

УДК 512.84

О. А. Кирилюк (Ужгородский нац. ун-т)

МІНІМАЛЬНІ НЕЗВІДНІ РОЗВ'ЯЗНІ ПІДГРУПИ ГРУПИ $GL(2, R_2)$

Пам'яті П. М. Гудивка присвячується

All nonabelian minimal irreducible solvable subgroups of the group $GL(2, R_2)$ (R_2 is the ring of integers of the finite extension F_2 of the field \mathbb{Q} rational 2-adic numbers) are described up to conjugation.

Описуються з точністю до спряженості всі неабелеві мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(2, R_2)$ (R_2 — кільце цілих величин скінченного розширення F_2 поля раціональних 2-адичних чисел \mathbb{Q}_2).

Мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(q, K)$, де q — просте число, а K — поле, описані з точністю до спряженості в [1]. В [2] такі підгрупи описані з точністю до спряженості при $q = 3$ і $K = R_p$ — кільце цілих величин скінченного розширення поля раціональних p -адичних чисел Q_p . В [3] класифіковані неспряжені мінімальні незвідні абелеві підгрупи групи $GL(2, R_2)$, а в [4] формулюються результати класифікації неспряжених неабелевих мінімальних незвідних розв'язних підгруп групи $GL(2, R_p)$. У даній роботі наводиться з повними доведеннями і уточненнями така класифікація при $p = 2$.

Нехай R_2 — кільце цілих величин скінченного розширення F_2 поля раціональних чисел в \mathbb{Q}_2 .

Поряд з означенням груп $H_{1,l,j}$, $G_{l,k}$ статті [1] всюду далі будуть використовуватися наступні позначення:

- $(F_p : Q_p) = ef$, де e — індекс розгалуження, а f — степінь інерції поля F_p відносно поля Q_p ;
- P_q — силовська q -підгрупа мультиплікативної групи F_p^* поля F_p ;
- Π — множина всіх таких простих чисел $q \neq 2$, для яких $P_q \neq \langle 1 \rangle$;
- Π' — множина всіх таких простих чисел $r > 2$, що $(F_p(\theta) : F_2) = 2$, де θ — первісний корінь степеня r із 1,

D_4, K_4 — групи дієдра і кватерніонів порядку 8 відповідно.

Нехай надалі $p = 2$. Якщо $|P_2| = 2^n$ і $(F_2 : Q_2) = e \cdot f$, то $e = 2^{n-1} \cdot m$. Із відомих фактів теорії зображення скінчених груп легко одержати, що з точністю до ізоморфізму нециклічні мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(2, R_2)$ вичерпуються групами:

- 1) $H_{1,q,j} = G_{1,q}$ при $|P_2| = 2$;
- 2) $G_{l,q}, D_4, K_4$ при $|P_2| = 2^2$ ($l = 1, 2, \dots$);
- 3) $G_{l,q}, D_4, H_4$ при $|P_2| = 2^n$ ($n \geq 3$; $l = 1, \dots, n$; $k = 3, \dots, n$), де q пробігає множину Π , а F_2 не є цілком розгалужене розширення поля Q_2 ; групами D_4, K_4 при $|P_2| = 2^2$ і D_4, K_4, H_k при $|P_2| = 2^n$ ($n \geq 3$; $k = 3, \dots, n$), якщо F_2 — цілком розгалужене розширення поля Q_2

Нехай F_2 не є цілком розгалуженим розширенням поля Q_2 . Тоді $\Pi \neq \emptyset$ і нехай θ_q — елемент порядку $q \in \Pi$ в кільці R_2 . Опишемо всі нееквівалентні R_2 -зображення степеня 2 груп H_k, D_4, K_4 і $G_{l,q}$.

