УДК 510

І. А. Мич, В. В. Ніколенко (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ПОВНІ СИСТЕМИ ТОТОЖНОСТЕЙ В ОДНОМУ КЛАСІ АЛГЕБР

The class of universal algebras, which are defined under binary square matrices of order n is considered. The algebra's signature consists of two binary operations and a set of unary operations which determines the rotation of matrix elements. In this class the standard canonical forms based on complete identities systems were created.

У роботі розглядається клас універсальних алгебр, які задані над бінарними квадратними матрицями порядку n і сигнатурою, що складається з двох бінарних операцій max, min і множини унарних операцій T_i, $i = 1, 2, \ldots, 8$, які задають поворот елементів матриці, кратних 90° відносно осей або центра симетрії. У даному класі алгебр описані повні системи тотожностей, на основі яких побудовані стандартні канонічні форми.

1. Вступ. У роботах [1,2] алгебру U визначають як впорядковану пару множин (A, Ω), де A — деяка множина, на якій задані операції з Ω.

Нехай U — деяка алгебра, а $T\,(U)$ — множина всіх її тотожностей. Позначимо через $S\,(H)$ систему всіх тотожностей, які отримуємо з $H \subset T\,(U)$ на основі таких правил виводу [3]: $\Pi_1 : \frac{\emptyset}{\chi_i = \chi_i}$, де $\emptyset$ — порожня множина, $\Pi_2 : \frac{\phi(\eta_1)=\psi;\ \eta_1=\eta_2}{\phi(\eta_2)=\psi}$, $\Pi_3 : \frac{\phi(\ldots\chi_i\ldots)=\psi(\ldots\chi_i\ldots)}{\phi(\ldots\eta_i\ldots)=\psi(\ldots\eta_i\ldots)}$.

Система тотожностей H називається повною в алгебрі U, якщо $S\,(H) = T\,(U)$. Дві однотипні алгебри U_1 і U_2 називаються екваціонально еквівалентними, якщо $T\,(U_1) = T\,(U_2)$ (див. [3]).

Алгебра U називається екваціонально повною в класі алгебр M, якщо для всякої алгебри $U_i \in$ M, $i = 1, 2, \ldots, n$, $T\,(U) \neq T\,(U_i) \Leftrightarrow T\,(U) \subset T\,(U_i)$ (див. [3]).

Алгебра U називається функціонально повною, якщо множина її операцій утворює функціонально повну систему функцій. Проблема описання екваціональних підкласів алгебр часто зводиться до задачі знаходження скінченних повних систем тотожностей. Питання чи має алгебра скінченні повні системи тотожностей, залишається відкритим навіть для скінченних алгебр. В [4] Ліндон показав, що всі двозначні алгебри мають скінченні повні системи тотожностей. Мурський [5, 6] побудував 3-значну логіку, яка не має скінченних повних систем тотожностей, та довів, що "майже всі" скінченні алгебри мають скінченні повні системи тотожностей. Скінченні повні системи тотожностей можна побудувати в алгебрах, формули яких можемо привести до канонічного вигляду, аналогічному досконалій диз'юнктивній (кон'юнктивній) нормальній формі булевої алгебри [7], або які в своєму складі містять характеристичні функції [8].

На початку 70-их років XX ст. І.В.Вітеньком була поставлена задача екваціонального описання алгебри де Моргана, яка була розв'язана для деяких класів [9].

2. Повні системи тотожностей та замкнені класи операцій поворотів в алгебрі P. Визначимо клас алгебр $\mathrm{P} = \{U_n = (A_n, \Omega)\}$, де A_n — множина всіх бінарних квадратних матриць порядку n, $\Omega = \{\vee, \wedge, T_i, i = 1, 2, \ldots, k\}$, $X \vee Y = \max(X, Y)$, $X \wedge Y = \min(X, Y)$, T_i — множина унарних операцій, які в даній роботі задають перестановку елементів матриці, що еквівалентно поворотам кратним 90° відносно осей або центра симетрії квадрата.

