Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Національний технічний університет України “КПІ”
ДВНЗ “Ужгородський національний університет”

Ю.В. Козаченко, Ю.Ю. Млавець,
О.М. Моклячук

КВАЗІБАНАХОВІ ПРОСТОРИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Монографія

Ужгород
Всеукраїнське державне
видавництво “Карпати”
2015

УДК 519.21
ББК 22.17
К59

Рецензенти:
Кнопов П.С., професор, доктор фіз.-мат. наук,
член-кореспондент НАН України;
Карташов М.В., професор, доктор фіз.-мат. наук;
Моца А.І., доцент, кандидат фіз.-мат. наук;

Рекомендовано до друку Вченою радою механіко-математичного факультету КНУ ім. Т. Шевченка (протокол № 8 від 16 березня 2015 року).
Рекомендовано до друку Вченою радою фізико-математичного факультету НТУУ "КПІ" (протокол № 4 від 19 травня 2015 року).
Рекомендовано до друку Вченою радою математичного факультету ДВНЗ "УжНУ" (протокол № 9 від 16 квітня 2015 року).

"Квазібанахові простори випадкових величин" – 4481 книга Всеукраїнського державного ордена Дружби народів видавництва "Карпати" від часу його заснування (1945)

Козаченко Ю.В., Млавець Ю.Ю., Моклячук О.М.
К59 Квазібанахові простори випадкових величин: Монографія — Ужгород: Карпати, 2015. — 212 с.

ISBN 978-966-671-403-2

У монографії вивчаються випадкові величини та випадкові процеси із квазібанахових K_σ-просторів, а саме просторів $F_\psi(\Omega)$, $F_\psi^*(\Omega)$, $D_{V,W}(\Omega)$. Проведено оцінку норм випадкових процесів, а також точності та надійності моделювання випадкових процесів із таких просторів.

Викладення базуються, головним чином, на результатах, отриманих авторами роботи.

Рекомендується науковим співробітникам, аспірантам і студентам університетів, що спеціалізуються в області теорії ймовірностей та математичної статистики. Книга буде корисна дослідникам в області соціології, фізики атмосфери, геофізики, фінансової математики, математичної економіки.

УДК 519.21
ББК 22.17

ISBN 978-966-671-403-2

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Однією з актуальних задач теорії випадкових процесів є вивчення тих чи інших класів випадкових процесів, дослідження їх загальних властивостей, отримання оцінок розподілу функціоналів від процесів з різних класів випадкових величин.

Останнім часом розвивалась теорія випадкових процесів із просторів Орліча, просторів $Sub_{\varphi}(\Omega)$, $D_{V,W}(\Omega)$-просторів. Як правило, знайти норми в цих просторах важко, або неможливо. Тому, замість норм, в цих просторах використовувались еквівалентні їм моментні норми. При оцінюванні розподілів різних функціоналів від процесів із цих просторів, оцінки дещо погіршувались, тому виникла необхідність розглянути банахові простори з моментними нормами. Це дає можливість у багатьох випадках отримувати кращі оцінки, ніж з використанням, наприклад: норм із просторів Орліча.

Перший результат, який був присвячений вивченню локальних властивостей випадкових процесів, належить А. М. Колмогорову. Його теорема про вибіркову неперервність із ймовірністю одиниця, опублікована в роботі Є. Є. Слуцького (1937) [168]. Ця теорема створила цілий напрям у теорії випадкових процесів. Іншими працями в цьому напрямі про загальні умови вибіркової неперервності та належності до класів Ліпшиця випадкових полів, були робота (1967) [114] та монографія М. Й. Ядренка (1980) [113].

У працях Ю. В. Козаченка та М. Й. Ядренка (1976) були одержані подібні умови для різних класів випадкових полів [69, 70]. Умови неперервності випадкових функцій на компактах у гільбертовому просторі вивчались у роботах А. В. Скорохода (1973) [104] та М. Й. Ядренка (1968) [112] .

Багато науковців досліджували властивості розподілів супремумів випадкових процесів, вивчали проблеми існування моментів та експоненціальних моментів розподілу супремумів процесу. Велику увагу звернено на задачі знаходження оцінок ймовірності $P\left\{\sup\limits_{t\in T}|X(t)| > \varepsilon\right\}$. Результати з даних питань опубліковано у книгах Г. Крамера і М. Р. Лідбеттера (1967) [124], М. Б. Маркуса і Ж. Пізьє (1981) [154], М. Р. Лідбеттера, Г. Ліндгрена і Х. Рутсена (1983) [148], Р. Д. Адлера (1990) [115], М. Леду і М. Талаграна (1991) [150], В. В. Булдигіна та Ю. В. Козаченка (1998) [16]. Дослідженням властивостей випадкових процесів із певних класів займалися Д. М. П. Альбін (1990, 1998) [116,117], М. Леду (1990) [149], М. Б. Маркус (1988) [153], Є. І. Островський (1990) [87].

У 60-ті роки XX ст. розпочалися дослідження локальних властивостей гауссових процесів. Зокрема Ю. К. Беляєв отримав умови неперервності гауссових стаціонарних процесів у термінах спектральних функцій та відому "альтернативу Бєляєва" (1960, 1961) [5,119]. Різними методами отримали умови неперервності для гауссових процесів Р. М. Дадлі (1965) [127] та Д. Дельпорт (1964) [126]. Фундаментальні результати, які стосуються властивостей гауссових випадкових процесів отримали Д. Ліндгрен (1971) [151], Р. М. Дадлі (1973) [128], К. Борель (1978) [121], М. Талагран (1987) [170], Р. Д. Адлер (1990) [115], М. Леду (1990) [149], В. І. Пітербарг (1996) [164]. У роботі І. В. Бондаренка та О. В. Іванова (1992) [7] досліджувались властивості вибіркових функцій випадкових полів із стійкими приростами.

Оцінкам експоненціальних моментів та розподілів супремумів гауссових процесів були присвячені роботи А. В. Скорохода (1970) [103], Г. Я. Ландау і Л. А. Шеппа (1970) [147], Х. Ферніка (1970) [130], Н. Н. Ваханія, В. І. Тариєладзе і С. А. Чобаняна (1985) [20], М. Леду та Талаграна М. (1991) [150], Ліфшиця М. А. (1995) [74], Юрінського В. (1995) [174]. У працях Бєляєва Ю. К. (1968) [6], С. Бермана (1973) [120], В. І. Пітербарга (1982) [93], Д. І. Пікандса (1969) [161], в яких досліджувався розподіл супремумів гауссових процесів.

У 60-му році XX ст. з'явилася робота, в якій розглядалися ширші класи випадкових величин та процесів, ніж гауссові. Поняття субгауссової випадкової величини ввів Ж. П. Кахан (1960) [137]. Пізніше у роботі В. В. Булдигіна та Ю. В. Козаченка (1980) [14] було доведено, що простір субгауссових випадкових величин є банаховим відносно субгауссового стандарту. Властивості та різні сфери застосування субгауссових та строго субгауссових випадкових величин досліджувалися у працях В. В. Булдигіна (1998, 1980, 1980, 1987, 1994, 1997) [8, 10, 14–16, 122], А. Р. Джуліано (2002) [32], Є. І. Островського (1990) [87], А. О. Пашка (1998) [91], Н. К. Джейна (1978) [136], Ж. П. Кахана (1960) [137], М. Леду (1991) [150], М. Б. Маркуса (1981) [154].

Ю. В. Козаченко ввів поняття субгауссових випадкових процесів (1968) [49]. Властивості даного класу випадкових процесів розглянуті в роботах В. В. Булдигіна (1977) [9], Н. К. Джейна та М. Б. Маркуса (1978) [136].

Експоненціальні моменти та оцінки розподілів супремумів для субгауссових та близьких до них процесів розглядалися в працях Ж. П. Кахана (1968) [138], Н. К. Джейна та М. Б. Маркуса (1975, 1978) [135,136], М. Б. Маркуса та Ж. Пізьє (1981) [154], Є. І. Островського (1990) [87], Д. Фукуди (1990) [133], М. Леду і М. Талаграна (1991) [150].

Ю. В. Козаченко та Є. І. Островський ввели поняття банахових просторів типу субгауссових, а саме просторів $Sub_\varphi(\Omega)$ випадкових величин та процесів, які є узагальненням просторів субгауссових випадкових величин (1985) [61]. Простори φ-субгауссових випадкових величин – це простори центрованих випадкових величин із певним ростом експоненційних моментів. Властивості таких просторів, оцінки та умови збіжності сум незалежних випадкових величин із цих просторів, коли процес визначений на просторі з псевдометрикою, породженою цим процесом, розглянуті в монографії В. В. Булдигіна та Ю. В. Козаченка (1998) [16]. Властивості φ-субгауссових просторів вивчалися також у роботі А. Р. Джуліано, Ю. В. Козаченка та Т. Нікітіної (2003) [134] та в монографії О. І. Василик, Ю. В. Козаченка та Р. Є. Ямненка (2008) [19]. Оцінки розподілів супремумів φ-субгауссових випадкових процесів досліджені в роботах Ю. В. Козаченка, О. І. Василик та Р. Є. Ямненка (2003) [144].

Передгауссові випадкові процеси були введені у працях В. В. Булдигіна та Ю. В. Козаченка (1974) [11]. Властивості передгауссових випадкових процесів та розподіли супремуму досліджувалися в роботах В. В. Булдигіна і Ю. В. Козаченка (1992, 1993) [12, 13], В. А. Дмитровського (1981) [35].

Ширшим класом випадкових величин, ніж гауссові, є φ-субгауссові та передгауссові випадкові величини з просторів Орліча. Теорія функціональних просторів Орліча детально викладена в книгах М. А. Красносельського і Я. Б. Рутицького (1958) [72] та М. М. Рао і З. Д. Рена (1991, 2001) [165, 166]. У монографії В. В. Булдигіна та Ю. В. Козаченка (1998) [16] викладена теорія просторів Орліча випадкових величин та теорія випадкових процесів з просторів Орліча випадкових величин. Із робіт Ю. В. Козаченка (1983, 1984, 1984) [50, 53, 54], Х. Ферніка (1983) [132], К. Нанопоулоса та Ф. Нобеліса (1978) [158], Ж. Пізьє (1979, 1983) [162,163], М. Вебера (1983) [172] починається систематичне вивчення властивостей орлічівських процесів, а також процесів із орлічівськими приростами. Крім того, властивостям випадкових процесів у деяких просторах Орліча присвячені також роботи Н. Коно (1980) [140] та Ю. В. Козаченка (1985) [55]. У роботах Е. А. Абжанова та Ю. В. Козаченка (1985) [1], Ж. Пізьє (1979, 1983) [162,163], М. Леду і М. Талаграна (1991) [150] розглядалися умови неперервності реалізацій процесів із орлічівськими приростами.

Простори Орліча експоненціального типу досліджувалися при розв'язанні різних задач теорії випадкових процесів, зокрема в роботах Є. І. Островського (1982) [86], Х. Ферніка (1975) [131]. Оцінки для розподілів норм супремумів різних орлічівських процесів розглядалися у працях Х. Ферніка (1983) [132], Н. Коно (1980) [140], К. Нанопоулоса та Ф. Нобеліса (1978) [158], Ж. Пізьє (1979, 1983) [162, 163].

Простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ був введений С. В. Єрмаковим та Є. І. Островським у роботі (1986) [37], у якій доведено, що цей простір є простором Банаха з нормою $\|\xi\|_\psi = \sup\limits_{u\geqslant 1} \frac{(\mathsf{E}|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)}$.

Умови належності з імовірністю одиниця випадкових процесів із простору Орліча випадкових величин функціональним просторам Орліча та просторами Соболєва-Орліча отримано в роботах Ю. В. Козаченка та Т. О. Яковенко (2004, 2006) [71, 173].

У 90-х роках XX століття почав розвиватися такий напрямок в теорії випадкових процесів, як вейвлет аналіз. Виявилося, що вейвлет аналіз – це нова галузь математики з своїми проблемами й задачами. Крім того, цю теорію ефективно можна застосовувати на практиці. Наприклад: при записах інформації, записах звуку та зображенні на компакт диски та комп'ютери. Запис та збереження інформації за допомогою вейвлетів набагато ефективніший, ніж інші. Використовуються вейвлети також при кодуванні інформації.

Вагомий внесок у створення теорії вейвлет аналізу належить вченим Західної Європи та Північної Америки, таким як С. Г. Маллат (1998) [152], І. Мейер (1990) [157], І. Добеші (1992) [125] та Ч. К. Чуі (1992) [123]. Дослідженням рівномірної збіжності з імовірністю одиниця на обмеженому інтервалі вейвлет розкладів випадкових процесів із просторів Орліча випадкових величин займалися Ю. В. Козаченко і М. М. Перестюк (2007, 2008) [67, 68].

У роботах О. Є. Каменщикової (2007, 2007) [44,139] знаходяться оцінки процесу відхилення при наближенні випадкових процесів ламаними, многочленами Бернштейна, сплайнами та побудова апроксимацій $SSub_{\varphi}(\Omega)$ випадкових процесів у просторах $C[a, b]$, $L_p(T)$ із заданими точністю та надійністю.

