УДК 517.9

К. В. Маринець, О. Т. Мауриц (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗНОСТІ НЕЛІНІЙНИХ ДВОТОЧКОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ ТОПОЛОГІЧНИХ ІНДЕКСІВ

We give new existence results of the boundary–value problem investigation, in the case of two–point non–linear boundary conditions, that base upon the theory of topological indexes, i. e. the Brauwer topological index.

У роботі наведено нові результати дослідження існування розв'язків нелінійних двоточкових крайових задач, які базуються на використанні теорії топологічних індексів, а саме — топологічного індексу Брауера.

1. Вступ. Результати, які наведено у даній роботі, є новими та базуються на одержаних раніше результатах дослідження нелінійних багатоточкових та інтегральних крайових задач [1–7], та є продовженням роботи [3].

2. Постановка задачі. Розглянемо крайову задачу для системи нелінійних диференціальних рівнянь з нелінійними двоточковими граничними умовами вигляду:

$$\frac{dx\,(t)}{dt} = f\,(t, x\,(t))\,,\ t \in [0, T]\,,\ x, f \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$$g\,(x\,(0)\,, x\,(T)) = 0, \tag{2}$$

де функції $f : [0, T] \times D \to \mathbb{R}^n$ та $g : D \times D \to \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ неперервні, а множина $D \subset \mathbb{R}^n$ — замкнена обмежена область.

Задача полягає у встановленні необхідних та достатніх умов існування розв'язків крайової задачі (1), (2) у класі неперервно диференційовних функцій $x : [0, T] \times D$.

3. Побудова наближеного розв'язку крайової задачі (1), (2). У науковій статті [3] обгрунтовано, що доцільно, замість крайової задачі (1), (2) з нелінійними крайовими умовами, досліджувати задачу з деякими параметризованими лінійними умовами. Таким чином, за допомогою параметризації вигляду:

$$z := x(0),\ \ \lambda := x(T). \tag{3}$$

одержимо крайову задачу з лінійними розділеними крайовими умовами:

$$x(0) = z,\ \ x(T) = d(z, \lambda), \tag{4}$$

де $d(z, \lambda) := \lambda + g\,(z, \lambda)$.

Зауваження 1. *Множина розв'язків нелінійної двоточкової крайової задачі (1), (2) співпадає з множиною тих розв'язків задачі (1), (4), які задовольняють додатковим умовам (3).*

Припустимо, що крайова задача (1), (4) задовольняє наступні умови:

1) Функція f неперервна в області $[0, T] \times D$ та задовольняє умову Ліпшиця:

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq K\,|u - v|\,, \tag{5}$$

для всіх $t \in [0, T]\,,\ \{u, v\} \subset D$, де $K = (k_{ij})_{i,j=1}^{n}$ — деяка стала матриця з невід'ємними компонентами.

2) множина

$$D_\beta := \left\{ z \in D : B\left(z + \frac{t}{T}\left[d(z,\lambda) - z \right], \frac{T}{2}\delta_D(f) \right) \subset D, \forall \lambda \in D \right\}$$

є непорожньою, тобто

$$D_\beta \neq \emptyset, \tag{6}$$

де

$$\delta_D(f) := \frac{1}{2}\left[\max_{(t,x)\in[0,T]\times D} f(t,x) - \min_{(t,x)\in[0,T]\times D} f(t,x) \right]. \tag{7}$$

3) Спектральний радіус матриці

$$Q := \frac{3T}{10}K \tag{8}$$

задовольняє нерівність:

$$r(Q) < 1. \tag{9}$$

Для дослідження розв'язків параметризованої крайової задачі (1), (4) будуємо послідовність функцій $\{x_m\}$, що визначається рекурентним співвідношенням [3]:

$$x_m(t,z,\lambda) := z + \int_0^t f(s, x_{m-1}(s,z,\lambda))ds -$$
$$- \frac{t}{T}\int_0^T f(s, x_{m-1}(s,z,\lambda))ds + \frac{t}{T}\left[d\left(z,\lambda\right) - z \right], \tag{10}$$

де $m = 1, 2, 3, \ldots$, $z \in D_\beta$, $\lambda \in D$, а в якості початкового наближення розглядається функція:

$$x_0(t,z,\lambda) = z + \frac{t}{T}\left[d\left(z,\lambda\right) - z \right] \in \ D_\beta,$$

Для доведення необхідних та достатніх умов існування розв'язків крайової задачі (1), (4) наведемо основні теореми.

Теорема 1. *[3] Нехай функція $f : [0,T] \times D \to \mathbb{R}^n$ у правій частині системи диференціальних рівнянь (1), а також параметризовані розділені крайові умови (4) задовольняють умови (5), (6), (9).*

Тоді при всіх фіксованих $\lambda \in D$, $z \in D_\beta$:

1) *Усі функції послідовності (10) неперервно диференційовні і задовольняють параметризовані крайові умови:*

$$x_m(0,z,\lambda) = z, \ \ x_m(T,z,\lambda) = d\left(z,\lambda\right),$$

m=1,2,3,....

