УДК 519.21

Р. Є. ЯМНЕНКО (Київський нац. ун-т ім. Тараса Шевченка)

ПРО РОЗПОДІЛ СУПРЕМУМУ γ-ВІДОБРАЖЕНОГО СУБГАУССОВОГО ПРОЦЕСУ ДРОБОВОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ

The paper studies properties of a γ-reflected process defined by sub-Gaussian self-similar input process. The γ-reflected process is a random process of type $W_\gamma(t) = X(t)-ct-\gamma\inf_{s\le t}(X(s)-cs)$, $c>0$. This process arises in risk theory according to a model in which income taxing is conducted via loss-carry-forward scheme by paying a proportion $\gamma\in[0,1]$ of incoming premiums. Estimate of supremum distribution of the γ-reflected process driven by sub-Gaussian self-similar input is obtained. In particular, obtained results take place for the input process of fractional Brownian motion.

У роботі вивчаються властивості γ-відображеного випадкового процесу, визначеного деяким субгауссовим автомодельним вхідним процесом. γ-відображений процес має вигляд $W_\gamma(t) = X(t)-ct-\gamma\inf_{s\le t}(X(s)-cs)$, $c>0$. Такий процес виникає в теорії ризику відповідно до моделі, у якій податкові платежі на прибутки здійснюють відповідно схемі “loss-carry-forward”, що враховую сплату частку $\gamma\in[0,1]$ премій, які надходять, а також у теорії черг. Отримано оцінку розподілу супремуму γ-відображеного випадкового процесу з субгауссовим автомодельним входом. Зокрема, отримані результати мають місце для вхідного процесу дробового броунівського руху.

Вступ. Метою цієї роботи є дослідження властивостей субгауссових автомодельних випадкових процесів, зокрема субгауссового дробового броунівського руху (ДБР) – субгауссового випадкового процесу, коваріаційна функція якого

$$R_H(t,s) = \frac{1}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right), \quad t,s\in\mathsf{T},$$

така ж, як у стандартного процесу ДБР, але траєкторії не обов'язково є гауссовими, а належать ширшому субгауссовому простору випадкових величин, $H\in(0,1)$ – параметр Хюрста, T – деяка параметрична множина (наприклад, T – це відрізок $[a,b]$ чи піввісь $\mathbb{R}_+$). Нагадаємо, що стохастичний процес $\{X(t), t\in\mathsf{T}\}$ називають автомодельним, якщо для довільного $a>0$ існує таке $b>0$, що

$$\{X(at)\} \stackrel{d}{=} \{bX(t)\}. \tag{1}$$

Тут під $\{X_1(t)\} \stackrel{d}{=} \{X_2(t)\}$ ми розуміємо рівність усіх скінченно-вимірних розподілів процесів $X_1(t)$ і $X_2(t)$. Загальновідомо, що дробовий броунівський рух є автомодельним процесом, причому $\{X(at)\} \stackrel{d}{=} \{a^H X(t)\}$.

Головним об'єктом дослідження у даній роботі є γ-відображений процес $\{W_\gamma(t), t\in\mathsf{T}\}$ [1], на вхід якого надходить субгауссовий ДБР.

Нагадаємо також, що випадковий процес $\{W_\gamma(t), t\in\mathsf{T}\}$ називають γ-відображеним процесом, якщо він має вигляд

$$W_\gamma(t) = X(t) - ct - \gamma \inf_{s\in\mathsf{T}:\, s\le t}(X(s)-cs), \tag{2}$$

де $\{X(t), t\in\mathsf{T}\}$ – вхідний процес, $\gamma\in[0,1]$ – це параметр відображування, $c>0$ – стала.

Процес $R_\gamma(t) = u - W_\gamma(t)$ при $f(t) = ct$, $c > 0$, У літературі з теорії ризику відомий як процес ризику з оподаткуванням типу "loss-carry-forward" (втрати, перенесені наперед) для довільного початкового резерву $u \geq 0$, тобто податкові платежі на прибутки здійснюють, сплачуючи частку γ премій, які надходять, як тільки процес перебуває на своєму максимумі. Випадок $\gamma < 0$ можна розглядати як модель із заохоченням, пропорційним до зростання максимуму, а значення $\gamma > 1$ – як модель зі стримуванням. $W_1(t)$ відомий у теорії черг як процес довжини черги.

