УДК 681.14

В. М. Коцовський (Ужгородський нац. ун-т)

НЕЙРОННІ ЕЛЕМЕНТИ НАД КІЛЬЦЕМ $\mathbb{Z}_{p^m}$.

У роботі розглядаються нейронні елементи над $\mathbb{Z}_{p^m}$, вивчається їх використання для задання дискретних функцій.

In the current work ...

Нехай p — непарне просте число, m — натуральне, $\mathbb{Z}_{p^m} = \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z},\ c = \varphi(p^m)$, де φ — функція Ейлера, $G = U(\mathbb{Z}_{p^m})$ — група оборотних елементів кільця $\mathbb{Z}_{p^m}$. Відомо [], що $G = \langle \varepsilon \mid \varepsilon^c = 1\rangle$. Тоді для кожного $a \in G$ $a = \varepsilon^{\operatorname{ind} a}$, де $\operatorname{ind} a \in \{0, 1, \ldots c-1\}$. Нехай n — натуральне, $k_0, k_1, \ldots, k_n$ — такі натуральні числа, що $k_i > 1,\ k_i \mid (p-1)$ ($p-1$ націло ділиться на k_i), $\sigma_i = \varepsilon^{\frac{c}{k_i}}, k = \prod\limits_{i=1}^{n} k_i, H_i = \langle \sigma_i \mid \sigma_i^{k_i} = 1\rangle,\ i = 0, \ldots, n,\ H = H_1 \times \ldots \times H_n$ — прямий добуток циклічних груп H_i. Визначимо відображення $\operatorname{Gsign} : G \to H_0$ так:

$$\operatorname{Gsign} x = \left[\frac{k_0 \cdot \operatorname{ind} x}{c}\right],$$

де $[a]$ — ціла частина раціонального числа a.

Означення. Дискретна функція $f : H \to H_0$ реалізується на нейронному елементі над кільцем $\mathbb{Z}_{p^m}$ (f — $\mathbb{Z}_{p^m}$-нейрофункція), якщо існує такий $n+1$–вимірний вектор $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \ldots, w_n),\ (w_i \in \mathbb{Z}_{p^m})$, що для довільного $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n),\ x_i \in H_i$

$$f(x) = \operatorname{Gsign}(w_0 + w_1 x_1 + \ldots w_n x_n).$$

Вектор $\mathbf{w}$ називається вектором структури нейронного елемента. Надалі для скорочення запису зважену суму $w_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} w_i x_i$ будемо позначати через $\mathrm{w}(\mathbf{x})$.

Лема 1. *Функція $f(\mathbf{x})$ є $\mathbb{Z}_{p^m}$-нейрофункцією із структурою $\mathbf{w}$ тоді і тільки, коли знайдеться така функція $\psi : H \to G$, що для всіх $\mathbf{x} \in H$*

$$f(\mathbf{x}) \cdot \psi(\mathbf{x}) = \mathrm{w}(\mathbf{x}), \quad 0 \le \operatorname{ind} \psi(\mathbf{x}) < \frac{c}{k_0}.$$

Доведення випливає з означення $\mathbb{Z}_{p^m}$-нейрофункцій.

Нехай $L(H, \mathbb{Z}_{p^m}) = \{f \mid f : H \to G\}$. Очевидно, що $L(H, \mathbb{Z}_{p^m})$ можна роглядати, як $\mathbb{Z}_{p^m}$-модуль. Визначимо функції $\chi_j : H \to G,\ j = 0, 1, \ldots k-1$ так:

$$\chi_j(\mathbf{x}) = x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n},$$

де $0 \le j_i < k_i,\ i = 1, \ldots n,\ j = j_1 + k_1 j_2 + \ldots + k_1 k_2 \ldots k_{n-1} j_n$ — запис числа j в узагальненій системі числення з основами $k_1, \ldots k_n$. Легко бачити, що функції χ_j являються гомоморфними відображеннями з H в групу оборотних елементів кільця $\mathbb{Z}_{p^m}$. По аналогії до [] функції χ_j будемо називати характерами групи H. Введемо функцію $() : L(H, \mathbb{Z}_{p^m}) \times H^k \to \mathbb{Z}_{p^m}$ наступним чином:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=0}^{k-1} x_i y_i^{-1}.$$

