УДК 519.21, 519.71

Т. О. Лукашiв, I. В. Малик (Чернiвецький нац. ун-т iм. Ю. Федьковича)

ПРО ЕКВIВАЛЕНТНIСТЬ СТОХАСТИЧНОЇ СТIЙКОСТI ТА ЕКСПОНЕНЦIАЛЬНОЇ СТIЙКОСТI В *l.i.m.* ДЛЯ СТОХАСТИЧНОЇ ДИНАМIЧНОЇ СИСТЕМИ З МАРКОВСЬКИМИ ПАРАМЕТРАМИ I ПЕРЕМИКАННЯМИ

Sufficient conditions equivalent concepts of stochastic stability and exponential stability in the mean square for stochastic dynamic systems random structure with Markov switching are obtained.

Встановлено достатнi умови еквiвалентностi концепцiй стохастичної стiйкостi та експоненцiальної стiйкостi в середньому квадратичному для стохастичної динамiчної системи випадкової структури з марковськими перемиканнями.

1. Вступ. У задачах стабiлiзацiї для стохастичних систем концепцiї стохастичної стiйкостi та експоненцiальної стiйкостi у *l.i.m.* стоять поруч. Так, розв'язання задачi стабiлiзацiї для таких систем передбачає побудову оптимального керування, яке, окрiм мiнiмiзацiї вартостi керування, стабiлiзує систему до стохастично стiйкої [1]– [4], у той же час, коли допустимим є таке керування, при якому система є експоненцiально стiйкою в середньому квадратичному [1]– [5]. Враховуючи те, що оптимальне керування є одночасно допустимим, очевидною є практична потреба чiтко окреслити клас допустимих керувань, для яких окрiм концепцiї експоненцiальної стiйкостi в середньому квадратичному властива концепцiя стохастичної стiйкостi.

Для лiнiйних систем з марковськими параметрами з неперервним або дискретним часом еквiвалентнiсть вказаних концепцiй стiйкостi доведена в [6]. В данiй роботi за схожою методикою встановлено достатнi умови еквiвалентностi концепцiй стохастичної стайкостi й експоненцiальної стiйкостi в середньому квадратичному для стохастичних динамiчних систем випадкової структури з марковськими перемиканнями.

2. Постановка задачi та означення. На ймовiрнiсному базисi $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{F} := \{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$ [7] розглядається стохастична динамiчна система випадкової структури, яка описується стохастичним диференцiальним рiвнянням

$$dx(t) = a(t, x(t), \xi(t))dt + b(t, x(t), \xi(t))dw(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{T}, \tag{1}$$

з марковськими перемиканнями

$$\Delta x(t)|_{t=t_k} = x(t_k) - x(t_k-) = g(t_k-, x(t_k-), \xi(t_k-), \eta_k),$$

$$t_k \in \mathbb{T} := \{t_k \uparrow, k = 0, 1, 2, \ldots\}, \lim_{k \to \infty} t_k = +\infty, \tag{2}$$

i початковими умовами

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^m, \quad \xi(0) = y \in \mathbb{Y}, \quad \eta_0 = h \in \mathbb{H}. \tag{3}$$

Тут $x(t), t \geq 0$ — вектор стану системи, $\xi(t), t \geq 0$ — марковський процес iз значеннями у вимiрному просторi $\mathbb{Y}$; $\eta_k, k \geq 0$ — ланцюг Маркова iз значеннями у вимірному просторі $\mathbb{H}$, $w(t), t \geq 0$ — стандартний одновимірний вінерів процес; процеси ξ, η та w — $\mathfrak{F}_t$-вимірні і незалежні в сукупності [7], [8].

