УДК 519.21

О. М. Гопкало (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

УЗАГАЛЬНЕНІ ТЕОРЕМИ ЛЕВІ-БАКСТЕРА ДЛЯ ПСЕВДОГАУСОВИХ ВИПАДКОВИХ ВЕКТОРІВ

This paper is devoted pseudo-Gaussian random vectors that are both sub-Gaussian and super-Gaussian. For these vectors prove theorem generalized Levy-Baxter.

Робота присвячена псевдогаусовим випадковим векторам, які є одночасно субгаусовими та супергаусовими. Для таких векторів доведено узагальнену теорему Леві-Бакстера.

1. Вступ. Нехай (Ω, F, P) — стандартний ймовірнісний простір, $(\xi_{n,k}, k = 1, \dots, p_n)$ — послідовність серій центрованих випадкових величин, де $(p_n, n \geq 1)$ — послідовність натуральних чисел, така що:

$$p_n \to \infty, \text{ при } n \to \infty.$$

Класичні теореми Леві-Бакстера — це твердження про асимптотичну поведінку сум

$$S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{p_n} \xi_{n,k}^2, n \geq 1.$$

Цікавими є умови, за яких

$$\mathsf{E}\left(S_n^{(2)} - \mathsf{E}S_n^{(2)}\right)^2 \to 0, n \to \infty.$$

Найцікавішим є випадок, коли $S_n^{(2)} \to const$ при $n \to \infty$.

Теоремам Леві-Бакстера присвячено багато робіт, зокрема роботи [1] - [3]. В основному в цих роботах вивчалися умови збіжності до нуля в середньому квадратичному або з ймовірністю 1.

У даній роботі розглядаються узагальнені теореми Леві-Бакстера, в яких досліджується поведінка різниці сум квадратів псевдогаусових випадкових векторів: $\sum_n \xi_k^2 - \sum_m \xi_k^2$.

Крім цього наводиться оцінка розподілу для квадратичної форми псевдогаусового випадкового вектора.

2. Базові визначення. У цьому розділі наведемо кілька означень, які будуть використані при доведенні основних результатів.

Означення 1 (див. [1]). *Випадкову величину* $\xi, \mathsf{E}\xi = 0$, *будемо називати субгаусовою, якщо існує таке* $a \geq 0$, *що* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\left\{\frac{a^2\lambda^2}{2}\right\}.$$

Клас субгаусових випадкових величин позначатимемо $\mathrm{Sub}(\Omega)$.

Числова характеристика $\tau(\xi) = \inf\left\{a \geq 0 : \mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\left\{\frac{\lambda^2 a^2}{2}\right\}; \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ називається *субгаусовським стандартом випадкової величини.*

Означення 2 (див. [1]). *Центорований випадковий вектор $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ називається субгаусовим, якщо існує симетричний невід'ємно визначений оператор $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, такий що*

$$\mathsf{E}\exp\{(\vec{u};\vec{\xi})\} \leq \exp\left\{\frac{1}{2}(B\vec{u};\vec{u})\right\}, u \in \mathbb{R}^n.$$

Будемо називати B оператором, що супроводжує субгаусовий вектор $\vec{\xi}$.

Означення 3 (див. [2]). *Центрована випадкова величина ξ називається супергаусовою, якщо існує таке $r > 0$, що $\forall \lambda \in \mathbb{R}$*

$$\left|\mathsf{E}\exp\{i\lambda\xi\}\right| \leq \exp\left\{-\frac{r^2\lambda^2}{2}\right\}.$$

Клас супергаусових випадкових величин позначатимемо: $\mathrm{Super}(\Omega)$.

Функціонал $r(\xi) = \sup\left\{r > 0 : \left|\mathsf{E}\exp\{i\lambda\xi\}\right| \leq \exp\left\{-\frac{r^2\lambda^2}{2}\right\}; \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ називається *супергаусовим стандартом випадкової величини.*

Означення 4 (див. [2]). *Центрований випадковий вектор $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ називається супергаусовим, якщо існує симетричний додатньо визначений оператор $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, такий що:*

$$\left|\mathsf{E}\exp\{i(\vec{\lambda};\vec{\xi})\}\right| \leq \exp\left\{-\frac{1}{2}(R\vec{\lambda};\vec{\lambda})\right\}, \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Будемо називати R оператором, що супроводжує супергаусовий вектор $\vec{\xi}$.

