

УДК 519.8

А. Ю. Брила, В. І. Гренджа (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

**ДОСЯЖНІСТЬ ОПТИМАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ
ЛЕКСИКОГРАФІЧНОЇ ЗАДАЧІ ПРО РАНЕЦЬ З
АЛЬТЕРНАТИВНИМИ КРИТЕРІЯМИ**

The method of finding of attainable optimum solutions of lexicographic knapsack problem with alternative criteria by reducing it to the problem of one-criterion optimization with a scalar objective function is considered.

Розглядається метод знаходження досяжних оптимальних розв'язків задачі лексикографічної оптимізації про ранець з альтернативними критеріями шляхом зведення її до однокритеріальної задачі з скалярною цільовою функцією.

Вступ. Прикладні задачі лексикографічної оптимізації про ранець виникають у випадку, коли оптимальний набір у класичній задачі про ранець необхідно знайти на основі багатьох критеріїв, які строго ранжировані за важливістю. Для розв'язання цієї задачі в [1, 4] запропоновано підхід, що ґрунтується на використанні схеми скаляризації. Такий підхід для задачі про ранець має суттєвий недолік, оскільки на першому кроці розв'язується класична задача про ранець з одним (першим) критерієм, але на усіх наступних на множину допустимих розв'язків накладається додаткове обмеження, яке не дозволяє застосувати на цих кроках класичні методи розв'язання задачі про ранець. Знаходження досяжних оптимальних розв'язків лексикографічної задачі про ранець шляхом побудови функціоналу, що представляє лексикографічний порядок віддачі переваги на множині допустимих розв'язків розглянуто у [2, 5].

У даній статті розглянуто задачу знаходження досяжних оптимальних розв'язків лексикографічної задачі про ранець, у якій на деякі із критеріїв накладено умови допустимості [3]. Якщо для деякого із таких критеріїв умови допустимості не виконуються, то цей критерій повинен бути виключений із подальшого розгляду. Для розв'язання цієї задачі запропоновано підхід, що дозволяє звести дану задачу до задачі однокритеріальної оптимізації.

Розглядається також задача лексикографічної оптимізації з альтернативними залежними критеріями. Такі задачі виникають у випадку, коли допустимість одного із критеріїв залежить від допустимості інших, пов'язаних із даним критерієм.

1. Знаходження досяжних оптимальних розв'язків лексикографічної задачі про ранець з альтернативними критеріями. Розглядається задача

$$\max^L \bar{c}(x), \quad x \in X, \quad (1)$$

де множина допустимих розв'язків X задається обмеженнями

$$\sum_{j=1}^n w_j x_j \leq C, \\ x_j \in Z, \quad j = \overline{1, n}.$$

Цільова функція $\bar{c}(x) = (c_1(x), c_2(x), \dots, c_q(x))$, за якою порівнюються допустимі альтернативи, є векторною згорткою критеріїв $c_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, q$ у субординації строгого ранжирування $Rg(1, 2, \dots, q)$, а кожен з критеріїв $c_k(x)$ – лінійна скалярна функція n змінних:

$$c_k(x) = \sum_{j=1}^n c_{kj}x_j, \quad 1 \leq k \leq q.$$

Ця функція є однією із числових оцінок допустимих альтернатив.

Нехай $\alpha_q > 0$ – деяке додатне число, а інші додатні числа $\alpha_{q-1}, \alpha_{q-2}, \dots, \alpha_1$ поступово знаходяться з умови

$$\alpha_r > \frac{1}{\mu_r} \sum_{k=r+1}^q \alpha_k M_k, \quad r = q-1, q-2, \dots, 1,$$

де $0 < \mu_r \leq \min_{i,j \in \{1,2,\dots,n\}, c_{ri} \neq c_{rj}} |c_{ri} - c_{rj}|$,

$$M_k \geq \left(\max_j c_{kj} \right) \left[\frac{C}{\min_j w_j} \right] - \left(\min_j c_{kj} \right) \left[\frac{C}{\max_j w_j} \right],$$

($[\]$ – ціла частина числа).

У [2] показано, що одержані таким чином коефіцієнти можуть бути використані для знаходження досяжних оптимальних розв'язків шляхом розв'язання задачі

$$\max L(x) = \sum_{k=1}^q \alpha_k c_k(x), \quad x \in X. \quad (2)$$

На основі задач (1), (2) розглянемо задачу, в якій оптимальний розв'язок необхідно знайти, враховуючи тільки один критерій якнайвищого рангу з групи критеріїв якнайвищого рангу, для якого виконується умова

$$c_k(x) \geq m_k, \quad m_k \in R, \quad k \in \{1, 2, \dots, q\}. \quad (3)$$

Такий критерій є допустимим, а дана задача є задачею лексикографічної оптимізації з альтернативними критеріями.