Нехай

$$G \cong H_k = \langle a, b | a^{2^k} = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{1+2^{k-1}} \rangle (k = 3, \dots, n),$$

де $|P_2| = 2^n$ ($n \geq 3$). Позначимо $r = 1 + 2^{k-1}$. Із [4] випливає, що F_2 -зображення степеня 2 групи G з точністю до еквівалентності вичерпуються зображеннями

$$\Gamma_j : a \rightarrow \begin{pmatrix} \xi^j & 0 \\ 0 & \xi^{jr} \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1 \leq j < 2^k),$$

де ξ — елемент порядку 2^s ($s \leq k$) в полі F_2 . Звідси легко випливає, що Γ_j незвідне і точне над R_2 тоді і тільки тоді, коли ξ — елемент порядку 2^k в полі F_2 і $j = 1, 3, \dots, 2^{k-1} - 1$. Позначаючи $\varepsilon = \xi^j$, одержимо, що Γ_j можна представити у вигляді:

$$\Gamma_j : a \rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

де ε пробігає первісні корені степеня 2^k із 1 в полі F_2 .

Нехай $\pi = \varepsilon^r - \varepsilon$. Тоді

$$\pi = \varepsilon(\varepsilon^{r-1} - 1) = \varepsilon(\xi^{2^{k-1}} - 1) = \theta t^e \quad (\theta \in R_2^*).$$

Очевидно, довільне точне R_2 -зображення групи G F_2 -еквівалентне зображення Γ має вигляд

$$\Delta : a \rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon & x \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R_2),$$

де $x = 0$ або $x = t^{e-s}$ ($s = 1, \dots, e$). Якщо $x = 0$, то $\Delta \sim \Gamma$. Нехай $x = t^{e-s}$. Тоді із співвідношення $AB = BA^r$ одержимо $\delta = -\alpha$ і $\gamma = \alpha\pi t^{s-e}$. Із рівності $B^2 = E$ випливає, що $\beta = \frac{(1-\alpha^2)t^{e-s}}{\alpha\pi}$. Очевидно, $\beta \in R_2$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha^2 \equiv 1 \pmod{t^s}$. Таким чином, $\Delta_s = \Delta$ приймає вигляд:

$$\Delta_s(\alpha_s) : a \rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon & t^{e-s} \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix} = A_s, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_s & \frac{(1-\alpha_s^2)t^{e-s}}{\alpha_s\pi} \\ \frac{\alpha_s\pi}{t^{e-s}} & -\alpha_s \end{pmatrix} = B_s,$$

де $\alpha_s^2 \equiv 1 \pmod{t^s}$ ($1 \leq s \leq e$).

Лема 1. Зображення $\Delta_s(\alpha_s)$ і $\Delta_{s'}(\bar{\alpha}_{s'})$ R_2 -еквівалентні тоді і тільки тоді, коли $s = s'$ і $\alpha_s \equiv \bar{\alpha}_{s'} \pmod{t^s}$.

Доведення. Необхідність. Нехай $c^{-1}\Delta_s(\alpha_s)(g) = \Delta_{s'}(\bar{\alpha}_{s'})(g)$ для всіх $g \in G$, де $C \in GL(2, R_2)$. Легко бачити, що тоді

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & \frac{(\alpha_s - \bar{\alpha}_{s'})t^{e-s}}{\alpha_s\pi} \\ 0 & \alpha_s\bar{\alpha}_{s'}^{-1}c_4 \end{pmatrix},$$

звідки $\alpha_s \equiv \bar{\alpha}_{s'} \pmod{t^s}$. Відмітимо, що $\Delta_s(\alpha_s)$ і $\Delta_{s'}(\bar{\alpha}_{s'})$ нееквівалентні над R_2 при $s \neq s'$, оскільки вони нееквівалентні на підгрупі $H = \langle a \rangle$.

Необхідність доведена. Достатність одержимо, якщо провести міркування в зворотному порядку. Лема доведена.

Твердження 1. *Нехай R_2 містить первісний корінь ξ степеня 2^n із 1 ($n \geq 3$). Незвідні точні R_2 -зображення степеня 2 групи*

$$H_k = \langle a, b | a^{2^k} = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{1+2^{k-1}} \rangle \quad (k = 3, \dots, n)$$

з точністю до еквівалентності вичерпуються зображеннями:

$$\begin{aligned} \Delta_0 : a &\rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon^j & 0 \\ 0 & -\varepsilon^j \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \\ \Delta_1 : a &\rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon^j & t^{e-1} \\ 0 & -\varepsilon^j \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi t^{e-1} & -1 \end{pmatrix}; \\ \Delta_s(\alpha_s) : a &\rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon^j & t^{e-s} \\ 0 & -\varepsilon^j \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_s & \frac{(1-\alpha_s^2)t^{e-s}}{\alpha_s \pi} \\ \frac{\alpha_s \pi}{t^{e-s}} & -\alpha_s \end{pmatrix} \quad (1 \leq s \leq e), \end{aligned}$$

