УДК 512.547

И. В. Литвинчук (Киевский нац. ун-т им. Т. Шевченко)

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДИЕДРАЛЬНОЙ ГРУППЫ ПОРЯДКА 8 НАД ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2

One proves that in the case of an infinite field of characteristic 2 there exist infinitely many dimensions in each of which the dihedral group of order 8 has infinitely many indecomposable pairwise non-equivalent matrix representations of constant rank.

Доказано, что в случае бесконечного поля характеристики 2, существует бесконечно много размерностей, в каждой из которых диэдральная группа восьмого порядка имеет бесконечно много неразложимых попарно неэквивалентных матричных представлений постоянного ранга.

В работе [1], написанной под влиянием статьи [2] (в которой для конечной группы G и поля характеристики $p > 0$ вводится понятие модулей постоянного жорданового типа, а также изучаются такие модули) рассматриваются свойства различных матричных задач, связанные с рангами матриц; в частности, описываются представления постоянного ранга четверной группы Клейна (наименьшей дтэдральной группы) над алгебраически замкнутым полем характеристики 2. В последнем случае представления постоянного ранга — это то же самое, что представления постоянного жорданового типа. Случай произвольной элементарной абелевой p-группы G рассматривается в [3]; доказано, что если $p = 2$ и $|G| > 4$ или $p > 2$ и $|G| > p$, то задача об описании представлений постоянного жорданового типа является дикой, т. е. содержит в себе задачу о паре матриц (точное определение см. в [4]).

В. М. Бондаренко поставил задачу об изучении свойств матричных представлений (над полем характеристики 2) всех диэдральных групп, также связанных с рангами матриц, принимая во внимание, что все представления диэдральных групп (с точностью до эквивалентности) описаны [5] (относительно диэдральных 2-групп см. также [6]). В этой работе рассматривается одно из таких свойств для диэдральной группы порядка 8 (которое не выполняется для четверной группы Клейна).

1. Представления четверной группы Клейна постоянного ранга. В работе [1] для конечной групповой схемы G и поля характеристики $p > 0$ вводится понятие модулей постоянного жорданового типа. В частном случае, для четверной группы Клейна $G_2 = (2, 2)$ со стандартными образующими g_1, g_2 и алгебраически замкнутого поля k характеристики 2, это означает (на языке матричных представлений), что самоаннулирующие попарно коммутирующие матрицы A_1, A_2, соответствующие элементам $a_1 = 1 + g_1, a_2 = 1 + g_2$ групповой алгебры kG, удовлетворяют следующему условию: ранг матрицы $\alpha A_1 + \beta A_2$, где $\alpha, \beta \in k$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, не зависит от выбора α и β.

Положим $a = g_1, b = g_2$. Единичную матрицу размерности s обозначаем через E_s.

В работе [1] доказана следующая теорема, которая описывает неразложимые представления четверной группы Клейна, имеющие постоянный ранг.

Теорема 1. *Представления группы G_2 (над алгебраически замкнутым полем k характеристики 2) вида*

$$a)\qquad a \to (1), \qquad b \to (1),$$

$$b)\qquad a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$c)\qquad a \to \left(\begin{array}{c|c} E_s & E_s \quad \overline{0} \\ \hline 0 & E_{s+1} \end{array}\right), \qquad b \to \left(\begin{array}{c|c} E_s & \overline{0} \quad E_s \\ \hline 0 & E_{s+1} \end{array}\right),$$

$$d)\qquad a \to \left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{matrix} E_s \\ \widetilde{0} \end{matrix} \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right), \qquad b \to \left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{matrix} \widetilde{0} \\ E_s \end{matrix} \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right),$$

где $s \geq 1$, образуют полную систему неразложимых попарно неэквивалентных представлений постоянного ранга.

Таким образом, с точностью до эквивалентности, в каждой размерности число неразложимых представлений постоянного ранга конечно (в частности, может быть нулевым).

2. Формулировка основного результата. В этой статье рассматриваются представления диэдральной группы $G_8 = \langle a, b \,|\, a^2 = 1, b^2 = 1, (ab)^4 = 1\rangle$ порядка 8 над бесконечным полем k характеристики 2. По аналогии с четверной группой Клейна, матричное представление T группы G_8 называется представлением постоянного ранга (относительно a, b), если ранг матрицы $\alpha(E + T_a) + \beta(E + T_b)$, где $\alpha, \beta \in k$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, не зависит от выбора α и β (E обозначает единичную матрицу).

Теорема 2. *Пусть k — бесконечное поле характеристики 2 и n — натуральное число, делящееся на 4. Тогда над полем k существует бесконечно много неразложимых попарно неэквивалентных представлений размерности n, которые имеют постоянный ранг.*

Подчеркнем (см. п. 1), что для четверной группы Клейна (диэдральной группы порядка 4) таких размерностей не существует.