Ми будемо оцінювати ймовірність банкрутства

$$\Psi_{\gamma,\mathsf{T}}(x) = \mathsf{P}\left\{\sup_{t\in\mathsf{T}} W_\gamma(t) > x\right\}. \tag{3}$$

Коли $X(t)$ – процес ДБР, то для всіх $x > 0$ [4]

$$\Psi_{\gamma,\mathsf{T}}(x) = \mathsf{P}\left\{\sup_{t\in\mathsf{T}}\left(X(t) - ct - \gamma \inf_{s\in\mathsf{T}:\, s\leq t}(X(s) - cs)\right) > x\right\}$$
$$= \mathsf{P}\left\{\sup_{s,t\in\mathsf{T}:\, s\leq t} \frac{X(tu) - \gamma X(su)}{1 + c(t - \gamma s)} > x\right\} = \mathsf{P}\left\{\sup_{s,t\in\mathsf{T}:\, s\leq t} Y_\gamma(s,t) > x^{1-H}\right\}, \tag{4}$$

де

$$Y_\gamma(s,t) = \frac{X(t) - \gamma X(s)}{1 + c(t - \gamma s)}, \tag{5}$$

а остання рівність у (4) випливає з автомодельності процесу $X(t)$ ДБР.

Субгаусові випадкові величини вперше з'явились у статті Кахана [5] і далі широко досліджувались разом з іншими більш широкими класами випадкових величин та процесів із просторів Орліча, ніж гаусові випадкові величини і процеси (для детального огляду див., наприклад, монографії Булдигіна і Козаченка [2], Козаченка, Пашка і Розори [6]). Окремі результати для φ-субгауссових процесів накопичення із ДБР входом отримано в роботах [9], [10], [11].

1. Субгауссові випадкові величини

Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ – стандартний імовірнісний простір, T – деяка параметрична множина.

Означення 1. *[7] Центровану в.в. ξ називають субгауссовою, якщо існує $\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує $a \geq 0$:*

$$\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\left\{\lambda^2 a^2/2\right\}. \tag{6}$$

Клас усіх субгауссових величин будемо позначати $\mathsf{Sub}(\Omega)$.

Означення 2. *[6] Нехай $\xi \in \mathsf{Sub}(\Omega)$. Субгауссовим стандартом в.в. ξ називають таку її характеристику*

$$\tau(\xi) = \inf\left\{a \geq 0\colon \mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\left\{\lambda^2 a^2/2\right\},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}. \tag{7}$$

Приклад 1. *Нехай $\xi \sim N(0, \sigma^2)$ – гауссова в.в., тобто $\mathsf{E}\xi = 0$ та $\mathsf{D}\xi = \sigma^2$, тоді*

$$\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\} = \exp\left\{\lambda^2\sigma^2/2\right\}$$

тобто ξ є субгауссовою в.в, у якої $\tau(\xi) = \sigma$.

Приклад 2. *Нехай ξ – рівномірно розподілена на відрізку $[-a,a]$ в.в., $a>0$, тоді*

$$\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\} = \frac{sh(\lambda a)}{\lambda a} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda a)^{2k}}{(2k+1)!} \le 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda a)^{2k}}{6^k k!} = \exp\left\{\frac{\lambda^2 a^2}{6}\right\},$$

тобто ξ є субгауссовою в.в, у якої $\tau^2(\xi) = \mathsf{E}\xi^2 = a^2/3$.

Лема 1. *[6] Якщо ξ – обмежена центрована в.в. та $\xi \le c$ майже напевне, де c – деяка додатна стала, то $\xi \in \mathsf{Sub}(\Omega)$ та $\tau(\xi) \le c$.*

Теорема 1. *[2] Простір субгауссових випадкових величин є банаховим відносно норми $\tau(\xi)$.*

Лема 2. *[2] Нехай $\xi \in \mathsf{Sub}(\Omega)$. Справедливі такі співвідношення*

$$\tau(\xi) = \sup_{\lambda\ne 0}\left(\frac{2\ln \mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\}}{\lambda^2}\right);$$

для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\} \le 2\exp\left\{\frac{\lambda^2\tau^2(\xi)}{2}\right\}.$$

Лема 3. *[2] Нехай $\xi \in \mathsf{Sub}(\Omega)$. Тоді для всіх $x>0$ мають місце нерівності*

$$\mathsf{P}\{\xi \ge x\} \le \exp\left\{-\frac{x^2}{2\tau^2(\xi)}\right\}, \quad \mathsf{P}\{\xi \le -x\} \le \exp\left\{-\frac{x^2}{2\tau^2(\xi)}\right\},$$

$$\mathsf{P}\{|\xi| \ge x\} \le 2\exp\left\{-\frac{x^2}{2\tau^2(\xi)}\right\}.$$

2. Основні результати

Нехай (T,ρ) – псевдометричний (метричний) сепарабельний простір з псевдометрикою (метрикою) ρ.

Припустимо, що вхідний процес $\{X(t),\ t\in\mathsf{T}\}$ є сепарабельним субгауссовим автомодельним випадковим процесом. Припустимо також, що для нього виконується умова Σ.

Умова Σ. Будемо казати, що для випадкового процесу $\{X(t),\ t\in\mathsf{T}\}$ виконується умова Σ, якщо знайдеться така неперервна функція $\sigma = \{\sigma(h), h\ge 0\}$, що монотонно зростає, $\sigma(h)\to 0$, коли $h\to 0$, та має місце нерівність

$$\sup_{\rho(t,s)\le h}\tau(X(t)-X(s)) \le \sigma(h). \tag{8}$$

Зауважимо, що таку властивість має функція

$$\sigma(h) = \sup_{\rho(t,s)\le h}\tau(X(t)-X(s)),$$

якщо процес $X(t)$ неперервний у нормі $\tau(\cdot)$. Зокрема $\sigma(h) = h^H$ для процесу ДБР із параметром Хюрста $H\in(0,1)$.