Ще в 1930-х роках Енріко Фермі, а потім Джон фон Нейман і Station Улам в 1940-х передбачили, що можна використовувати зв'язок між стохастичними процесами і диференціальними рівняннями "у зворотний бік". Вони запропонували використовувати стохастичний підхід для апроксимації багатовимірних інтегралів у рівняннях переносу, що виникли у зв'язку із задачами про рух нейтрона в ізотропному середовищі. Ідея була розвинена Уламом, який запропонував, що замість того, щоб використовувати звичайні міркування комбінаторики, просто ставити "експеримент" велике число разів і, таким чином, підрахувавши число вдалих результатів, оцінити вірогідність подій. Він же запропонував використовувати комп'ютери для розрахунків методом Монте-Карло.

Поява перших електронних комп'ютерів, які могли з великою швидкістю генерувати псевдовипадкові числа, різко розширила коло задач, для вирішення яких стохастичний підхід виявився ефективнішим, ніж інші математичні методи. Метод Монте-Карло почали застосовувати в багатьох задачах, проте його використання не завжди було виправдане через велику кількість обчислень, необхідних для отримання відповіді із заданою точністю.

Роком народження методу Монте-Карло вважається 1949 рік, коли в світ виходить стаття Н. Метрополіса і С. Улама [156].

У 1950-х роках метод Монте-Карло використовувався для розрахунків при розробці водневої бомби. Основні заслуги в розвитку методу Монте-Карло в той час належать співробітникам лабораторій ВПС США і корпорації RAND.

У 1960-х роках у новій області математики – обчислювальній математиці – було виявлено клас задач, складність (кількість обчислень, необхідних для отримання точної відповіді) яких зростає з розмірністю задачі експоненціально. Інколи можна пожертвувавши точністю, знайти алгоритм, складність якого зростає повільніше, але є велика кількість задач, для якої цього не можна зробити (наприклад, завдання визначення об'єму опуклого тіла в n-вимірному евклідовому просторі) і метод Монте-Карло є єдиною можливістю для здобуття досить точної відповіді за прийнятний час.

У багатьох роботах вивчається метод Монте-Карло при обчисленні багатовимірних інтегралів, зокрема в роботах О. С. Фролова і М. М. Ченцова (1962) [109], в книгах С. М. Єрмакова (1975) [38], С. М. Єрмакова та Г. О. Михайлова (1976) [39].

Пізніше з'явились роботи, в яких вивчаються точність та надійність при застосуванні методу Монте-Карло для обчислення інтегралів, що залежать від параметру. У працях В. А. Дмитровського та Є. І. Островського (1978) [36], В. А. Дмитровського (1980) [34], А. В. Войтішека і С. М. Прігаріна (1992) [28], А. В. Войтішека (1996) [25] при розв'язуванні цих задач досліджувалися умови слабкої збіжності до значення інтегралів і для великих n визначалась точність та надійність за умови, що оцінки є гауссовим процесом.

У роботі О. А. Курбанмурадова і К. К. Сабельфельда (2006) [145] знаходилась оцінка точності в просторі $C(T)$ та надійності підрахунку інтегралів залежних від параметру, за умови, що інтегрування виконувалось по обмеженій області. При отриманні цих результатів використовувалась теорія субгауссових процесів (див. [16]).

Таким чином, теорія випадкових процесів, у тому числі гауссових і субгауссових, знайшла своє застосування при розв'язуванні математичних задач із використанням методу Монте-Карло.

Стрімкий розвиток обчислювальної техніки надав значного поштовху розвитку методів стохастичного моделювання та зокрема чисельного моделювання випадкових процесів. Дані методи широко застосовуються в найрізноманітніших областях природничих та соціальних наук, таких як фінансова математика, метеорологія, радіотехніка, соціологія, фізика тощо.

До розробки теорії моделювання випадкових процесів та полів доклало зусиль багато спеціалістів. Даній тематиці присвячено велику кількість робіт, таких як роботи Артем'єва С.С.(1992) [4], Єрмакова С.М. та Михайлова Г.О. (1982) [40], Хамітова Г.П. (1983) [110], Шалигіна А.С. (1986) [111], Сабельфельда К.К. та Курбанмурадова О.А. (1990) [146], Анварова С.Р., Пригаріна С.М.(1994) [3], Бусленко Н.П. (1978) [17], Ріплі Б.Д. (1987) [167].

Вагомий внесок у галузь моделювання випадкових процесів зробила новосибірська школа Г.О. Михайлова. Ним та його учнями впроваджено та вивчено багато нових напрямків у моделюванні випадкових процесів та полів. Спектральні моделі гауссових полів досліджували Кантер Р.Р. (1989) [45], Каргін Б.А. та Пригарін С.М. (1990, 1992) [46, 47], Курбанмурадов О.А., Сабельфельд К.К, Чопанов Г. (1988) [73], Михайлов Г.О. (1982) [78, 80], Пригарін С.М.(1989) [98]. Моделі випадкових полів на основі точкових потоків вивчаються в роботах Михайлова Р.О. (1974, 1982) [76, 77, 79] та Тройнікова В.С. (1984) [107]. Учнями Михайлова Г.О. Войтишеком А.В. та Пригаріним С.М. вивчались умови слабкої збіжності моделей до процесів в різних просторах. Теорії збіжності числових моделей випадкових функцій присвячені роботи Войтишека А.В та Пригаріна С.М. [26, 27, 29], Михайлова Г.О. (1983) [79], Пригаріна С.М. [94,96,97]. Михайловим Г.О. був запропонований метод моделювання стаціонарних гауссових процесів на основі розбиття та рандомізації спектру [76]; ним та його учнями також вивчався метод подвійної рандомізації.

Найбільш повно вивченим розділом моделювання є розділ, присвячений методам моделювання гауссових випадкових процесів та полів. Ядренко М.Й. та Рахімов Г. [101] описують моделювання ізотропних та однорідних випадкових полів на площині. Ядренком М.Й. та Вижвою З.О. [24, 171] вивчалось статистичне моделювання ізотропних випадкових полів на сфері. Традиційні методи моделювання гауссових випадкових процесів та полів, такі як методи лінійного перетворення, авторегресії та ковзаючого середнього, рандомізації спектру, ковзаючого підсумовування, канонічних представлень та ін вивчаються в роботах Бикова В.В. (1978) [18], Дергаліна Н.Л. та Романцева В.В. (1978) [31], Товстика Т.М. (1978) [105], Єрмакова С.М. та Михайлова Г.О. (1982) [40], Шалигіна А.С. та Палагіна Ю.І. (1986) [111], Огороднікова В.А. (1990) [159], Сана Т., Чайки М.(1997) [169]. Проте, в цих методах майже не розглядається питання про точність та надійність побудованої моделі.

Певні методи, які дозволяють будувати моделі, що наближають гауссовий випадковий процес із заданою точністю та надійністю в певних функціональних просторах розглянуто в працях Зелепугіної І.Н., Козаченка Ю.В.(1982, 1988) [41,42], Козаченка Ю.В., Козаченко Л.Ф. (1991, 1992) [51, 52]. Модель гауссового випадкового процесу, введена в роботах Михайлова Г.О., вивчається більш докладно в роботах Козаченка Ю.В., Тегзи А.М. та Джуліано Антоніні Р. [32,33,58]. В цій роботі досліджено точність та надійність даної моделі гауссового процесу в деяких функціональних просторах. Козаченком Ю.В. та Пашком А.О. у роботах [63–66,92] та книзі [62] досліджувались субгауссові випадкові процеси, а також методи побудови моделей таких процесів з даною точністю та надійністю в різних банахових просторах. Оцінки точності моделювання в рівномірній метриці субгауссових випадкових полів та гауссових випадкових полів на сфері вивчав Пашко А.О. [89, 90]. Моделювання стаціонарних випадкових процесів з $Sub_\varphi(\Omega)$ вивчали Козаченко Ю.В.

та Розора І.В. [102].

Одним з порівняно нових розділів теорії випадкових процесів є теорія випадкових величин та процесів з узагальнених банахових просторів. Властивості випадкових процесів у передбанахових та квазібанахових просторах вивчались у роботах В.В. Булдигіна та Ю.В. Козаченко [16]. Приклади квазібанахових просторів розглянуто в роботах Ю.В. Козаченка та Є.І. Островського [61], зокрема це простори Орліча, $D(\Omega)$-простори, $\Gamma_\psi(\Omega)$-простори. Функціональні K_σ - простори розглядалися Канторовичем та Акіловим. Квазі-K_σ-простори та K_σ-простори випадкових величин вивчалися Є.А. Абжановим та Ю.В. Козаченком [2].

Моделювання випадкових процесів широко застосовується у геологічних науках. Розвитку та розробленню нових підходів математичного моделювання у геології присвячено роботи Вижви С.А. та Продайводи Г.Т. [99, 100], Вижва З.О. [22, 23]

Велику роль в теорії моделювання випадкових процесів грають розклади випадкових процесів у ряд з незалежними членами. Одним з таких розкладів є розклад Карунена-Лоева – зображення випадкового процесу у вигляді нескінченної лінійної комбінації ортогональних функцій, які задає коваріаційна функція процесу [62]. Даний розклад є розвитком перетворення Карунена-Лоева, або методу головних компонент, що був запропонований К. Пірсоном у 1901 році [160]. Козаченком Ю.В., Розорою І.В. та Турчином Є.В. у статті [143] було досліджено розклад випадкового процесу у ряд з ортогональними членами за функціями, котрі визначаються кореляційною функцією процесу.

Отже, дослідження точності і надійності моделей випадкових процесів і полів в різних функціональних просторах є актуальним у зв'язку з широким застосуванням стохастичного моделювання випадкових процесів і полів у різних областях природничих та соціальних наук.

Книга складається з десяти розділів.

У першому розділі розглядаються випадкові процеси з квазібанахових K_σ-просторів випадкових величин. Другий розділ присвячений вивченню основних властивості просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. У третьому розділі знаходяться оцінки розподілу супремумів випадкових процесів на компакті з простору $\mathbf{F}^*_\psi(\Omega)$. У четвертому розділі розглядаються основні властивості просторів Орліча та досліджується зв'язок просторів Орліча з просторами $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. У п'ятому розділі розглядаються передбанахові K_σ-простори $D_{V,W}(\Omega)$ і вивчаються основні властивості цих просторів. У шостому розділі оцінюється точність та надійність побудови моделей процесів із $D_{V,W}(\Omega)$ у даному просторі. У сьомому розділі знаходяться оцінки для розподілів норм у $L_p(T)$ випадкових процесів із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. У восьмому розділі проводиться дослідження методу Монте-Карло обчислення кратних інтегралів заданих на $\mathbb{R}^n$ із заданою надійністю та точністю. У дев'ятому розділі проведено оцінку моделювання випадкових процесів з просторів $Sub_{\varphi}(\Omega)$, котрі є підкласом K_{σ}-просторів, із заданими надійністю та точністю у просторах $L_p(T)$. У десятому розділі проведено оцінку моделювання випадкових процесів з просторів $Sub_{\varphi}(\Omega)$, котрі є підкласом K_{σ}-просторів, із заданими надійністю та точністю у просторах $C(T)$.

Розділ 1

Випадкові процеси з квазібанахових K_σ-просторів випадкових величин

У першому розділі розглядаються випадкові процеси з квазібанахових K_σ-просторів випадкових величин. Досліджуються умови вибіркової неперервності з імовірністю одиниця та умови того, що супремуми процесів належать тому ж простору, що й самі процеси. Знаходяться оцінки розподілів цих процесів.

1.1. Квазібанахові K_σ-простори випадкових величин

Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ – стандартний імовірнісний простір, $K(\Omega)$-простір випадкових величин $\xi = \xi(\omega), \omega \in \Omega$.

Означення 1.1. *Функція* $\Theta = (\Theta(\xi), \xi \in \mathcal{M})$ *називається переднормою, якщо для всіх* $\xi \in \mathcal{M}$*:*

1. $\Theta(\xi) \in [0, \infty)$*;*

2. $\Theta(0) = 0$*;*

3. $\Theta(-\xi) = \Theta(\xi)$.

Означення 1.2. *Повний відносно переднорми* Θ *простір* $\mathcal{M}$ *будемо називати передбанаховим простором.*

Означення 1.3. *Передбанаховий простір* $\mathcal{M}$ *називатимемо перед -* K_σ*-простором, якщо* $\mathcal{M}$ *має наступні властивості:*

a_1*) якщо* $\xi, \eta \in \mathcal{M}$*, то* $max(\xi, \eta) \in \mathcal{M}$ *та* $min(\xi, \eta) \in \mathcal{M}$*. Отже, і* $|\xi| \in \mathcal{M}$.

a_2*) якщо* $\eta \in \mathcal{M}$ *та* $|\xi| \leqslant |\eta|$ *майже скрізь, то* $|\xi| \in \mathcal{M}$.

a_3*) Якщо для послідовності* $\{\xi_n, n \geqslant 1\}$ *випадкових величин з* $\mathcal{M}$ *існує така випадкова величина* $\eta \in \mathcal{M}$*, що* $\sup\limits_{n\geqslant 1} |\xi_n| \leqslant \eta$*, то* $\sup\limits_{n\geqslant 1} |\xi_n| \in \mathcal{M}$.

