УДК 532.543

П. С. Венгерський, Г. А. Шинкаренко (Львівський нац. ун-т ім. І. Франка)

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ РОЗВ'ЯЗКУ ВАРІАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ СУМІСНОГО ПОТОКУ ПОВЕРХНЕВИХ І ГРУНТОВИХ ВОД

In this paper, based on conservation laws momentum and mass we derived an equation describing the motion of surface and groundwater flows. Proceeding from principles of a homogeneous solid medium interface conditions are derived on the border of connections two continuous media. Also for the formulation of initial — boundary problem these equations are complemented by boundary and initial conditions. The variational problem of movement such flows was constructed. We formulated theorem on the existence, uniqueness and limited solution of this problem.

В цій статті на основі законів збереження імпульсу і маси отримано рівняння, що описують рух поверхневих і грунтових потоків. Виходячи із принципів однорідного суцільного середовища отримані умови інтерфейсу на границі з'єднання двох суцільних середовищ. Також для формулювання початково–крайової задачі ці рівняння доповнені крайовими і початковими умовами. Побудована варіаційна задача для руху таких потоків. Сформульовано теорему про існування, єдиність та обмеженість розв'язку цієї задачі.

1. Вступ. Для дослідження руху водних потоків на території водозбору часто використовуються різні моделі, такі як поверхневий стік, русловий стік, стік підземних вод, тощо. Поєднання та взаємодія різних математичних моделей опису таких потоків води досліджувались в працях [6,11,12]. В даній роботі розвинуто новий підхід до розробки математичної моделі руху поверхневих і грунтових потоків води[1-4], побудовано початково- крайову задачу даної моделі, сформульовано варіаційну постановку задачі, досліджується існування, єдиність та обмеженість розв'язку такої задачі.

2. Геометричне визначення потоків води. Позначимо проекцію водозбору на площину $x_1 0 x_2$ через $\Omega(x_1, x_2)$ і її границю $\partial\Omega$. Припустимо, що поверхневий потік води на водозборі $\Omega(x_1, x_2)$ в кожен момент часу $t \in [0, T]$ утворює об'єм $F(t) \subset R^3$ (див. рис.1), такої структури

$$\Omega_F(t) := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \,|\, \eta(x) < x_3 < \nu(x,t),\, \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega \right\}.$$

Позначимо його нижню поверхню через

$$\Gamma(x) := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \,|\, x_3 = \eta(x), \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega \right\}$$

та верхню поверхню

$$\Lambda_F(t) := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \,\, |\, x_3 = \nu(x,t),\, \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega \right\}$$

відповідно. Решту поверхні цього об'єму

$$\Gamma_F(t) := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \,|\, \eta(x) < x_3 < \nu(x,t),\, \forall x = (x_1, x_2) \in \partial\Omega \right\}$$

будемо називати бічними поверхнями об'єму $\Omega_F(t)$.

Аналогічно позначимо частину рідини, яка рухається в грунті через $P(t)$, з об'ємом такої структури

$$\Omega_P\left(x\right):=\left\{\left(x_1,x_2,x_3\right)\in R^3 \,|\, \mathrm{h}\left(x\right)<x_3<\eta\left(x\right),\quad \forall x=\left(x_1,x_2\right)\in\Omega\right\}.$$

проекція нижньої частини (поверхня водопідпору) запишеться

$$\Lambda_P\left(x\right):=\left\{\left(x_1,x_2,x_3\right)\in R^3 \,|\; |\, x_3=h\left(x\right),\ \forall x=\left(x_1,x_2\right)\in\Omega\right\}.$$

Тоді, для бічних поверхонь шару грунтової води будемо мати

$$\Gamma_P\left(x\right):=\left\{\left(x_1,x_2,x_3\right)\in R^3 \,|\, \mathrm{h}\left(x\right)<x_3<\eta\left(x\right),\forall x\in\partial\Omega\right\}$$