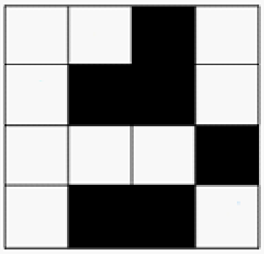
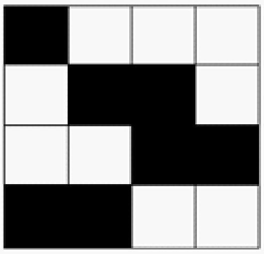
Розглянемо алгебру $U_4 = (A_4, \Omega) \in$ P. Бінарні матриці A_4 представляють собою булеві зображення, які зручно розглядати на множині пікселів (клітинок), які мають таку нумерацію

$T_0 =$

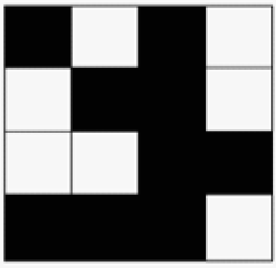
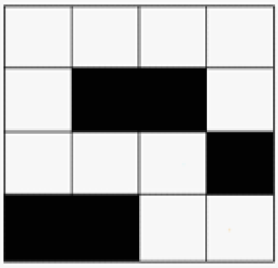
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

У бінарному зображенні знаком ■ позначені пікселі, в яких значення відповідної клітини бінарної матриці рівне одиниці і порожні клітинки — у протилежному випадку. Операції диз'юнкції і кон'юнкції на бінарних зображеннях в алгебрах класу P еквівалентні операціям перетину і об'єднання.

Наприклад, якщо

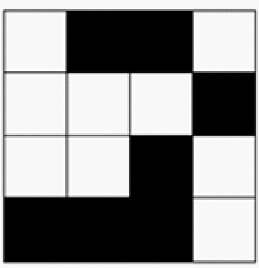
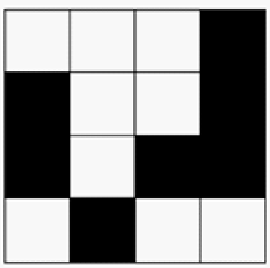
$A_1 =$  , $A_2 =$  ,

то

$A_1 \vee A_2 =$  , $A_1 \wedge A_2 =$  .

Унарні операції T_i, $i = 1, 2, \ldots, 8$, які виконують поворот зображення A, будемо позначати через A^{T_i}. Визначимо ці операції наступним чином.

1. Операція T_1 задає поворот A^{T_0} на 180° навколо головної діагоналі квадрата (операція транспонування): перший рядок A^{T_0} записується в перший стовпчик A^{T_1} ; другий рядок — в другий стовпчик і т.д. Наприклад, якщо

$A^{T_0} =$  , то $A^{T_1} =$  .

2. Операція T_2 задає поворот A^{T_0} на 90° за годинниковою стрілкою відносно

центра симетрії квадрата: перший рядок A^{T_0} записується в останній стовпчик A^{T_2}, другий — в передостанній і т.д.

3. Операція T_3 задає поворот A^{T_0} на 90° проти годинникової стрілки відносно центра симетрії квадрата: перший рядок A^{T_0} записується у перший стовпчик A^{T_3} у зворотному порядку; другий рядок — у другий стовпчик у зворотному порядку і т.д.

4. Операція T_4 задає поворот A^{T_0} на 180° відносно допоміжної діагоналі квадрата: перший рядок A^{T_0} записується в останній стовпчик A^{T_4} із зворотнім записом елементів і т.д.

5. Операція T_5 задає поворот A^{T_0} на 180° відносно осі симетрії квадрата паралельно осі OX : перший рядок A^{T_0} записується в останній рядок A^{T_5} і т.д.

6. Операція T_6 задає поворот A^{T_0} на 180° відносно осі симетрії квадрата паралельно осі OY : перший рядок A^{T_0} записується як перший рядок A^{T_6} у зворотному порядку і т.д.

7. Операція T_7 задає поворот A^{T_0} на 180° відносно центра симетрії квадрата: перший рядок A^{T_0} записується в останній рядок A^{T_7} у зворотному порядку і т.д.

8. Операція T_8 : перший рядок A^{T_0} записується в перший стовпчик A^{T_8} з інверсією і т.д. Очевидно, що $T_8 = T_7$.

Операції $T_1 - T_7$ визначені таким чином, щоб зберігалась структура зображення A. На рис. 1 показано виконання операцій $T_i,\ i = 1, 2, \ldots, 8$ за допомогою матриць перетворень, а на рис. 2 — застосування цих операцій до заданого зображення A.