Означення 5 (див. [1]). *Нехай $\vec{\xi}$ — n-вимірний випадковий вектор, $n \geq 1$. Якщо $\vec{\xi}$ є одночасно субгаусовим та супергаусовим випадковим вектором, то $\vec{\xi}$ називається псевдогаусовим. При $n = 1$, ξ — псевдогаусова випадкова величина.*

Клас псевдогаусових випадкових векторів позначатимемо $\mathrm{Psg}(\Omega, \mathbb{R}^n) = \mathrm{Sub}(\Omega, \mathbb{R}^n)\bigcap\mathrm{Super}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. За означенням існує симетричний невід'ємно визначений оператор $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ та існує симетричний додатньо визначений оператор $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, такі що $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$:

$$\left|\mathsf{E}\exp\{(\vec{\lambda};\vec{\xi})\}\right| \leq \exp\left\{\frac{1}{2}(B\vec{\lambda};\vec{\lambda})\right\},$$

$$\left|\mathsf{E}\exp\{i(\vec{\lambda};\vec{\xi})\}\right| \leq \exp\left\{-\frac{1}{2}(R\vec{\lambda};\vec{\lambda})\right\}.$$

Оператори (матриці) B та R називаються *операторами (матрицями), що супроводжують псевдогаусовий вектор $\vec{\xi}$.*

Позначимо B – *sub*-оператор, R – *super*-оператор.

Теорема 1 (див. [1]). *Нехай $\vec{\xi} \in Psg\ (\ \Omega, \mathbb{R}^n)$, $R = (r_{ij})_{i,j=1}^n$, $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ – матриці, що супроводжують вектор $\vec{\xi}$. Тоді $\forall s \in$ (0, 1):*

$$\mathsf{E}exp\left\{\frac{s}{2\hat{D}_n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k^2 - b_{kk})\right\} \leq \exp\left\{-\frac{s}{2}\right\}\frac{1}{\sqrt{1-s}},$$

$$\mathsf{E}exp\left\{\frac{s}{2\check{D}_n}\sum_{k=1}^{n}(r_{kk}-\xi_k^2)\right\}\le\exp\left\{\frac{s^2}{4}\right\},$$

де $\hat{D}_n=\left(\sum_{i,j=1}^{n}(b_{ij})^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $\check{D}_n=\left(\sum_{i,j=1}^{n}(r_{ij})^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

3. Теореми про псевдогаусові випадкові вектори.

Теорема 2. *Нехай* $(\xi_1,\dots,\xi_n,\xi_{n+1},\dots,\xi_{n+m})^T$ *— псевдогаусовий випадковий вектор,* $n,m\ge 1$*, такий що* $\forall\vec{\lambda}\in\mathbb{R}^{n+m}$ *виконується наступне:*

$$\left|\mathsf{E}\exp\{i(\vec{\lambda};\vec{\xi})\}\right|\le\exp\left\{-\frac{1}{2}(R\vec{\lambda};\vec{\lambda})\right\},$$

де $R=(r_{ij})_{i,j=1}^{n+m}$ *— super-оператор (симетрична додатньо визначена матриця), та*

$$\left|\mathsf{E}\exp\{(\vec{\lambda};\vec{\xi})\}\right|\le\exp\left\{\frac{1}{2}(B\vec{\lambda};\vec{\lambda})\right\},$$

де $B=(b_{ij})_{i,j=1}^{n+m}$ *— sub-оператор (симетрична невід'ємно визначена матриця), причому* $B=\varkappa R,\varkappa\ge 1$.

Розглянемо

$$I_{n,m}(s)=\mathsf{E}exp\left\{\frac{s}{2(G_{n+m})^{1/2}}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k^2-\varkappa r_{kk})+\sum_{k=n+1}^{n+m}(r_{kk}-\xi_k^2)\right\},$$

де $G_{n+m}=\sum_{k,j=1}^{n+m}r_{kj}^2$. *Тоді*

$$I_{n,m}(s)\le\exp\left\{-\frac{s\varkappa}{2}\right\}(1-2s\varkappa)^{-1/4},$$

де $s<\frac{1}{2\varkappa}$.

