbf{E} \left[e^{-s\tau^+(0)}, \gamma_2(0) = l, \tau^+(0) < \infty \right] = s^{-1} \mathbf{p}_+(s) \mathbf{P}_s^{-1} \check{\mathbf{p}}_{-l}^-(s) \mathbf{A}_l(1), \quad l \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}, \quad (46)$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_3(0) = l, \xi^+(\theta_s) > 0\} = \mathbf{E} \left[e^{-s\tau^+(0)}, \gamma_3(0) = l, \tau^+(0) < \infty \right] = s^{-1} \sum_{y=0}^l \mathbf{p}_{-y}^+(s) \mathbf{P}_s^{-1} \sum_{j=y-l+1}^{\infty} \check{\mathbf{p}}_j^-(s) \mathbf{\Pi}_0(j), \quad l \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}. \quad (47)$$

Доведення. Співвідношення (45) - (47) випливають відповідно із (29) - (31) якщо підставити $x = 0$. □

6. ВИСНОВКИ

В роботі одержані представлення для відповідних генератрис $\mathbf{V}_i(s, x, u_i)$ пар перестрибкових функціоналів $\{\tau^+(x), \gamma_i(x)\}$, що виражаються з допомогою (24) через знайдені функції (26)-(28) у випадку майже напівнеперервних знизу процесів заданих на ланцюгу Маркова. Для цих процесів отримано співвідношення (32) для твірного перетворення спільної генератрис функціоналів $\{\tau^+(x), \gamma_1(x), \gamma_2(x), \gamma_3(x)\}$ та деякі допоміжні твердження, які дозволяють знайти граничні розподіли перестрибків через нескінченно віддалений та нульовий рівень в термінах твірних перетворень додатних стрибків та матриці, що визначає розподіл доповнення до максимуму.

ЛІТЕРАТУРА

1. И. И. Ежов, А. В. Скороход, *Марковские процессы, однородные по второй компоненте*, Теория вероятн. и её примен. **14** (1969), №1, 3–14; №4, 679–692.
2. E. Arjas, *On a fundamental identity in the theory of semi-Markov processes*, Adv. Appl Probab. **4** (1972), №2, 258–270.
3. А. А. Могильский, *Факторизационные тождества для процессов с независимыми приращениями, заданных на конечной цепи Маркова, однородные по второй компоненте*, Теория вероятн. и мат. статистика **11** (1974), 86–96.
4. S. Asmussen and H. Albrecher, *Ruin Probabilities*, World Sci., Hackensack, 2010.
5. Д. В. Гусак, *Граничні задачі для процесів з незалежними приростами на скінченних ЛМ та для напівмарковських процесів*, Ін-т математики НАН України, Київ, 1998.
6. Є. В. Карнаух, *Граничні задачі для одного класу процесів на ланцюгу Маркова*, Автореф. дис. кан-та фіз.-мат. наук Київ, 2007.
7. В. И. Лотов, Н. Г. Орлова, *О факторизационных представлениях в граничных задачах для случайных блужданий, заданных на цепи Маркова*, Сибирск. математ. журнал **46** (2005), №4, 833–840.
8. Д. В. Гусак, М. С. Герич, *Про генератрис екстремумів та їх доповнень для майже напівнеперервних цілочислових пуассонівських процесів на ланцюгах Маркова*, Укр. матем. журн. (2015) **67** №8, 1034–1049.

9. Д. В. Гусак, А. И. Турениязова, *Распределение некоторых граничных функционалов для решетчатых пуассоновских процессов на цепи Маркова*, Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей, Сб.науч.тр., Ин-т математики АН УССР, Киев, 1967, стр. 21–27.
10. Д. В. Гусак, *Процеси з незалежними приростами в теорії ризику*, Ін-т математики НАН України, Київ, 2011.
11. М. С. Герич, *Уточнення основної факторизаційної тотожності для майже напівнеперервних гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгу Маркова*, Карпатські математичні публікації 4 (2012), №2, 229–240.
12. М. С. Герич, *Генератриса розподілу екстремумів та їх доповнень для напівнеперервних зверху гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгу Маркова*, Вісн. Київ. нац. ун-т ім. Т.Г. Шевченка. Сер: фіз.-мат. науки, 1 2013, 21–27.

КАФЕДРА ТЕОРІЙ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ, МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ, ДВНЗ
"УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВУЛ. УНІВЕРСИТЕТСЬКА, 14, КІМНАТА 313, УЖГО-
РОД 88000, УКРАЇНА
Адреса електронної пошти: miroslava.gerich@yandex.ua

Надійшла 12/02/2016