УДК 512.643.8

О. А. Тилищак, Н. В. Юрченко (Ужгородский нац. ун-т), **Р. Ф. Цімболинець** (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

НЕРОЗКЛАДНІСТЬ ОДНІЄЇ МАТРИЦІ ДОВІЛЬНОГО ПОРЯДКУ НАД ЛОКАЛЬНИМ КІЛЬЦЕМ

It has been shown that the product of the permutation matrix of the cycle of length n and the diagonal matrix $\operatorname{diag}[1,\dots,1,t,t]$ over a commutative local principle ideal ring, the Jacobson radical of which is generated by the element $t \neq 0$, is indecomposable.

Показано нерозкладність добутку підстановочної матриці циклу довжини n та діагональної матриці $\operatorname{diag}[1,\dots,1,t,t]$ над комутативним локальним кільцем головних ідеалів, радикал Джекобсона якого породжується елементом $t \neq 0$.

1. Вступ. Задача класифікації всіх, з точністю до подібності, квадратних матриць над комутативним кільцем (що не є полем) досить складна; в більшості випадків вона "нерозв'язна" (наприклад, як над кільцем класів лишків, що розглядалася В. М. Бондаренком [1]). У таких випадках важливим є вивчення незвідних та нерозкладних матриць.

З результатів досліджень П. М. Гудивка та другого автора [2] випливає наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай K — комутативне локальне кільце, радикал Джекобсона якого $\operatorname{Rad} K = tK$, $t \neq 0$. Матриці*

$$M(t,1,n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & t \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(t,n-1,n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & t \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & t & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t & 0 \end{pmatrix}$$

порядку $n > 1$ незвідні над кільцем K.

У роботі [3] для досить широкого класу мономіальних матриць над локальними кільцями з'ясовано, коли мономіальні матриці є звідними. За гіпотезою В. М. Бондаренка матриця

$$M(t,m,n) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & \dots & 0 & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\begin{matrix}0 & \dots & 0 & t\end{matrix}}^{m}} \\ 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & t & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & t & 0 \end{array}\right), \tag{1}$$

порядку n над комутативним локальним кільцем K, $\operatorname{Rad} K = tK$, $t \neq 0$, $t^2 = 0$, $1 \leq m \leq n$, незвідна тільки при $m = 1$, та $n-1$ (див. вище теорему 1) та для

$m = 2$ при непарному n. У останньому випадку залишалось відкритим навіть питання нерозкладності цієї матриці. Зауважимо, що для $(m, n) > 1$ (а значить і для $m = 2$, n — парне) в [3] показано, що (1) звідна.

У цій статті ми доводимо нерозкладність матриці $M(t, 2, n)$ для довільного $n > 2$.

2. Нерозкладність матриці $M(t, 2, n)$.

Теорема 2. *Нехай K — комутативне локальне кільце,* $\operatorname{Rad} K = tK$, $t \neq 0$. *Матриця $M(t, 2, n)$ порядку $n > 2$ є нерозкладною над K.*

Доведення. Розглянемо матрицю

$$M = M(t,2,n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 \end{pmatrix}$$

і всі такі матриці $C = (c_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, що

$$MC = CM \tag{2}$$

або в розгорнутому вигляді

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1\,n-2} & c_{1\,n-1} & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2\,n-2} & c_{2\,n-1} & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & \dots & c_{3\,n-2} & c_{3\,n-1} & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1\,1} & c_{n-1\,2} & \dots & c_{n-1\,n-2} & c_{n-1\,n-1} & c_{n-1\,n} \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{n\,n-2} & c_{n\,n-1} & c_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1\,n-2} & c_{1\,n-1} & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2\,n-2} & c_{2\,n-1} & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & \dots & c_{3\,n-2} & c_{3\,n-1} & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1\,1} & c_{n-1\,2} & \dots & c_{n-1\,n-2} & c_{n-1\,n-1} & c_{n-1\,n} \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{n\,n-2} & c_{n\,n-1} & c_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{pmatrix} tc_{n1} & tc_{n2} & \dots & tc_{n\,n-2} & tc_{n\,n-1} & tc_{nn} \\ c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1\,n-2} & c_{1\,n-1} & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2\,n-2} & c_{2\,n-1} & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n-2\,1} & c_{n-2\,2} & \dots & c_{n-2\,n-2} & c_{n-2\,n-1} & c_{n-2\,n} \\ tc_{n-1\,1} & tc_{n-1\,2} & \dots & tc_{n-1\,n-2} & tc_{n-1\,n-1} & tc_{n-1\,n} \end{pmatrix} =$$

$$
= \begin{pmatrix}
c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1\,n-1} & tc_{1n} & tc_{11} \\
c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2\,n-1} & tc_{2n} & tc_{21} \\
c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3\,n-1} & tc_{3n} & tc_{31} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
c_{n-1\,2} & c_{n-1\,3} & \dots & c_{n-1\,n-1} & tc_{n-1\,n} & tc_{n-1\,1} \\
c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{n\,n-1} & tc_{nn} & tc_{n1}
\end{pmatrix}.
$$