2) *Послідовність функцій (10) рівномірно збігається відносно $t \in [0,T]$ при $m \to \infty$ до граничної функції*

$$x_\infty(t,z,\lambda) = \lim_{m\to\infty} x_m(t,z,\lambda). \tag{11}$$

3) Гранична функція x_∞ задовольняє параметризовані лінійні граничні умови:

$$x_\infty(0,z,\lambda) = z,\ x_\infty(T,z,\lambda) = d(z,\lambda).$$

4) Гранична функція (11) для всіх $t \in [0,T]$ є единим неперервно диференційовним розв'язком інтегрального рівняння:

$$x(t) = z + \int_0^t f(s,x(s))ds - \frac{t}{T}\int_0^T f(s,x(s))ds + \frac{t}{T}\left[d\left(z,\lambda\right) - z\right],$$

або еквівалентної йому задачі Коші для модифікованої системи диференціальних рівнянь вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \Delta(z,\lambda),$$

$$x(0) = z, \tag{12}$$

де

$$\Delta\left(z,\lambda\right) := \frac{1}{T}\left[d\left(z,\lambda\right) - z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s,x(s))ds. \tag{13}$$

5) Має місце оцінка відхилення x_m від її граничної функції:

$$|x_\infty(t,z,\lambda) - x_m(t,z,\lambda)| \le \frac{20}{9}t\left(1 - \frac{t}{T}\right)Q^m(I_n - Q)^{-1}\delta_D(f), \tag{14}$$

де I_n — одинична n–вимірна матриця, $K, Q, \delta_D(f)$ задаються співвідношеннями (5), (8) та (7) відповідно.

Розглянемо задачу Коші для системи диференціальних рівнянь з постійним збуренням у правій частині:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \mu, t \in [0,T] \tag{15}$$

з початковими умовами (12), де $\mu = col(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ є керуючим параметром.

Теорема 2. *[3] Нехай $z \in D_\beta$, $\lambda \in D$ та $\mu \in \mathbb{R}^n$ — довільно задані вектори. Припустимо, що для системи (1) виконуються всі умови Теореми 1.*

Тоді для того, щоб розв'язок задачі Коші (15), (12) задовольняв також і двоточкові параметризовані крайові умови (4), необхідно і достатньо, щоб параметр μ в (15) був заданий рівністю:

$$\mu = \mu_{z,\lambda} = \frac{1}{T}\left[d(z,\lambda) - z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_\infty(s,z,\lambda))ds.$$

де x_∞ має вигляд (10).

Теорема 3. *[3] Нехай для крайової задачі (1), (2) виконуються умови (5), (6), (9).*

Тоді пара $(x_\infty(\cdot, z^*, \lambda^*), \lambda^*)$ є розв'язком параметризованої крайової задачі (1), (4) тоді і тільки тоді, коли $z^* = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*)$, $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*)$ задовольнятимуть систему визначальних алгебраїчних рівнянь:

$$\Delta(z, \lambda) = \frac{1}{T}\left[d(z,\lambda) - z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_\infty(s, z, \lambda))ds = 0, \tag{16}$$

$$x_\infty\left(T, z, \lambda\right) = \lambda. \tag{17}$$

Зауваження 2. *При деякому $m \geq 1$ визначимо функцію $\Delta_m : D_\beta \times D \to \mathbb{R}^n$ згідно формули:*

$$\Delta_m\left(z, \lambda\right) := \frac{1}{T}\left[d(z,\lambda) - z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_m(s, z, \lambda))ds, \tag{18}$$

де z та λ задаються співвідношеннями (3). Для дослідження розв'язності параметризованої крайової задачі (1), (4) розглядатимемо наближену визначальну систему алгебраїчних рівнянь, що має вигляд:

$$\Delta_m(z, \lambda) = \frac{1}{T}\left[d(z,\lambda) - z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_m(s, z, \lambda))ds = 0, \tag{19}$$

$$x_m\left(T, z, \lambda\right) = \lambda, \tag{20}$$

де $x_m\left(\cdot, z, \lambda\right)$ вектор–функція, задана рекурентним співвідношенням (10).

При зростанні m системи (16), (17) і (19), (20) досить близькі, щоб забезпечити необхідну точність знаходження наближеного розв'язку вихідної крайової задачі (1), (2).

4. Достатні умови існування розв'язків крайової задачі

Означення 1. *[4] Для всіх індексів i_1 та i_2, що приймають значення від 1 до n, визначимо матрицю J_{i_1,i_2} розмірності $(i_2 - i_1 + 1) \times n$ наступним чином:*

$$J_{i_1,i_2} := \left(O_{i_2-i_1+1, i_1-1}, I_{i_2-i_1+1}, O_{i_2-i_1+1, n-i_2}\right).$$

Таким чином, множення зліва деякого вектора матрицею J_{i_1,i_2} еквівалентно вибору його компонент з номерами від i_1 до i_2.

Лема 1. *Нехай виконуються умови Теореми 1.*

Тоді для кожного $m \geq 1$ та z, λ вигляду (3) для точної та наближеної визначальних функцій

$$\Delta : D_\beta \times D \to \mathbb{R}^n,$$
$$\Delta_m : D_\beta \times D \to \mathbb{R}^n$$

визначених згідно з (13) та (18), випливає оцінка:

$$\left|\Delta(z, \lambda) - \Delta_m(z, \lambda)\right| \leq \frac{10T}{27} K Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_D(f), \tag{21}$$

де $K, Q, \delta_D(f)$ задаються співвідношеннями (5), (8) та (7) відповідно.