У подальшому використаємо позначення $Z_k = \{0,\, 1,\, \ldots,\, k-1\},\ k \geqslant 2$, зокрема $Z_8 = \{0,\, 1,\, \ldots,\, 7\}$. Суперпозицію поворотів T_i і $T_k,\ i, k \in Z_8$, будемо позначати як T_iT_k, і $A^{T_iT_k} = \left(A^{T_i}\right)^{T_k}$.

Теорема 1. *Суперпозицією двох операцій повороту T_i і $T_k,\ i, k \in Z_8$, є операція $T_j,\ j \in Z_8$, тобто для $\forall\ i, k \in Z_8,\ \exists\ j \in Z_8$ таке, що $T_iT_k = T_j$.*

Доведення. Розглянувши суперпозицію операцій поворотів T_i і T_k, для всіх $i,\ k \in Z_8$, отримаємо рівності, які представимо за допомогою табл. 1.

Таблиця 1

	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7
T_0	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7
T_1	T_1	T_0	T_6	T_5	T_7	T_3	T_2	T_4
T_2	T_2	T_5	T_7	T_0	T_6	T_4	T_1	T_3
T_3	T_3	T_6	T_0	T_7	T_5	T_1	T_4	T_2
T_4	T_4	T_7	T_5	T_6	T_0	T_2	T_3	T_1
T_5	T_5	T_2	T_1	T_4	T_3	T_0	T_7	T_6
T_6	T_6	T_3	T_4	T_1	T_2	T_7	T_0	T_5
T_7	T_7	T_4	T_3	T_2	T_1	T_6	T_5	T_0

Табл. 1 доводить справедливість теореми, оскільки задає 64 рівностей типу $T_iT_k = T_j$ для $\forall\ i, k, j \in Z_8$. Теорема доведена.

У кожному рядку або стовпці табл. 1 операція $T_i,\ i \in Z_8$ зустрічається тільки один раз. Кожну з цих семи операцій можна реалізувати як суперпозицію двох