Позначимо через (i,j) скалярну рівність $(MC)_{ij} = (CM)_{ij}$. Маємо:

$$
\begin{aligned}
(2,1): &\qquad c_{11} = c_{22}, \\
(3,2): &\qquad c_{22} = c_{33}, \\
&\qquad \dots\dots \\
(n-1, n-2): &\qquad c_{n-2\,n-2} = c_{n-1\,n-1}, \\
(n, n-1): &\qquad tc_{n-1\,n-1} = tc_{n\,n}.
\end{aligned}
$$

Оскільки $t \neq 0$, то звідси одержуємо

$$
c_{11} \equiv c_{22} \equiv \dots \equiv c_{nn} \pmod{tK}. \tag{3}
$$

Оскільки рядки матриці MC з номерами 1, n складаються з елементів з tK, то з (2) одержимо $c_{ij} \equiv 0 \pmod{tK}$ $(i = 1, n,\ j = 2, \dots, n-1)$. Тобто

$$
C \equiv \begin{pmatrix}
c_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{1n} \\
c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2\,n-2} & c_{2\,n-1} & c_{2n} \\
c_{31} & c_{32} & \dots & c_{3\,n-2} & c_{3\,n-1} & c_{3n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
c_{n-1\,1} & c_{n-1\,2} & \dots & c_{n-1\,n-2} & c_{n-1\,n-1} & c_{n-1\,n} \\
c_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{nn}
\end{pmatrix} \pmod{tK}.
$$

Оскільки стовпці матриці CM з номерами $n-1$, n складаються з елементів з tK, то з (2) одержимо $c_{ij} \equiv 0 \pmod{tK}$ $(i = 1, \dots, n-2,\ j = n-1, n)$. Тобто

$$
C \equiv \begin{pmatrix}
c_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2\,n-2} & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
c_{n-2\,1} & c_{n-2\,2} & \dots & c_{n-2\,n-2} & 0 & 0 \\
c_{n-1\,1} & c_{n-1\,2} & \dots & c_{n-1\,n-2} & c_{n-1\,n-1} & c_{n-1\,n} \\
c_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{nn}
\end{pmatrix} \pmod{tK}.
$$

Крім того, з (2) маємо

$$
\begin{aligned}
(2,2): &\qquad c_{12} = c_{23}, \\
(3,3): &\qquad c_{23} = c_{34}, \\
&\qquad \dots\dots \\
(n-2, n-2): &\qquad c_{n-3\,n-2} = c_{n-2\,n-1},
\end{aligned}
$$

Звідки
$$c_{12} = c_{23} = \cdots = c_{n-2\,n-1}. \tag{4}$$
Далі, з (2) також маємо
$$\begin{aligned} &(2,3): && c_{13} = c_{24}, \\ &(3,4): && c_{24} = c_{35}, \\ & && \ldots\ldots \\ &(n-3, n-2): && c_{n-4\,n-2} = c_{n-3\,n-1}, \end{aligned}$$
Звідки
$$c_{13} = c_{24} = \cdots = c_{n-3\,n-1}. \tag{5}$$
Продовжуючи аналогічно, зрештою одержимо
$$c_{1\,n-3} = c_{2\,n-2} = c_{3\,n-1}. \tag{6}$$
Але крайні частини в рівностях (4)–(6) конгруентні 0 за модулем tK, тому
$$C \equiv \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n-2\,1} & c_{n-2\,2} & c_{n-2\,3} & \ldots & c_{n-2\,n-2} & 0 & 0 \\ c_{n-1\,1} & c_{n-1\,2} & c_{n-1\,3} & \ldots & c_{n-1\,n-2} & c_{n-1\,n-1} & c_{n-1\,n} \\ c_{n1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & c_{nn} \end{pmatrix} \pmod{tK}.$$

Врахувавши (3) та змінивши два останні стовпці місцями з одночасною зміною двох останніх рядків місцями у матриці C, одержимо, що C (яка комутує з M) подібна над кільцем K до матриці n-го порядку C', де
$$C' \equiv \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{11} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{11} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n-2\,1} & c_{n-2\,2} & c_{n-2\,3} & \ldots & c_{11} & 0 & 0 \\ c_{n1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{11} & 0 \\ c_{n-1\,1} & c_{n-1\,2} & c_{n-1\,3} & \ldots & c_{n-1\,n-2} & c_{n-1\,n} & c_{11} \end{pmatrix} \pmod{tK}.$$

Серед таких матриць C', а, отже, і їм подібних матриць C, немає, очевидно, таких ідемпотентів, які залишаються відмінними від одиничної і нульової матриці після редукції за модулем ідеала tK, які є серед матриць, що комутують з розкладними. Тому матриця M нерозкладна. Теорема доведена.