Доведення. Зафіксуємо параметри z, λ вигляду (3). З урахуванням умови Ліпшиця (5), оцінки (14) та рівності

$$\int_0^T \alpha_1(t)dt = \frac{T^2}{3},$$

маємо:

$$|\Delta(z,\lambda) - \Delta_m(z,\lambda)| =$$
$$= \left| \frac{1}{T}\int_0^T f\left(s, x_\infty(s,z,\lambda)\right) ds - \frac{1}{T}\int_0^T f\left(s, x_m(s,z,\lambda)\right) ds \right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{T}\int_0^T K\left|x_\infty(s,z,\lambda) - x_m(s,z,\lambda)\right| ds \leq \frac{1}{T}K\int_0^T \frac{10}{9}\alpha_1(s)Q^m\left(I_n - Q\right)^{-1}\delta_D(f)ds =$$
$$= \frac{10}{9T}KQ^m\left(I_n - Q\right)^{-1}\delta_D(f)\int_0^T \alpha_1(s)ds = \frac{10T}{27}KQ^m\left(I_n - Q\right)^{-1}\delta_D(f),$$

що і доводить лему.

На основі систем визначальних рівнянь (16), (17) та (19), (20) введемо в розгляд наступні відображення:

$$\Phi : D_\beta \times D \to \mathbb{R}^{2n},$$
$$\Phi_m : D_\beta \times D \to \mathbb{R}^{2n},$$

які для всіх z, λ з (3) мають вигляд:

$$\Phi(z,\lambda) := \begin{pmatrix} \frac{1}{T}\left[d(z,\lambda) - z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_\infty(s,z,\lambda))ds \\ x_\infty(T,z,\lambda) - \lambda \end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$\Phi_m(z,\lambda) := \begin{pmatrix} \frac{1}{T}\left[d(z,\lambda) - z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_m(s,z,\lambda))ds \\ x_m(T,z,\lambda) - \lambda \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Означення 2. *[4] Нехай $H \subset \mathbb{R}^{2n}$ деяка непорожня множина. Для всякої пари функцій*

$$f_j = col\left(f_{j1}(x), \ldots, f_{j,2n}(x)\right) : H \to \mathbb{R}^{2n}, j = 1, 2$$

має місце запис:

$$f_1 \triangleright_H f_2$$

тоді і тільки тоді, коли існує функція

$$g : H \to \{1, 2, \ldots, 2n\}$$

така, що

$$f_{1,g(x)} > f_{2,g(x)}$$

для всіх $x \in H$, це означає, що в кожній точці $x \in H$ принаймні одна з компонент вектора $f_1(x)$ більша, ніж відповідна їй компонента вектора $f_2(x)$.

Розглянемо множину:

$$\Omega = D_1 \times \Lambda_1, \tag{24}$$

де $D_1 \subset D_\beta$, $\Lambda_1 \subset D_0$ — деякі відкриті множини.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови Теореми 1 і можна вказати деяке $m \geq 1$ та множину $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ вигляду (24) такі, що має місце співвідношення:*

$$|\Phi_m| \triangleright_{\partial\Omega} \begin{pmatrix} \frac{10T}{27} KQ^m(I_n - Q)^{-1}\delta_D(f) \\ \frac{20}{9} t(1 - \frac{t}{T})Q^m(I_n - Q)^{-1}\delta_D(f) \end{pmatrix}, \tag{25}$$

.

Крім того, якщо індекс Брауера векторного поля Φ_m на множині Ω відносно нуля задовольняє нерівність:

$$deg\,(\Phi_m, \Omega, 0) \neq 0, \tag{26}$$

тоді існує пара $(z^*, \lambda^*) \in \Omega$ така, що

$$x_\infty(t) = x_\infty\,(t, z^*, \lambda^*) = \lim_{m\to\infty} x_m\,(t, z^*, \lambda^*) \tag{27}$$

є розв'язком нелінійної крайової задачі (1), (2) з початковою умовою

$$x_\infty(0) = z^*. \tag{28}$$

Доведення. Доведемо, що векторні поля Φ та Φ_m гомотопні. Для цього введемо в розгляд сім'ю векторних відображень:

$$P(\theta, z, \lambda) := \Phi_m(z, \lambda) + \theta\,[\Phi(z, \lambda) - \Phi_m(z, \lambda)]\,, \tag{29}$$

де $(z, \lambda) \in \partial\Omega$, $\theta \in [0, 1]$.

Очевидно, що $P(\theta, \cdot, \cdot)$ — неперервне на $\partial\Omega$ для кожного $\theta \in [0, 1]$. Крім того,

$$P(0, z, \lambda) = \Phi_m(z, \lambda), P(1, z, \lambda) = \Phi(z, \lambda)$$

для всіх $(z, \lambda) \in \partial\Omega$.