Доведення. Доведемо обмеження на $I_{n,m}(s)$:

$$I_{n,m}(s)=\mathsf{E}exp\left\{\frac{s}{2(G_{n+m})^{1/2}}\left(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k^2-\varkappa r_{kk})+\sum_{k=n+1}^{n+m}(r_{kk}-\xi_k^2)\right)\right\}=$$
$$=\mathsf{E}exp\left\{\frac{s}{2(G_{n+m})^{1/2}}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k^2-\varkappa r_{kk})+\frac{s}{2(G_{n+m})^{1/2}}\sum_{k=n+1}^{n+m}(r_{kk}-\xi_k^2)\right\}\le$$
$$\le\left(\mathsf{E}exp\left\{\frac{2s}{2(G_{n+m})^{1/2}}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k^2-\varkappa r_{kk})\right\}\right)^{1/2}\times$$
$$\times\left(\mathsf{E}exp\left\{\frac{2s}{2(G_{n+m})^{1/2}}\sum_{k=n+1}^{n+m}(r_{kk}-\xi_k^2)\right\}\right)^{1/2}.$$

Позначимо R_n,R_{n+m} — матриці, такі що $R_n=(r_{ik})_{i,k=1}^{n}; R_{n+m}=(r_{ik})_{i,k=n+1}^{n+m}$. Крім того, $B_n=\varkappa R_n, g_n=\sum_{k,j=1}^{n}r_{kj}^2, g_{n+m}=\sum_{k,j=n+1}^{n+m}r_{kj}^2$.

З теореми 1 маємо:

$$\mathsf{E}exp\left\{\frac{2s}{2(G_{n+m})^{1/2}}\frac{\varkappa(g_n)^{1/2}}{\varkappa(g_n)^{1/2}}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k^2-\varkappa r_{kk})\right\}\le\exp\left\{-\frac{2u_n\varkappa}{2}\right\}\frac{1}{\sqrt{1-2u_n\varkappa}},$$

якщо позначити $u_n = \frac{s(g_n)^{1/2}}{(G_{n+m})^{1/2}}$, та при $u_n \varkappa * 2 < 1$.

Також, з теореми 1, маємо:

$$\mathsf{E} exp\left\{\frac{2s}{2(G_{n+m})^{1/2}}\frac{(g_{n+m})^{1/2}}{(g_{n+m})^{1/2}}\sum_{k=n+1}^{n+m}(r_{kk}-\xi_k^2)\right\} \leq \exp\left\{\frac{(2v_n)^2}{4}\right\},$$

якщо позначити $v_n = \frac{s(g_{n+m})^{1/2}}{(G_{n+m})^{1/2}}$, та при $2v_n < 1$.

Отже,

$$I_{n,m}(s) \leq \exp\left\{-\frac{u_n\varkappa}{2}\right\}\frac{1}{(1-2u_n\varkappa)^{1/4}}\exp\left\{\frac{2v_n^2}{4}\right\} =$$
$$= \exp\left\{-\frac{s\varkappa(g_n)^{1/2}}{2(G_{n+m})^{1/2}} + \frac{2s^2 g_{n+m}}{4G_{n+m}}\right\}\left(1-\frac{2s\varkappa(g_n)^{1/2}}{(G_{n+m})^{1/2}}\right)^{-\frac{1}{4}}.$$

Оскільки $g_n + g_{n+m} \leq G_{n+m}$, то $g_{n+m} \leq G_{n+m} - g_n$. Звідси маємо наступне:

$$\frac{g_{n+m}}{G_{n+m}} \leq \frac{G_{n+m}-g_n}{G_{n+m}} = 1 - \frac{g_n}{G_{n+m}}.$$

Позначимо $f_n = \left(\frac{g_n}{G_{n+m}}\right)^{1/2}$, $f_n \leq 1$.

Тоді

$$I_{n,m}(s) \leq \exp\left\{-\frac{s\varkappa f_n}{2} + \frac{s^2}{2}(1-f_n^2)\right\}(1-2sf_n\varkappa)^{-\frac{1}{4}} =$$
$$= \exp\left\{\frac{s^2}{2}\right\}\exp\left\{-\frac{sf_n\varkappa}{2} - \frac{s^2f_n^2}{2}\right\}(1-2sf_n\varkappa)^{-\frac{1}{4}}.$$

Позначимо $L(u) = \exp\left\{-\frac{u\varkappa}{2} - \frac{u^2}{2}\right\}(1-2u\varkappa)^{-\frac{1}{4}}$.

Легко бачити, що максимум цієї функції досягається в точці $u = \frac{1}{2\varkappa}$.