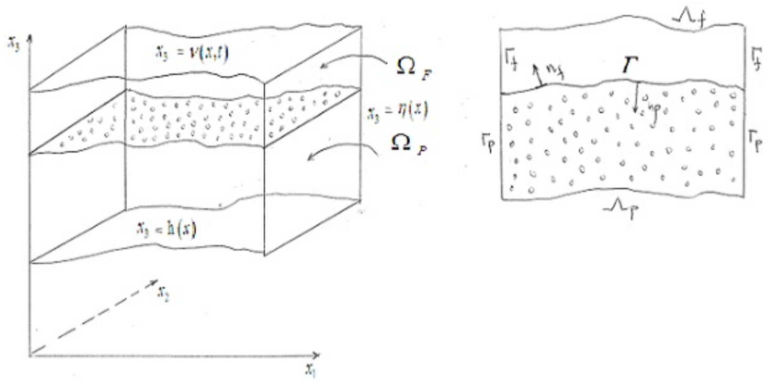

Рис. 1. Загальне зображення об'ємів потоків та їх поперечний розріз.

3. Початково-крайова задача взаємодії поверхневих і грунтових потоків.

Сформулюємо початково-крайову задачу руху поверхневих і грунтових потоків по поверхні водозбору з врахуванням крайових та початкових умов:

Знайти невідомі значення вектора швидкості, тиску та п'єзометричного напору$\{u,p,\phi\}$,
що задовільняють наступні системи рівнянь:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u_i\right)+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(u_iu_k\right)-\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}+f_i=0, \tag{1}$$

$$\sigma_{ij}=-p_F\delta_{ij}+\tau_{ij},$$

$$\tau_{ij}=2\mu e_{ij}, i,j=1,2,3$$

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\left(u_k\right)}{\partial x_k}=0,\qquad \text{в } \Omega_F\times\left(0,T\right] \tag{2}$$

$$m\frac{\partial\phi}{\partial t}=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)+\varepsilon \quad \text{в} \quad \Omega_P\times\left(0;T\right] \tag{3}$$

де

$\{u_i(x,t)\}_i^3 = 1$ та $p_F = p_F(x,t)$– шукані вектор швидкості частинок рідини та гідростатичний тиск відповідно;

$F = \{f_i(x,t)\}_{i=1}^3$ — масові сили; μ=$\mu(x\ )$>0 — коефіцієнт в'язкості;

$\{e_{ij}\}_{i,j=1}^3$, $\{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^3$ — симетричні тензори швидкостей деформації та напружень рідини в точці x на момент часу t;

δij — символ Кронекера; $k = k(x,t)$ — коефіцієнт фільтрації;

$m = m(x,t)$ — коефіцієнт питомої водовіддачі; $\varepsilon = \varepsilon(x,t)$ — відома функція джерел притоку води;

p_p — тиск грунтової води; ρ — густина води; g–прискорення вільного падіння;

$$\phi = x_3 + \frac{p_p}{\rho g} \text{ — п'єзометричний напір;} \tag{4}$$

$$q = -k\nabla\phi\text{- потік (розхід потоку);} \tag{5}$$

$\upsilon = \upsilon(x,t)$ — вектор швидкості рідини в грунті; $\upsilon = \frac{q}{\omega}$, ω- об'ємна пористість;

n_F, n_P –вектори внутрішньої нормалі до границі області Ω_F та Ω_P відповідно; $\overrightarrow{n_F} = -\overrightarrow{n_P}$ на спільній границі Γ;

$$\Omega_F \cap \Omega_P = \{\emptyset\}, \overline{\Omega_F} \cap \overline{\Omega_P} = \Gamma,\ \partial\Omega_F = \Gamma_F \cup \Lambda_F \cup \Gamma; \partial\Omega_P = \Gamma_P \cup \Lambda_P \cup \Gamma.$$

Крайові умови:

$$\vec{u}_i = 0 \text{ на } \Gamma_F,\ i = 1,2,3, \tag{6}$$

$$\sigma_{n\tau} = \widehat{\sigma}, \text{ на } \Lambda_F, \tag{7}$$

$$u_3 + R = \frac{\partial\nu}{\partial t} + u_1^0\frac{\partial\nu}{\partial x_1} + u_2^0\frac{\partial\nu}{\partial x_2} \quad \text{в } \Lambda_F \times (0,T], \tag{8}$$

де R — швидкість падіння капель дощу,

u_1^0, u_2^0 — горизонтальні складові швидкості на вільній поверхні $\nu(x.t)(\Lambda_F)$;

$$\upsilon_{\bullet}\overrightarrow{n_P} = \widehat{\upsilon} \text{ на } \Gamma_P; \tag{9}$$