де ε — деякий елемент порядку 2^k в кільці R_2 , $\pi = -2\varepsilon$, $e = 2^{n-1} \cdot m$; $j = 1, 3, \dots, 2^{k-1} - 1$, а елементи α_s задаються формулою

$$\alpha_s = 1 + \lambda_h t^h + \dots + \lambda_{s-1} t^{s-1}, \quad (1)$$

де $h = \frac{s}{2}$, якщо s парне і $h = \frac{s+1}{2}$, якщо s непарне, а $\lambda_h, \dots, \lambda_{s-1}$ пробігають представники лівих суміжних класів кільця R_2 за ідеалом tR_2 (t — простий елемент кільця R_2).

Доведення. Очевидно, довільний корінь ε_1 степеня 2^k із 1 можна представити у вигляді $\varepsilon_1 = \varepsilon^j$ для деякого j ($1 \leq j \leq 2^k$). Нехай $\alpha_s \in R_2$ має вигляд

$$\alpha_s = \lambda_0 + \lambda_1 t + \dots + \lambda_{s-1} t^{s-1}, \quad (2)$$

де λ_j ($j = 0, \dots, s-1$) суть представники лівих суміжних класів R_2 за ідеалом tR_2 . Якщо $\bar{\alpha}_s = \alpha_s + \lambda_s t^s$ ($\lambda_j \in R_2$), то $\alpha_s \equiv \bar{\alpha}_s \pmod{t^s}$. Таким чином, з огляду на лему 1, можна вважати, що α_s має вигляд (2). З конгруенції $\alpha_s^2 \equiv 1 \pmod{t^s}$ одержимо $(\lambda_0 + \lambda_1 t + \dots + \lambda_{s-1} t^{s-1})^2 - 1 \equiv 0 \pmod{t^s}$. Звідси в силу рівності $2 = \theta_1 t^e$ маємо $(\lambda_0^2 - 1) + \lambda_1^2 t_1^2 + \dots + \lambda_{s-1}^2 t^{2(s-1)} \equiv 0 \pmod{t^s}$. З останньої конгруенції і того, що $\lambda_j \in \frac{R_2}{tR_2}$ випливає, що $\lambda_0 = 1$ і $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{h-1} = 0$, де $h = \frac{s}{2}$ при парному s і $h = \frac{s+1}{2}$ при непарному s . Очевидно, що при $s = 1$, $\alpha_1 = 1$. Нехай тепер $\Delta_s(\alpha_s) \sim R_2 \Delta_s(\alpha'_s)$. Тоді з леми 1 випливає рівність

$$\alpha_s - \alpha'_s = (\lambda_h - \lambda'_h) t^h + \dots + (\lambda_{s-1} - \lambda'_{s-1}) t^{2(s-1)} \equiv 0 \pmod{t^s}.$$

Звідси і із властивостей елементів λ_j , λ'_j для всіх $j = h, \dots, s-1$. Таким чином $\alpha_s = \alpha'_s$. Твердження доведено.

Нехай $D_4 = \langle a, b \rangle$ — група діедра, а $K_4 = \langle a, b \rangle$ — група кватерніонів порядку 8. Аналогічно твердженню 1 доводиться наступне твердження.

Твердження 2. *Нехай кільце R_2 містить елемент порядку 2^n . Незвідні точні R_2 -зображення степеня 2 групи D_4 з точністю до еквівалентності вичерпуються зображеннями:*

$$\Delta_0 : a \rightarrow \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\Delta_1 : a \rightarrow \begin{pmatrix} i & t^{e-1} \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2it^{1-e} & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Delta_s(\alpha_s) : a \rightarrow \begin{pmatrix} i & t^{e-s} \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_s & \frac{(\alpha_s^2-1)t^{e-s}}{2\alpha_s i} \\ -\frac{2\alpha_s i}{t^{e-s}} & -\alpha_s \end{pmatrix},$$

де t – простий елемент кільця R_2 , $e = 2^{n-1} \cdot t$, елементи α_s задаються формулою

$$\alpha_s = 1 + \lambda_h t^h + \dots + \lambda_{s-1} t^{s-1}, \tag{3}$$

λ_j ($j = h, h + 1, \dots, s - 1$) пробігають представників лівих суміжних класів кільця R_2 за ідеалом tR_2 , $h = \frac{s}{2}$ при парному s і $h = \frac{s+1}{2}$, якщо s непарне.