Нехай B – компактна множина, $B\subseteq T$. Надалі будемо використовувати такі позначки:

— $D_A = \{(u,v)\colon u \le v,\ u,v \in A\}$, де A – довільна множина;

— $\tau_B = \sup_{t\in B} X(t)$, $m_B = \min_{u\in B}|u|$, $M_B = \max_{u\in B}|u|$;

— $\beta > 0$ – деяке число, таке що $\beta \le \sigma\left(\inf\limits_{s\in B}\sup\limits_{t\in B}\rho(t,s)\right)$;

— $\mathsf{N}(u) = \mathsf{N}_{(B,\rho)}(u)$ – метрична масивність простору (B,ρ), тобто мінімальна кількість замкнених куль радіуса u, що покривають простір (B,ρ), та $\mathsf{L}(u) = \frac{(\mathsf{N}(u))^2+\mathsf{N}(u)}{2}$.

Наступне твердження містить оцінку розподілу супремуму γ-відображеного процесу $W_\gamma(t)$

$$\sup_{t\in B} W_\gamma(t) = \sup_{t\in B}\left(X(t) - ct - \gamma \inf_{s\in B\colon s\le t}(X(s)-cs)\right), \gamma \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Лема 4. *Припустимо, що для вхідного субгауссового автомодельного процесу $\{X(t), t\in B\}$ γ-відображеного процесу $W_\gamma(t)$, $\gamma\in\mathbb{R}$, виконується умова Σ. Нехай послідовність $\{q_k\}_{k=1}^\infty$ така, що $q_k > 1$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{q_k} \le 1$, а $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$ – така монотонно спадна послідовність, що $\varepsilon_k > 0$ і $\varepsilon_k \to 0$, $k\to\infty$. Тоді для всіх $x > 0$ виконується нерівність*

$$\mathsf{E}\exp\{\lambda \sup_{t\in B} W_\gamma(t)\Big\} \le G_1(\gamma,\lambda)\prod_{k=2}^{\infty}(G_k(\gamma,\lambda))^{\frac{1}{q_k}}, \tag{10}$$

де

$$G_1(\gamma,\lambda) = \left(\sum_{l=0}^{\mathsf{N}(\varepsilon_1)-1}(\mathsf{N}(\varepsilon_1)-l)\exp\left\{\frac{q_1^2\lambda^2(\sigma(2\varepsilon_1 l)+|1-\gamma|\tau_B)^2}{2(1+|1-\gamma|cm_B)^2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+q_1\lambda\left(1-\frac{1}{1+c2\varepsilon_1 l+|1-\gamma|cM_B}\right)\right\}\right)^{\frac{1}{q_1}}, \tag{11}$$

$$G_k(\gamma,\lambda)^{q_k} = \sum_{l=0}^{\mathsf{N}(\varepsilon_k)-1}(\mathsf{N}(\varepsilon_k)-l)\times$$
$$\times\exp\left\{\frac{3q_k^2\lambda^2/2}{(1+|1-\gamma|cm_B)^4}\Big((1+2c\varepsilon_k l+(1-\gamma)cv)^2\left(\sigma^2(\varepsilon_{k-1}l)(1+\gamma^2)\right)\right.$$
$$\left.+(c\varepsilon_{k-1}+\gamma c\varepsilon_{k-1})^2(\sigma(\varepsilon_{k-1}l)+|1-\gamma|\tau_B)^2\Big)+q_k\lambda\left(\frac{c\varepsilon_{k-1}(1+|\gamma|)}{(1+|1-\gamma|cm_B)^2}\right)\right\},\quad k\ge 2. \tag{12}$$

Доведення.

Позначимо через V_{ε_k} множину центрів замкнених куль радіусу ε_k, яка утворює мінімальне покриття простору (B,ρ). Кількість точок у множині V_{ε_k} дорівнює $\mathsf{N}(\varepsilon_k)$.