Для довільної пари $(z, \lambda) \in \partial\Omega$, з урахуванням (29), маємо

$$\begin{aligned} |P\,(\theta, z, \lambda)| = |\Phi_m(z, \lambda) + \theta\,[\Phi(z, \lambda) - \Phi_m(z, \lambda]| \geq \\ \geq |\Phi_m(z, \lambda)| - |\Phi(z, \lambda) - \Phi_m(z, \lambda)|\,. \end{aligned} \tag{30}$$

З іншого боку, на основі позначеннь (22), (23), з використанням апроксимації (10) та оцінки (21), одержимо покомпонентні нерівності:

$$|\Phi(z, \lambda) - \Phi_m(z, \lambda)| \leq \begin{pmatrix} \frac{10T}{27} KQ^m(I_n - Q)^{-1}\delta_D(f) \\ \frac{20}{9} t(1 - \frac{t}{T})Q^m(I_n - Q)^{-1}\delta_D(f) \end{pmatrix}, \tag{31}$$

звідки, на основі співвідношень (25), (30), (31), випливає, що:

$$|P\,(\theta, \cdot, \cdot)| \triangleright_{\partial\Omega} 0, \theta \in [0, 1]. \tag{32}$$

Вираз (32) зокрема показує, що $P\,(\theta, \cdot, \cdot)$ не перетворюється в 0, для жодного значення $\theta \in [0, 1]$, тобто збурення (29) невироджене, а отже, векторні поля, Φ_m та Φ гомотопні..

Беручи до уваги співвідношення (26) та властивість інваріантності індексу Брауера відносно гомотопії, можемо зробити висновок, що

$$deg\,(\Phi(z, \lambda), \Omega, 0) = deg\,(\Phi(z, \lambda), \Omega, 0) \neq 0.$$

Класичний топологічний результат гарантує існування пари:

$$(z^*, \lambda^*) \in \Omega$$

такої, що

$$\Phi\left(z^*, \lambda^*\right) = 0.$$

Тому пара (z^*, λ^*) задовольняє систему визначальних рівнянь (15), (16).

Беручи до уваги умови Теореми 3, приходимо до висновку, що функція (27) є розв'язком вихідної нелінійної двоточкової крайової задачі (1), (2) з початковою умовою (28).

Зауваження 3. *Для перевірки умови (25) Теореми 4 на конкретних прикладах, потрібно використати рекурентну формулу (10), щоб обчислити значення функції $x_m(\cdot, z, \lambda)$, яка залежить від параметрів $z \in D_\beta$, $\lambda \in D$ та встановити чи принаймні одна з компонент вектора Φ_m у лівій частині співвідношення (25) більша ніж відповідна їй компонента вектора у правій частині його у кожній точці границі $\partial\Omega$.*

Після цього встановити, згідно з (26), чи топологічний індекс відображення Φ_m відмінний від нуля. У загальному це є досить складною задачею, але в ряді випадків можна застосувати додаткові критерії для дослідження цього питання.

Зокрема, коли Φ_m не парне відображення, тобто

$$\Phi_m(-z, -\lambda) = -\Phi_m(z, \lambda),$$

тоді згідно з теоремою Борсука індекс Брауера є непарним числом, а отже відмінним від нуля.

Зауваження 4. *Безпосередньо з визначення топологічного індексу випливає, що якщо якобіан функції Φ_m вигляду (23) вироджений в ізольованому нулі*

$$z = z_{m,0}, \;\; \lambda = \lambda_{m,0},$$

тобто

$$det \frac{\partial}{\partial(z, \lambda)} \Phi_m(z_{m,0}, \lambda_{m,0}) \neq 0,$$

тоді нерівність (26) має місце.

5. Необхідні умови існування розв'язків. Введемо у розгляд матрицю

$$R := \sup_{t \in [0,T]} \left|1 - \frac{t}{T}\right| I_n \tag{33}$$

та вектор

$$\rho(z^0, z^1, \lambda^0, \lambda^1) = d(z^0, \lambda^0) - d(z^1, \lambda^1). \tag{34}$$

Лема 2. *Нехай виконуються умови Теореми 1.*

Тоді гранична функція (11) відносно змінних z та λ задовольняє умову ліпшицевого типу наступного вигляду:

$$\left|x_\infty\left(t, z^0, \lambda^0\right) - x_\infty\left(t, z^1, \lambda^1\right)\right| \leq$$

$$\leq \left[R + \frac{10}{9}K\left(I_n - Q\right)^{-1} R\alpha_1(t)\right]\left|z^0 - z^1\right| +$$

$$+\left[I_n + \frac{10}{9}K\left(I_n - Q\right)^{-1}\alpha_1(t)\right]\left|\rho\left(z^0, \lambda^0, z^1, \lambda^1\right)\right|, \tag{35}$$

де $z^j \in D_\beta,\ \lambda^j \in D_0,\ j = 0, 1,\ t \in [0, T]$.