Твердження 3. Незвідні точні R_2 -зображення групи K_4 при $i \in P_2$ ($i^2 = -1$) з точністю до еквівалентності вичерпуються зображеннями:

$$\Delta_0 : a \rightarrow \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\Delta_1 : a \rightarrow \begin{pmatrix} i & t^{e-1} \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1^{-1} i t^{e-1} \\ -\frac{2i}{t^{e-1}} & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Delta_s(\alpha_s) : a \rightarrow \begin{pmatrix} i & t^{e-s} \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_s & \frac{(1+\alpha_s^2)t^{e-s}}{2\alpha_s i} \\ -\frac{2\alpha_s i}{t^{e-s}} & -\alpha_s \end{pmatrix} \quad (1 < s \leq e),$$

де при $|P_2| = 2^n$ ($n \geq 2$) $e = 2^{n-1} \cdot t$, а елементи α_s задаються формулою (3).

Нехай $G \cong G_{l,q} = \langle a, b | a^q = b^{2^l} = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$, де $q \neq 2$ пробігає множину Π ($l = 1, \dots, n$). Очевидно, довільне точне R_2 -зображення групи $H = \langle a \rangle$ є цілком звідним. Нехай Γ – точне R_2 -зображення групи $H = \langle a \rangle$. Тоді Γ представимо у вигляді:

$$\Gamma : a \rightarrow \begin{pmatrix} \theta_q^j & 0 \\ 0 & \theta_q^{-j} \end{pmatrix} = A_j,$$

де θ_q – деякий елемент порядку q в R_2 ($j = 1, \dots, \frac{q-1}{2}$). Легко бачити, що тоді довільне точне R_2 -зображення Δ групи G можна представити у вигляді:

$$\Delta : a \rightarrow A_j, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B(\xi), \tag{4}$$

де ξ первісний корінь степеня 2^{k-1} із l в полі F_2 , $j = 1, \dots, \frac{q-1}{2}$ і $l = 1, \dots, n$.

Нехай $\Delta' = \Delta'(\xi')$ – деяке друге R_2 -зображення степеня 2 групи G вигляду (4). Неважко показати, що $\Delta \sim \Delta'$ над кільцем R_2 тоді і тільки тоді, коли $\xi = \xi'$. Оскільки Δ незвідне, то ми довели наступне твердження.

Твердження 4. Незвідне точне R_2 -зображення степеня 2 групи $G_{l,q} = \langle a, b \rangle$ з точністю до еквівалентності вичерпуються зображеннями

$$\Delta_j(\xi) : a \rightarrow \begin{pmatrix} \theta_q^j & 0 \\ 0 & \theta_q^{-j} \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

де θ_q – деякий елемент порядку q в кільці R_2 , $j = 1, \dots, \frac{q-1}{2}$, а ξ пробігає всі первісні корені степеня 2^{l-1} із l в кільці R_2 .

Зберігаючи позначення тверджень 1–4 введемо наступні серії групи $GL(2, R_2)$:

$$V_1^{(0)} = \left\langle \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \right\rangle;$$

$$V_1^{(\alpha_s)} = \left\langle \left(\begin{array}{cc} i & t^{e-s} \\ 0 & -i \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} \alpha_s & \frac{(\alpha_s^2-1)t^{e-s}}{2\alpha_s i} \\ -\frac{2\alpha_s i}{t^{e-s}} & -\alpha_s \end{array} \right) \right\rangle \quad \left(1 \leq s \leq \frac{e}{2} \right);$$