З умови Σ і леми 3 випливає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\{|X(t)-X(s)|>\varepsilon\}$$

$$\leq 2\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2\tau^2(X(t)-X(s))}\right\} \leq 2\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2(\rho(t,s))}\right\}.$$

За припущенням процес $X(t)$ сепарабельний. Отже, $X(t)$ неперервний за ймовірністю. Тому будь-яка зліченну скрізь щільну по відношенню до ρ множину можна розглядати як множину сепарабельності цього процесу. Зокрема, множина $V = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_{\varepsilon_k}$ є ρ-сепарантою процесу $X(t)$, і з імовірністю одиниця виконуються рівності

$$\sup_{t\in B} X(t) - ct = \sup_{t\in V} X(t) - ct, \quad \sup_{(s,t)\in D_B} (X(t)-\gamma X(s)) = \sup_{(s,t)\in D_V} (X(t)-\gamma X(s))$$

та, відповідно,

$$\sup_{t\in B} W_\gamma(t) = \sup_{t\in B}\left(X(t) - ct - \gamma \inf_{s\in B:\, s\leq t}(X(s)-cs)\right)$$

$$= \sup_{t\in V}\left(X(t) - ct - \gamma \inf_{s\in V:\, s\leq t}(X(s)-cs)\right) = \sup_{t\in V} W_\gamma(t). \tag{13}$$

Крім того, з (4) також маємо

$$\sup_{t\in V} W_\gamma(t) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \sup_{(s,t)\in D_V} Y_\gamma(s,t), \tag{14}$$

де $Y_\gamma(s,t)$ визначено в (5).

Розглянемо відображення $\alpha_n = \{\alpha_n(u), n = 0,1,\ldots\}$ множини V в V_{ε_n}, де $\alpha_n(u)$ – точка з множини V_{ε_n} така, що $\rho(u,\alpha_n(u)) \leq \varepsilon_n$. Якщо $u \in V_{\varepsilon_n}$, тоді $\alpha_n(u) = u$. Якщо ж існує кілька таких точок з множини V_{ε_n}, що $\rho(u,\alpha_n(u)) \leq \varepsilon_n$, тоді виберемо одну з них за деяким правилом, таким, що не порушується умова $\alpha_n(v) \leq \alpha_n(u)$ для будь-яких $v \leq u$, $v, u \in V$, і позначимо її через $\alpha_n(u)$.

З нерівності Чебишова, леми 2 й умови Σ випливає, що

$$\mathsf{P}\left\{|X(u) - X(\alpha_n(u))| > p^{\frac{n}{2}}\right\}$$

$$\leq \frac{\mathsf{E}(X(u)-X(\alpha_n(u)))^2}{p^n} \leq \frac{\tau^2(X(u)-X(\alpha_n(u)))}{2p^n} \leq \frac{\sigma^2(\varepsilon_n)}{2p^n} = \beta^2 p^n.$$

А це означає, що $\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\left\{|X(u) - X(\alpha_n(u))| > p^{\frac{n}{2}}\right\} < \infty$.

Із леми Бореля-Кантеллі випливає, що $X(u) - X(\alpha_n(u)) \to 0$ при $n \to \infty$ з ймовірністю одиниця. Множина V зліченна, отже, $X(u) - X(\alpha_n(u)) \to 0$, $X(u) - cu - \gamma(X(v) - cv) - X(\alpha_n(u)) + c\alpha_n(u) + \gamma(X(\alpha_n(v)) - c\alpha_n(v)) \to 0$ і, відповідно,

$$Y(v,u) - Y(\alpha_n(v),\alpha_n(u)) =$$

$$\frac{X(u) - cu - \gamma(X(v)-cv)}{1 + cu - \gamma cv\gamma} - \frac{X(\alpha_n(u)) - c\alpha_n(u) - \gamma(X(\alpha_n(v)) - c\alpha_n(v))}{1 + c\alpha_n(u) - \gamma c\alpha_n(v)\gamma} \to 0$$

з імовірністю одиниця при $n \to \infty$ для всіх u одночасно.

Нехай $(s,t) \in D_V$. Позначимо через $s_m = \alpha_m(s)$, $s_{m-1} = \alpha_{m-1}(s_m), \ldots, s_1 = \alpha_1(s_2)$ та $t_m = \alpha_m(t)$, $t_{m-1} = \alpha_{m-1}(t_m), \ldots, t_1 = \alpha_1(t_2)$ для будь-якого $m \geq 1$. Тоді для всіх $m \geq 2$ виконуються такі співвідношення

$$X(t) = X(t_1) + \sum_{k=2}^{m}(X(t_k) - X(t_{k-1})) + X(t) - X(\alpha_m(t)),$$

$$X(s) = X(s_1) + \sum_{k=2}^{m}(X(s_k) - X(s_{k-1}) + X(s) - X(\alpha_m(s)),$$

і, відповідно,

$$X(t) - ct - \gamma(X(s) - cs) \leq \max_{(v,u)\in D_{V_{\varepsilon_1}}} (X(u) - cu - \gamma X(v) + \gamma cv) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{m} \max_{(v,u)\in D_{V_{\varepsilon_k}}} \big(X(u) - cu - \gamma X(v) + \gamma cv - X(\alpha_{k-1}(u)) + c\alpha_{k-1}(u) +$$

$$+ \gamma X(\alpha_{k-1}(v)) - \gamma c\alpha_{k-1}(v)\big) +$$

$$+ X(t) - ct - \gamma X(s) + \gamma cs - X(\alpha_m(t)) + \gamma c\alpha_m(t) + \gamma X(\alpha_m(s)) - \gamma c\alpha_m(s)$$