Означення 1.4. *Передметрикою називається функція* $\rho(t, s)$, $t, s \in T$*, така, що* $\rho(t, s) \in [0, \infty)$, $\rho(t, t) = 0$, $\rho(t, s) = \rho(s, t)$

Означення 1.5. *Квазінормою на просторі* $K(\Omega)$ *назвемо функціонал* $||\cdot||$*, який кожній випадковій величині* $\xi \in K(\Omega)$ *ставить у відповідність невід'ємне число* $||\xi||$ *так, що виконуються умови:*

1) $||\xi|| = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$ *з імовірністю одиниця;*

2) $||\xi + \eta|| \leqslant ||\xi|| + ||\eta||$*;*

3) при $|\lambda| \leqslant 1$ $||\lambda\xi|| \leqslant ||\xi||$.

Зауваження 1.1. Коли замість умови 3 маємо рівність $||\lambda\xi|| = |\lambda|||\xi||$, то $||\cdot||$ – звичайна норма на $K(\Omega)$. Рівність $\rho(\xi, \eta) = ||\xi - \eta||$ задає на $K(\Omega)$ метрику, тому $K(\Omega)$ можна розглядати як метричний простір.

Означення 1.6. *Нехай* $j = \{j(\lambda), \lambda \in [0, 1]\}$ *– монотонно неспадна функція така, що* $j(\lambda) \geqslant 0$, $j(\lambda) \to 0$, *якщо* $\lambda \to 0$. *Якщо для квазінорми* $||\cdot||$ *на* $K(\Omega)$ *виконується нерівність* $||\lambda\xi|| \leqslant j(|\lambda|)||\xi||$, *коли* $|\lambda| \leqslant 1$, *то називатимемо цю квазінорму підпорядкованою функції* j.

Зауваження 1.2. У випадку, коли $||\cdot||$ – норма, вона підпорядкована функції $j(|\lambda|) = |\lambda|$.

Означення 1.7. *Повний відносно квазінорми* $||\cdot||$ *простір* $K(\Omega)$ *називатимемо квазібанаховим простором.*

Означення 1.8. *Квазібанаховий простір* $K(\Omega)$ *називатимемо квазі-*K_σ*-простором, якщо* $K(\Omega)$ *має такі властивості:*

a_1*) якщо* $\xi, \eta \in K(\Omega)$, *то* $\max(\xi, \eta) \in K(\Omega)$ *та* $\min(\xi, \eta) \in K(\Omega)$, *отже,* $|\xi| \in K(\Omega)$*;*

a_2*) якщо* $\xi, \eta \in K(\Omega)$ *та* $|\xi| \leqslant |\eta|$ *майже скрізь, то* $||\xi|| < ||\eta||$*;*

a_3*) якщо для послідовності* $(\xi_n, n \geqslant 1)$ *випадкових величин з* $K(\Omega)$ *існує випадкова величина* $\eta \in K(\Omega)$ *така, що* $\sup\limits_{n\geqslant 1} |\xi_n| \leqslant \eta$, *то й* $\sup\limits_{n\geqslant 1} |\xi_n| \in K(\Omega)$.

Якщо при цьому $K(\Omega)$ *– банаховий простір, то його називатимемо* K_σ*-простором.*

Зауваження 1.3. Якщо $K(\Omega)$ – квазі-K_σ-простір, тоді третя умова квазінорми виконується автоматично. Дійсно, якщо $|\lambda| \leqslant 1$, тоді $|\lambda\xi| \leqslant |\xi|$ і за властивістю a_2) $||\lambda\xi|| \leqslant ||\xi||$.

Це зауваження істотне у випадку, коли квазінорма $||\cdot||$ породжується деякою метрикою.

Зауваження 1.4. Функціональні K_σ-простори розглядались, наприклад, в книзі [48], K_σ-простори випадкових величин в роботі [1], а квазі-K_σ-простори в роботі [2].

Означення 1.9. *Неспадна числова послідовність* $(\varkappa(n), n \geqslant 1)$ *називається мажоруючою характеристикою простору квазі-*K_σ*-простору* $K(\Omega)$*, якщо для будь-яких випадкових величин* $\xi_i \in K(\Omega),\ i = 1, 2, \ldots, n$ *виконується нерівність:*

$$\left\| \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i| \right\| \leqslant \varkappa(n) \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|\xi_i\| .$$

Поняття мажоруючої характеристики для просторів Орліча вперше введено в роботі [53], для K_σ-просторів – в [1], а для квазі-K_σ-просторів – в [2].

Для квазі-K_σ-просторів має місце така лема.

Лема 1.1. *Нехай* $\xi_n, n = 1, 2, ...$ *– така послідовність випадкових величин, що* $\xi_n \in K(\Omega)$*, де* $K(\Omega)$ *– квазі-*K_σ*-простір. Якщо існує така випадкова величина* $\xi_n \in K(\Omega)$*, що* $||\xi_n - \xi|| \to 0$*, якщо* $n \to \infty$*, то* $\xi_n \to \xi$ *за ймовірністю.*

Для K_σ-просторів ця лема доведена в роботі [1]. Для квазі-K_σ- просторів доведення аналогічнне.

1.2. Простори Орліча випадкових величин

Означення 1.10. *[16] Неперервна парна опукла функція* $U = \{U(x)\ ,\ x \in \mathbb{R}\}$ *називається* C*-функцією, якщо* $U(x)$ *монотонно зростає при* $x > 0$ *і* $U(0) = 0$.

Приклад 1.1. *Наступні функції є прикладами* C*-функцій Орліча:*

1) $U(x) = A|x|^\alpha,\ x \in \mathbb{R},\ A > 0, \alpha \geqslant 1$;

2) $U(x) = C(\exp\{B|x|^\beta\} - 1),\ x \in \mathbb{R},\ C > 0, B > 0, \beta \geq 1$;

3) $U(x) = C(\exp\{\varphi(x)\} - 1),\ x \in \mathbb{R}, C > 0$ *та* $\varphi(x)$*,* $x \in \mathbb{R}$*, – довільна* C*-функція;*

4) $U(x) = \begin{cases} \left(\frac{e\alpha}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha}} x^2, & \textit{при} \quad |x| \leq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}; \\ \exp\{|x|^\alpha\}, & \textit{при} \quad |x| > \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}; \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1$;

5) $U(x) = D|x|^\alpha \ln(|x| + 1),\ x \in \mathbb{R},\ D > 0, \alpha \geqslant 1.$

Означення 1.11. *[16] Нехай* U *– довільна* C*-функція. Простором Орліча випадкових величин* $L_U(\Omega)$ *називається сім'я випадкових величин,* *що для кожної $\xi \in L_U(\Omega)$ існує така константа $r_\xi > 0$, що*

$$EU\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) < \infty.$$

Простір Орліча – це простір Банаха з нормою

$$\|\xi\|_U = \inf\left\{r > 0 : EU\left(\frac{\xi}{r}\right) \leqslant 1\right\},$$

яка називається нормою Люксембурга.

Лема 1.2. *[16] Нехай $\xi \in L_U(\Omega)$ і $\|\xi\|_U > 0$. Тоді для всіх $x > 0$ справедлива нерівність*

$$P\{|\xi| \geqslant x\} \leqslant \frac{1}{U(x/\|\xi\|_U)}. \tag{1.1}$$

1.3. Простори $M(\Omega)$ випадкових величин

Нехай $U(x), V(x), W(x)$ – C-функції такі, що при кожному $D > 0$ функція $U(W(x)/D)$ є C-функцією, а функція $W(x/D)/(1 + V(x))$ монотонно не спадає при $x > 0$. Ці умова виконуються, наприклад, коли $U(x) = |x|^p$, $W(x) = |x|^q$, $V(x) = |x|^s$, $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$, $s \geqslant 1$, $q \geqslant s$, або коли $U(x) = \exp\{|x|^\alpha\} - 1$, $\alpha \geqslant 1$, $W(x) = |x|^q$, $q \geqslant 1$, $V(x) = |x|^s$, $s \geqslant 1$, $q \geqslant s$.

Означення 1.12. *Простором $M(\Omega)$ називатимемо простір випадкових величин ξ таких, що для кожної з них існує константа C_ξ така, що*

$$EU(W(\xi/C_\xi)/(1 + V(\xi))) < \infty.$$

Простори $M(\Omega)$ були введені в частинному випадку у роботі [2].

Теорема 1.1. *Простір $M(\Omega)$ є квазібанаховим K_σ-простором відносно квазінорми*

$$||\xi||_M = \inf\{r > 0 : EU(W(\xi/r)/(1 + V(\xi))) < 1\}, \tag{1.2}$$

мажоруючою характеристикою цього простору є будь-яка з функцій $(x_0 > 0)$

$$\mu(n) = (1 + U(W(x_0)))S^W_{x_0}(S^U_{W(x_0)}(n)),$$

де $S^g_{n_0}(n)$ для будь-якого $z_0 > 0$ та будь-якої C-функції визначається так:

$$S^g_{z_0}(n) = \sup_{x \geqslant z_0} \frac{1}{x} g^{(-1)}(ng(x)).$$

Зауваження 1.5. В частинних випадках теорему 1 було доведено в роботі [2].

Доведення. Доведемо спочатку, що $||\xi||_M = ||\xi||$ – квазінорма. Умови 1 та 3 очевидні, як і умова 2, коли $||\xi|| = 0$ та $||\eta|| \neq 0$. Якщо $||\xi|| \neq 0$, $||\eta|| \neq 0$, то умова 2 випливає з співвідношень

$$EU\left(\frac{1}{1+V(\xi+\eta)}W\left(\frac{\xi+\eta}{||\xi||+||\eta||}\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant EU\left(\frac{1}{1+V(|\xi|+|\eta|)}W\left(\frac{||\xi||}{||\xi||+||\eta||}\frac{|\xi|}{||\xi||}+\frac{|\eta|}{||\eta||}\frac{||\eta||}{||\xi||+||\eta||}\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{||\xi||}{||\xi||+||\eta||}EU\left(\frac{1}{1+V(|\xi|)}W\left(\frac{|\xi|}{||\xi||}\right)\right)+$$
$$+\frac{||\eta||}{||\xi||+||\eta||}EU\left(\frac{1}{1+V(|\eta|)}W\left(\frac{|\eta|}{||\eta||}\right)\right) \leqslant 1.$$

Доведення повноти простору нічим не відрізняється від випадку просторів Орліча. Те, що $M(\Omega)$ є K_σ-простором, очевидно.

Доведемо рівність (1.2). Нехай ξ_i, $i = 1, ..., n$ – випадкові величини такі, що $\xi_i \in M(\Omega)$. Позначимо $\theta = \max\limits_{i=1,...,n} |\xi_i|$, $a = \max\limits_{i=1,...,n} ||\xi_i||$, $\chi(A)$ – індикатор множини A. Для будь-якого $r > 0$, $x_0 > 0$ мають місце співвідношення

$$EU\left(W(\theta r^{-1})\frac{1}{1+V(\theta)}\right) \leqslant EU\left(W(\theta r^{-1})\frac{1}{1+V(\theta)}\right)\chi(|\theta|r^{-1} \leqslant x_0)+$$

$$+EU\left(W(\theta r^{-1})\frac{1}{1+V(\theta)}\right)\chi(|\theta|r^{-1} > x_0) \leqslant EU\left(W(x_0)\frac{1}{1+V(\theta)}\right)+$$
$$+\max_{1\leqslant i\leqslant n} nE\chi(|\xi_i|r^{-1} > x_0)U\left(W(|\xi_i|r^{-1})\frac{1}{1+V(|\xi_i|)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant U(W(x_0)) + \max_{1\leqslant i\leqslant n} E\chi(|\xi_i|r^{-1} > x_0)U\left(S^U_{W(x_0)}(n)\frac{W(|\xi_i|r^{-1})}{1+V(|\xi_i|)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant U(W(x_0)) + \max_{1\leqslant i\leqslant n} E\chi(|\xi_i|r^{-1} > x_0)\times$$
$$\times U\left(W\left(|\xi_i|r^{-1}S^W_{x_0}\left(S^U_{W(x_0)}(n)\right)\right)\frac{1}{1+V(|\xi_i|)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant U(W(x_0)) + \max_{1\leqslant i\leqslant n} EU\left(W\left(|\xi_i|r^{-1}S^W_{x_0}\left(S^U_{W(x_0)}(n)\right)\right)\frac{1}{1+V(|\xi_i|)}\right).$$

Якщо покласти $\theta = aS^W_{x_0}\left(S^U_{W(x_0)}(n)\right)$, то отримаємо

$$EU\left(W(\theta r^{-1})\frac{1}{1+V(\theta)}\right) \leqslant U(W(x_0))+1.$$

Тобто, оскільки функція $U(W(x)D^{-1})$ є C-функцією, то

$$EU\left(W\left(\theta r^{-1}\left(U(W(x_0)+1)^{-1}\right)\right)\frac{1}{1+V(\theta)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{U(W(x_0))+1} EU\left(W(\theta r^{-1})\frac{1}{1+V(\theta)}\right) \leqslant 1.$$

Отже, $||\theta|| \leqslant a S^W_{x_0}\left(S^U_{W(x_0)}(n)\right)(1+U(W(x_0)))$. $\diamondsuit$

Лема 1.3. *Нехай випадкова величина ξ належить простору $M(\Omega)$. Тоді для будь-якого $\epsilon > 0$ має місце нерівність*

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leqslant \left(U\left(W\left(\frac{\varepsilon}{||\xi||}\right)\frac{1}{1+V(\varepsilon)}\right)\right)^{-1}.$$

Доведення. З нерівності Чебишева та властивостей функцій $U(x)$, $V(x)$, $W(x)$ випливають нерівності

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leqslant EU\left(W\left(\frac{\varepsilon}{||\xi||}\right)\frac{1}{1+V(\xi)}\right)\left(U\left(W\left(\frac{\varepsilon}{||\xi||}\right)\frac{1}{1+V(\varepsilon)}\right)\right)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \left(U\left(W\left(\frac{\varepsilon}{||\xi||}\right)\frac{1}{1+V(\varepsilon)}\right)\right)^{-1}.$$

$\diamondsuit$

1.4. Випадкові процеси з квазібанахових K_σ-просторів

Нехай T – параметрична множина, на якій задана псевдометрика ρ. Нагадаємо, що псевдометрика відрізняється від метрики лише тим, що для псевдометрики з співвідношення $\rho(t,s) = 0$ не обов'язково випливає, що $t = s$.