$$V_1^{(\beta_j^{(r)})} = \left\langle \left(\begin{array}{cc} i & t^{e-r} \\ 0 & -i \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} \beta_j^{(r)} & \frac{[(\beta_j^{(r)})^2-1]t^{e-r}}{2\beta_j^{(r)}i} \\ -\frac{2\beta_j^{(r)}i}{t^{e-r}} & -\beta_j^{(r)} \end{array} \right) \right\rangle \quad \left(\frac{e}{2} \leq r \leq e \right);$$

$$V_2^{(0)} = \left\langle \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \right\rangle;$$

$$V_2^{(\alpha_s)} = \left\langle \left(\begin{array}{cc} i & t^{e-s} \\ 0 & -i \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} \alpha_s & \frac{(1+\alpha_s^2)t^{e-s}}{2\alpha_s i} \\ -\frac{2\alpha_s i}{t^{e-s}} & -\alpha_s \end{array} \right) \right\rangle \quad \left(1 \leq s \leq \frac{e}{2} \right);$$

$$V_2^{(\beta_j^{(r)})} = \left\langle \left(\begin{array}{cc} i & t^{e-r} \\ 0 & -i \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} \beta_j^{(r)} & \frac{[1+(\beta_j^{(r)})^2]t^{e-r}}{2\beta_j^{(r)}i} \\ -\frac{2\beta_j^{(r)}i}{t^{e-r}} & -\beta_j^{(r)} \end{array} \right) \right\rangle \quad \left(\frac{e}{2} < r \leq e \right),$$

де елементи $\alpha_s, \beta_j^{(r)}$ ($j = 1, \dots, n_r$) задаються формулою (3) і $\beta_j^{(r)} \neq \beta_k^{(r)} \pmod{t^r}$ при $k \neq j$ ($k, j = 1, \dots, n_r; \frac{e}{2} < r \leq e$);

$$V_k^{(0)} = \left\langle \left(\begin{array}{cc} \varepsilon_k & 0 \\ 0 & -\varepsilon_k \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \right\rangle;$$

$$V_k^{(s)} = \left\langle \left(\begin{array}{cc} \varepsilon_k & t^{e-s} \\ 0 & -\varepsilon_k \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} \alpha_s & \frac{(1-\alpha_s^2)t^{e-s}}{\alpha_s \Pi} \\ \frac{\alpha_s \Pi}{t^{e-s}} & -\alpha_s \end{array} \right) \right\rangle,$$

де елементи α_s задаються формулою (3), ε_k – елемент порядку 2^k в кільці R_2 ($\Pi = -2\varepsilon_k; 3 \leq k \leq n; 1 \leq s \leq e$);

$$W_l^{(q)} = \left\langle \left(\begin{array}{cc} \theta_q & 0 \\ 0 & \theta_q^{-1} \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & \xi_l \\ 1 & 0 \end{array} \right) \right\rangle,$$

де θ_q – елемент порядку q в кільці R_2 , q – пробігає множину Π і ξ_l – деякий елемент порядку 2^{l-1} в кільці R_2 ($1 \leq l \leq n$).

В цих позначеннях має місце наступна теорема.

Теорема 1. Неабелеві мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(2, R_2)$ з точністю до спряженості вичерпуються групами:

- 1) $W_1^{(q)}$ при $|P_2| = 2$ ($q \in \Pi$);
- 2) $W_1^{(q)}, V_1^{(0)}, V_1^{(\alpha_s)}, V_1^{(\beta_j^{(r)})}, V_2^{(0)}, V_2^{(\alpha_s)}, V_2^{(\beta_j^{(r)})}$ при $|P_2| = 2^2$ ($q \in \Pi$);
- 3) $W_1^{(q)}, V_1^{(0)}, V_1^{(\alpha_s)}, V_1^{(\beta_j^{(r)})}, V_2^{(0)}, V_2^{(\alpha_s)}, V_2^{(\beta_j^{(r)})}, V_k, V_k^{(\alpha_s)}$ при $|P_2| = 2^n$ ($n \geq 3; k = 3, \dots, n; 1 \leq s \leq \frac{e}{2}; \frac{e}{2} < r \leq s$), де q пробігає множину Π ($l = 1, \dots, n$).

Доведення. Нехай G — мінімальна незвідна розв'язна неабелева підгрупа групи $GL(2, R_2)$. Оскільки $|P_2| \geq 2$, то можливі такі випадки:

1) $G \cong G_{l,q}$ ($l = 1, 2, \dots, n$).