Підставимо це значення у нерівність вище та отримаємо наступне:

$$I_{n,m}(s) \leq \exp\left\{\frac{s^2}{2}\right\}\exp\left\{-\frac{s\varkappa}{2} - \frac{s^2}{2}\right\}(1-2s\varkappa)^{-\frac{1}{4}} =$$
$$= \exp\left\{-\frac{s\varkappa}{2}\right\}(1-2s\varkappa)^{-\frac{1}{4}},$$

де $s < \frac{1}{2\varkappa}$.

Наступна теорема випливає з теореми 2. Оскільки, якщо переномерувати величини ξ_i випадкового вектора $\vec{\xi}$, то твердження теореми 2 не зміниться.

Теорема 3. *Нехай* $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ — *псевдогаусовий випадковий вектор,* $N \geq 1$, *із супроводжуючими матрицями* R_N — *супергаусова,* B_N — *субгаусова:* $B_N = \varkappa_N R_N$, *де* $\varkappa_N \geq 1$, $G_N = \sum_{j,k=1}^N (r_{kj}^{(N)})^2$, *де* $r_{k,j}^{(N)}$ — *елементи матриці* R_N.

Позначимо

$$I_{Z^+,Z^-}(s) = \mathsf{E}\exp\left\{\frac{s}{2(G_N)^{1/2}}Y_{Z^+,Z^-}\right\},$$

де $Y_{Z^+,Z^-} = \sum_{k\in Z^+}(\xi_k^2 - \varkappa_N r_{kk}^{(N)}) + \sum_{k\in Z^-}(r_{kk}^{(N)} - \xi_k^2)$*; тут* Z^+, Z^- *— множини цілих чисел від 1 до* N *такі, що* $Z^+\bigcap Z^- = \varnothing$*,* $Z^+\bigcup Z^- = (1,\ldots,N)$.

Тоді при $0 \le s < \frac{1}{2\varkappa_N}$ *та* $\forall Z^-, Z^+$ *маємо:*

$$I_{Z^+,Z^-}(s) \le \exp\left\{-\frac{s\varkappa_N}{2}\right\}(1-2s\varkappa_N)^{-\frac{1}{4}}. \qquad (1)$$

Наслідок 1. *Позначимо*

$$\hat{I}_{Z^+,Z^-}(s) = \mathsf{E}\exp\left\{\frac{s}{2(G_N)^{1/2}}\left|Y_{Z^+,Z^-}\right|\right\}.$$

Тоді при $0 \le s < \frac{1}{2\varkappa_N}$*, має місце нерівність:*

$$\hat{I}_{Z^+,Z^-}(s) \le 2\exp\left\{-\frac{s\varkappa_N}{2}\right\}(1-2s\varkappa_N)^{-\frac{1}{4}}.$$

Доведення. Доведемо твердження наслідку. Маємо наступне:

$$\hat{I}_{Z^+,Z^-}(s) = \mathsf{E}\exp\left\{\frac{s}{2(G_N)^{1/2}}\left|Y_{Z^+,Z^-}\right|\right\} \le$$
$$\le \mathsf{E}\exp\left\{\frac{s}{2(G_N)^{1/2}}Y_{Z^+,Z^-}\right\} + \mathsf{E}\exp\left\{\frac{s}{2(G_N)^{1/2}}(-Y_{Z^+,Z^-})\right\}.$$

Для першого доданку справедлива нерівність (1). Для другого також справджується ця нерівність, оскільки вона не залежить від Z^+, Z^-.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми 3. Тоді* $\forall x > 0$ *справджується нерівність:*

$$\mathsf{P}\left\{\frac{s}{2(G_N)^{1/2}}\left|Y_{Z^+,Z^-}\right| > x\right\} \le 2\exp\left\{-\frac{x\varkappa_N}{2}\right\}(1-2\varkappa_N x)^{\frac{1}{4}}.$$

Доведення. З нерівності Чебишева при $x > 0$, $s > 0$ випливає наступне:

$$\mathsf{P}\left\{\frac{1}{2(G_N)^{1/2}}\left|Y_{Z^+,Z^-}\right| > x\right\} =$$
$$= \mathsf{P}\left\{\frac{s}{2(G_N)^{1/2}}\left|Y_{Z^+,Z^-}\right| > sx\right\} \le \frac{\mathsf{E}\exp\left\{\frac{s}{2(G_N)^{1/2}}\left|Y_{Z^+,Z^-}\right|\right\}}{\mathsf{E}\exp\{sx\}}.$$

З теореми 3 маємо:

$$\mathsf{P}\left\{\frac{s}{2(G_N)^{1/2}}\left|Y_{Z^+,Z^-}\right| > x\right\} \le 2\exp\left\{-(\frac{s\varkappa_N}{2} + sx)\right\}(1-2s\varkappa_N)^{-\frac{1}{4}}. \qquad (2)$$

Мінімум правої частини досягається при $s = \frac{\varkappa_N^2 x}{1+2\varkappa_N x}$.