Лема 2. *Для системи функцій $\{\chi_j\}$ справедливі співвідношення:*

$$\sum_{\mathbf{x}\in H} \chi_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} k, \text{ якщо } j=0 \\ 0, \text{ якщо } 0<j<k, \end{cases} \tag{1}$$

$$(\chi_i,\chi_j) = \begin{cases} k, \text{ якщо } i=j \\ 0, \text{ якщо } i\neq j. \end{cases} \tag{2}$$

Доведення. Доведемо (1) у випадку $j>0$.

$$\sum_{\mathbf{x}\in H} \chi_j(\mathbf{x}) = \sum_{i_1=0}^{k_1-1}\ldots\sum_{i_n=0}^{k_n-1}\sigma_1^{i_1j_1}\ldots\sigma_n^{i_nj_n} = \prod_{i=1}^{n}\left(1+\sigma_i^{j_i}+\ldots+\sigma_i^{j_i(k_i-1)}\right).$$

Нехай $j_l\geq 1$. Тоді $(\sigma_l^{j_l}-1)\sum\limits_{\mathbf{x}\in H}\chi(\mathbf{x})=0$. Досить показати, що $\sigma_l^{j_l}-1$ — оборотний елемент кільця $\mathbb{Z}_{p^m}$. Останнє твердження випливає з малої теореми Ферма та з наступних рівностей: $\varepsilon=\bar{\varepsilon}+\,+p^m\mathbb{Z},\ \bar{\varepsilon}\in\mathbb{Z},\quad \bar{\varepsilon}^{\frac{c}{k_l}j_l}\equiv\bar{\varepsilon}^{\frac{p-1}{k_l}j_l}\not\equiv 1 \pmod p$. Співвідношення (2) випливає з (1) та рівності $(\chi_i,\chi_j)=\chi_{i\ominus j}$, де $(i\ominus j)+j\equiv i \pmod{k-1}$.

Теорема 1. *Система функцій $\{\chi_j\}$ є базисом $\mathbb{Z}_{p^m}$-модуля $L(H,\mathbb{Z}_{p^m})$.*

Доведення. Покажемо спочатку, що функції χ_j утворюють лінійно незалежну над $\mathbb{Z}_{p^m}$ систему. Розглянемо рівність $\alpha_0\chi_0+\ldots\alpha_{k-1}\chi_{k-1}=\mathbf{0}$. Домножимо її на χ_i і просумуємо по всіх $\mathbf{x}\in H$. З врахуванням (2) отримаємо, що $k\alpha_i=0$. Оскільки k і p взаємопрості, то $\alpha_i=0$. Доведемо тепер, що χ_j породжують $L(H,\mathbb{Z}_{p^m})$. Нехай $f: H\to G$. Будемо вважати, що $f=(f_0,\ldots,f_{k-1})^T$, де $f_j=f(\sigma_1^{j_1},\ldots,\sigma_n^{j_n}),\ j= =j_1+k_1j_2+\ldots+k_1\ldots k_{n-1}j_n,\ j_i\in\{0,\ldots,k_i-1\},\ i=1,\ldots n$. Розглянемо квадратну матрицю U порядку k: $U=\|u_{ij}\|$, де $u_{ij}=\chi_j(\mathbf{x}_i)$. З леми 2 випливає, що $U^{-1}=\dfrac{1}{k}U^*$, де $\dfrac{1}{k}$ — елемент кільця $\mathbb{Z}_{p^m}$, обернений до $k+p^m\mathbb{Z}$, $U^*=\|u^*_{ij}\|_{i,j=\overline{1,k}}, u^*_{ij}=u^{-1}_{ji}$. Нехай вектор $s_f=(s_0,\ldots,s_{k-1})^T$ визначається так: $s_f=k^{-1}U^*f$. Тоді $f=s_0\chi_0+\ldots+ +s_{k-1}\chi_{k-1}$. Теорема доведена.