3. Доказательство теоремы 2. Пусть $n = 4m$. Для ненулевого элемента $\lambda \in k$ рассмотрим следующее представление $T = T(n, \lambda)$ (размерности n) группы D_8:

$$a \to T_a = \begin{pmatrix} E_m & E_m & 0 & 0 \\ 0 & E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & E_m & E_m \end{pmatrix},$$

$$b \to T_b = \begin{pmatrix} E_m & 0 & 0 & J_m(\lambda) \\ 0 & E_m & E_m & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_m \end{pmatrix},$$

где $J_m(\lambda)$ — клетка Жордана размерности m с собственным числом λ. То, что T является представлением группы D_8, следует из равенств

$$(T_aT_b)^4 = \left[\begin{pmatrix} E_m & E_m & 0 & 0 \\ 0 & E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & E_m & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & 0 & 0 & J_m(\lambda) \\ 0 & E_m & E_m & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_m \end{pmatrix} \right]^4 =$$

$$= \begin{pmatrix} E_m & E_m & E_m & J_m(\lambda) \\ 0 & E_m & E_m & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & E_m & E_m \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} E_m & 0 & E_m + J_m(\lambda) & 0 \\ 0 & E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_m \end{pmatrix}^2 = E_n.$$

Лемма 1. *Представление $T = T(n, \lambda)$ неразложимо.*

Доказательство. Лемма следует из основного результата работы [5]. Приведем явное доказательство, а именно покажем, что алгебра $\mathrm{End}(T)$ эндоморфизмов представления T является локальной. Алгебра $\mathrm{End}(T)$ состоит из всех матриц

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{pmatrix}$$

таких, что выполняются равенства $T_aX = XT_a$ и $T_bX = XT_b$ или, что эквивалентно, равенства $(E_n + T_a)X = X(E_n + T_a)$ и $(E_n + T_b)X = X(E_n + T_b)$. Все блоки матрицы X имеют размерность m.

Итак, имеем равенства

$$\begin{pmatrix} 0 & E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & J_m(\lambda) \\ 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & J_m(\lambda) \\ 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перемножив матрицы, получаем:

$$\begin{pmatrix} X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & X_{11} & X_{14} & 0 \\ 0 & X_{21} & X_{24} & 0 \\ 0 & X_{31} & X_{34} & 0 \\ 0 & X_{41} & X_{44} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} JX_{41} & JX_{42} & JX_{43} & JX_{44} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_{12} & X_{11}J \\ 0 & 0 & X_{22} & X_{21}J \\ 0 & 0 & X_{32} & X_{31}J \\ 0 & 0 & X_{42} & X_{41}J \end{pmatrix},$$

где $J = J_m(\lambda)$. Из этих матричных равенств следует, что матрица X имеет следующий вид:

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & * & * & * \\ 0 & X_{11} & * & * \\ 0 & 0 & X_{11} & 0 \\ 0 & 0 & * & X_{11} \end{pmatrix}$$

и при этом $X_{11}J_m(\lambda) = J_m(\lambda)X_{11}$. Поскольку матрица X одинаковой перестановкой горизонтальных и вертикальных полос приводится к верхнему блочно-треугольному виду, а множество матриц, которые коммутируют с клеткой Жордана имеют верхний треугольный вид с равными элементами на главной диагонали, то алгебра эндоморфизмов представления T является локальной.

Лемма доказана.

Чтобы закончить доказательство, убедимся в том, что представление $T = T(n, \lambda)$ имеет постоянный ранг. Матрица $\alpha(E + T_a) + \beta(E + T_b)$ равна матрице

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 & E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_m & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & J_m(\lambda) \\ 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha E_m & 0 & \beta J_m(\lambda) \\ 0 & 0 & \beta E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha E_m & 0 \end{pmatrix},$$

ранг которой равен $2m$ независимо от α и β (учитывая, что $\alpha \neq 0$ или $\beta \neq 0$, а также $\lambda \neq 0$).

Список использованной литературы

1. *Бондаренко В. М., Литвинчук И. В.* О некоторых ручных и диких матричных задачах постоянного ранга // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2012. – **23**, №1. – С. 19–27.
2. *Carlson, J. F., Friedlander E. M., Pevtsova J.* Modules of constant Jordan type // J. Reine Angew. Math. – 2008. – **614**. – P. 191–234.
3. *Bondarenko V. M.; Lytvynchuk I. V.* The representation type of elementary abelian p-groups with respect to the modules of constant Jordan type // Algebra Discrete Math. – 2012. – **14**, no. 1. – P. 29–36.
4. *Дрозд Ю. А.* О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 104–114.
5. *Бондаренко В. М.* Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 // Матем. сб. – 1975. – **96**, №1. – С. 63–74.
6. *Ringel, C. M.* The indecomposable representations of the dihedral 2-groups // Math. Ann. – 1975.– **214**. – P. 19–34.

Получено 11.11.2016