$$\stackrel{\mathrm{d}}{=} \max_{(v,u)\in D_{V_{\varepsilon_1}}} Y_\gamma(v,u) + \sum_{k=2}^{m} \max_{(v,u)\in D_{V_{\varepsilon_k}}} (Y_\gamma(v,u) - Y_\gamma(\alpha_{k-1}(v), \alpha_{k-1}(u))) +$$

$$+ Y_\gamma(s,t) - Y_\gamma(\alpha_m(s), \alpha_m(t)). \tag{15}$$

Звідси випливає, що з імовірністю одиниця

$$\sup_{t\in V} W_\gamma(t) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \sup_{(s,t)\in D_V} Y_\gamma(s,t)$$

$$\leq \liminf_{m\to\infty} \Big(\max_{(v,u)\in D_{V_{\varepsilon_1}}} Y_\gamma(v,u) + \sum_{k=2}^{m} \max_{(v,u)\in D_{V_{\varepsilon_k}}} (Y_\gamma(v,u) - Y_\gamma(\alpha_{k-1}(v), \alpha_{k-1}(u)))$$

$$+ Y_\gamma(s,t) - Y_\gamma(\alpha_m(s), \alpha_m(t))\Big). \tag{16}$$

Із нерівностей Гельдера і (16) та леми Фату для всіх $\lambda > 0$ маємо

$$\mathsf{E}\exp\left\{\lambda \sup_{t\in V} W_\gamma(t)\right\} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \mathsf{E}\exp\left\{\lambda \sup_{(s,t)\in D_V} Y_\gamma(s,t)\right\}$$

$$\leq \mathsf{E}\liminf_{m\to\infty} \exp\left\{\lambda\Big(\max_{(v,u)\in D_{V_{\varepsilon_1}}} Y_\gamma(v,u) +\right.$$

$$\left. + \sum_{k=2}^{m} \max_{(v,u)\in D_{V_{\varepsilon_k}}} \Big(Y_\gamma(v,u) - Y_\gamma(\alpha_{k-1}(v), \alpha_{k-1}(u))\Big)\Big)\right\}$$

$$\leq \liminf_{m\to\infty} \left(\mathsf{E}\exp\left\{q_1\lambda \max_{(v,u)\in D_{V_{\varepsilon_1}}} Y_\gamma(v,u)\right\}\right)^{\frac{1}{q_1}} \times$$

$$\times \prod_{k=2}^{m} \left(\mathsf{E} \exp \left\{ q_k \lambda \max_{(v,u)\in D_{V_{\varepsilon_k}}} \Big(Y_\gamma(v,u) - Y_\gamma(\alpha_{k-1}(v), \alpha_{k-1}(u)) \Big) \right\} \right)^{\frac{1}{q_k}}$$

$$= (J_1)^{\frac{1}{q_1}} \cdot \prod_{k=2}^{\infty} (J_k)^{\frac{1}{q_k}}. \tag{17}$$

Розглянемо окремо кожен множник у правій частині (17). Із леми 2, умови Σ і нерівності трикутника для субгауссового стандарту $\tau(\cdot)$ випливає, що

$$\mathsf{E} \exp\{q_1 \lambda Y_\gamma(v,u)\} = \mathsf{E} \exp \left\{ q_1 \lambda \frac{X(u) - \gamma X(v)}{1 + cu - \gamma cs} \right\} \exp \left\{ q_1 \lambda \frac{cu - \gamma cv}{1 + cu - \gamma cs} \right\}$$

$$\le \exp \left\{ \frac{q_1^2 \lambda^2 \tau^2 (X(u) - \gamma X(v))}{2(1 + cu - \gamma cv)^2} + q_1 \lambda \frac{cu - \gamma cv}{1 + cu - \gamma cs} \right\}$$

$$\le \exp \left\{ \frac{q_1^2 \lambda^2 (\sigma(\rho(u,v)) + |1-\gamma| \tau_B)^2}{2(1 + c(u-v) + (1-\gamma)cv)^2} + q_1 \lambda \left(1 - \frac{1}{1 + c(u-v) + (1-\gamma)cv} \right) \right\}.$$

Тоді

$$J_1 \le \sum_{(v,u)\in D_{V_{\varepsilon_1}}} \mathsf{E} \exp \Big\{ q_1 \lambda Y_\gamma(v,u) \Big\}$$

$$\le \sum_{(v,u)\in V_{\varepsilon_1}} \exp \left\{ \frac{q_1^2 \lambda^2 (\sigma(\rho(u,v)) + |1-\gamma|\tau_B)^2}{2(1 + c(u-v) + (1-\gamma)cv)^2} + \right.$$

$$\left. + q_1 \lambda \left(1 - \frac{1}{1 + c(u-v) + (1-\gamma)cv} \right) \right\}$$