Теорема 2. *Дискретна функція $f: H\to H_0$ є $\mathbb{Z}_{p^m}$-нейрофункцією з структурою $\mathbf{w}$ тоді і тільки тоді, коли існує така функція $\psi: H\to G$, що $0\leq \operatorname{ind}\psi(\mathbf{x})<c/k_0$ і для всіх $\chi_j,\ j=0,\ldots k-1$, крім $j=0,1,k_1,\ldots,k_1\cdots k_{n-1}$ мають місце рівності*

$$(\psi f,\chi_j)=0. \tag{3}$$

Доведення. Покажемо спочатку що умова (3) є необхідною. Нехай функція f реалізується над $\mathbb{Z}_{p^m}$ на нейроному елементі з структурою $\mathbf{w}=(w_0,w_1,\ldots,w_n)$. Тоді згідно до леми 1 існує така функція $\psi(\mathbf{x})$, що $0\leq\operatorname{ind}\psi(\mathbf{x})<c/k_0$ і $\psi(\mathbf{x})f(\mathbf{x})=\mathrm{w}(\mathbf{x})$. Тоді $\psi(\mathbf{x})f(\mathbf{x})=w_0\chi_0+w_1\chi_1+w_2\chi_{k_1}+\ldots+w_n\chi_{k_1\ldots k_{n-1}}$. Функцію $\psi(\mathbf{x})f(\mathbf{x})$ розкладемо по базису $\{\chi_j\}$: $\psi(\mathbf{x})f(\mathbf{x})=\sum\limits_{j=0}^{k-1}s_j\chi_j(\mathbf{x})$. З двох останніх рівностей і однозначності розкладу по базису $\{\chi_j\}$ випливає справедливість співвідношення (3). Необхідність доведена. Покажемо, що умова (3) є достатньою. З справедливості співвідношення (3) випливає, що у розкладі функції $\psi(\mathbf{x})f(\mathbf{x})$ по базису $\{\chi_j\}$ коефіцієнти s_j рівні нулю при $j\notin\{0,1,k_1,\ldots,k_1k_2\cdots k_{n-1}\}$. Тому для функції $f(\mathbf{x})$ виконується достатня умова леми 1. Отже $f(\mathbf{x})$ є $\mathbb{Z}_{p^m}$-нейрофункцією з структурою $\mathbf{w}$. Теорема доведена.

Для дискретних функцій можна встановити аналоги до відомих теорем Чоу, які наведені в [7] для різних класів дискретних функцій.

[1] *Гече Ф. Е.* Реалізація бульових функцій на двопорогових нейронних елементах // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – Ужгород, 1999. – Вип. 4 С. 17–24.

[2] *Яджима С., Ибараки Т.* Нижняя оценка числа пороговых функций // Киберн. сб. Нов. сер. – 1969.– Вып. 6. – С. 72–81.

[3] *Блох М. Б, Моравек Я.* Оценка числа пороговых функций // Киберн. сб. Нов. сер. – 1969.– Вып. 6. – С. 82–88.

[4] *Winder R. O.* Bounds of threshold date realizability, *Trans. IEEE*, EC–14, №5 (1963).

[5] *Winder R. O.* Lower bounds of the number threshold function, *Trans. IEEE*, EC–14, №3 (1965).

[6] *Muroga S.* Lower bounds of the number threshold function, and a maximum weight, *Trans. IEEE*, EC–14, №2 (1965).

[7] *Гече Ф. Е., Коцовський В. М.* Задання предикатів із скінченною областю визначення // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – Ужгород, 2001. – Вип. 6 С. 9–14.

Одержано 01.08.2004