Припускається, що вимірні за сукупністю змінних відображення $a : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}^m$, $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}^m$ і $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{Y} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}^m$ задовольняють за другим аргументом умову Ліпшиця рівномірно за всіма іншими аргументами

$$|a(t, x_1, y) - a(t, x_2, y)|^2 + |b(t, x_1, y) - b(t, x_2, y)|^2 +$$
$$+|g(t, x_1, y, h) - g(t, x_2, y, h)|^2 \leq L|x_1 - x_2|^2, \quad L > 0, \tag{4}$$

$\forall t \geq 0, y \in \mathbb{Y}, h \in \mathbb{H}, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$, і умову обмеженості

$$\sup_{t\geq 0,\ y\in\mathbb{Y},\ h\in\mathbb{H}} (|a(t, 0, y)| + |b(t, 0, y)| + |g(t, 0, y, h)|) = c < \infty, \tag{5}$$

і, крім того, $\forall\ T < \infty$

$$\sup_{y\in\mathbb{Y},\ x\in\mathbb{R}^m} \int_0^T |b(t, x, y)|^2 dt < +\infty. \tag{6}$$

Зрозуміло, що виконання умов (4)–(6) гарантує існування єдиного розв'язку (1)–(3) [9].

Можна довести, що трійка $\{x(t), \xi(t), \eta(t)\}$, де $\eta(t) = \eta_k, t_k \leq t < t_{k+1}, k \geq 0$, являє собою феллерівський марковський процес і розглянути оператор Ляпунова на вимірних функціях $v(x, y, h) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{Y} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}^1$, який заданий рівністю [8]

$$\mathcal{L}v(x, y, h) := \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \big[\mathbb{E}^{(t)}_{y,h,x}\{v(x(t + \Delta t), \xi(t + \Delta t), \eta(t + \Delta t))\} - v(x, y, h)\big], \tag{7}$$

де $\mathbb{E}^{(t)}_{y,h,x} v := \mathbb{E}\{v/x(t) = x, \xi(t) = y, \eta(t) = h\}$.

Означення 1. Функцією Ляпунова для системи випадкової структури (1)-(3) назвемо невід'ємну функцію $v(x, y, h)$, для якої виконуються умови:

– при всіх $y \in \mathbb{Y}, h \in \mathbb{H}, x \in \mathbb{R}^m$ визначений оператор Ляпунова (7);

– при $r \to \infty$ $\quad \overline{v}(r) := \inf_{y\in\mathbb{Y},\ h\in\mathbb{H},\ |x|\geq r} v(x, y, h) \to \infty$;

– при $r \to 0$ $\quad \underline{v}(r) := \sup_{y\in\mathbb{Y},\ h\in\mathbb{H},\ |x|\leq r} v(x, y, h) \to 0$;

— $\overline{v}(r)$ і $\underline{v}(r)$ неперервні і монотонні.

Оскільки сильний розв'язок $x(t), t \geq 0$, рівняння (1) з марковськими перемиканнями (2) однозначно визначається початковими умовами (3), то далі позначатимемо його $x(t, x_0, y, h)$.

Означення 2. Для системи (1)–(3) точка рівноваги 0 є

– стохастично стійкою, якщо для кожного початкового стану $x_0 \in \mathbb{R}^m$ і початкових станів y для ξ та h для η

$$\mathbb{E}\Big\{\int_0^\infty |x(t, x_0, y, h)|^2 dt\Big\} < \infty;$$

– експоненціально стійкою в середньому квадратичному, якщо для кожного початкового стану $x_0 \in \mathbb{R}^m$ і початкових станів y для ξ та h для η існують константи $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такі, що

$$\mathbb{E}|x(t, x_0, y, h)|^2 \leq \alpha|x_0|^2 e^{-\beta t}, \forall t \geq 0.$$

3. Основний результат. Має місце твердження.