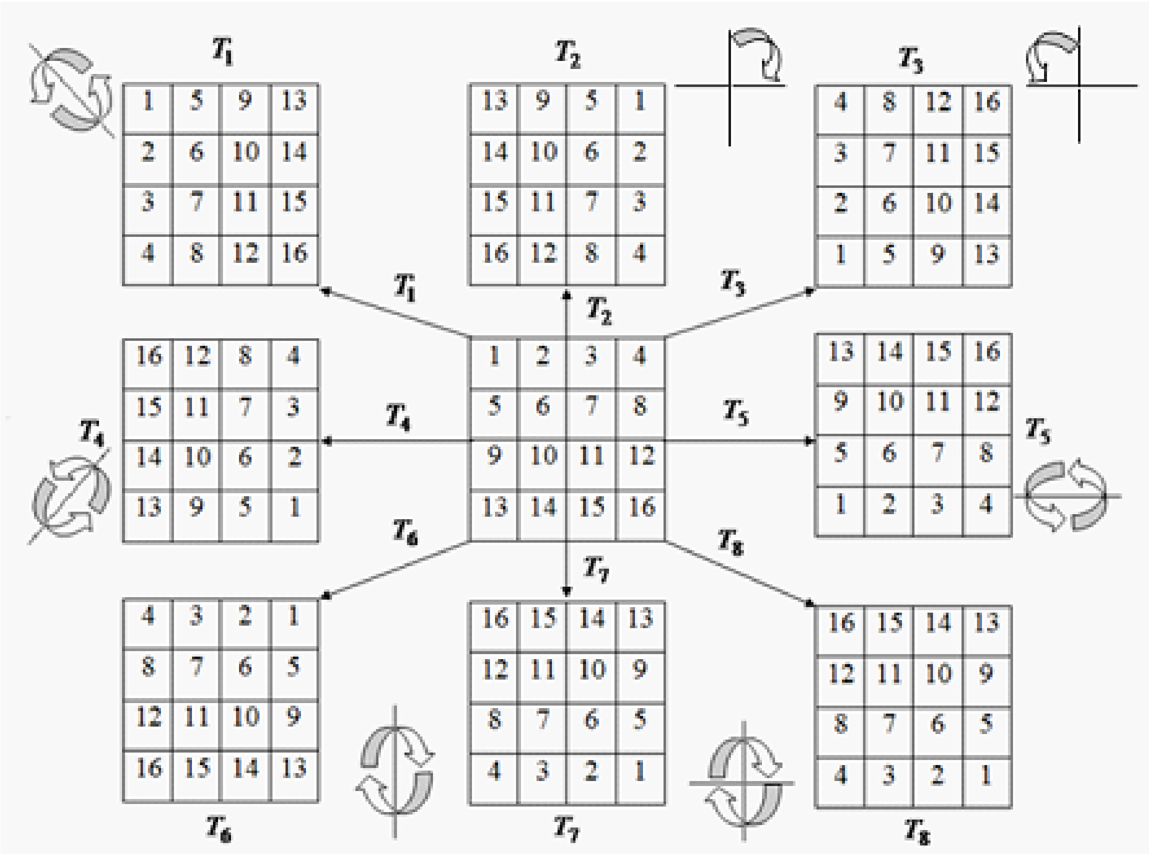


Рис. 1. Матриці операцій повороту $T_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, 8$

поворотів різними способами. Наприклад:

1) $T_1 = T_3\ T_5$; $T_1 = T_4 T_7$; $T_1 = T_5\ T_2$; $T_1 = T_6\ T_3$; $T_1 = T_7 T_4$.
2) $T_2 = T_1\ T_6$; $T_2 = T_3\ T_7$; $T_2 = T_4\ T_5$; $T_2 = T_5\ T_1$; $T_2 = T_6\ T_4$; $T_2 = T_7\ T_3$ і т.д.

Крім того, мають місце такі рівності:

1) $T_1^2 = T_0$;
2) $T_1 T_2 = T_6$; $T_2 T_1 = T_5$; $T_2 T_5 = T_4$; $T_1 T_5 = T_3$; $T_2^2 = T_7$;
3) $T_2\left(T_2 T_1\right) = T_1\left(T_2 T_1\right)$.

Використовуючи суперпозицію операцій T_1 і T_2 можемо реалізувати довільну операцію T_i, $i \in Z_8$. Нехай $T = \{T_0, T_1, \ldots, T_7\}$.

Означення 1. *Множину операцій повороту $M_k = \{T_{j_1}, T_{j_2}, \ldots, T_{j_k}\} \subset T$, $j_1, j_2, \ldots, j_k \in Z_8$ будемо називати повною, якщо в результаті суперпозиції операцій цієї множини можемо отримати всі операції T.*

Тотожності $T_1^2 = T_4^2 = T_6^2 = T_7^2 = T_0$; $T_2^2 = T_7$; $T_2^3 = T_3$; $T_2^4 = T_0$; $T_3^2 = T_7$; $T_3^3 = T_2$; $T_3^4 = T_0$ вказують на те, що системи, які складаються з однієї унарної операції T_i, $i \in Z_8$ не утворюють повну систему.