Доведення. З виразу (10) при $m = 1$ випливає

$$x_1\left(t, z^0, \lambda^0\right) - x_1\left(t, z^1, \lambda^1\right) = \left(z^0 - z^1\right) +$$

$$+\int_0^t \left[f\left(s, z^0\right) - f\left(s, z^1\right)\right] ds - \frac{t}{T}\int_0^T \left[f\left(s, z^0\right) - f\left(s, z^1\right)\right] ds +$$

$$+\frac{t}{T}\Big[d(z^0, \lambda) - z^0 - d(z^1, \lambda) + z^1\Big] =$$

$$= \left(1 - \frac{t}{T}\right) I_n\left(z^0 - z^1\right) + \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t \left[f\left(s, z^0\right) - f\left(s, z^1\right)\right] ds -$$

$$-\frac{t}{T}\int_t^T \left[f\left(s, z^0\right) - f\left(s, z^1\right)\right] ds - \frac{t}{T}\left[d(z^0, \lambda) - d(z^1, \lambda)\right] =$$

$$= \left(1 - \frac{t}{T}\right) I_n\left(z^0 - z^1\right) + \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t \left[f\left(s, z^0\right) - f\left(s, z^1\right)\right] ds -$$

$$-\frac{t}{T}\int_t^T \left[f\left(s, z^0\right) - f\left(s, z^1\right)\right] ds - \frac{t}{T}\rho(z^0, z^1, \lambda^0, \lambda^1),$$

де $\rho(z^0, z^1, \lambda^0, \lambda^1)$ визначена згідно з (34).

Використовуючи рекурентну формулу (10) та беручи до уваги співвідношення (5), (33), (34) одержимо:

$$\left|x_1\left(t, z^0, \lambda^0\right) - x_1\left(t, z^1, \lambda^1\right)\right| \leq$$

$$\leq R\left|z^0 - z^1\right| + K\left[\left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t ds + \frac{t}{T}\int_t^T ds\right]\left|z^0 - z^1\right| + \frac{t}{T}|\rho(z^0, z^1, \lambda^0, \lambda^1)| \leq$$

$$= \left[R + \alpha_1(t)K\right]\left|z^0 - z^1\right| + |\rho(z^0, z^1, \lambda^0, \lambda^1)|, \tag{36}$$

для всіх $t \in [0, T]$.

Аналогічно, враховуючи вирази (10), (5) та (36), при $m = 2$ маємо:

$$\left|x_2\left(t, z^0, \lambda^0\right) - x_2\left(t, z^1, \lambda^1\right)\right| \leq$$

$$\leq R\left|z^0 - z^1\right| + K\left[\left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t \left[\left(R + K\alpha_1(s)\right)\left|z^0 - z^1\right| + |\rho(z^0, z^1, \lambda^0, \lambda^1)|\right] ds +\right.$$

$$\left.+\frac{t}{T}\int_t^T \left[\left(R + K\alpha_1(s)\right)\left|z^0 - z^1\right| + |\rho(z^0, z^1, \lambda^0, \lambda^1)|\right] ds\right] + |\rho(z^0, z^1, \lambda^0, \lambda^1)| =$$

$$= (R + KR\alpha_1(t) + K^2\alpha_2(t))|z^0 - z^1| + K\alpha_1(t)|\rho(z^0, z^1, \lambda^0, \lambda^1)| +$$

$$+|\rho(z^0, z^1, \lambda^0, \lambda^1)|. \tag{37}$$

За індукцією, на основі оцінок, одержаних у (36), (37), можна показати, що:

$$\left|x_m\left(t, z^0, \lambda^0\right) - x_m\left(t, z^1, \lambda^1\right)\right| \leq$$

$$\leq \left[R + \sum_{i=1}^{m-1} K^i R\alpha_i(t) + K^m \alpha_m(t)\right]\left|z^0 - z^1\right| + \sum_{i=0}^{m-1} K^i \alpha_i(t) |\rho(z^0, z^1, \lambda^0, \lambda^1)|. \quad (38)$$

З нерівності (38) отримаємо:

$$\left|x_m\left(t, z^0, \lambda^0\right) - x_m\left(t, z^1, \lambda^1\right)\right| \leq$$

$$\leq \left[R + \frac{10}{9} K \sum_{i=1}^{m-2} Q^i R\alpha_1(t) + \frac{10}{9} K Q^{m-1} \alpha_1(t)\right]\left|z^0 - z^1\right| +$$

$$+ \left[I_n + \frac{10}{9} K\alpha_1(t) \sum_{i=1}^{m-2} Q^i\right]\left|\rho\left(z^0, \lambda^0, z^1, \lambda^1\right)\right|. \quad (39)$$

При переході в оцінці (39) до границі при $m \to \infty$, одержимо:

$$\left|x_\infty\left(t, z^0, \lambda^0\right) - x_\infty\left(t, z^1, \lambda^1\right)\right| \leq$$

$$\leq \left[R + \frac{10}{9} K \left(I_n - Q\right)^{-1} R\alpha_1(t)\right]\left|z^0 - z^1\right| +$$

$$+ \left[I_n + \frac{10}{9} K \left(I_n - Q\right)^{-1} \alpha_1(t)\right]\left|\rho\left(z^0, \lambda^0, z^1, \lambda^1\right)\right|.$$