Ми розглядаємо простори з псевдометрикою, а не лише метричні простори, тому що випадкові процеси з банахових або квазібанахових просторів породжують на параметричних множинах псевдометрики, а не метрики. Зауважимо також, що користуватимемося лише тими властивостями псевдометрики, які не відрізняються від властивостей метрик.

Означення 1.13. *Випадковий процес $X = (X(t), t \in T)$ належить квазібанаховому K_σ-простору $K(\Omega)$, $X \in K(\Omega)$, якщо при кожному*

$t \in T$ *випадкова величина* $X(t)$ *належить* $K(\Omega)$.

Означення 1.14. *Псевдометрика* $\rho(t,s)$ *породжується випадковим процесом* X, *якщо* $\rho(t,s) = ||\xi(t) - \xi(s)||_K$.

Зробимо деякі припущення. Вважатимемо, що простір (T, ρ) – сепарабельний. Якщо B – компакт з (T, ρ), то позначимо через $N_B(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, число елементів мінімального покриття множини B відкритими кулями радіуса ε.

Розглянемо випадковий процес $X = (X(t), t \in T) \in K(\Omega)$, де $K(\Omega)$ – квазі-K_σ-простір з квазінормою $||\cdot||_K$, підпорядкованою функції $j = \{j(\lambda), |\lambda| < 1\}$ та мажоруючою характеристтикою $\varkappa(n)$. Нехай існує така неперервна монотонно зростаюча функція $\sigma = \{\sigma(h), h \geqslant 0\}$, $\sigma(0) = 0$, що $\sup\limits_{\rho(t,s)\leqslant h} ||x(t) - x(s)||_K \leqslant \sigma(h)$. Зауважимо, що у випадку, коли $\rho(t,s) = ||x(t) - x(s)||_K$, $\sigma(h) = h$. Для будь-якої обмеженої функції $f(t)$ на множині $B \subset T$ позначимо $||f(t)||_{C(B)} = \sup\limits_{t\in B} |f(t)|$.

Теорема 1.2. *Нехай* $c(t)$ *– деяка функція на* (T, ρ) *така, що* $|c(t)| < 1$, *а випадковий процес* $X = (X(t), t \in T)$ *– сепарабельний,* $X \in K(\Omega)$, $T = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$, *де* B_k *– компакти. Тоді має місце рівність*

$$\left\| ||c(t)X(t)||_{C(T)} \right\|_K \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} j(\gamma_k)(\delta_k + \sum_{l=0}^{\infty} \mu\left(N_{B_k}(\varepsilon_{k,l})\right) \sigma(\varepsilon_{k,l})), \qquad (1.3)$$

де $\varepsilon_{k,l}$, $l = 1, 2, ..., \infty$ *– будь-яка монотонно спадна послідовність,* $\varepsilon_{k,l} \to 0$, $l \to \infty$, *де* $\varepsilon_{k,0}$ *– таке найменше число, що для всіх* $t \in B_k$ *існує* $t_0 \in B_k$, *що* $\rho(t, t_0) \leqslant \varepsilon_{k,0}$, $\varepsilon_{k,0} \leqslant \sup\limits_{l,s\in B_k} \rho(t,s)$, $\delta_k = \sup\limits_{t\in B_k} ||X(t)||_K = \left\| ||X(t)||_K \right\|_{C(B_k)}$, $\gamma_k = ||c(t)||_{C(B_k)}$.

Доведення. Якщо ряди в правій частині (1.3) розбігаються, то неперервність тривіальна. Отже, будемо вважати, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} j(\gamma_k) \left(\delta_k + \sum_{l=0}^{\infty} \mu(N_{B_k}(\varepsilon_{k,l+1}))\sigma(\varepsilon_{k,l}) \right) < \infty.$$

Справедлива нерівність

$$\|c(t)X(t)\|_{C(T)} \leqslant \sup_{k=1,\ldots,\infty} \|c(t)X(t)\|_{C(B_k)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|c(t)X(t)\|_{C(B_k)} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \|X(t)\|_{C(B_k)} .$$

З цієї нерівності випливає

$$\left\| \|c(t)X(t)\|_{C(T)} \right\|_K \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} j(\gamma_k) \left\| \|X(t)\|_{C(B_k)} \right\|_K . \tag{1.4}$$

Оцінимо $\left\| \|X(t)\|_{C(B_k)} \right\|_K$. Розглянемо мінімальне покриття компакта B_k кулями радіуса $\varepsilon_{k,l}$.

Нехай $V_{\varepsilon_{k,l}}$ – множина центрів куль цього покриття. Число точок в $V_{\varepsilon_{k,l}}$ дорівнює $N_{B_k}(\varepsilon_{k,l})$. Виконується нерівність

$$||X(t)||_{C(B_k)} \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} \sup_{t \in V_{\varepsilon_{k,l+1}}} |X(t) - X(\alpha_1(t))| + |X(t_k)|, \tag{1.5}$$

де t_k – фіксована точка з B_k, $\alpha_1(t)$ – деяка фіксована точка з $V_{\varepsilon_{k,l}}$ така, що $\rho(t, \alpha_1(t)) < \varepsilon_{k,l}$. Нерівність (1.5) можна отримати точно так, як і подібну нерівність при доведенні теореми 1 з роботи [1], або з [53]. З означення 1.9 випливає співвідношення

$$\left\| \sup_{t \in V_{\varepsilon_{k,l+1}}} |X(t) - X(\alpha_1(t))| \right\|_K \leqslant$$

$$\leqslant \mu(N_{B_k}(\varepsilon_{k,l+1})) \sup_{t \in V_{\varepsilon_{k,l+1}}} \|X(t) - X(\alpha_1(t))\|_K \leqslant \mu(N_{B_k}(\varepsilon_{k,l+1}))\sigma(\varepsilon_{k,l}).$$

З цього співвідношення та нерівності (1.5) отримаємо

$$\left\| \|X(t)\|_{C(B_k)} \right\|_K \leqslant \|X(t_k)\|_K + \sum_{l=0}^{\infty} \mu(N_{B_k}(\varepsilon_{k,l+1}))\sigma(\varepsilon_{k,l}).$$

З нерівності (1.4) та останньої нерівності випливає твердження теореми, якщо врахувати, що $\|X(t_k)\| \leqslant \delta_k$. $\diamondsuit$

Наслідок 1.1. *Нехай виконуються умови теореми 1.2 та збігається ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} j(\gamma_k) \left(\delta_k + \sum\limits_{l=0}^{\infty} \mu\left(N_{B_k}(\varepsilon_{k,l+1})\right) \sigma(\varepsilon_{k,l}) \right) = A < \infty$, *тоді з імовірністю одиниця* $\|c(t)X(t)\|_{C(T)} \in K(\Omega)$ *та* $\left\| \|c(t)X(t)\|_{C(T)} \right\|_K \leqslant A$.

Наслідок 1.2. *Нехай виконується умова теореми 1.2, крім цього, для* *будь-якого* $0 < q < 1$ *виконується умова*

$$\sum_{k=1}^{\infty} j(\gamma_k)\left(\delta_k \frac{1}{q(1-q)} \int\limits_0^{q\sigma(\varepsilon_{k,0})} \mu\left(N_{B_k}(\sigma^{(-1)}(u))\right) du\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} j(\gamma_k)\left(\delta_k \frac{1}{q(1-q)} \int\limits_0^{\gamma_{k,0}} \mu(N_{B_k}(t)) d\sigma(t)\right) = W_q < \infty,$$

де $\gamma_{k,0} = \sigma^{(-1)}(q(\sigma(\varepsilon_{k,0}))) \leqslant \varepsilon_{k,0}$. *Тоді з імовірністю одиниця* $\|c(t)X(t)\|_{C(T)} \in k(\Omega)$ *та* $\left\|\|c(t)X(t)\|_{C(T)}\right\|_K \leqslant W_q$.

Доведення. Позначимо $t_{k,l} = \sigma(\varepsilon_{k,l})$, тоді $\varepsilon_{k,l} = \sigma^{(-1)}(t_{k,l})$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \mu(N_{B_k}(\varepsilon_{k,l+1}))\sigma(\varepsilon_{k,l}) = \sum_{l=0}^{\infty} \mu\left(N_{B_k}(\sigma^{(-1)}(t_{k,l+1}))\right) t_{k,l}.$$

Виберемо послідовність $\varepsilon_{k,l}$ так, щоб $t_{k,l} = t_{k,0}q^l$, $0 < q < 1$, тобто $\varepsilon_{k,l} = \sigma^{(-1)}(t_{k,0}q^l)$. У цьому випадку

$$t_{k,l}\mu\left(N_{B_k}(\sigma^{(-1)}(t_{k,l+1}))\right) \leqslant \frac{t_{k,l}}{t_{k,l+1} - t_{k,l+2}} \int\limits_{t_{k,l+2}}^{t_{k,l+1}} \mu\left(N_{B_k}(\sigma^{(-1)}(u))\right) du =$$

$$= \frac{1}{q(1-q)} \int\limits_{t_{k,l+2}}^{t_{k,l+1}} \mu\left(N_{B_k}(\sigma^{(-1)}(u))\right) du.$$

Отже,

$$\sum_{l=0}^{\infty} \mu\left(N_{B_k}(\varepsilon_{k,l+1})\right)\sigma(\varepsilon_{k,l}) \leqslant \frac{1}{q(1-q)} \int\limits_0^{t_{k,o}q} \mu\left(N_{B_k}(\sigma^{(-1)}(u))\right) du =$$

$$= \frac{1}{q(1-q)} \int\limits_0^{\sigma^{(-1)}(q\sigma(\varepsilon_{k,0}))} \mu\left(N_{B_k}(t)\right) d\sigma(t).$$

З останніх нерівностей отримуємо, що для такої послідовності $A \leqslant W_q$. Отже, твердження наслідку 1.2 випливає з наслідку 1.1. $\diamondsuit$

Наслідок 1.3. *Нехай* (T,ρ) *– компакт. Якщо збігається інтеграл*

$$\int\limits_0^{q\sigma(\varepsilon_0)} \mu(N_T(\sigma^{(-1)}(u)))du < \infty,$$

де $\varepsilon_0 = \sup\limits_{t,s\in T} \rho(t,s)$, *тоді* $\|X(t)\|_{C(T)} \in K(\Omega)$ *та* $\left\| \|X(t)\|_{C(T)} \right\|_K \leqslant V_q$, $0 < q < 1$, *де*

$$V_q = \delta + \frac{1}{q(1-q)} \int\limits_0^{q\sigma(\varepsilon_0)} \mu(N_T(\sigma^{(-1)}(u)))du = \delta + \frac{1}{q(1-q)} \int\limits_0^{\gamma_0} \mu(N_T(t))d\sigma(t),$$

$$\delta = \| \|X(t)\|_K \|_{C(T)}, \gamma_0 = \sigma^{(-1)}(q\sigma(\varepsilon_0)).$$

Наслідок 1.3 випливає з наслідку 1.2, якщо покласти $B_1 = T, B_k = 0, k > 1$.

Зауваження 1.6. Якщо покласти $\rho(t,s) = \|X(t) - X(s)\|_K$, тоді з наслідку 1.3 випливає твердження теореми 1 з роботи [1]. У цьому випадку

$$V_q = \delta + \frac{1}{q(1-q)} \int\limits_0^{\gamma_0} \mu(N_T(t))d\sigma(t).$$

Зауваження 1.7. У випадку, коли $K(\Omega)$ – простір Орліча $L_U(\Omega)$, з нерівності (1.1) випливає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$P\left\{ \|c(t)X(t)\|_{C(T)} > \varepsilon \right\} \leqslant (U(\varepsilon/z))^{-1},$$

де z дорівнює A, коли виконуються умови наслідку 1.1, або V_q, якщо виконуються умови наслідку 1.3.