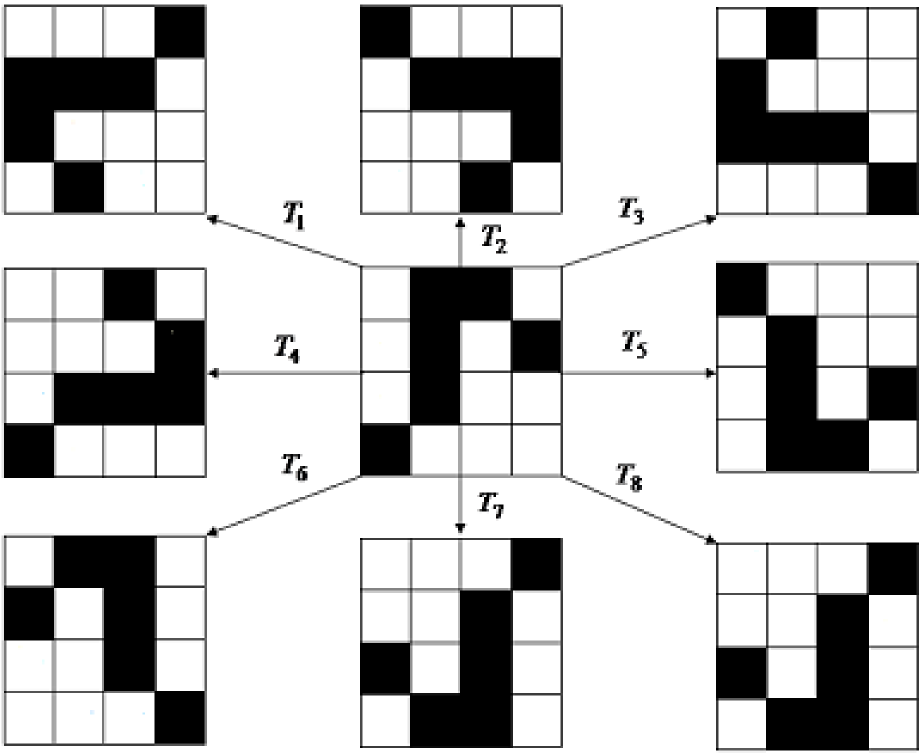


Рис. 2. Приклад повороту A^{T_i}, $i = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ 8$

Твердження 1. *Множини операцій* $\{T_1, T_2\}$, $\{T_1, T_6\}$, $\{T_2, T_6\}$, $\{T_2, T_4\}$,$\{T_2, T_5\}$, $\{T_4, T_5\}$, $\{T_3, T_4\}$, $\{T_3, T_6\}$, $\{T_4, T_6\}$,$\{T_1, T_3\}$, $\{T_3, T_5\}$, $\{T_1, T_5\}$ *є повними.*

Доведення. Розглянемо кожний випадок окремо.

1) Повнота системи операцій $\{T_1, T_2\}$ випливає з рівностей, які вказують як з T_1 і T_2 можна отримати всі операції T_i, $i \in Z_8$: $T_1T_2 = T_6$; $T_2T_1 = T_5$; $T_2^2 = T_7$; $T_2T_5 = T_4$; $T_1T_5 = T_3$; $T_1^2 = T_0$.

2) Згідно пункту 1 множина операцій $\{T_1, T_2\}$ повна. На основі тотожності $T_1T_6 = T_2$ отримаємо повноту множини $\{T_1, T_6\}$.

3) Множина операцій $\{T_2, T_6\}$ повна. Рівність $T_2T_6 = T_1$ зводить повноту цієї множини до попереднього випадку.

4) Рівність $T_2T_4 = T_6$ зводить повноту множини $\{T_2, T_4\}$ до повноти множини $\{T_2, T_6\}$.

5) Аналогічно рівність $T_2T_5 = T_4$ зводить повноту системи $\{T_2, T_5\}$ до повноти $\{T_2, T_4\}$.

6) З повноти системи $\{T_4, T_5\}$ на основі рівності $T_4T_5 = T_2$ отримаємо повноту системи $\{T_2, T_5\}$.

7) Аналогічно, з повноти множини $\{T_3, T_4\}$ на основі рівності $T_3T_4 = T_5$ отримаємо повноту системи $\{T_4, T_5\}$.

8) Рівність $T_3T_6 = T_4$ зводить повноту системи $\{T_3, T_6\}$ до повноти $\{T_3, T_4\}$.

9) Аналогічно, на основі рівності $T_4T_6 = T_3$ з повноти системи $\{T_4, T_6\}$ отримаємо повноту системи $\{T_3, T_4\}$.

10) З повноти множини $\{T_1, T_3\}$ на основі рівності $T_3T_1 = T_6$ отримаємо повноту $\{T_3, T_6\}$.

11) Аналогічно, рівність $T_3T_5 = T_1$ зводить повноту множини операцій $\{T_3, T_5\}$ до повноти множини $\{T_1, T_3\}$.

12) І на кінець, повнота системи $\{T_1, T_5\}$ на основі рівності $T_1T_5 = T_3$ доводить повноту системи $\{T_1, T_3\}$.

Твердження 2. *Якщо до класів формул $\{T_1, T_4, T_7\}$, $\{T_2, T_3, T_7\}$, $\{T_5, T_6, T_7\}$ додати довільну формулу T_i, $i = 1, ..., 7$, яка йому не належить, то отриманий клас формул буде повним.*

Справедливість твердження випливає з табл. 1 та твердження 1.