Лема 3. *Нехай виконуються умови Теореми 1.*

Тоді для функції $\Delta : D_\beta \times D_0 \to \mathbb{R}^n$ *системи визначальних рівнянь (16),(17) справедлива оцінка:*

$$\left|\Delta\left(z^0, \lambda^0\right) - \Delta\left(z^1, \lambda^1\right)\right| \leq$$

$$\leq KR\left[I_n + \frac{10T}{27} K (I_n - Q)^{-1}\right]|z^0 - z^1| +$$

$$+ K\left[I_n + \frac{10T}{27} K (I_n - Q)^{-1}\right]|\rho(z^0, z^1, \lambda^0, \lambda^1)| + \frac{1}{T}|\rho(z^0, z^1, \lambda^0, \lambda^1)|. \quad (40)$$

де $z^j \in D_\beta$, $\lambda^j \in D$, *j=0,1.*

Доведення. Згідно із співвідношеннями (13) маємо:

$$\Delta\left(z^0, \lambda^0\right) - \Delta\left(z^1, \lambda^1\right) =$$

$$= -\frac{1}{T}\int_0^T \left[f\left(s, x_\infty\left(s, z^1, \lambda^1\right)\right) - f\left(s, x_\infty\left(s, z^0, \lambda^0\right)\right)\right] ds +$$

$$+ \frac{1}{T}\left[d(z^0, \lambda^0) - d(z^1, \lambda^1) - z^0 + z^1\right]. \quad (41)$$

А тоді, з урахуванням (5), (33) – (35), із (41) отримаємо:

$$\left|\Delta\left(z^0, \lambda^0\right) - \Delta\left(z^1, \lambda^1\right)\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{T}\left|z^0 - z^1\right| + \frac{1}{T}\int_0^T K\left|x_\infty\left(s, z^1, \lambda^1\right) - x_\infty\left(s, z^0, \lambda^0\right)\right| ds + \frac{1}{T}|\rho(z^0, z^1, \lambda^0, \lambda^1)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{T}\left|z^0 - z^1\right| + \frac{1}{T}K\int_0^T \left\{R + \frac{10}{9}K(I_n - Q)^{-1}R\alpha_1(s)\right\} ds|z^0 - z^1| +$$

$$+\frac{1}{T}K\int_0^T \left\{I_n + \frac{10}{9}K(I_n - Q)^{-1}\alpha_1(s)\right\} ds|\rho(z^0, z^1, \lambda^0, \lambda^1)| + \frac{1}{T}|\rho(z^0, z^1, \lambda^0, \lambda^1)| =$$

$$= KR\left[I_n + \frac{10T}{27}K(I_n - Q)^{-1}\right]|z^0 - z^1| + K\left(I_n + \frac{10T}{27}K(I_n - Q)^{-1}\right)|\rho(z^0, z^1, \lambda^0, \lambda^1)| +$$

$$+\frac{1}{T}|\rho(z^0, z^1, \lambda^0, \lambda^1)|,$$

що і доводить справедливість оцінки (40).

Теорема 5. *Нехай виконуються умови Теореми 1. Крім того, нехай існують деякий номер $m \in \mathbb{N}$ і пара*

$$\left(\bar{z}, \bar{\lambda}\right) \in \Omega,$$

де множина Ω має вигляд (24), такі, що покомпонентна нерівність:

$$\left|\Delta_m\left(\bar{z}, \bar{\lambda}\right)\right| \leq$$

$$\leq \sup_{z\in D}\left\{R\left[I_n + \frac{10T}{27}K(I_n - Q)^{-1}\right]|z - \bar{z}|\right\} +$$

$$+\sup_{(z,\lambda)\in\Omega}\left\{K\left[I_n + \frac{10T}{27}K(I_n - Q)^{-1}\right]|\rho(z, \bar{z}, \lambda, \overline{\lambda})| + \frac{1}{T}|\rho(z, \bar{z}, \lambda, \overline{\lambda})|\right\} +$$

$$+\frac{10T}{27}KQ^m\left(I_n - Q\right)^{-1}\delta_D(f), \tag{42}$$

не справджується, де вектор $\delta_D(f)$ має вигляд (7) і матриці K, Q, R та вектор ρ визначені згідно з (5), (8), (33) та (34) відповідно.

Тоді не існує пари $(z^*, \lambda^*) \in \Omega$, для якої вихідна двоточкова крайова задача (1), (2) матиме розв'язок $x = x(t)$ такий, що:

$$x(0) = z^*,$$

$$x(T) = \lambda^*.$$

Доведення.

Нехай $m \in \mathbb{N}$ та $\left(\bar{z}, \bar{\lambda}\right) \in D \times \Lambda$ — довільні. Покажемо, що при зроблених припущеннях система визначальних рівнянь (16), (17) не має на множині Ω жодного розв'язку. Доведемо це від супротивного. Припустимо, що пара $\left(\bar{z}, \bar{\lambda}\right)$ є розв'язком (16), (17). Згідно з Теоремою 4 розв'язок крайової задачі (1), (4) задається формулою (27). Використаємо оцінку (40), покладаючи

$$\left(z^0, \lambda^0\right) = \left(z^*, \lambda^*\right), \left(z^1, \lambda^1\right) = \left(\bar{z}, \bar{\lambda}\right),$$