$$\le \sum_{i=1}^{N(\varepsilon_1)} \sum_{j=1}^{i} \exp \left\{ \frac{q_1^2 \lambda^2 (\sigma(2\varepsilon_1(i-j)) + |1-\gamma|\tau_B)^2}{2(1 + |1-\gamma| c m_B)^2} + \right.$$

$$\left. + q_1 \lambda \left(1 - \frac{1}{1 + c 2\varepsilon_1 (i-j) + |1-\gamma| c M_B} \right) \right\}$$

$$= \sum_{l=0}^{N(\varepsilon_1)-1} (N(\varepsilon_1) - l) \exp \left\{ \frac{q_1^2 \lambda^2 (\sigma(2\varepsilon_1 l) + |1-\gamma|\tau_B)^2}{2(1 + |1-\gamma| c m_B)^2} + \right.$$

$$\left. + q_1 \lambda \left(1 - \frac{1}{1 + c 2\varepsilon_1 l + |1-\gamma| c M_B} \right) \right\}. \tag{18}$$

Аналогічно з леми 2, нерівностей Коші-Буняковського і трикутника, а також умови Σ отримуємо, що

$$\mathsf{E} \exp\{q_1 \lambda (Y_\gamma(v,u) - Y_\gamma(\alpha_{k-1}(v), \alpha_{k-1}(u)))\}$$

$$= \mathsf{E} \exp \left\{ q_k \lambda \left(\frac{X(u) - \gamma X(v)}{1 + cu - \gamma cv} - \frac{X(\alpha_{k-1}(u)) - \gamma X(\alpha_{k-1}(v))}{1 + c\alpha_{k-1}(u) - \gamma c \alpha_{k-1}(v)} \right) \right\} \times$$

$$\times \exp \left\{ q_k \lambda \left(\frac{cu - \gamma cv}{1 + cu - \gamma cv} - \frac{c\alpha_{k-1}(u) - \gamma c \alpha_{k-1}(v)}{1 + c\alpha_{k-1}(u) - \gamma c \alpha_{k-1}(v)} \right) \right\}$$

$$\leq \mathsf{E}\exp\Big\{\frac{q_k\lambda}{(1+cu-\gamma cv)(1+c\alpha_{k-1}(u)-\gamma c\alpha_{k-1}(v))}\times$$

$$\times\Big((1+cu-\gamma cv)\left(X(u)-X(\alpha_{k-1}(u))-\gamma(X(v)-X(\alpha_{k-1}(v)))\right)+$$

$$+(c(u-\alpha_{k-1}(u))-\gamma c(v-\alpha_{k-1}(v)))\left(X(\alpha_{k-1}(u))-\gamma X(\alpha_{k-1}(v))\right)\Big)\Big\}\times$$

$$\times\exp\left\{q_k\lambda\left(\frac{c(u-\alpha_{k-1}(u))-\gamma c(v-\alpha_{k-1}(v))}{(1+cu-\gamma cv)(1+c\alpha_{k-1}(u)-\gamma c\alpha_{k-1}(v))}\right)\right\}$$

$$\leq \exp\Big\{\frac{3q_k^2\lambda^2/2}{(1+c(u-v)+(1-\gamma)cv)^2(1+c(\alpha_{k-1}(u)-\alpha_{k-1}(v))+(1-\gamma)c\alpha_{k-1}(v))^2}$$

$$\times\Big((1+c(u-v)+(1-\gamma)cv)^2\left(\sigma^2(\varepsilon_{k-1})(1+\gamma^2)\right)+$$

$$+(c(u-\alpha_{k-1}(u))-\gamma c(v-\alpha_{k-1}(v)))^2(\sigma(\rho(\alpha_{k-1}(u),\alpha_{k-1}(v)))+|1-\gamma|\tau_B)^2\Big)\Big\}\times$$

$$\times\exp\left\{q_k\lambda\left(\frac{c\varepsilon_{k-1}(1+|\gamma|)}{(1+cu-\gamma cv)(1+c\alpha_{k-1}(u)-\gamma c\alpha_{k-1}(v))}\right)\right\}. \quad (19)$$

Тоді

$$J_k \leq \sum_{(v,u)\in D_{V_{\varepsilon_k}}} \mathsf{E}\exp\{q_1\lambda(Y_\gamma(v,u)-Y_\gamma(\alpha_{k-1}(v),\alpha_{k-1}(u)))\}$$

$$\leq \sum_{l=0}^{\mathsf{N}(\varepsilon_k)-1}(\mathsf{N}(\varepsilon_k)-l)\exp\Big\{\frac{3q_k^2\lambda^2/2}{(1+|1-\gamma|cm_B)^4}\Big((1+2c\varepsilon_k l+(1-\gamma)cv)^2\left(\sigma^2(\varepsilon_{k-1}l)(1+\gamma^2)\right)$$

$$+(c\varepsilon_{k-1}+\gamma c\varepsilon_{k-1})^2(\sigma(\varepsilon_{k-1}l)+|1-\gamma|\tau_B)^2\Big)+q_k\lambda\left(\frac{c\varepsilon_{k-1}(1+|\gamma|)}{(1+|1-\gamma|cm_B)^2}\right)\Big\}. \quad (20)$$

Нарешті, із нерівностей (17)–(20) отримаємо твердження леми.