З твердження 4 випливає, що G можна представити у вигляді

$$G = \left\langle \left(\begin{pmatrix} \theta_q^i & 0 \\ 0 & \theta_q^{-j} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \right\rangle,$$

де θ_q — фіксований елемент порядку $q \in \Pi$, $j = 1, \dots, \frac{q-1}{2}$, а ξ пробігає всі елементи порядку 2^{l-1} в полі F_2 .

2) Нехай D_4 — група діедра порядку 8. Введемо в розгляд групи

$$T_1^{(\gamma_s)} = \left\langle \left(\begin{pmatrix} i & t^{e-s} \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_s & \frac{(\gamma_s^2-1)t^{e-s}}{2\gamma_s i} \\ -\frac{2\gamma_s i}{t^{e-s}} & -\gamma_s \end{pmatrix} \right) \right\rangle \quad (1 \leq s \leq e),$$

де елементи γ_s задаються формулою (3). Легко бачити, що $V_1^{(0)}$ не спряжена з групою $T_1^{(\gamma_s)}$. Неважко також перевірити, що $T_1^{(\gamma_s)}$ не спряжений з $T_1^{(\gamma_{s'})}$ при $s \neq s'$. Припустимо, що $C^{-1}T_1^{(\alpha_s)}C = T_1^{(\beta_s)}$, де

$$T_1^{(\alpha_s)} = \langle A_s, B_s \rangle, \quad T_1^{(\beta_s)} = \langle A_s, B'_s \rangle, \quad \alpha_s = \alpha \neq \beta_s = \beta \pmod{t^s} \text{ і } C \in GL(2, R_2).$$

Тоді можливі випадки:

а) $C^{-1}A_sC = A_s$, $C^{-1}B_sC = A_s^k B'_s$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$).

Із співвідношення $A_sC = CA_s$ випливає, що матриця C має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} x & \frac{(x-y)t^{e-s}}{2i} \\ 0 & y \end{pmatrix} \quad (x, y \in R_2), \tag{5}$$

де $x \equiv y \pmod{t^s}$ і $x, y \in R_2^*$. Легко перевірити, що випадок $k = 0, 2$ неможливий. Припустимо, що $B_sC = CA_s B'_s$. З формули (5) і останньої рівності одержимо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha x i t^{e-s} = (x-y)\beta - \beta x t^{e-s}, \\ \alpha x i = -\beta y, \\ \frac{\alpha^2(x-y) + (\alpha^2-1)yt^{e-s}}{\alpha i} = \frac{\beta^2(y-x) + (\beta^2+1)yt^{e-s}}{\beta}, \\ \alpha(y-x) - \alpha y t^{e-s} = -\beta y i t^{e-s}. \end{cases} \tag{6}$$

Знаходячи з другого рівняння системи (6) $y = -\beta^{-1}\alpha x i$ і, підставляючи його в решту рівнянь цієї системи, одержимо рівність $\alpha x i (t^{e-s} - 1) = -\beta x (t^{e-s} - 1)$, звідки $\alpha x i = -\beta x$ або $t^{e-s} = 1$. У першому випадку $\beta = -\alpha i$ і $x = y$, а в другому $s = e$ і, як легко бачити, $\beta \equiv \alpha i \pmod{t^s}$, де $\beta \neq \alpha \pmod{t^s}$, $s > \frac{e}{2}$. Якщо $B_sC = -CA_s B'_s$, то $y = \beta^{-1}\alpha x i$, а звідси, як і в попередньому випадку, $\beta = \alpha i$, або $t^{e-s} = 1$, звідки $\beta \equiv \alpha i \pmod{t^s}$, де $s > \frac{e}{2}$.

б) $C^{-1}A_sC = -A_s$, $C^{-1}B_sC = A_s^k B'_s$ ($k = 0, 1, 2, 3$).

Аналогічно попередньому доводиться, що $T_1^{(\alpha_s)}$ спряжена з $T_1^{(\beta_s)}$ тоді і тільки тоді, коли $\beta_s \equiv \alpha_s i \pmod{t^s}$ і $s > \frac{e}{2}$ ($k = 1, 3$).