Теорема 1. Достатньою умовою стохастичної стійкості й експоненцальної стійкості в середньому квадратичному для системи (1)–(3) є існування послідовності функцій Ляпунова $v_k(x, y, h), k \geq 0$, та строго зростаючих додатних функцій $c(\cdot), f(\cdot)$ та $z(\cdot)$, $c(0) = 0$, $f(0) = 0$, $z(0) = 0$, таких, що за умови

$$f(|x(t, x_0, y, h)|^2) \leq v_k(x, y, h) \leq z(|x(t, x_0, y, h)|^2) \tag{8}$$

має місце нерівність

$$\mathcal{L}v_k(x, y, h) \leq -c(|x(t, x_0, y, h)|), \tag{9}$$

для $t \in [t_k, t_{k+1}), k \geq 0$, і

$$\sum_{j=kN_T}^{kN_T+n-1} \mathbb{E}\{v_j(x, \xi(t_j), \eta_j)\} \leq \chi_k(v_k(x(t_k-), \xi(t_k-), \eta_k)), \tag{10}$$

для деякого цілого $N_T \geq 0$, $k \geq 0$, $n = 1, 2, ..., N_T$, де $\chi_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ є неспадною функцією і $\chi_k(s) \leq s$.

Зауваження. Умови (9), (10) є послабленням класичних умов експоненціальної стійкості для системи (1)–(3) [10].

Доведення. На інтервалі $[t_k, t_{k+1}), k \geq 0$, розглянемо слабкий інфінітезимальний оператор на функції Ляпунова $v_k(x, y, h)$. На основі (9) маємо

$$\mathcal{L}v_k(x, y, h) \leq -c(|x(t, x_0, y, h)|) = -\frac{c(|x(t, x_0, y, h)|)}{v_k(x, y, h)} \cdot v_k(x, y, h) \leq -\alpha v_k(x, y, h),$$

де скаляр $\alpha > 0$ визначається як

$$\alpha = \min_x \frac{c(|x(t, x_0, y, h)|)}{z(|x(t, x_0, y, h)|)}.$$

За формулою Динкіна [8] для будь-якого $t \in [t_{\overline{k}}, t_{\overline{k}+1})$, і деякого $\overline{k} \geq 0$

$$\mathbb{E}\left\{\sum_{j=0}^{\overline{k}-1} \int_{t_j}^{t_j+1} \mathcal{L}v_j(x(s), y, h)ds + \int_{t_{\overline{k}}}^{t} \mathcal{L}v_{\overline{k}}(x(s), Y, h)ds\right\} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\overline{k}-1} \mathbb{E}\{v_{j+1}(x(t_{j+1}-), \xi(t_{j+1}-), \eta(t_{j+1}-))\} - v_j(x(t_j), \xi(t_j), \eta(t_j))+$$

$$+\mathbb{E}v_{\overline{k}}(x(t_{\overline{k}}), \xi(t_{\overline{k}}), \eta(t_{\overline{k}})) - v_{\overline{k}}(x, y, h) =$$

$$\mathbb{E}\{v_{\overline{k}}(x(t_{\overline{k}}), \xi(t_{\overline{k}}), \eta(t_{\overline{k}}))\} - v_0(x_0, y, h)+$$

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{\overline{k}}{N_T}\right]-1} \sum_{j=kN_T}^{(k+1)N_T-1} \mathbb{E}\{v_j(x(t_j-), \xi(t_j-), \eta(t_j-))\} - v_j(x(t_j), \xi(t_j), \eta(t_j))+$$

$$+ \sum_{j=\left[\frac{\overline{k}}{N_T}\right]N_T}^{\overline{k}} \mathbb{E}\{v_j(x(t_j-),\xi(t_j-),\eta(t_j-))\} - v_j(x(t_j),\xi(t_j),\eta(t_j)).$$