Тоді з (40) випливає:

$$\left|\Delta\left(\bar{z},\bar{\lambda}\right)\right| \leq KR\left[I_n+\frac{10T}{27}K(I_n-Q)^{-1}\right]|z^*-\overline{z}|+$$

$$+K\left[I_n+\frac{10T}{27}K(I_n-Q)^{-1}\right]|\rho(z^*,\overline{z},\lambda^*,\overline{\lambda})|+\frac{1}{T}|\rho(z^*,\overline{z},\lambda^*,\overline{\lambda})|. \qquad (43)$$

З урахуванням нерівності (21) Леми 1, матимемо:

$$\left|\Delta_m\left(\bar{z},\bar{\lambda}\right)\right| \leq \left|\Delta\left(\bar{z},\bar{\lambda}\right)\right| + \left|\Delta_m\left(\bar{z},\bar{\lambda}\right)-\Delta\left(\bar{z},\bar{\lambda}\right)\right| \leq$$

$$\leq \left|\Delta\left(\bar{z},\bar{\lambda}\right)\right| + \frac{10T}{27}KQ^m(I_n-Q)^{-1}\delta_D(f). \qquad (44)$$

Поєднуючи нерівності (43) та (44), можемо записати, що:

$$\left|\Delta_m\left(\bar{z},\bar{\lambda}\right)\right| \leq$$

$$\leq R\left[I_n+\frac{10T}{27}K(I_n-Q)^{-1}\right]|z^*-\overline{z}|+$$

$$+K\left[I_n+\frac{10T}{27}K(I_n-Q)^{-1}\right]|\rho(z^*,\overline{z},\lambda^*,\overline{\lambda})|+\frac{1}{T}|\rho(z^*,\overline{z},\lambda^*,\overline{\lambda})|+$$

$$+\frac{10T}{27}KQ^m\left(I_n-Q\right)^{-1}\delta_D(f) \qquad (45)$$

або

$$\left|\Delta_m\left(\bar{z},\bar{\lambda}\right)\right| \leq$$

$$\leq \sup_{z\in D}\left\{R\left[I_n+\frac{10T}{27}K(I_n-Q)^{-1}\right]|z-\overline{z}|\right\}+$$

$$+\sup_{(z,\lambda)\in\Omega}\left\{K\left[I_n+\frac{10T}{27}K(I_n-Q)^{-1}\right]|\rho(z,\overline{z},\lambda,\overline{\lambda})|+\frac{1}{T}|\rho(z,\overline{z},\lambda,\overline{\lambda})|\right\}+$$

$$+\frac{10T}{27}KQ^m\left(I_n-Q\right)^{-1}\delta_D(f),$$

тобто отримали нерівність, яка співпадає з (42). Але, за припущенням теореми, для пари $(\bar{z},\bar{\lambda})$ покомпонентна нерівність (42) не виконується. Отримали протиріччя, яке означає, що визначальна система (16), (17) не має розв'язків на множині Ω. Тому, на основі Теореми 3, функція x_∞, що визначена формулою (11), не є розв'язком крайової задачі (1), (4) при будь–якому виборі пари $(\bar{z},\bar{\lambda})$ з області Ω. Тому, згідно з Теоремою 4, це означає, що нелінійна крайова задача (1), (2) не має жодного розв'язку $x(\cdot)$, для якого пара $(x(0),x(T))$ належить області Ω.

Зауваження 5. *На основі Теореми 5 можемо задати алгоритм для наближеного відшукання пари (z^*,λ^*), яка визначає розв'язок (27) вихідної крайової задачі (1), (2). Для цього представимо множину Ω вигляду (24) як об'єднання скінченої кількості підмножин:*

$$\Omega := \bigcup_{i=1}^{N}\Omega_i = D_i\times\Lambda_i. \qquad (46)$$

У кожній підмножині Ω_i *з* (46) *вибираємо довільну точку*

$$\left(\bar{z}^i, \bar{\lambda}^i\right) \in \Omega_i, \tag{47}$$

та для деякого m *обчислюємо* m*–ве наближення* $x_m\left(t, \bar{z}^i, \bar{\lambda}^i\right)$, *користуючись рекурентним співвідношенням (10), а тоді знаходимо значення "визначальної функції"* $\Delta_m\left(\bar{z}^i, \bar{\lambda}^i\right)$ *згідно з формулою (19). Виключаємо з множини (46) ті підмножини* Ω_i , *для яких нерівність не виконується.*

Це обумовлюється тим, що, за Теоремою 5, вони не можуть містити пару (z^*, λ^*), *яка визначає розв'язок (27) крайової задачі (1), (2).*

Решта підмножин

$$\Omega_{i_1}, \Omega_{i_2}, \ldots, \Omega_{i_s}$$

утворюють деяку множину

$$\Omega_{m,N} = D_{m,N} \times \Lambda_{m,N} \tag{48}$$

таку, що тільки $\left(\tilde{z}, \tilde{\lambda}\right) \in \Omega_{m,N}$ *може визначити розв'язок (27).*

Коли N *та* m *прямують до* ∞, $\Omega_{m,N}$ *"прямує" до множини*

$$\Omega^* = D^* \times \Lambda^*, \tag{49}$$

яка може містити значення (z^*, λ^*) , *що визначає розв'язок крайової задачі (1), (2) у вигляді (27).*

Кожну пару $\left(\tilde{z}, \tilde{\lambda}\right) \in \Omega_{m,N}$ *можна розглядати як наближення до пари* (z^*, λ^*), *яка визначає розв'язок вихідної крайової задачі (1), (2).*