Зауваження 1. *Вирази J_1 і J_k у нерівності (18) можна оцінити іншими простішими способами, отримуючи відповідно дві грубші оцінки для $G_k(\gamma,\lambda)$, $k\geq 1$, з (11):*

$$G_1(\gamma,\lambda)\leq \left(\mathsf{L}(\varepsilon_1)\right)^{\frac{1}{q_1}}\exp\left\{\frac{q_1\lambda^2(\sigma(2\varepsilon_1(\mathsf{N}(\varepsilon_1)-1))+|1-\gamma|\tau_B)^2}{2(1+|1-\gamma|cm_B)^2}+\right.$$

$$\left.+\lambda\left(1-\frac{1}{1+c2\varepsilon_1(\mathsf{N}(\varepsilon_1)-1)+|1-\gamma|cM_B}\right)\right\} \quad (21)$$

і

$$G_k(\gamma,\lambda)\leq \left(\mathsf{L}(\varepsilon_1)\right)^{\frac{1}{q_k}}\exp\Big\{\frac{3q_k\lambda^2/2}{(1+|1-\gamma|cm_B)^4}\times \quad (22)$$

$$\times\Big((1+2c\varepsilon_k(\mathsf{N}(\varepsilon_1)-1)+(1-\gamma)cv)^2\left(\sigma^2(\varepsilon_{k-1}(\mathsf{N}(\varepsilon_1)-1))(1+\gamma^2)\right)$$

$$+(c\varepsilon_{k-1}+\gamma c\varepsilon_{k-1})^2(\sigma(\varepsilon_{k-1}(\mathsf{N}(\varepsilon_1)-1))+|1-\gamma|\tau_B)^2\Big)+\lambda\left(\frac{c\varepsilon_{k-1}(1+|\gamma|)}{(1+|1-\gamma|cm_B)^2}\right)\Big\}, k\geq 2,$$

чи так:

$$G_1(\gamma,\lambda)^{q_1}\leq\int_0^{\mathsf{N}(\varepsilon_1)}(\mathsf{N}(\varepsilon_1)-x)\exp\left\{\frac{q_1^2\lambda^2(\sigma(2\varepsilon_1 x)+|1-\gamma|\tau_B)^2}{2(1+|1-\gamma|cm_B)^2}+\right.$$

$$+q_1\lambda\left(1-\frac{1}{1+c2\varepsilon_1 l+|1-\gamma|cM_B}\right)\Bigg\}\,\mathsf{d}x, \tag{23}$$

і для $g \geq 2$

$$G_k(\gamma,\lambda)^{q_k}=\int_0^{\mathsf{N}(\varepsilon_1)}(\mathsf{N}(\varepsilon_1)-x)\times \tag{24}$$

$$\exp\left\{\frac{3q_k^2\lambda^2/2}{(1+|1-\gamma|cm_B)^4}\Big((1+2c\varepsilon_k x+(1-\gamma)cv)^2\left(\sigma^2(\varepsilon_{k-1}x)(1+\gamma^2)\right)\right.$$

$$\left.+(c\varepsilon_{k-1}+\gamma c\varepsilon_{k-1})^2(\sigma(\varepsilon_{k-1}x)+|1-\gamma|\tau_B)^2\Big)+q_k\lambda\left(\frac{c\varepsilon_{k-1}(1+|\gamma|)}{(1+|1-\gamma|cm_B)^2}\right)\right\}.$$

Використовуючи у нерівності (10) леми 4 послідовність $q_k=(1-p)^{-1}p^{1-k}$, $k=1,2,\ldots$, отримаємо таку теорему.

Теорема 2. *Нехай для* γ*-відображеного процесу* $W_\gamma(t)$, $\gamma\in\mathbb{R}$, *виконуються умови леми 4, і нехай* $r=\{r(u),u\geq 1\}$ *— така неперервна функція, що* $r(u)>0$, *коли* $u>1$, *а функція* $s(t)=r(\exp\{t\}), t\geq 0$, *— опукла. Тоді за виконання умови*

$$\int_0^{\beta} r\left(\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)\mathsf{d}u<\infty, \tag{25}$$

для всіх $p\in(0;1)$ *і* $x>0$ *справджується нерівність*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in B}W_\gamma(t)>x\right\}\leq r^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p}\int_0^{\beta p} r\left(\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)\mathsf{d}u\right)\times$$

$$\times\inf_{\lambda>0}(G_1(\gamma,\lambda,p))^{1-p}G_2(\gamma,\lambda,p) \tag{26}$$