Теорема 1.3. *Нехай випадковий процес* $X = (X(t), t \in T)$, *де* (T,ρ) *– компакт, такий, що* X *належить квазі-*K_σ*-простору* $K(\Omega)$. *Нехай виконується умова*

$$\sum_{l=0}^{\infty} \mu(N_T(\varepsilon_{l+1}))\sigma(\varepsilon_l) < \infty, \tag{1.6}$$

де ε_l *– будь-яка монотонно спадна послідовність така, що* $\varepsilon_0 = \sup\limits_{t,s\in T} \rho(t,s)$ *та* $\varepsilon_l \to 0$ *коли* $l \to \infty$. *Якщо* X *– сеперабельний процес, то він вибірково неперервний з імовірністю одиниця.*

Доведення. Нехай V_{ε_l} – множина центрів мінімального покриття компакта T кулями радіуса ε_l. Якщо без змін повторити доведення теореми 1 з роботи [1], то можна довести, що для будь-якого $k > 0$ існує таке додатне число $d > 0$, що виконується нерівність

$$\sup_{\rho(t,s)<d} |X(t) - X(s)| \leqslant 4 \sum_{l=k}^{\infty} \sup_{t \in V_{\varepsilon_{l+1}}} |X(t) - X(\alpha_l(t))|,$$

де $\alpha_l(t)$ – така фіксована точка з V_{ε_l}, що $\rho(t, \alpha_l(t)) < \varepsilon_l$.

З останньої нерівності випливають співвідношення

$$\left\| \sup_{\rho(t,s)<d} |X(t) - X(s)| \right\|_K \leqslant 4 \sum_{l=k}^{\infty} \left\| \sup_{t \in V_{\varepsilon_{l+1}}} |X(t) - X(\alpha_l(t))| \right\|_K \leqslant$$

$$\leqslant 4 \sum_{l=k}^{\infty} \mu(N_T(\varepsilon_{l+1}))\sigma(\varepsilon_l). \quad (1.7)$$

З умови (1.6) маємо, що $\sum\limits_{l=k}^{\infty} \mu(N_T(\varepsilon_{l+1}))\sigma(\varepsilon_l) \to 0$, коли $k \to \infty$. Отже, з (1.7) випливає, що $\left\| \sup\limits_{\rho(t,s)<\varepsilon} |X(t) - X(s)| \right\|_K \to 0$, коли $\varepsilon \to 0$. З леми 1.1 випливає, що $\sup\limits_{\rho(t,s)<\varepsilon} |X(t) - X(s)| \to 0$, якщо $\varepsilon \to 0$ за ймовірністю. Отже, існує така послідовність ε_n, що $\sup\limits_{\rho(t,s)<\varepsilon_n} |X(t) - X(s)| \to 0$ з імовірністю одиниця. Таким чином, процес $X(t)$ вибірково неперервний з імовірністю одиниця. $\diamondsuit$

Наслідок 1.4. *Твердження теореми 1.3 виконується, якщо замість умови* (1.6) *вимагати, щоб збігався інтеграл*

$$\int_0^{\delta} \mu(N_T(t)) d\sigma(t) < \infty, \quad (1.8)$$

де $\delta > 0$ – будь-яка константа.

Твердження наслідку 1.4 доводиться так, як і твердження наслідку 1.2.

Зауваження 1.8. У випадку, коли $\rho(t,s) = \|X(t) - X(s)\|_K$, тобто якщо можна покласти $\sigma(h) = h$, умова (1.8) має вигляд

$$\int_0^{\delta} \mu(N_T(t)) d(t) < \infty.$$

Цю умову отримано в роботі [2], а в частинних випадках – в [1, 53].

1.5. Випадкові процеси з R^1

Розглянемо застосування попередніх результатів у випадку, коли $T = R^1$ із звичайною метрикою. У випадку, коли $T = R^n$, можна отримати такі ж результати.

Теорема 1.4. *Нехай $X = (X(t), t \in R^1)$ – сепарабельний випадковий процес, $X \in K(\Omega)$, де $K(\Omega)$ – квазі-K_σ-простір з квазінормою $||\cdot||_K$, підпорядкованою функції $j = \{j(\lambda), |\lambda| < 1\}$, та з мажоруючою характеристикою $\mu(n)$. Нехай існує така неперервна монотонна зростаюча функція $\sigma = \{\sigma(h), h > 0\}$, де $\sigma(h) \to 0$, коли $h \to 0$, що*

$$\sup_{|t-s|\leqslant h} \|X(t) - X(s)\| \leqslant \sigma(h).$$

Нехай для будь-якого $v > 0$ існує інтеграл

$$\int_0^v \mu\left(\left[\frac{v}{t}\right]\right) d\sigma(t) < \infty.$$

Тоді на будь-якому замкненому інтервалі I процес $X(t)$ вибірково-неперервний з імовірністю одиниця. Якщо, крім цього, для деякої неперервної функції $c(t), |c(t)| < 1$ збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} j(\gamma_k) \left(\delta_k + \frac{1}{q(1-q)} \int_0^{\alpha_{k,0}} \mu\left(\left[\frac{z_k}{t}\right]\right) d\sigma(t)\right) = \Phi_q < \infty,$$

де $0 < q < 1$, z_k – довжина замкнених інтервалів B_k таких, що $R^1 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k, \gamma_k = \sup_{t\in B_k} |c(t)|, \delta_k = \sup_{t\in B_k} \|X(t)\|_K , \alpha_{k,0} = \sigma^{(-1)}(q(\sigma(z_k/2))) \leqslant z_k/2$, то з імовірністю одиниця

$$\|c(t)X(t)\|^1_{C(R)} \leqslant \eta,$$

де η – випадкова величина з простору $K(\Omega)$ така, що $\|\eta\|_K \leqslant \Phi_q$.

Теорема випливає з наслідку 1.2 та теореми 1.3, якщо зауважити, що в цьому випадку

$$N_{B_k}(t) \leqslant \left[\frac{z_k}{2t}\right] + 1 \leqslant \left[\frac{z_k}{t}\right].$$

Наслідок 1.5. *Нехай* $X = (X(t), t \in R^1)$ *– сепарабельний випадковий процес,* $X \in K(\Omega)$, $\sup\limits_{t \in R^1} \|X(t)\|_K = \delta < \infty$. *Якщо збігається інтеграл* $(\varepsilon > 0)$

$$\int\limits_0^{\varepsilon} \mu\left(\left[\frac{I}{t}\right]\right) d\sigma(t) < \infty,$$

тоді на будь-якому інтервалі I *з імовірністю одиниця процес* X *вибірково-неперервний. Для будь-якої парної неперервної функції* $c(t), 0 < c(t) \leqslant 1$, *яка монотонно прямує до нуля при* $n \to \infty$ *і для якої* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} j(c(k)) < \infty$ *з імовірністю одиниця виконується нерівність*

$$\|c(t)X(t)\|^1_{C(R)} \leqslant \theta,$$

де $\theta \in K(\Omega)$,

$$\|\theta\| \leqslant 2\left[\delta + \frac{1}{q(1-q)} \int\limits_0^{\alpha_0} \mu\left(\left[\frac{I}{t}\right]\right) d\sigma(t)\right] \sum_{k=1}^{\infty} j(c(k+1)),$$

$\alpha_0 = \sigma^{(-1)}(q(\sigma(1/2)))$.

Щоб отримати твердження наслідку, покладемо $B_k = [k, k+1], k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. У цьому випадку $z_k = 1$, $\delta_k \leqslant \delta$, $\alpha_{k,0} = \sigma^{(-1)}(q(\sigma(1/2)))$. Отже,

$$\Phi_q = 2\left[\delta + \frac{1}{q(1-q)} \int\limits_0^{\alpha_0} \mu\left(\left[\frac{I}{t}\right]\right) d\sigma(t)\right] \sum_{k=0}^{\infty} j(c(k+1)).$$

Зауваження 1.9. У випадку, коли $K(\Omega)$ – банахів K_σ-простір, умови наслідку 1.5 задовольняє, наприклад, функція $c(t) = (1 + |t|_\alpha)^{-1}, \alpha > 1$.

Зрозуміло, що у частинних випадках можна отримати більш точний порядок росту.

Висновки до першого розділу

У першому розділі розглянуто випадкові процеси з квазібанахових K_σ-просторів випадкових величин. Досліджено умови вибіркової неперервності з імовірністю одиниця та умови того, що супремуми процесів належать тому ж простору, що й самі процеси. Отримано оцінки розподілів цих процесів. Вивчено поведінку випадкових процесів $X(t)$ на R^1 при прямуванні t до нескінченості.

Розділ 2

Простори випадкових величин $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$

У розділі 2 вивчаються основні властивості просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Наводяться приклади випадкових величин із цих просторів. Знаходяться нерівності великих відхилень та мажоруюча характеристика для випадкових величин із простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Розглядаються простори $\mathbf{F}_{S_k,\psi,r}(\Omega)$ і вивчаються умови, при яких ці простори еквівалентні просторам $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Для просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ досліджуються умови, при яких виконується умова $\mathbf{H}$.

2.1. $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ – простори

Означення 2.1. *Нехай $\psi(u) > 0$, $u \geqslant 1$ – монотонно зростаюча неперервна функція, така що $\psi(u) \to \infty$ при $u \to \infty$. Випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, якщо виконується умова:*

$$\sup_{u \geqslant 1} \frac{\left(E\left|\xi\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} < \infty.$$

Теорема 2.1. *[37] Простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ є простором Банаха з нормою*

$$\left\|\xi\right\|_\psi = \sup_{u \geqslant 1} \frac{\left(E\left|\xi\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)}. \tag{2.1}$$

Доведення. Доведемо спочатку, що $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ – лінійний нормований простір. Очевидно, що $\left\|\xi\right\|_\psi = 0$, тоді і тільки тоді, коли $\xi = 0$ з імовірністю одиниця. Справедлива рівність

$$\left\|\alpha\xi\right\|_\psi = \sup_{u \geqslant 1} \frac{\left(E\left|\alpha\xi\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} = \sup_{u \geqslant 1} \frac{\left|\alpha\right| \left(E\left|\xi\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} = \left|\alpha\right| \left\|\xi\right\|_\psi .$$

Очевидна і нерівність трикутника. Дійсно,

$$\left\|\xi_1 + \xi_2\right\|_\psi = \sup_{u \geqslant 1} \frac{\left(E\left|\xi_1 + \xi_2\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} \leqslant \sup_{u \geqslant 1} \frac{\left(E\left|\xi_1\right|^u\right)^{1/u} + \left(E\left|\xi_2\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{u \geqslant 1} \frac{\left(E\left|\xi_1\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} + \sup_{u \geqslant 1} \frac{\left(E\left|\xi_2\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} = \left\|\xi_1\right\|_\psi + \left\|\xi_2\right\|_\psi .$$

Покажемо тепер, що $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ – повний простір, тобто, якщо $\xi_n \in \mathbf{F}_\psi(\Omega)$

і $\|\xi_n - \xi_l\|_\psi \to 0$ при $n, l \to \infty$, то існує випадкова величина ξ, така що $\xi \in \mathbf{F}_\psi(\Omega)$ і $\|\xi_n - \xi_l\|_\psi \to 0$. З означення норми випливає, що для будь-якого $u \geqslant 1$

$$\left(E\left|\xi_n - \xi_l\right|^u\right)^{1/u} \leqslant \psi(u)\left\|\xi_n - \xi_l\right\|_\psi. \qquad (2.2)$$

Оскільки $\|\xi_n - \xi_l\|_\psi \to 0$ при $n, l \to \infty$, то і $\left(E\left|\xi_n - \xi_l\right|^u\right)^{1/u} \to 0$ при $n, l \to \infty$. Простір $L_u(\Omega)$, $u \geqslant 1$ – повний, тому що існує випадкова величина $\xi \in L_u(\Omega)$, що $\xi_n \to \xi$ при $n \to \infty$ в нормі цього простору. Легко бачити, що існує $\xi \in L_u(\Omega)$ при всіх $u \geqslant 1$, що $\left(E\left|\xi_n - \xi_l\right|^u\right)^{1/u} \to 0$ при $n \to \infty$. Дійсно, коли $\xi_n \to \xi$ в нормі простору $L_u(\Omega)$, то $\xi_n \to \xi$ в нормі простору $L_v(\Omega)$, де $v < u$. Позначимо η_s, $s = 1, 2, ...$ такі випадкові величини, що $\xi_n \to \eta_s$ в нормі просторів $L_u(\Omega)$, де $s - 1 < u \leqslant s$. Тоді існують підпослідовності ξ_{n_s}, що збігаються до η_s з імовірністю одиниця. Нехай A_s множина $P\left(A_s\right) = 1$, на якій ξ_{n_s} збігається до η_s. Тоді на множині $\bigcap\limits_{s=1}^{\infty} A_s$ всі η_s рівні та $P\left\{\bigcap\limits_{s=1}^{\infty} A_s\right\} = 1$.

Нехай тепер ξ – випадкова величина рівна η_s на $\bigcap\limits_{s=1}^{\infty} A_s$. Зрозуміло, що $P\left\{\eta_s \neq \xi\right\} = 0$. Тому $\xi_n \to \xi$ в $L_u(\Omega)$, тоді ж коли $\xi_n \to \eta_s$ в цьому ж просторі.