Розглянемо задачу знаходження максимуму функціоналу

$$L(x) = \sum_{k=1}^q \bar{\alpha}_k c_k(x) \quad (4)$$

на допустимій множині, що задається обмеженнями

$$\sum_{j=1}^n w_j x_j \leq C, \quad (5)$$

$$x_j \in Z, \quad j = \overline{1, n}, \quad (6)$$

$$c_k(x) \geq m_k y_k, \quad k = 1, 2, \dots, q, \quad (7)$$

$$\bar{\alpha}_k = \alpha_k y_k, \quad k = 1, 2, \dots, q, \quad (8)$$

$$\sum_{k=1}^q y_k = 1, \quad (9)$$

$$y_k \in \{0, 1\}, \quad k = 1, 2, \dots, q. \quad (10)$$

Нехай $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\alpha}) = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_q, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_q)$ є оптимальним розв'язком цієї задачі .

Теорема 1. *Вектор \hat{x} є розв'язком задачі лексикографічної оптимізації про ранець з альтернативними критеріями.*

Доведення теореми легко отримати, враховуючи вибір коефіцієнтів α_k .

Очевидно, якщо оптимальний розв'язок необхідно знайти в залежності від вибору d , $d \geq 1$ допустимих критеріїв, то обмеження (9) необхідно замінити обмеженням

$$\sum_{k=1}^q y_k = d.$$

2. Знаходження досяжних оптимальних розв'язків лексикографічної задачі про ранець з альтернативними залежними критеріями. Розглянемо випадок, коли у задачі лексикографічної оптимізації про ранець з альтернативними критеріями для допустимості критерію $c_k(x)$, $k \in D \subset \{1, 2, \dots, q\}$, крім виконання умови (3), додатково вимагається, щоб така умова виконувалась хоча б для одного із критеріїв $c_i(x)$, $i \in I_k \subset \{1, 2, \dots, q\}$. Задача знаходження оптимального розв'язку в залежності від вибору p ($p > 1$) допустимих критеріїв якнайвищого рангу є задачею лексикографічної оптимізації про ранець з альтернативними залежними критеріями.

Нехай $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\alpha}) = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_q, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_q)$ є оптимальним розв'язком задачі

$$L(x) = \sum_{k=1}^q \bar{\alpha}_k c_k(x)$$

на допустимій множині, що задається обмеженнями

$$\sum_{j=1}^n w_j x_j \leq C,$$

$$x_j \in Z, \quad j = \overline{1, n},$$

$$c_k(x) \geq m_k y_k, \quad k = 1, 2, \dots, q,$$

$$\bar{\alpha}_k = \alpha_k y_k, \quad k = 1, 2, \dots, q,$$

$$\sum_{k=1}^q y_k = p,$$

$$\sum_{j \in I_k} y_j \geq y_k, \quad k \in D,$$

$$y_k \in \{0, 1\}, \quad k = 1, 2, \dots, q.$$

Теорема 2. *Вектор \tilde{x} є розв'язком лексикографічної задачі про ранець з альтернативними залежними критеріями.*

Доведення теореми легко отримати, враховуючи вибір коефіцієнтів α_k .

Висновки. Розглянуті у роботі підходи дозволяють звести задачі лексикографічної оптимізації про ранець з альтернативними і альтернативними залежними критеріями до задач однокритеріальної оптимізації. В цьому і є перевага запропонованих підходів, оскільки вони дозволяють для знаходження досяжних оптимальних розв'язків застосувати класичні методи однокритеріальної оптимізації.

Список використаної літератури

1. Червак Ю. Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір / Ю.Ю. Червак. — Ужгород: Ужгородський нац. ун-т, 2002. — 312 с.
2. Брила А.Ю., Гренджа В.І. Досяжність оптимальних розв'язків лексикографічної задачі про ранець / А.Ю. Брила, В.І. Гренджа, // *Computation Intelligence (Results, Problems and Perspectives): Proceeding of the Second International Conference (14-17 May 2013, Cherkasy)*. — Cherkasy: McLaut, 2013. — P.334.
3. Брила А.Ю. Достижимость оптимальных решений линейной задачи многокритериальной оптимизации с альтернативными критериями в транзитивной субординации / А.Ю. Брила // *Международный научно-технический журнал "Проблемы управления и информатики"*. — 2011. — №4. — С. 68-72.
4. Подиновский В.В., Гаврилов В.М. Оптимизация по последовательно применяемым критериям / В.В. Подиновский, В.М. Гаврилов. — М.: Наука, 1975. — 192 с.
5. Брила А. Ю. Достижимость оптимальных решений линейной задачи многокритериальной оптимизации по взвешенной сумме критериев разной важности в транзитивной субординации / А.Ю. Брила // *Кибернетика и системный анализ*. — 2008. — №5. — С. 135-138.

Одержано 05.01.2017