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 = 0 \text{ на } \Lambda_P, \tag{10}$$

$$\upsilon_3 = -I \text{ на } \Lambda_P, \tag{11}$$

де I — відома функція, яка описує швидкість потоку рідини через поверхню Λ_P,

і початкові умови:

$$\begin{array}{l} u|_{t=0} = u_0, \\ p|_{t=0} = p_0, \quad \text{в } \Omega. \\ \phi|_{t=0} = \phi_0, \end{array} \tag{12}$$

та умови контакту потоків на спільній границі Γ:

$$\begin{array}{l} \sigma_{nn}(u,p_F) = p_p, \\ \sigma_{\tau n} = 0, \\ u_n = -\upsilon_n. \end{array} \tag{13}$$

4. Варіаційне формулювання задачі взаємодії водних потоків.

Щоб побудувати варіаційне формулювання початково-крайової задачі (1) - (12) введемо простір допустимих векторів швидкості[1,2,4]:

$$H_F := \left\{ \xi = \{\xi\}_{i=1}^{3} \in H^1(\Omega_F)^3 | \xi \cdot n_F|_{\Gamma_F} = 0 \ \right\}$$

Також, для гідростатичного тиску поверхневого потоку

$$L_F := \{\theta \in L^2(F) | \theta|_{\Gamma_F} = 0\}$$

Простір допустимих функцій для п'єзометричного напору запишемо у вигляді:

$$H_p := \left\{ \psi \in H^1(\Omega_p) | \psi|_{\Gamma_p \bigcup \Omega_p} = 0 \ \right\}$$

Позначимо такі білінійні форми:

$$M_V(r; w, q) = \int_V \sum_{i=1}^{3} r w_i q_i ds,$$

$$N_V(w; u, q) = \int_V \sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \rho w_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} q_i ds,$$

$$C_V(w, q) = \int_V 2\mu e(w) : e(q) ds,$$

$$A_V(w, q) = -\int_V w divq ds,$$

$$Y_V(w, q) = -\int_V w q_n d\gamma,$$

$$B_V(p, w) = -\int_V \sum_{i=1}^{3} p.\nabla w ds.$$

Введемо наступні лінійні функціонали:
$l_j : W \to R, j = \overline{1, 3}$, $W := H_F \times L_F \times H_P$

$$\langle l_1, \xi \rangle = \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega_F} \rho f_i \xi_i ds + \int_{\Lambda_F} (\xi_n p_a + \xi_\tau \cdot \widehat{\sigma}) d\gamma$$

$$\langle l_2, \theta \rangle = -\int_{\partial\Lambda_F} u_n^0 \theta d\gamma$$

$$\langle l_3, \psi \rangle = \int_{\Omega_p} \frac{\varepsilon(x, t) \rho g \psi}{\omega} dp - \int_{\partial\Lambda_p} \widehat{\upsilon} \psi \, \rho \, g d\gamma$$

Позначимо

$$\tilde{\psi} = \psi \rho g, \tilde{m} = \frac{m}{\omega},$$

тоді сформулюємо наступну варіаційну задачу:

$$\begin{array}{l} \text{Знайти } \{u,p,\phi\} \in H_F \times L_F \times H_P, \\ M_{\Omega_F}(\rho;u',\xi) + N_{\Omega_F}(u;u,\xi) + A_{\Omega_F}(p,\xi) + C_{\Omega_F}(u,\xi) + \\ +Y_\Gamma(u,\xi) = \langle l_1,\xi \rangle, \forall \xi \in H_F \end{array} \tag{14}$$

$$B_{\Omega_F}(u,\theta) + Y_\Gamma(\theta,u) = \langle l_2,\theta \rangle, \forall \theta \in L_F \tag{15}$$

$$M_{\Omega_P}(\tilde{m};\phi',\tilde{\psi}) + A_{\Omega_P}(\tilde{\psi},\upsilon) + Y_\Gamma(\tilde{\psi},\upsilon) = \left\langle l_3,\tilde{\psi} \right\rangle, \forall \tilde{\psi} \in H_P \tag{16}$$

з початковими умовами

$$M_{\Omega_F}(u'(0) - u_0,\xi) = 0, \tag{17}$$

$$B_{\Omega_F}(p(0) - p_0,\theta) = 0; \tag{18}$$

$$M_{\Omega_P}(\phi'(0) - \phi_0,\tilde{\psi}) = 0. \tag{19}$$

Обчислюємо, враховуючи початкові умови (17)-(19) та крайові умови (6)-(11), значення змінних u та p зі співвідношень (14) та (15). Далі з умов спряження потоків(умов інтерфейсу) (13) та крайової умови (9) обчислюємо з (16) значення змінної φ.