Отже, при всіх $u \geqslant 1$ з нерівності (2.2) випливає, що

$$\left(E\left|\xi_n - \xi_l\right|^u\right)^{1/u} \leqslant \psi(u) \sup_{r>n} \left\|\xi_n - \xi_r\right\|_\psi < \infty.$$

Якщо в останній нерівності спрямувати l до нескінченності, тоді отримаємо, що при всіх $n \geqslant 1$ та $u \geqslant 1$

$$\left(E\left|\xi_n - \xi\right|^u\right)^{1/u} \leqslant \psi(u) \sup_{r>n} \left\|\xi_n - \xi_r\right\|_\psi < \infty. \qquad (2.3)$$

Отже, $\sup\limits_{u \geqslant 1} \frac{\left(E|\xi_n - \xi|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} < \infty$. Тобто випадкові величини $\xi_n - \xi$ при $n \geqslant 1$ належать простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Оскільки $\|\xi\|_\psi \leqslant \|\xi - \xi_n\|_\psi + \|\xi_n\|_\psi < \infty$, тоді випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Тепер з нерівності (2.3) виплває, що $\|\xi_n - \xi\|_\psi \leqslant \sup\limits_{r>n} \|\xi_n - \xi_r\|_\psi \to 0$ при $n \to \infty$. Тобто $\xi_n \to \xi$ в нормі простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. $\square$

Наведемо приклади випадкових величин із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Приклад 2.1. *Випадкова величина ξ, для якої з імовірністю одиниця* *виконується умова $|\xi| < C$, де $C > 0$ – деяка константа, належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, що породжений функцією ψ:*

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{u\geqslant 1} \frac{\left(E|\xi|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} \leqslant \sup_{u\geqslant 1} \frac{\left(C^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} = \sup_{u\geqslant 1} \frac{C}{\psi(u)} = \frac{C}{\psi(1)}.$$

Приклад 2.2. *Випадкова величина, що має розподіл Лапласа (щільність розподілу $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$) належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u$, що встановлюється еквівалентністю $\sqrt[k]{E|\xi|^k} = \sqrt[k]{k!} \sim k$ при $k \geqslant 1$.*

Приклад 2.3. *Нормальна випадкова величина $\xi = N(0,1)$ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u^{1/2}$, оскільки $\sqrt[2l]{E|\xi|^{2l}} = \sqrt[2l]{\frac{(2l)!}{2^l l!}} \sim l^{1/2}$ при $l \geqslant 1$.*

Інші приклади наведені в розділах 3 і 7.

Теорема 2.2. *Нехай випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконується нерівність:*

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leqslant \inf_{u\geqslant 1} \frac{\|\xi\|_\psi^u (\psi(u))^u}{\varepsilon^u}. \tag{2.4}$$

Доведення. Із нерівності Чебишева випливає, що при $u > 0$ має місце така нерівність:

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leqslant \frac{E|\xi|^u}{\varepsilon^u} = \frac{E|\xi|^u (\psi(u))^u}{(\psi(u))^u \varepsilon^u} \leqslant \frac{\|\xi\|_\psi^u (\psi(u))^u}{\varepsilon^u}. \qquad \square$$

Теорема 2.3. *Нехай випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ і $\psi(u) = u^\alpha$, де $\alpha > 0$, тоді для будь-якого $\varepsilon \geqslant e^\alpha \|\xi\|_\psi$ виконується нерівність:*

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leqslant \exp\left\{-\frac{\alpha}{e}\left(\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_\psi}\right)^{1/\alpha}\right\}. \tag{2.5}$$

Доведення. Використовуючи теорему 2.2 маємо, що

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leqslant \inf_{u\geqslant 1} \frac{\|\xi\|_\psi^u u^{\alpha u}}{\varepsilon^u}. \tag{2.6}$$

Позначимо, що $\frac{\|\xi\|_\psi}{\varepsilon} = b$, тоді з рівностей

$$\left(\ln\left(b^u u^{\alpha u}\right)\right)' = (u\ln b + \alpha u \ln u)' = \ln b + \alpha \ln u + \alpha = 0;$$

$$\ln u = -\frac{\ln b + \alpha}{\alpha}$$

випливає, що інфінум досягається в точці $u = \frac{1}{e} b^{-1/\alpha}$. Оскільки $u \geqslant 1$, тоді має виконуватись нерівність $\varepsilon \geqslant e^{\alpha} \|\xi\|_{\psi}$. Підставимо дане значення для величини u в нерівність (2.6), отримаємо:

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leqslant b^{\frac{1}{e}b^{-\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{1}{e} b^{-\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha \frac{1}{e} b^{-\frac{1}{\alpha}}} = \exp\left\{-\frac{\alpha}{e}\left(\frac{1}{b}\right)^{1/\alpha}\right\}.$$

Звідси випливає твердження теореми 2.3. $\square$

Теорема 2.4. *Нехай випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$ і $\psi(u) = e^{au^{\beta}}$, де $a > 0$, $\beta > 0$, тоді для будь-якого $\varepsilon \geqslant e^{a(\beta+1)} \|\xi\|_{\psi}$ виконується нерівність:*

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leqslant \exp\left\{-\frac{\beta}{a^{1/\beta}}\left(\frac{\ln \frac{\varepsilon}{\|\xi\|_{\psi}}}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}\right\}. \tag{2.7}$$

Доведення. Із теореми 2.2 отримаємо, що

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leqslant \inf_{u \geqslant 1} \frac{\|\xi\|_{\psi}^{u} e^{au^{\beta+1}}}{\varepsilon^{u}}. \tag{2.8}$$

Позначимо $\frac{\|\xi\|_{\psi}}{\varepsilon} = b$. Із рівностей

$$\left(\ln\left(b^{u} e^{au^{\beta+1}}\right)\right)' = \left(u \ln b + au^{\beta+1}\right)' = \ln b + a(\beta+1)u^{\beta} = 0;$$

випливає, що інфінум досягається в точці $u = \left(-\frac{\ln b}{a(\beta+1)}\right)^{1/\beta}$. Оскільки $u \geqslant 1$, тоді має виконуватись нерівність $\varepsilon \geqslant e^{a(\beta+1)} \|\xi\|_{\psi}$. Підставляючи це значення u в нерівність (2.8), отримаємо

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leqslant b^{\left(-\frac{\ln b}{a(\beta+1)}\right)^{1/\beta}} e^{a\left(-\frac{\ln b}{a(\beta+1)}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}} = \exp\left\{-\frac{\beta}{a^{1/\beta}}\left(\frac{\ln \frac{1}{b}}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}\right\},$$

що й треба було довести. $\square$

Теорема 2.5. *Нехай випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$ і $\psi(u) = (\ln(u+1))^{\lambda}$, де $\lambda > 0$, тоді для будь-якого $\varepsilon \geqslant (e \ln 2)^{\lambda} \|\xi\|_{\psi}$*

виконується нерівність:

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leqslant e^{\lambda} \exp\left\{-\lambda \exp\left\{\left(\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_{\psi}}\right)^{1/\lambda} \frac{1}{e}\right\}\right\}. \tag{2.9}$$

Доведення. Оскільки з теореми 2.2 випливає, що

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leqslant \inf_{u \geqslant 1} \frac{\|\xi\|_{\psi}^{u} (\ln(u+1))^{\lambda u}}{\varepsilon^{u}}, \tag{2.10}$$

тоді покладемо $u+1 = \exp\left\{\left(\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_{\psi}}\right)^{1/\lambda} \frac{1}{z}\right\}$, де $z > 0$. Тоді, підставляючи цей вираз в нерівність (2.10), отримаємо:

$$\left(\frac{\|\xi\|_{\psi} (\ln(u+1))^{\lambda}}{\varepsilon}\right)^{u} = \frac{1}{z^{\lambda u}} = \exp\{-\lambda u \ln z\} =$$

$$= \exp\left\{-\lambda(\ln z)\left(\exp\left\{\left(\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_{\psi}}\right)^{1/\lambda} \frac{1}{z}\right\} - 1\right)\right\} =$$

$$= z^{\lambda} \exp\left\{-\lambda(\ln z) \exp\left\{\left(\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_{\psi}}\right)^{1/\lambda} \frac{1}{z}\right\}\right\}.$$

Покладемо в цій рівності $z = e$, тоді отримаємо твердження теореми:

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leqslant e^{\lambda} \exp\left\{-\lambda \exp\left\{\left(\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_{\psi}}\right)^{1/\lambda} \frac{1}{e}\right\}\right\}.$$

□

Означення 2.2. *Простір* $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$ *будемо називати простором* $\check{\mathbf{F}}_{\psi}(\Omega)$, *якщо для функції* $\psi(u)$ *виконується умова:*

$$\sup_{u \geqslant 1} \frac{\psi(u+v)}{\psi(u)} < \infty, \tag{2.11}$$

де $v > 0$ *– будь-яке число.*

Очевидно, що умова (2.11) виконується для функцій:
1) $\psi(u) = e^{au^{\beta}}$, де $0 < \beta \leqslant 1,\ a > 0$;
2) $\psi(u) = Au^{\alpha}$, де $\alpha > 0,\ A > 0$.

Означення 2.3. *Неспадна числова послідовність* $(\varkappa(n), n \geqslant 1)$ *називається* M*-характеристикою (мажоруючою характеристикою) простору* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$*, якщо для будь-яких випадкових величин* ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ *із цього простору виконується нерівність:*

$$\left\| \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i| \right\|_\psi \leqslant \varkappa(n) \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|\xi_i\|_\psi . \tag{2.12}$$

Аналогічно визначається мажоруюча характеристика у всіх банахових просторах.

Теорема 2.6. *Послідовність*

$$\varkappa(n) = \sup_{u \geqslant 1} \inf_{v > 0} n^{\frac{1}{u+v}} \frac{\psi(u+v)}{\psi(u)} \tag{2.13}$$

є мажоруючою характеристикою простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Доведення. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – випадкові величини з простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, тоді виконується ланцюжок нерівностей:

$$\frac{\left(E\left(\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i|\right)^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} \leqslant \frac{\left(E\left(\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i|\right)^{u+v}\right)^{\frac{1}{u+v}}}{\psi(u)} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} n^{\frac{1}{u+v}} \frac{\left(E|\xi_i|^{u+v}\right)^{\frac{1}{u+v}}}{\psi(u+v)} \cdot \frac{\psi(u+v)}{\psi(u)} \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|\xi_i\|_\psi n^{\frac{1}{u+v}} \frac{\psi(u+v)}{\psi(u)}.$$

З останньої нерівності випливає, що при всіх $u \geqslant 1$

$$\frac{\left(E\left(\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i|\right)^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|\xi_i\|_\psi \inf_{v > 0} n^{\frac{1}{u+v}} \frac{\psi(u+v)}{\psi(u)}.$$

Отже,

$$\left\| \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i| \right\|_\psi = \sup_{u \geqslant 1} \frac{\left(E\left(\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i|\right)^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|\xi_i\|_\psi \sup_{u \geqslant 1} \inf_{v > 0} n^{\frac{1}{u+v}} \frac{\psi(u+v)}{\psi(u)}.$$

Оскільки в цій нерівності v – будь-яке число ($v > 0$), тоді з нерівності

(2.12) випливає твердження теореми. $\square$

Для просторів $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$ формулу для обчислення мажоруючої характеристики $\varkappa(n)$ можна спростити, тобто справедливий наступний наслідок.

Наслідок 2.1. *Послідовність*

$$\varkappa(n) = \inf_{v>0} z(v) n^{\frac{1}{v+1}}, \tag{2.14}$$

де $z(v) = \sup\limits_{u \geqslant 1} \frac{\psi(u+v)}{\psi(u)}$, *є мажоруючою характеристикою простору* $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$.

Доведення. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – випадкові величини з простору $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$, тоді виконується ланцюжок нерівностей:

$$\left\| \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\xi_i| \right\|_\psi = \sup_{u\geqslant 1} \frac{\left(E\left(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i|\right)^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} \leqslant \sup_{u\geqslant 1} \frac{\left(E\left(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i|\right)^{u+v}\right)^{\frac{1}{u+v}}}{\psi(u)} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{u\geqslant 1} \max_{1\leqslant i\leqslant n} n^{\frac{1}{u+v}} \frac{\left(E|\xi|^{u+v}\right)^{\frac{1}{u+v}}}{\psi(u+v)} \cdot \frac{\psi(u+v)}{\psi(u)} \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|\xi_i\|_\psi \sup_{u\geqslant 1} n^{\frac{1}{u+v}} \frac{\psi(u+v)}{\psi(u)} \leqslant$$
$$\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|\xi_i\|_\psi n^{\frac{1}{v+1}} \sup_{u\geqslant 1} \frac{\psi(u+v)}{\psi(u)} \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|\xi_i\|_\psi \inf_{v>0} n^{\frac{1}{v+1}} \sup_{u\geqslant 1} \frac{\psi(u+v)}{\psi(u)}.$$

Оскільки ця нерівність справджується при будь-якому $v > 0$, тоді з нерівності (2.12) випливає твердження наслідку. $\square$

Теорема 2.7. *Послідовність*

$$\varkappa(n) = \frac{1}{e^a} \exp\left\{ S(a,\beta)(\ln n)^{\frac{\beta}{\beta+1}} \right\},$$

де $S(a,\beta) = (\beta a)^{\frac{1}{\beta+1}}(\beta^{-1}+1)$ *є мажоруючою характеристикою простору* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, *де* $\psi(u) = e^{au^\beta}, a > 0$, $\beta > 0$, *а* $\varkappa(1) = 1$.