3) Нехай K_4 — група кватерніонів порядку 8. Дотримуючись позначень твердження 3, введемо групи

$$T_2^{(\gamma_s)} = \left\langle \left(\begin{pmatrix} i & t^{e-s} \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_s & \frac{(1+\gamma_s^2)t^{e-s}}{2\gamma_s i} \\ -\frac{2\gamma_s i}{t^{e-s}} & -\gamma_s \end{pmatrix} \right) \right\rangle \quad (1 \leq s \leq e),$$

де елементи γ_s задаються формулою (3). Згідно твердження 2 G спряжена в $GL(2, R_2)$ з групою $V_2^{(0)}$ або з одною із груп $T_2^{(\gamma_s)}$. Очевидно, що $T_2^{(\gamma_s)}$ і $T_2^{(\gamma_{s'})}$ не спряжені при $s \neq s'$. Припустимо, що для деякої матриці $C \in GL(2, R_2)$, $C^{-1}T_2^{(\alpha_s)}C = T_2^{(\beta_s)}$, де

$$T_2^{(\alpha_s)} = T_2^{(\alpha)} = \langle A_s, B_s \rangle, \quad T_2^{(\beta_s)} = T_2^{(\beta)} = \langle A_s, B'_s \rangle, \quad \alpha \neq \beta \pmod{t^s}.$$

Аналогічно 2), $\beta \equiv \alpha i \pmod{t^s}$, де $s > \frac{e}{2}$. З іншого боку, якщо $\beta \equiv \alpha i \pmod{t^s}$ і $s > \frac{e}{2}$, то поклавши

$$C = \left(\begin{array}{cc} 1 & \frac{(\beta^{-1}i + \alpha)t^{e-s}}{2\alpha i} \\ -\frac{2i}{t^{e-s}} & -1 \end{array} \right),$$

одержимо $C^{-1}A_sC = -A_s$, $C^{-1}B_sC = A_sB'_s$, тобто $T_2^{(\alpha)}$ і $T_2^{(\beta)}$ спряжені. Неважко побачити, що при $s \leq \frac{e}{2}$ або $\beta \neq \alpha i \pmod{t^s}$ при $s > \frac{e}{2}$, $T_2^{(\alpha)}$ і $T_2^{(\beta)}$ не спряжені.

4) Нехай $G \cong H_k = \langle a, b | a^{2^k} = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{1+2^{k-1}} \rangle$ ($k = 3, \dots, n$). Згідно з твердженням 1 G спряжена з одною з груп:

$$T_k^{(0)} = \left\langle \left(\begin{pmatrix} \varepsilon_k^j & 0 \\ 0 & -\varepsilon_k^j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \right\rangle;$$

$$T_2^{(\alpha_s)} = \left\langle \left(\begin{pmatrix} \varepsilon_k^j & t^{e-s} \\ 0 & -\varepsilon_k^j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_s & \frac{(1-\alpha_s^2)t^{e-s}}{\alpha_s \Pi} \\ \frac{\alpha_s \Pi}{t^{e-s}} & -\alpha_s \end{pmatrix} \right) \right\rangle = \langle A_s, B_s \rangle,$$

де елементи α_s задаються формулою (3), $s = 1, \dots, e$, $j = 1, \dots, 2^{k-1}$ ($k = 3, \dots, n$). Легко бачити, що якщо при $j > 1$ покласти $C = \text{diag}[\varepsilon_k^{j-1}, 1]$, то

$$C^{-1}A_s^jC = \begin{pmatrix} \varepsilon_k & t^{e-s} \\ 0 & -\varepsilon_k \end{pmatrix},$$

тобто в $T_k^{(0)}$ і $T_k^{(\alpha_s)}$ достатньо розглядати випадок $j = 1$ і вважати, що $V_k^{(0)} = T_k^{(0)}$ і $V_k^{(\alpha_s)} = T_k^{(\alpha_s)}$.