5. Існування, єдиність та обмеженість розв'язку варіаційної задачі про сумісний потік.

Сформулюємо наступну теорему.

Теорема 1. *(про існування, єдиність і обмеженість розв'язку задачі про сумісний потік)*

Нехай варіаційна задача (14)-(19), дані якої задовольняють умови регулярності

$$u_0 \in H_F, \phi_0 \in H_P, t_1, t_2 \in (0,T] \tag{20}$$

має розв'язок $(u(t),\phi(t))$.

Тоді розв'язок $(u(t),\phi(t))$ *буде єдиним розв'язком задачі (1)-(12)*

$$u \in L^2(0,T;H_F), \phi \in L^2(0,T;H_P). \tag{21}$$

Більше того, розв'язок $(u(t),\phi(t))$ *неперервно залежить від даних задачі (1)-(12) і за цих умов буде правильною апріорна оцінка*

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}\left[\|u(t)\|^2 + \|\phi(t)\|^2 + \int_0^t (\|u(\tau)\|_W^2 + \|\phi(\tau)\|_W^2)d\tau\right] \le \\ C\left\{\frac{1}{2}\left[\|u(0)\|^2 + \|\phi(0)\|^2\right] + \int_0^t (\|u(\tau)\|_W^2 + \|\phi(\tau)\|_W^2)d\tau\right\} \end{array} \tag{22}$$

зі сталою $C > 0$, *значення якої не залежить від величин, що нас цікавлять.*

Доведення.

З формули(6.3) в [4], повна енергія сумісного потоку запишеться у вигляді

$$E(u(t),\phi(t)) = \frac{1}{2}\|u(t)\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|u(\tau)\|_W^2 d\tau + \frac{1}{2}\|\phi(t)\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|\phi(\tau)\|_W^2 d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\|u(t)\|^2 + \|\phi(t)\|^2 + \int_0^t (\|u(\tau)\|_W^2 + \|\phi(\tau)\|_W^2)d\tau\right]$$

З огляду на умови теореми (21), маємо

$$l_1 \in L^2(0,T;H_F), l_3 \in L^2(0,T;H_P),$$

внаслідок чого з (16),(17), будуть правильними оцінки

$$\left|\int_0^t < l_1, u > d\tau\right| \le \frac{1}{2}\int_0^t (\|l_1(\tau)\|_*^2 + \|u(\tau)\|^2)d\tau \tag{23}$$

$$\left|\int_0^t < l_3, u > d\tau\right| \le \frac{1}{2}\int_0^t (\|l_3(\tau)\|_*^2 + \|\phi(\tau)\|^2)d\tau \tag{24}$$

де * позначає простори спряжені відповідно до $H_F H_P$.

Враховуючи нерівність Пуанкаре-Фрідріхса [9], має місце наступна оцінка

$$\|u\|_{H_F} = (\int_{\Omega_F} [u^2 + (\bigtriangledown u)^2]dx)^{1/2} \le C\int_{\Omega_F} |\bigtriangledown u|^2 dx = C\|u\|_{H'_F}, \forall u \in H'_F. \tag{25}$$

З початкової умови (12) для функції u(t), маємо

$$\|u'(0)\|^2 = \|u_0\|_H^2 \tag{26}$$

Аналогічно, з (12) для функції $\phi(t)$ запишемо

$$\|\phi'(0)\|^2 = \|\phi_0\|_H^2. \tag{27}$$

Далі, з огляду на введені норми в п.4 [1], знайдеться $C = const > 0$ така, що

$$|\phi|_{H_P} \le C\|\phi\|_{H'_P}, \forall\phi \in H'(\Omega_P), \tag{28}$$

тоді

$$|\phi(0)|_{H_P} \le C\|\phi(0)\|_{H'_P} = C\|\phi_0\|_{H'_P}, \forall\phi \in H'(\Omega_P), \tag{29}$$