Теорема 2. 1) *Для операцій повороту T_i, $i \in Z_8$ не існує повної системи, яка складається з однієї операції.*

2) *Існує* 12 *пар повних систем операцій повороту* $\{T_1, T_2\}$, $\{T_1, T_3\}$, $\{T_1, T_5\}$, $\{T_1, T_6\}$, $\{T_2, T_4\}$, $\{T_2, T_5\}$, $\{T_2, T_6\}$, $\{T_3, T_4\}$, $\{T_3, T_5\}$,$\{T_3, T_6\}$, $\{T_4, T_5\}$,$\{T_4, T_6\}$.

3) *Існує тільки три не повних системи, які складаються з трьох операцій повороту:* $\{T_1, T_4, T_7\}$, $\{T_2, T_3, T_7\}$, $\{T_5, T_6, T_7\}$.

Доведення теореми випливає з наведених вище тотожностей та тверджень 1, 2.

Теорема 3. *Число повних систем операцій повороту T_i, $i \in Z_8$ рівне* 108.

Доведення. Використовуючи пункти 2, 3 теореми 2, отримаємо

$$12 + \left(C_7^3 - 3\right) + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 = 12 + (35 - 3) + 35 + 21 + 7 + 1 = 108,$$

що доводить справедливість теореми.

Означення 2. *Множину операцій $M_k = \{T_{j_1}, T_{j_2}, \ldots, T_{j_k}\} \subset T$, $j_1, j_2, \ldots, j_k \in Z_8$ будемо називати замкненою, якщо в результаті суперпозиції операцій цієї множини отримуємо тільки операції множини M_k.*

Розглянемо замкнені класи формул відносно операції суперпозиції, які задаються двома операціями T_i, T_j, $i, j \in Z_8$.

Твердження 3. 1) *Множини операцій $\{T_1, T_7\}$, $\{T_1, T_4\}$, $\{T_4, T_7\}$ відносно суперпозиції операцій T_1, T_4, T_7 утворюють замкнений клас $\{T_1, T_4, T_7\}$;*

2) *Множини операцій $\{T_2, T_3\}$, $\{T_2, T_7\}$, $\{T_3, T_7\}$ відносно суперпозиції операцій T_2, T_3, T_7 утворюють замкнений клас $\{T_2, T_3, T_7\}$;*

3) *Множини операцій $\{T_5, T_6\}$, $\{T_5, T_7\}$, $\{T_6, T_7\}$ відносно суперпозиції операцій T_5, T_6, T_7 утворюють замкнений клас $\{T_5, T_6, T_7\}$.*

Доведення. Справедливість твердження 3 випливає з тотожностей:

1) $T_1T_7 = T_7T_1 = T_4$, $T_1T_4 = T_4T_1 = T_7$, $T_4T_7 = T_7T_4 = T_1$,

2) $T_2T_3 = T_3T_2 = T_0$, $T_2^2 = T_7$, $T_2T_7 = T_7T_2 = T_3$, $T_3T_7 = T_7T_3 = T_2$,

3) $T_5T_6 = T_6T_5 = T_7$, $T_5T_7 = T_7T_5 = T_6$, $T_6T_7 = T_7T_6 = T_5$.

Теорема 4. *Відносно операцій повороту T_i, $i \in Z_8$ існують такі замкнені класи формул:* $\{T_0, T_1\}$, $\{T_0, T_4\}$, $\{T_1, T_2\}$, $\{T_0, T_6\}$, $\{T_0, T_7\}$, $\{T_0, T_2, T_3, T_7\}$, $\{T_0, T_1, T_4, T_7\}$, $\{T_0, T_5, T_6, T_7\}$, $\{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7\}$.

Справедливість теореми безпосередньо випливає з означення 2 та твердження 3.

3. Стандартні форми формул алгебри Р. Нехай A, B, C — формули алгебри Р. Тоді:

1) A^{T_i}, $i \in Z_8$ — формула;

2) $A \vee B$ — формула;

3) $A \wedge B$ — формула.

Формули алгебри Р задовольняють такі тотожності:

1) $A \wedge A = A$; $A \vee A = A$.

2) $A \wedge B = B \wedge A$; $A \vee B = B \vee A$.

3) $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$; $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$.

4) $A \wedge (B \vee C) = A \wedge B \vee A \wedge C$; $A \vee B \wedge C = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

5) $A \vee B \wedge A = A$; $A \wedge (B \vee A) = A$.

6) $A^{T_iT_j} = A^{T_k}$, $i, j, k \in Z_8$ (тотожності, що задаються табл.1).