де

$$G_1(\gamma,\lambda,p)=\sum_{l=0}^{\mathsf{N}(\sigma^{(-1)}(\beta p))-1}(\mathsf{N}(\sigma^{(-1)}(\beta p))-l)\exp\left\{\frac{\lambda^2(\sigma(2\sigma^{(-1)}(\beta p)l)+|1-\gamma|\tau_B)^2}{2(1-p)^2(1+|1-\gamma|cm_B)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda}{1-p}\left(1-\frac{1}{1+2c\sigma^{(-1)}(\beta p)l+|1-\gamma|cM_B}\right)\right\},$$

$$G_2(\gamma,\lambda,p)=\exp\left\{\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{3p^{1-k}\lambda^2/2}{(1-p)(1+|1-\gamma|cm_B)^4}\times\right.\right.$$

$$\times\Big(\left(1+2c\sigma^{(-1)}(\beta p^k)(\mathsf{N}(\sigma^{(-1)}(\beta p))-1)+(1-\gamma)cv\right)^2\times$$

$$\times\left(\sigma^2(\sigma^{(-1)}(\beta p^{k-1})(\mathsf{N}(\sigma^{(-1)}(\beta)-1))(1+\gamma^2))\right)$$

$$+(c\sigma^{(-1)}(\beta p^{k-1})+\gamma c\sigma^{(-1)}(\beta p^{k-1}))^2\times$$

$$\times(\sigma(\sigma^{(-1)}(\beta p^{k-1})(\mathsf{N}(\sigma^{(-1)}(\beta p))-1))+|1-\gamma|\tau_B)^2\Big)$$

$$\left.\left.+\lambda\left(\frac{c\sigma^{(-1)}(\beta p^{k-1})(1+|\gamma|)}{(1+|1-\gamma|cm_B)^2}\right)\right)\right\}.$$

Доведення. Легко бачити, що послідовності $q_k = (1-p)^{-1}p^{1-k}$ та $\varepsilon_k = \sigma^{(-1)}(\beta p^k)$ задовольняють умові леми 4. Використавши (22), матимемо

$$\mathsf{E}\exp\left\{\lambda\sup_{t\in B}W_\gamma(t)\right\} \le (G_1(\gamma,\lambda,p))^{1-p}G_2(\gamma,\lambda,p)$$
$$\times\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)p^{k-1}\log\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}\left(\beta p^k\right)\right)\right\}. \tag{27}$$

Оскільки

$$\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)p^{k-1}\log\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}\left(\beta p^k\right)\right)\right\}$$
$$= r^{(-1)}\left(r\left(\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)p^{k-1}\log\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}\left(\beta p^k\right)\right)\right\}\right)\right)$$
$$\le r^{(-1)}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)p^{k-1}r\left(\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}\left(\beta p^k\right)\right)\right)\right)$$
$$\le r^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p}\int_0^{\beta p}r\left(\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)\mathsf{d}u\right), \tag{28}$$

твердження наслідку випливає з (27) та нерівності Чебишова.

Список використаної літератури

1. *Albreher H., Ivanovs J.* Power identities for Lévy risk models under taxation and capital injections // Stochastic Systems. – 2014. – **4**, №1. – P. 157–172.
2. *Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V.* Metric Characterization of Random Variables and Random Processes. – AMS, Providence, RI, 2000. – 257 p.
3. *Hashorva E., Ji L., Piterbarg V.* On the Supremum of gamma-reflected Processes with Fractional Brownian Motion as Input // Stochastic Processes and their Applications. – 2014. – **123**, №11. – P. 4111–4127.
4. *Debicki K., Hashorva E., Liu P.* Ruin probabilities and passage times of γ-reflected Gaussian processes with stationary increments // arXiv:1511.09234. – 2015. – 29 p.
5. *Kahane J. P.* Propriétés locales des fonctions à series de Fouries aléatories // Studia Math. – 1960. – **19**, №1. – P. 1–25.
6. *Козаченко Ю. В., Пашко А. О., Розора І. В.* Моделювания випадкових процесів та полів. – Київ: Задруга, 2007. – 230 с.
7. *Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В.* О субгауссовских случайных величинах // Укр. матем. журнал. – 1980. – **32**, №6. – С. 723–730.
8. *Козаченко Ю. В., Островский Е. И.* Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских // Теория вероятн. и матем. статист. – 1985. – **32**. – С. 42–53.
9. *Kozachenko Yu., Yamnenko R.* Application of φ-sub-Gaussian random processes in Queuing Theory // In: Modern trends in Stochastics, Springer Optimization and Its Applications, Springer, Berlin, 2014. – **90**. – P. 21–38.
10. *Yamnenko R., Shramko O.* On the distribution of storage processes from the class $\mathrm{V}(\varphi,\psi)$ // Theory Probab. Math. Stat. – 2011. – **83**. – P. 191–206.
11. *Yamnenko R., Kozachenko Yu., Bushmitch D.* Generalized sub-Gaussian fractional Brownian motion queueing model // Queueing Systems. – 2014. – **77**, №1. – P. 75–96.

Одержано 20.05.2016