У цьому випадку очевидно, що

$$|\tilde{z} - z^*| \le \sup_{z \in D_{m,N}} |\tilde{z} - z|, \left|\tilde{\lambda} - \lambda^*\right| \le \sup_{\lambda \in \Lambda_{m,N}} \left|\tilde{\lambda} - \lambda\right|,$$

а значення функції $x_m\left(t, \tilde{z}, \tilde{\lambda}\right)$, *що обчислюється згідно з рекурсивним співвідношенням (10), може бути взяте в якості наближеного розв'язку крайової задачі (1), (2).*

Теорема 6. *Нехай мають місце умови Теореми 1. Крім того, пара* (z^*, λ^*), *визначена на множині (49) є розв'язком точної системи визначальних рівнянь (16), (17), та* $\left(\tilde{z}, \tilde{\lambda}\right)$ *— довільна пара з множини* $\Omega_{m,N}$ *вигляду (48).*

Тоді справедлива наступна оцінка:

$$\left|x_\infty(t, z^*, \lambda^*) - x_m\left(t, \tilde{z}, \tilde{\lambda}\right)\right| \le$$
$$\le \frac{10}{9}\alpha_1(t) Q^m (I_n - Q)^{-1} \sup_{(z,\lambda) \in \Omega_{m,N}} \delta_D(f) +$$
$$+ \sup_{z \in D_{m,N}} \left[R + \frac{10}{9} K \alpha_1(t) (I_n - Q)^{-1} R \alpha_1(t)\right] |z - \tilde{z}|. \tag{50}$$

Доведення. Використаємо нерівність:

$$\left|x_{\infty}\left(t,z^{*},\lambda^{*}\right)-x_{m}\left(t,\tilde{z},\tilde{\lambda}\right)\right|\leq\left|x_{\infty}\left(t,z^{*},\lambda^{*}\right)-x_{m}\left(t,z^{*},\lambda^{*}\right)\right|+$$

$$+\left|x_{m}\left(t,z^{*},\lambda^{*}\right)-x_{m}\left(t,\tilde{z},\tilde{\lambda}\right)\right|. \qquad (51)$$

Оцінимо перший доданок у правій частині (51) нерівністю (14).

З використанням (38), другий доданок нерівності (51) будемо оцінювати наступним чином:

$$\left|x_{m}\left(t,z^{*},\lambda^{*}\right)-x_{m}\left(t,\tilde{z},\tilde{\lambda}\right)\right|\leq$$

$$\leq\left[R+\frac{10}{9}K\sum_{i=1}^{m-2}Q^{i}R\alpha_{1}(t)+\frac{10}{9}KQ^{m-1}\alpha_{1}(t)\right]\left|z^{*}-\tilde{z}\right|+$$

$$+\left[I_{n}+\frac{10}{9}K\alpha_{1}(t)\sum_{i=1}^{m-2}Q^{i}\right]\left|\rho\left(z^{*},\lambda^{*},\tilde{z},\tilde{\lambda}\right)\right|\leq$$

$$\leq\sup_{z\in D_{m,N}}\left[R+\frac{10}{9}K\sum_{i=1}^{m-2}Q^{i}R\alpha_{1}(t)+\frac{10}{9}KQ^{m-1}\alpha_{1}(t)\right]\left|z-\tilde{z}\right|+$$

$$+\sup_{(z,\lambda)\in\Omega_{m,N}}\left[I_{n}+\frac{10}{9}K\alpha_{1}(t)\sum_{i=1}^{m-2}Q^{i}\right]\left|\rho\left(z,\lambda,\tilde{z},\tilde{\lambda}\right)\right| \qquad (52)$$

Об'єднуючи (14) та (52), отримуємо оцінку (50), що й доводить теорему.

Список використаної літератури

1. *Rontó M., Marynets, K.* On the parametrization of boundary-value problems with three-point non-linear restrictions // Miskolc Math. Notes – 2012. –**13**, №1. – P. 91–106.
2. *Rontó Miklós, Marynets Kateryna.* Parametrization for non-linear problems with integral boundary conditions // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. – 2012. –**99**. – P. 1–23.
3. *Rontó Miklós, Marynets Kateryna.* On parametrization for non-linear BVP with non–linear boundary conditions // Miskolc Math. Notes. –2011. –**12**, №2. – P. 209–223.
4. *Rontó M., Marinets K..* On the parametrization of boundary value problems with two-point nonlinear boundary conditions // Nelīnīĭnī Koliv. –2011. –**14**, No.3.– P. 359–391.
5. *Rontó A., Rontó M.* Successive approximation techniques in non-linear boundary value problems for ordinary differential equations:Handbook of differential equations: ordinary differential equations. 2008.–**8**.– P. 441–592.
6. *Rontó Miklós, Varha Yana, Marynets Kateryna.* Further results on the investigation of solutions of integral boundary value problemsg //Tatra Mountains –2015. –**63**. – P. 247–267.
7. *Marynets Kateryna.* On construction of the approximate solution of the special type integral boundary-value problem // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. – 2016. –**6**. – P. 1–14.

Одержано 20.01.2017