7) $(A \vee B)^{T_i} = A^{T_i} \vee B^{T_i}$, $i \in Z_8$.

8) $(A \wedge B)^{T_i} = A^{T_i} \wedge B^{T_i}$, $i \in Z_8$.

Елементарною формулою будемо називати формули типу A^{T_i}, $i \in Z_8$.

Кон'юнкцію довільного числа елементарних формул будемо називати елементарним перетином.

Диз'юнкцію довільного числа елементарних перетинів будемо називати стандартним об'єднанням.

Означення 3. *Стандартне об'єднання називається канонічним, якщо:*

1) *кожний елементарний перетин не має однакових елементарних формул;*

2) *ніякий елементарний перетин не є підформулою іншого.*

Побудуємо алгоритм зведення довільної формули до канонічного вигляду.

Нехай задана деяка формула $\varphi(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ алгебри Р.

1) Використовуючи формули 7 і 8 досягаємо того, що операції повороту T_i, $i \in Z_8$ будуть знаходитись тільки над зображенням A_j, $j \in Z_8$.

2) Використовуючи рівності 6, над кожною елементарною формулою отримаємо не більше однієї операції повороту.

3) За допомогою формул 4 розкриваємо дужки.

4) На основі рівностей 5 виконуємо поглинання надлишків формул.

У результаті виконання цього алгоритму отримаємо канонічну форму формули $\varphi(A_1, A_2, \ldots, A_k)$.

Розглянемо приклади побудови канонічних об'єднань формул алгебри Р .

Приклад 1. $\left(\left(A^{T_2} \wedge B^{T_1}\right)^{T_3T_2} \vee C^{T_1}\right)^{T_4} = \left(\left(A^{T_2} \wedge B^{T_1}\right)^{E} \vee C^{T_1}\right)^{T_4} =$

$$= \left(A^{T_2} \wedge B^{T_1} \vee C^{T_1}\right)^{T_4} = A^{T_2T_4} \wedge B^{T_1T_4} \vee C^{T_1T_4} = A^{T_6} \wedge B^{T_7} \vee C^{T_7}.$$

Приклад 2. $\left(\left(\left(A^{T_1} \vee B^{T_2}\right)^{T_6} \wedge A^{T_3T_4}\right)^{T_2} \vee \left(B^{T_3} \wedge A^{T_1}\right)^{T_3}\right)^{T_1} =$

$$= \left(A^{T_1T_6} \vee B^{T_2T_6}\right)^{T_2} \wedge A^{T_3T_4T_2} \vee \left(B^{T_3^2T_1} \wedge A^{T_1^2T_3}\right) =$$

$$= \left(A^{T_2T_2} \vee B^{T_1T_2}\right) \wedge A^{T_5^2} \vee B^{T_7T_1} \wedge A^{T_2} =$$

$$= \left(A^{T_7} \vee B^{T_6}\right) \wedge A^{T_1} \vee B^{T_4} \wedge A^{T_2} = A^{T_1} \wedge A^{T_7} \vee A^{T_1} \wedge B^{T_6} \vee A^{T_2} \wedge B^{T_4}.$$

На основі отриманих результатів будуються досконалі канонічні форми алгебри Р.

Список використаної літератури

1. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970. – 392 с.
2. *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
3. *Янов Ю. И.* О системах тождеств для алгебр // Проблемы кибернетики. – 1962. – **8**, №8. – С. 75–90.
4. *Линдон Р. К.* Тождества в конечных алгебрах // Кибернетический сборник. – 1960. – **1**, №. – С. 246–248.
5. *Мурский В. Л.* Существование в трехзначной логике замкнутого класса с конечным базисом, не имеющего конечной полной системы // Докл. АН СССР. – 1965. – **8**, №4. – С. 815–818.
6. *Мурский В. Л.* Конечная базируемость тождеств и другие свойства «почти всех» конечных алгебр // Проблемы кибернетики. – 1978. – **8**, №30. – С. 43–56.
7. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. – М.: Наука, 1974. – 313 с.
8. Многозначные элементы и структуры. – К.: Наукова думка, 1967. – 208 с.
9. *Витенько И. В., Николенко В.В.* Об одном многообразии алгебр // Сиб. мат. журнал. – 1974. – **15**, №2. – С. 430–433.

Одержано 10.01.2017