Припустимо, що група $V_k^{(\alpha_s)} = V_k^{(\alpha)} = \langle A_s, B_s \rangle$ спряжена в $GL(2, R_2)$ з групою $V_k^{(\beta_s)} = V_k^{(\beta)} = \langle A_s, B'_s \rangle$, де $\alpha \neq \beta \pmod{t^s}$. З будови групи H_k випливає, що можливі випадки:

а) $C^{-1}A_sC = \mp A_s$, $C^{-1}B_sC = \mp B'_s$.

Якщо $C^{-1}A_sC = A_s$ і $C^{-1}B_sC = \mp B'_s$, то зображення $\Gamma : a \rightarrow A_s, b \rightarrow \mp B'_s$ було б точним R_2 -зображенням групи H_k , R_2 -еквівалентним зображенню $\Delta_s(\alpha_s)$, що неможливо, оскільки $\alpha_s \neq \beta_s \pmod{t^s}$. Тоді $C^{-1}A_sC = A_s$ і $C^{-1}B_sC = \mp B'_s$. З першого співвідношення випливає, що C має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} x & y \\ \frac{\alpha \Pi x}{t^{e-s}} & -x \end{pmatrix} \quad (x, y \in R_2). \quad (7)$$

З рівняння $B_s C = C B'_s$ легко отримати

$$y = \frac{[\alpha(1 - \alpha) + (1 - \beta)]t^{e-s}}{\beta\Pi},$$

звідки $(1 - \alpha)\alpha + (1 - \beta) \equiv 0(\text{mod } t^s)$. Оскільки $\alpha^2 \equiv 1(\text{mod } t^s)$, то $\beta \equiv \alpha(\text{mod } t^s)$, що неможливо. З тих же міркувань неможливий і випадок $B_s C = C B'_s$. Легко перевірити, що матриці A_s і A_s^j не спряжені над R_2 , якщо $\varepsilon_k^j \neq \mp \varepsilon_k$.

Нехай $\varepsilon_k^j = -\varepsilon_k$. Тоді $j = 1 + 2^{k-1}$ – розглянутий вище випадок. Тому залишилось розглянути можливість $C^{-1}A_s C = A_s^j B'_s$ ($j \neq 0$). В цьому випадку матриця C має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} x & c_1 z \\ z & \frac{c_2 t^{e-s}}{\varepsilon^j \beta \Pi} \end{pmatrix} \quad (x, z \in R_2), \quad (8)$$

де $c_2 = \varepsilon_k + \varepsilon_k^{(j-1)}\beta\varepsilon_k + \pi$ і c_1 – деякий елемент кільця R_2 . Припустимо, що $C^{-1}B_s C = B'_s$, де C має вигляд (8). Тоді

$$x = \frac{(\alpha + \beta + \varepsilon^j c_2) z t^{e-s}}{\alpha \Pi},$$

і оскільки $z \in R_2^*$, то $\alpha + \beta + \varepsilon^j c_2 \equiv \alpha + \beta \equiv 0(\text{mod } t^s)$, звідки $\alpha = \beta(\text{mod } t^s)$, що неможливо. До такої ж конгруенції зводиться випадок $C^{-1}B_s C = -B'_s$.

Таким чином групи $V_k^{(\alpha_s)}$ і $V_k^{(\beta_s)}$ не спряжені при всіх $s = 1, \dots, e$, якщо $\alpha_s \neq \beta_s(\text{mod } t^s)$. Інша частина доведення очевидна. Теорема доведена.

Список використаної літератури

1. Юферев В. П. Классификация минимальных неприводимых линейных групп простой степени // Изв. АН БССР. Серия физ.-мат. наук. 1963. – № 5. – С. 96–97.
2. Кирилюк А. А. Классификация минимальных неприводимых разрешимых подгрупп группы $GL(3, R_p)$ // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія матем. і інформ. 1972. – Вип. 5. – С. 41–48.
3. Кирилюк О. А., Кирилюк А. О. Абелеві мінімальні незвідні підгрупи групи $GL(2, R_p)$ // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія матем. і інформ. –2000. – Вип. 24, № 2. – С. 77–87.
4. Кирилюк А. А. Минимальные неприводимые разрешимые подгруппы группы $GL(2, R_p)$ // В сб. "Материалы XXXII итог. научн. конф. проф.-преп. состава Ужгород. ун-та". – Ужгород, 1978. – С. 166–190.

Одержано 27.05.2016