Таким чином, з (23)-(29) будемо мати

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{2}\left[\|u(t)\|^2 + \|\phi(t)\|^2 + \int_0^t(\|u(t)\|_W^2 + \|\phi(t)\|_W^2)d\tau\right] \le \\ C\left\{\tfrac{1}{2}\left[\|u(0)\|^2 + \|\phi(0)\|^2\right] + \int_0^t(\|u(t)\|_W^2 + \|\phi(t)\|_W^2)d\tau\right\}\end{gathered} \tag{30}$$

Отже, ми довели справедливість оцінки (22). Доведемо єдиність розв'язку задачі методом від супротивного. Нехай існують два розв'язки задачі (14)-(19) .

Позначимо

$$(u_1(t), \phi_1(t)) \;\; i \;\; (u_2(t), \phi_2(t)), \forall u_1, u_2 \in L^2((0,T];H_F)$$

,

$$\forall\phi_1, \phi_2 \in L^2((0,T];H_P)$$

Тоді, внаслідок лінійності, $u = u_1 - u_2, \phi = \phi_1 - \phi_2$ також є розв'язком варіаційної задачі (14)-(19), які задовільняють однорідні початкові умови

$$u|_{t=0} = 0, \phi_{t=0} = 0$$

Тому, з співвідношення (30) випливає, $u_1 = u_2, \phi_1 = \phi_2$, що і доводить єдиність розв'язку вихідної варіаційної задачі.

6. Висновки.

На підставі законів збереження виведено основні рівняння руху поверхневих і грунтових потоків, які доповнено крайовими і початковими умови, з невідомими величинами вектора швидкості, тиску та п'єзометричного напору. Сформульовано варіаційну задачу сумісного потоку та отримано умови контакту на спільній границі двох середовищ. Доведено існування, єдиність і обмеженість розв'язку варіаційної задачі сумісного стоку.

Список використаної літератури

1. *Венгерський П. С.* Про задачу сумісного руху поверхневих і грунтових вод з території водозбору // Вісн. Льв. ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2014. – Вип. № 22. – С. 41–53.
2. *Венгерський П.С.* Чисельне дослідження математичної моделі сумісного стоку поверхневих і грунтових вод з території водозбору// Математичне та комп'ютерне моделювання. – Камянець-Подільський: Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. І.Огієнка. – Вип.10. – 2014. – С.33–42.
3. *Венгерський П. С., Демкович О. Р.* Математичне моделювання руху грунтової води в насиченій зоні // Дев'ята Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики". – Львів. – 2002. – С. 36.
4. *Венгерський П. С., Шинкаренко Г. А.* Чисельне дослідження енергетичних рівнянь варіаційної задачі сумісного руху поверхневих і підземних водних потоків на території водозбору // Математичне моделювання в економіці. – Міжнародний науковий журнал. – Київ. – 2016. – №3(7) (в друці).
5. *Картвелишвили Н. А., Галактионов Ю. И.* Идеализация сложных динамических систем с примерами из электроэнергетики. – М.: Наука. – 1976. –272 с.
6. *Корявов П. П.*Проблемы замыкания системы гидрологических моделей речного бассейна.// –Вод.ресурсы. – 1981. –№ 3. – С.54-64.
7. *Кучмент Л. С.* Модели процессов формирования речного стока. – Ленинград: Гидрометеоиздат. – 1980. –142 с. 8.
8. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука. – 1977. – 664 с.
9. *Темам Р.* Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. – М.: Мир. – 1981. – 408 с.
10. *Шинкаренко Г.А.* Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. – Київ: НМК ВО. – 1991. – 87 с.
11. *Темам Р. Lions P.-L., Temam R., and Wang S.* Models for the coupled atmosphere and ocean. (CAO I,II). Comput. Mech. Adv. – 1(1):120. – 1993.
12. *Quarteroni A., Veneziani A.* Analysis of a Geometrical Multiscale Model Based on the Coupling of ODE's and PDE's for Blood Flow Simulations. –SIAM J. on MMS. – Vol.1 – No.2. –2003.- P. 173195.

Одержано 19.09.2016