Тоді з (10) отримуємо, що

$$\mathbb{E}\{v_{\overline{k}}(x(t_{\overline{k}}),\xi(t_{\overline{k}}),\eta(t_{\overline{k}}))\} - v_0(x_0,y,h) \leq$$

$$\leq \mathbb{E}\left\{\sum_{j=0}^{\overline{k}-1}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \mathcal{L}v_j(x(s),\xi(t_j),\eta(t_j))ds + \int\limits_{t_{\overline{k}}}^{t} \mathcal{L}v_{\overline{k}}(x(s),\xi(t_{\overline{k}}),\eta(t_{\overline{k}}))ds\right\} \leq$$

$$\leq -\alpha\mathbb{E}\left\{\sum_{j=0}^{\overline{k}-1}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} v_j(x(s),\xi(t_j),\eta(t_j))ds + \int\limits_{t_{\overline{k}}}^{t} v_{\overline{k}}(x(s),\xi(t_{\overline{k}}),\eta(t_{\overline{k}}))ds\right\} =$$

$$= -\alpha\mathbb{E}\left\{\int\limits_0^t v_{\overline{k}}(x(s),\xi(t_{\overline{k}}),\eta(t_{\overline{k}}))ds\right\}.$$

З останньої нерівності випливає, що

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\{v_k(x,\xi(t_k),\eta_k)\} \leq -\alpha\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \mathbb{E}\{v_k(x(s),\xi(t_k),\eta_k)\}ds = -\alpha\mathbb{E}\{v_k(x,y,h)\},$$

тобто, згідно з лемою Гронуолла-Беллмана

$$\mathbb{E}\{v_k(x,y,h)\} \leq v_0(x_0,y,h)e^{-\alpha t}.$$

З останньої нерівності і (8) випливає, що система (1)–(3) експоненіально стійка в середньому квадратичному і тому є стохастично стійкою. Теорема доведена.

4. Виновки. У даній роботі встановлено достатні умови еквівалентності концепцій стохастичної стійкості та експоненціальної стійкості в середньому квадратичному для стохастичної динамічної системи з марковськими параметрами і перемиканнями, тобто вдалося послабити класичні умови експоненціальної стійкості для системи (1)–(3). Практичне значення отриманого результату диктується необхідністю якнайточнішого окреслення класу допустимих розв'язків для задачі оптимальної стабілізації для вказаних систем, і, як наслідок, економії затрат (наприклад, часу) при виборі оптимального керування.

Список використаної літератури

1. *Кац И.Я.* Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. – Екатеринбург: УГАПС, 1998. – 222 с.
2. *Лукашив Т.О., Ясинская Л.И., Ясинский В.К.* Стабилизация стохастических динамических систем с импульсными марковскими переключениями и параметрами. Часть 2. Стабилизация динамических систем случайной структуры с внешними марковскими переключениями // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 2. – С. 14–29.
3. *Лукашів Т.О.* Стабілізація одного виду системи випадкової структури // Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. – Вип. №2 (29). – Ужгород: Вид-во УжНУ "Говерла – 2016. – С. 59–71.

4. *Hu L., Shi P., Huang B.* Stochastic stability and robust control for semped-datas with Markovian jump parameters // J. Math. Anal. Appl. – 2006. – no. 313. – pp. 504–517.
5. *Лукашів Т.О.* Достатні умови стабілізовності лінійних стохастичних систем випадкової структури із зовнішніми марковськими перемиканнями // Науковий вісник Чернівецького університету: зб. наук. праць. Вип. 485: Математика. – Чернівці: Рута, 2009. – С. 35–40.
6. *Feng X., Loparo K.A., Ji Y., Chizek H.J.* Stochastic stability poperties of jump linear systems // IEEE Trans. Automat. Control. – 1992. – no. 37. – pp. 38–53.
7. *Жакод Ж., Ширяев А.Н.* Предельные теоремы для случайных процессов: в 2 т. – М.: Физматгиз, 1994. – Т. 1. – 554 с., – Т. 2. – 473 с.
8. *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1969. – 859 с.
9. *Лукашів Т.О., Ясинський В.К.* Стійкість за ймовірністю в цілому стохастичних динамічних систем випадкової структури з постійним запізненням // Волинський математичний вісник. Прикладна математика. – 2013. – Вип. 10 (191). – С. 140–151.
10. *Лукашів Т.О., Ясинський В.К.* Стабілізація стохастичних дифузійних динамічних систем випадкової структури. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т., 2013. – 136 с.

Одержано 10.01.2017