Доведення. Розглянемо два випадки. У першому випадку, коли $0 < \beta \leqslant 1$, з наслідку 2.1 випливає, що

$$z(v) = \sup_{u\geqslant 1} \frac{\psi(u+v)}{\psi(u)} = \sup_{u\geqslant 1} e^{a(u+v)^\beta - au^\beta} = e^{a\left((1+v)^\beta - 1\right)},$$

тоді, згідно рівності (2.14), маємо:

$$\varkappa(n) = \inf_{v>0} e^{a\left((1+v)^\beta - 1\right)} n^{\frac{1}{v+1}}. \tag{2.15}$$

Оскільки, справедлива рівність

$$\left(\ln\left(e^{a\left((1+v)^{\beta}-1\right)}n^{\frac{1}{v+1}}\right)\right)' = \left(\frac{\ln n}{v+1} + a(1+v)^{\beta} - a\right)' =$$

$$= -\frac{\ln n}{(v+1)^2} + a\beta(1+v)^{\beta-1} = 0,$$

тоді інфінум досягається в точці $v = \left(\frac{\ln n}{a\beta}\right)^{\frac{1}{\beta+1}} - 1$ і, підставляючи дане значення v в рівність (2.15), отримаємо:

$$\varkappa(n) = n^{\left(\frac{a\beta}{\ln n}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}} \exp\left\{a\left(\left(\frac{a\beta}{\ln n}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}} - 1\right)\right\} = \frac{1}{e^a}\exp\left\{S(a,\beta)(\ln n)^{\frac{\beta}{\beta+1}}\right\}.$$

У другому випадку, коли $\beta > 1$, з теореми 2.6 маємо:

$$\varkappa(n) = \sup_{u\geqslant 1}\inf_{v>0} n^{\frac{1}{u+v}}\frac{\psi(u+v)}{\psi(u)} = \sup_{u\geqslant 1}\inf_{v>0} n^{\frac{1}{u+v}} e^{a(u+v)^{\beta}-au^{\beta}}. \qquad (2.16)$$

Спочатку знайдемо інфінум. Розглянемо рівності

$$\left(\ln\left(e^{a\left((u+v)^{\beta}-1\right)}n^{\frac{1}{u+v}}\right)\right)' = \left(\frac{\ln n}{u+v} + a(u+v)^{\beta} - au\right)' =$$

$$= -\frac{\ln n}{(u+v)^2} + a\beta(u+v)^{\beta-1} = 0.$$

Отже, з останньої рівності випливає, що інфінум досягається в точці $v = \left(\frac{\ln n}{a\beta}\right)^{\frac{1}{\beta+1}} - u$. Таким чином, підставляючи це значення v в рівність (2.16), маємо:

$$\varkappa(n) = \sup_{u\geqslant 1} n^{\left(\frac{a\beta}{\ln n}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}} \exp\left\{a\left(\left(\frac{a\beta}{\ln n}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}} - u\right)\right\} =$$

$$= n^{\left(\frac{a\beta}{\ln n}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}} \exp\left\{a\left(\left(\frac{a\beta}{\ln n}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}} - 1\right)\right\} = \frac{1}{e^a}\exp\left\{S(a,\beta)(\ln n)^{\frac{\beta}{\beta+1}}\right\}.$$

Із двох розглянутих випадків випливає твердження теореми. $\square$

Зауваження 2.1. Теорема 2.7 ілюструє, що рівність (2.14) не завжди можна застосовувати.

Теорема 2.8. *Послідовність*

$$\varkappa(n) = \left(\frac{e}{\alpha}\right)^{\alpha} (\ln n)^{\alpha}$$

є мажоруючою характеристикою простору $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$ *при* $n > 1$, *де* $\psi(u) = u^{\alpha}, \alpha > 0$, *а* $\varkappa(1) = 1$.

Доведення. Із наслідка 2.1 випливає, що

$$z(v) = \sup_{u \geqslant 1} \left(1 + \frac{v}{u}\right)^{\alpha} = (1+v)^{\alpha},$$

тоді із рівності (2.14) маємо:

$$\varkappa(n) = \inf_{v>0} (1+v)^{\alpha} n^{\frac{1}{v+1}}. \tag{2.17}$$

Із рівностей

$$\left(\ln\left((1+v)^{\alpha} n^{\frac{1}{v+1}}\right)\right)' = \left(\alpha \ln(1+v) + \frac{\ln n}{1+v}\right)' =$$

$$= \frac{\alpha}{1+v} - \frac{\ln n}{(1+v)^2} = 0$$

отримуємо, що інфінум досягається в точці $v = \frac{\ln n}{\alpha} - 1$ і, підставляючи це значення v в рівність (2.17), стає очевидним твердження теореми:

$$\varkappa(n) = \left(\frac{\ln n}{\alpha}\right)^{\alpha} n^{\frac{\alpha}{\ln n}} = (\ln n)^{\alpha} \left(\frac{e}{\alpha}\right)^{\alpha}.$$

□

Теорема 2.9. *Послідовність*

$$\varkappa(n) = e \left(\frac{\ln(\ln n + 2)}{\ln 2}\right)^{\lambda}$$

є мажоруючою характеристикою простору $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$, *де* $\psi(u) = (\ln(u+1))^{\lambda}$, $\lambda > 0$ *при* $n > 1$, *а* $\varkappa(1) = 1$.

Доведення. Із наслідка 2.1 випливає, що

$$z(v) = \sup_{u \geqslant 1} \left(\frac{\ln(u+v+1)}{\ln(u+1)}\right)^{\lambda},$$

а оскільки $\left(\frac{\ln(u+v+1)}{\ln(u+1)}\right)' \leqslant 0$, тоді $z(v) = \left(\frac{\ln(v+2)}{\ln 2}\right)^{\lambda}$. Звідси маємо:

$$\varkappa(n) = \inf_{v>0} \left(\frac{\ln(v+2)}{\ln 2}\right)^{\lambda} n^{\frac{1}{v+1}}. \tag{2.18}$$

У рівності (2.18) покладемо $v = \ln n$:
$\varkappa(n) = \left(\frac{\ln(\ln n+2)}{\ln 2}\right)^{\lambda} n^{\frac{1}{\ln n+1}} \leqslant \left(\frac{\ln(\ln n+2)}{\ln 2}\right)^{\lambda} e$, що й треба було довести. $\square$

2.2. Простори $\mathbf{F}_{S_k,\psi,r}(\Omega)$

Означення 2.4. *Нехай S_k – зростаюча числова послідовність ($S_k \geqslant 1$) і $S_k \to \infty$, коли $k \to \infty$. Розглянемо монотонно зростаючу неперервну функцію $\psi(u) > 0$, $u \geqslant 1$ таку, що $\psi(u) \to \infty$ при $u \to \infty$. Випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_{S_k,\psi,r}(\Omega)$, якщо виконується умова:*

$$\sup_{k\geqslant r} \frac{\left(E\left|\xi\right|^{S_k}\right)^{1/S_k}}{\psi(S_k)} < \infty,$$

де число r – таке, що $S_r \geqslant 1$.

Як і в попередньому випадку легко довести, що простори $\mathbf{F}_{S_k,\psi,r}(\Omega)$ є просторами Банаха з нормами

$$\|\xi\|_{S_k,\psi,r} = \sup_{k\geqslant r} \frac{\left(E\left|\xi\right|^{S_k}\right)^{1/S_k}}{\psi(S_k)}. \tag{2.19}$$

Теорема 2.10. *Якщо для функції ψ виконується умова (2.11) і існує така $B_r > 0$, що*

$$\frac{\psi\left(S_k\right)}{\psi\left(S_{k-1}\right)} \leqslant B_r,\ \ k \geqslant r,$$

тоді простори $\mathbf{F}_{S_k,\psi,r}(\Omega)$ містять ті ж самі елементи, що і простори $\check{\mathbf{F}}_{\psi}(\Omega)$, а норми (2.1) і (2.19) еквівалентні та мають місце такі нерівності:

$$\|\xi\|_{S_k,\psi,r} \leqslant \|\xi\|_{\psi},$$
$$\|\xi\|_{\psi} \leqslant \max\left(C_r, \widetilde{C}_r\right) \|\xi\|_{S_k,\psi,r},$$

де $C_r = \sup\limits_{k\geqslant r} \frac{\psi(S_k)}{\psi(S_{k-1})}$, $\widetilde{C}_r = \sup\limits_{1\leqslant u\leqslant S_r} \frac{\psi(S_r)}{\psi(u)}$.

Доведення. Очевидно, що

$$\|\xi\|_{S_k,\psi,r} \leqslant \|\xi\|_\psi .$$

Із другого боку, з нерівності Ляпунова, при $S_{k-1} \leqslant u \leqslant S_k$, де $k-1 \geqslant r$ випливає, що

$$\frac{\left(E\left|\xi\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} \leqslant \frac{\left(E\left|\xi\right|^{S_k}\right)^{1/S_k}}{\psi(u)} = \frac{\left(E\left|\xi\right|^{S_k}\right)^{1/S_k}}{\psi(S_k)} \cdot \frac{\psi(S_k)}{\psi(u)} \leqslant$$

$$\leqslant \|\xi\|_{S_k,\psi,r} \cdot \frac{\psi(S_k)}{\psi(u)} \leqslant \|\xi\|_{S_k,\psi,r} \cdot \frac{\psi\left(S_k\right)}{\psi\left(S_{k-1}\right)} \leqslant C_r \|\xi\|_{S_k,\psi,r} .$$

При $1 \leqslant u \leqslant S_r$ маємо:

$$\frac{\left(E\left|\xi\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} \leqslant \frac{\left(E\left|\xi\right|^{S_r}\right)^{1/S_r}}{\psi(S_r)} \cdot \frac{\psi(S_r)}{\psi(u)} \leqslant \widetilde{C}_r \|\xi\|_{S_k,\psi,r} .$$

Тоді

$$\|\xi\|_\psi \leqslant \max\left(\widetilde{C}_r, C_r\right) \|\xi\|_{S_k,\psi,r} . \qquad \square$$

Серед просторів $\mathbf{F}_{S_k,\psi,r}(\Omega)$ найбільш важливим для нас є простір, де $S_k = 2k$. Позначимо норму в цьому просторі $\|\xi\|_{2k,\psi,r} = \sup\limits_{k\geqslant r} \frac{\left(E|\xi|^{2k}\right)^{1/2k}}{\psi(2k)}$. Очевидно, що у випадках, коли для ψ виконується умова (2.11), тоді простори $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$ та $\mathbf{F}_{2k,\psi,r}(\Omega)$ співпадають, і норми в цих просторах – еквівалентні.

Дійсно, згідно з попередньою теоремою маємо, що

$$\|\xi\|_{2k,\psi,r} \leqslant \|\xi\|_\psi . \tag{2.20}$$

Зауважимо, що

$$\sup_{k\geqslant r} \frac{\psi(2k)}{\psi(2k-2)} = \sup_{k\geqslant r} \frac{\psi(2k-2+2)}{\psi(2k-2)} \leqslant \sup_{u\geqslant r} \frac{\psi(u+2)}{\psi(u)} = \overline{\psi}_r < \infty,$$

тобто має місце

$$\|\xi\|_\psi \leqslant \widehat{\psi}_r \|\xi\|_{2k,\psi,r} , \tag{2.21}$$

де $\widehat{\psi}_r = \max\left(\overline{\psi}_r, \widetilde{C}_r\right)$.

Наступна теорема доводиться аналогічно доведенню теореми 2.2.

Теорема 2.11. *Нехай випадкова величина ξ належить простору*

$\mathbf{F}_{S_k,\psi,r}(\Omega)$, *тоді для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *виконується нерівність:*

$$P\left\{|\xi| > \varepsilon\right\} \leqslant \inf_{k\geqslant r} \frac{\|\xi\|_{S_k,\psi,r}^{S_k} \left(\psi(S_k)\right)^{S_k}}{\varepsilon^{S_k}}. \tag{2.22}$$

Зокрема при $S_k = 2k$ *отримаємо:*

$$P\left\{|\xi| > \varepsilon\right\} \leqslant \inf_{k\geqslant r} \frac{\|\xi\|_{2k,\psi,r}^{2k} \left(\psi(2k)\right)^{2k}}{\varepsilon^{2k}}.$$

Теорема 2.12. *Послідовність*

$$\varkappa(n) = \sup_{k\geqslant r} \inf_{v>0} n^{\frac{1}{S_k+v}} \frac{\psi(S_k+v)}{\psi(S_k)} \tag{2.23}$$

є мажоруючою характеристикою простору $\mathbf{F}_{S_k,\psi,r}(\Omega)$.