3. Застосування в теорії зображень. З результатів Гудивка П. М., Чухрая І. Б. [4] випливає, що скінченна p-група G порядку $|G| > 2$, над комутативним локальним кільцем характеристики p^s $(s \geq 1)$, яке не є полем $(\operatorname{Rad} K \neq 0)$, має нееквівалентні нерозкладні матричні зображення довільного степеня $n > 1$ не менше, ніж елементів в полі $K/\operatorname{Rad} K$ лишків кільця K.

Теорема 3. *Нехай K — комутативне локальне кільце характеристики p^s $(s \geq 1)$, $\operatorname{Rad} K = tK$, t — нільпотентний елемент степеня $m > 1$. Для деякої скінченної циклічної p-група G достатньо великого порядку $|G|$, існує принаймні 3 нееквівалентних нерозкладних матричних K-зображення довільного степеня $n \geq 4$.*

Доведення. Нехай $u = t^{m-2}$. Легко бачити, що $up^2 = 0$ в кільці K. Нехай E — одинична матриця порядку n і S — довільна матриця порядку n над кільцем K, яка нільпотентна після редукції за модулем ідеалу $\operatorname{Rad} K = tK$. Неважко перевірити, що $S^n \equiv 0 \pmod{tK}$, $S^{2n} \equiv 0 \pmod{t^2K}$ і відображення Γ вигляду:

$$a \to \Gamma(a) = E + uS$$

є K-зображенням циклічної групи $G = \langle a \rangle$ порядку $|G| = p^r$ такої, що $p^r \geq 2n$, $r \geq 2$. Воно є розкладним тоді і тільки тоді, коли є розкладною матриця S після редукції за модулем ідеалу $\operatorname{Ann} u = \operatorname{Ann} t^{m-2} = \{x \in K | t^{m-2}x = 0\} = t^2K$ в кільці K, а матрицям S, S' порядку n над кільцем K, нільпотентним після редукції за модулем ідеалу tK, відповідають еквівалентні зображення тоді і тільки тоді, коли матриці S, S' подібні після редукції за модулем ідеалу t^2K.

Оскільки $\operatorname{Rad}(K/\operatorname{Ann} t^{m-2}) = \operatorname{Rad}(K/t^2K)$ головний ідеал породжений $t + t^2K$, $t + t^2K \neq t^2K$, то за теоремами 1, 2 матриці $M(t, 1, n)$, $M(t, 2, n)$, $M(t, n-1, n)$ нерозкладні після редукції за модулем ідеалу t^2K. Тому

$$a \to \Gamma(a) = E + uM(t, 1, n),$$

$$a \to \Gamma(a) = E + uM(t, 2, n),$$

$$a \to \Gamma(a) = E + uM(t, n-1, n)$$

— нерозкладні K-зображення групи G. Оскільки $n \geq 4$, то матриці $M(t, 1, n)$, $M(t, 2, n)$, $M(t, n-1, n)$ мають різний ранг після редукції за модулем ідеалу tK. Тоді розглянуті 3 нерозкладні K-зображення групи G нееквівалентні. Теорема доведена.

Дослідження здійснювалися під керівництвом В. М. Бондаренка.

Список використаної літератури

1. *Бондаренко В. М.* О подобии матриц над кільцем классов вычетов // Мат. сб., К.: Наукова думка, 1976. – С. 275–277.
2. *Гудивок П. М., Тилищак О. А.* Про незвідні модулярні зображення скінченних p-груп над комутативними локальними кільцями // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 1998. – Вип. 3. – С. 78–83.
3. *Bondarenko V. M., Bortos M. Yu., Dinis M. Yu., Tylyshchak A. A.* Reducibility and irreducibility of monomial matrices over commutative rings, Algebra and Discrete Mathematici **16** (2), 2013. – P. 171–187.
4. *Гудивок П. М., Чухрай І. Б.* Про число нерозкладних матричних зображень даного степеня скінченної p-групи над комутативними локальними кільцями характеристики p^s // Науковий вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. – 2000. – Вип. 5. – С. 33–40.
5. *Гудивок П. М.* Представления конечных групп над комутативными локальными кольцами. – Ужгород: Ужгородський нац. ун-т, 2003. – 119 с.

Одержано 29.05.2016