Легко бачити, що тут $s < \frac{1}{2\varkappa_N}$.

Підставимо це значення в (2) та отримаємо твердження теореми.

4. Узагальнені теореми Леві-Бакстера для псевдогаусових випадкових векторів.

Теорема 5. *Нехай $\vec{\xi}_N$ — послідовність псевдогаусових випадкових векторів, $N \geq 1$, для кожного з яких виконуються умови теореми 3.*

Нехай існує константа c, така що $\sum_{k\in Z^+} \varkappa_N r_{kk}^{(N)} - \sum_{k\in Z^-} r_{kk}^{(N)} \to c$, при $N \to \infty$.

Введемо наступні позначення: $I_{Z^+,Z^-,N} = \sum_{k\in Z^+} \xi_k^2 - \sum_{k\in Z^-} \xi_k^2$ та $F_N = \sum_{k\in Z^+} \varkappa_N r_{kk}^{(N)} - \sum_{k\in Z^-} r_{kk}^{(N)} - c$, де $r_{kj}^{(N)}$ — елементи матриці R_N.

Тоді

$$I_{Z^+,Z^-,N} \to c$$

за ймовірністю, якщо $G_N \to 0$, при $N \to \infty$, та справджується наступна нерівність при $y > F_N$:

$$\mathsf{P}\left\{\left|\sum_{k\in Z^+} \xi_k^2 - \sum_{k\in Z^-} \xi_k^2 - c\right| > y\right\} \leq 2\exp\left\{-\frac{(y-F_N)\varkappa_N}{8(G_N)^{1/2}}\right\}\left(1+\frac{2\varkappa_N(y-F_N)}{(G_N)^{1/2}}\right)^{\frac{1}{4}},$$

де $G_N = \sum_{j,k=1}^{N} (r_{kj}^{(N)})^2$.

Доведення. З теореми 4 випливає, що

$$\mathsf{P}\left\{\left|\sum_{k\in Z^+} \xi_k^2 - \sum_{k\in Z^-} \xi_k^2 - c\right| > y\right\} =$$

$$= \mathsf{P}\left\{\frac{\sum_{k\in Z^+} \xi_k^2 - \sum_{k\in Z^-} \xi_k^2 - (\sum_{k\in Z^+} \varkappa_N r_{kk}^{(N)} - \sum_{k\in Z^-} r_{kk}^{(N)}) + F_N}{4(G_N)^{1/2}} > \right.$$

$$\left. > \frac{y}{4(G_N)^{1/2}}\right\} =$$

$$= \mathsf{P}\left\{\frac{\sum_{k\in Z^+} \xi_k^2 - \sum_{k\in Z^-} \xi_k^2 - (\sum_{k\in Z^+} \varkappa_N r_{kk}^{(N)} - \sum_{k\in Z^-} r_{kk}^{(N)})}{4(G_N)^{1/2}} > \right.$$

$$\left. > \frac{y-F_N}{4(G_N)^{1/2}}\right\} \leq$$

$$\leq 2\exp\left\{-\frac{(y-F_N)\varkappa_N}{8(G_N)^{1/2}}\right\}\left(1+2\varkappa_N\frac{(y-F_N)}{4(G_N)^{1/2}}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

З цієї нерівності випливає твердження теореми.

Зауваження 1. *Узагальнена теорема Леві-Бакстера при $Z^- = \varnothing$ набуває вигляду теореми Леві-Бакстера.*

Список використаної літератури

1. *Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V.* Metric Characterization of Random Variables and Random Processes. – American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. – 257 p.
2. *Козаченко Ю. В., Вовк Л. Б.* Про швидкість збіжності в теоремах Леві-Бакстера для деяких класів випадкових процесів // Теорія ймовір. та матем. статист. – 1992. – Вип. 46. – С. 25–36.
3. *Козаченко Ю. В., Бесклинская Е. П.* Сходимость в нормах пространства Орлича и теоремы Леви-Бакстера// Теорія ймовір. та матем. статист. – 1986. – Вип. 35. – С. 3–6.

Одержано 02.03.2017