Доведення. Аналогічно доведенню теореми 2.6, розглянемо випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ із простору $\mathbf{F}_{S_k,\psi,r}(\Omega)$. Тоді виконуються наступні нерівності:

$$\frac{\left(E\left(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |\xi_i|\right)^{S_k}\right)^{1/S_k}}{\psi(S_k)} \leqslant \frac{\left(E\left(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |\xi_i|\right)^{S_k+v}\right)^{\frac{1}{S_k+v}}}{\psi(S_k)} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} n^{\frac{1}{S_k+v}} \frac{\left(E\left|\xi_i\right|^{S_k+v}\right)^{\frac{1}{S_k+v}}}{\psi(S_k+v)} \cdot \frac{\psi(S_k+v)}{\psi(S_k)} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left\|\xi_i\right\|_{S_k,\psi,r} n^{\frac{1}{S_k+v}} \frac{\psi(S_k+v)}{\psi(S_k)}.$$

З останньої нерівності випливає, що при всіх $S_k \geqslant 1$

$$\frac{\left(E\left(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |\xi_i|\right)^{S_k}\right)^{1/S_k}}{\psi(S_k)} \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left\|\xi_i\right\|_{S_k,\psi,r} \inf_{v>0} n^{\frac{1}{S_k+v}} \frac{\psi(S_k+v)}{\psi(S_k)}.$$

Отже,

$$\left\|\max_{1\leqslant i\leqslant n} |\xi_i|\right\|_{S_k,\psi,r} = \sup_{k\geqslant r} \frac{\left(E\left(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |\xi_i|\right)^{S_k}\right)^{1/S_k}}{\psi(S_k)} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|\xi_i\|_{S_k,\psi,r} \sup_{k\geqslant r} \inf_{v>0} n^{\frac{1}{S_k+v}} \frac{\psi(S_k+v)}{\psi(S_k)}.$$

Оскільки в останній нерівності v – будь-яке число ($v > 0$), тоді з нерівності (2.12) випливає твердження теореми. □

2.3. Умова H для просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$

Означення 2.5. *Скажемо, що для просторів Банаха $B(\Omega)$ випадкових величин виконується умова* **H**, *якщо існує абсолютна константа C_B така, що для будь-яких центрованих незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ із $B(\Omega)$ виконується нерівність:*

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right\|^2 \leqslant C_B \sum_{i=1}^{n} \|\xi_i\|^2. \tag{2.24}$$

Константу C_B назвемо масштабною константою простору $B(\Omega)$. Для просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ константу $C_{\mathbf{F}_\psi(\Omega)}$ будемо позначати C_ψ.

Знайдемо умови, при яких для просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ виконується умова **H**, а також знайдемо значення константи C_ψ.

Теорема 2.13. *Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – незалежні центровані випадкові величини з простору $\mathbf{F}_{2k,\psi,r}(\Omega)$. Якщо ξ_i – симетричні випадкові величини та при $k \geqslant \max(r, 2)$ виконується умова*

$$C_{2k}^{2l} \frac{(\psi(2l))^{2l} (\psi(2k-2l))^{2k-2l}}{(\psi(2k))^{2k}} \leqslant C_k^l, \; l = \overline{1, k-1}, \tag{2.25}$$

тоді має місце нерівність

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right\|_{2k,\psi,r}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|\xi_i\|_{2k,\psi,r}^2. \tag{2.26}$$

Тобто в цьому випадку для простору $\mathbf{F}_{2k,\psi,r}(\Omega)$ виконується умова **H** *із константою $C_\psi = 1$.*

Якщо відмовитись від умови симетричності, тоді з умови (2.25) *маємо нерівність:*

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right\|_{2k,\psi,r}^2 \leqslant 4\sum_{i=1}^{n} \|\xi_i\|_{2k,\psi,r}^2. \tag{2.27}$$

Тобто в цьому випадку для простору $\mathbf{F}_{2k,\psi,r}(\Omega)$ *виконується умова* $\mathbf{H}$ *із константою* $C_\psi = 4$.

Якщо ξ_i *не симетричні і виконується умова*

$$C_{2k}^{2l}\left(1+\frac{k}{3}\right)\frac{(\psi(2l))^{2l}\,(\psi(2k-2l))^{2k-2l}}{(\psi(2k))^{2k}} \leqslant C_k^l,\ l=\overline{1,k-1}, \tag{2.28}$$

тоді маємо нерівність

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right\|_{2k,\psi,r}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\|\xi_i\|_{2k,\psi,r}^2, \tag{2.29}$$

тобто в цьому випадку для простору $\mathbf{F}_{2k,\psi,r}(\Omega)$ *виконується умова* $\mathbf{H}$ *із константою* $C_\psi = 1$.

Для того, щоб довести теорему 2.13, необхідно довести додаткове твердження.

Лема 2.1. *Нехай* ξ *і* η *– випадкові величини з простору* $\mathbf{F}_{2k,\psi,r}(\Omega)$. *Якщо* ξ *і* η *незалежні та* $E\eta = 0$, *тоді має місце нерівність:*

$$\|\xi\|_{2k,\psi,r} \leqslant \|\xi-\eta\|_{2k,\psi,r}. \tag{2.30}$$

Доведення. Із теореми Фубіні випливає, що при $2k > 1$

$$E\,|\xi-\eta|^{2k} = E_\xi\left(E_\eta\,|\xi-\eta|^{2k}\right), \tag{2.31}$$

де E_ξ – математичне сподівання відносно ξ, а E_η – математичне сподівання відносно η. Із нерівності Ляпунова випливає, що при $2k \geqslant 1$

$$E_\eta\,|\xi-\eta|^{2k} \geqslant (E_\eta\,|\xi-\eta|)^{2k} \geqslant |E_\eta\,(\xi-\eta)|^{2k} = |\xi-E\eta|^{2k} = |\xi|^{2k}.$$

Отже, з рівності (2.31) отримаємо, що

$$E\,|\xi-\eta|^{2k} \geqslant E\,|\xi|^{2k}.$$

З останньої нерівності очевидно випливає нерівність (2.30). □

Доведення теореми. Якщо $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – симетричні випадкові величини, тоді всі їх непарні моменти дорівнюють нулю. Отже,

$$E\,(\xi_1+\xi_2)^{2k} = E\xi_1^{2k} + \sum_{s=2}^{2k-2} C_{2k}^s E\xi_1^s\xi_2^{2k-s} + E\xi_2^{2k} =$$

$$= E\xi_1^{2k} + \sum_{r=1}^{k-1} C_{2k}^{2r} E\xi_1^{2r} E\xi_2^{2k-2r} + E\xi_2^{2k}.$$

Оскільки $E\left|\xi_i\right|^{2k} \leqslant \left(\psi(2k)\right)^{2k} \|\xi_i\|_{2k,\psi,r}^{2k}$, тоді

$$\frac{E\left(\xi_1+\xi_2\right)^{2k}}{\left(\psi(2k)\right)^{2k}} \leqslant \|\xi_1\|_{2k,\psi,r}^{2k} +$$

$$+\sum_{r=1}^{k-1} C_{2k}^{2r} \left(\psi(2r)\right)^{2r} \left(\psi(2k-2r)\right)^{2k-2r} \frac{\|\xi_1\|_{2k,\psi,r}^{2r} \|\xi_2\|_{2k,\psi,r}^{2k-2r}}{\left(\psi(2k)\right)^{2k}} + \|\xi_2\|_{2k,\psi,r}^{2k} \leqslant$$

$$\leqslant \|\xi_1\|_{2k,\psi,r}^{2k} + \sum_{r=1}^{k-1} C_k^r \|\xi_1\|_{2k,\psi,r}^{2r} \|\xi_2\|_{2k,\psi,r}^{2k-2r} + \|\xi_2\|_{2k,\psi,r}^{2k} =$$

$$= \left(\|\xi_1\|_{2k,\psi,r}^2 + \|\xi_2\|_{2k,\psi,r}^2\right)^k.$$

З останньої нерівності при $n=2$ випливає нерівність (2.26). Отже, і при будь-якому n нерівність (2.26) справедлива.

Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – незалежні центровані випадкові величини з простору $\mathbf{F}_{2k,\psi,r}(\Omega)$, а $\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_n^*$ – незалежні випадкові величини, що мають такий же розподіл, як ξ_i і не залежать від ξ_i $(i=\overline{1,n})$. Випадкові величини $\xi_i - \xi_i^*$ – симетричні. З леми 2.1 випливає, що

$$\left\|\sum_{i=1}^n \xi_i\right\|_{2k,\psi,r}^2 \leqslant \left\|\sum_{i=1}^n (\xi_i - \xi_i^*)\right\|_{2k,\psi,r}^2 \leqslant \sum_{i=1}^n \|(\xi_i - \xi_i^*)\|_{2k,\psi,r}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n \left(\|\xi_i\|_{2k,\psi,r} + \|\xi_i^*\|_{2k,\psi,r}\right)^2 = 4\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_{2k,\psi,r}^2,$$

оскільки $\|\xi_i\|_{2k,\psi,r} = \|\xi_i^*\|_{2k,\psi,r}$. Нерівність (2.27) доведена.

Нерівність (2.29) доводиться аналогічно тому, як доводиться нерівність (2.26). Оскільки

$$E\left(\xi_1+\xi_2\right)^{2k} = E\xi_1^{2k} + \sum_{s=2}^{2k-2} C_{2k}^s E\xi_1^s \xi_2^{2k-s} + E\xi_2^{2k}$$

і при непарному s

$$\left|E\xi_1^s\xi_2^{2k-s}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(E\left|\xi_1\right|^{s+1}E\left|\xi_2\right|^{2k-s-1}+E\left|\xi_1\right|^{s-1}E\left|\xi_2\right|^{2k-s+1}\right),$$

тоді

$$E\left(\xi_1+\xi_2\right)^{2k} \leqslant E\left|\xi_1\right|^{2k}+\sum_{l=1}^{k-1}R_{2k}^{2l}E\left|\xi_1\right|^{2l}E\left|\xi_2\right|^{2k-2l}+E\left|\xi_2\right|^{2k},$$

де $R_{2k}^2 = R_{2k}^{2k-2} = C_{2k}^2 + 0,5C_{2k}^3$, $R_{2k}^{2l} = C_{2k}^{2l} + 0,5\left(C_{2k}^{2l+1} + C_{2k}^{2l-1}\right)$, $l \neq 1$, $l \neq k-1$. Очевидно, що $R_{2k}^{2l} \leqslant \left(1+\frac{k}{3}\right)C_{2k}^{2l}$. Дійсно,

$$R_{2k}^{2l} = C_{2k}^{2l} + \frac{1}{2}\left(C_{2k}^{2l+1}+C_{2k}^{2l-1}\right) = C_{2k}^{2l}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{C_{2k}^{2l+1}}{C_{2k}^{2l}}+\frac{C_{2k}^{2l-1}}{C_{2k}^{2l}}\right)\right) =$$

$$= C_{2k}^{2l}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{(2k)!(2l)!(2k-2l)!}{(2l+1)!(2k-2l-1)!(2k)!}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(2k)!(2l)!(2k-2l)!}{(2l-1)!(2k-2l+1)!(2k)!}\right)\right) =$$

$$= C_{2k}^{2l}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{2k-2l}{2l+1}+\frac{2l}{2k-2l+1}\right)\right).$$

З останньої рівності, оскільки $2l+1 \geqslant 3$ і $2k-2l+1 \geqslant 3$, отримуємо:

$$R_{2k}^{2l} \leqslant C_{2k}^{2l}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{2k-2l}{3}+\frac{2l}{3}\right)\right) = C_{2k}^{2l}\left(1+\frac{k}{3}\right).$$

Таким чином, справедлива нерівність:

$$\frac{E\left(\xi_1+\xi_2\right)^{2k}}{\left(\psi(2k)\right)^{2k}} \leqslant \frac{E\left|\xi_1\right|^{2k}}{\left(\psi(2k)\right)^{2k}} + \sum_{l=1}^{k-1}C_{2k}^{2l}\left(1+\frac{k}{3}\right)\frac{\left(\psi(2l)\right)^{2l}\left(\psi(2k-2l)\right)^{2k-2l}}{\left(\psi(2k)\right)^{2k}}\times$$

$$\times\left(\frac{E\left|\xi_1\right|^{2l}}{\left(\psi(2l)\right)^{2l}}\right)\left(\frac{E\left|\xi_2\right|^{2k-2l}}{\left(\psi(2k-2l)\right)^{2k-2l}}\right)+\frac{E\left|\xi_2\right|^{2k}}{\left(\psi(2k)\right)^{2k}} \leqslant \left\|\xi_1\right\|_{2k,\psi,r}^{2k}+$$

$$+\sum_{l=1}^{k-1}C_k^l\left\|\xi_1\right\|_{2k,\psi,r}^{2l}\left\|\xi_2\right\|_{2k,\psi,r}^{2k-2l}+\left\|\xi_2\right\|_{2k,\psi,r}^{2k} = \left(\left\|\xi_1\right\|_{2k,\psi,r}^2+\left\|\xi_2\right\|_{2k,\psi,r}^2\right)^k.$$

З останньої нерівності випливає нерівність (2.29), при $n=2$. Отже, і при будь-якому n є справедливою нерівність (2.29). Таким чином, твердження теореми доведено. $\square$

З теореми 2.13 та нерівностей (2.20) і (2.21) випливає такий наслідок.

Наслідок 2.2. *Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – незалежні центровані випадкові величини з простору $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$. Якщо ξ_i – симетричні випадкові величини та при $k \geqslant \max(r, 2)$ виконується умова*

$$C_{2k}^{2l} \frac{\left(\psi(2l)\right)^{2l} \left(\psi(2k-2l)\right)^{2k-2l}}{\left(\psi(2k)\right)^{2k}} \leqslant C_k^l,\ l = \overline{1, k-1}, \tag{2.32}$$

тоді має місце нерівність

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i \right\|_\psi^2 \leqslant \widehat{\psi}_r^2 \sum_{i=1}^{n} \|\xi_i\|_\psi^2 . \tag{2.33}$$

Тобто в цьому випадку для простору $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$ виконується умова $\mathbf{H}$ із константою $C_\psi = \widehat{\psi}_r^2$, де $\widehat{\psi}_r = \max\left(\overline{\psi}_r, \widetilde{C}_r\right)$, $\overline{\psi}_r = \sup\limits_{u \geqslant r} \frac{\psi(u+2)}{\psi(u)}$, $\widetilde{C}_r = \sup\limits_{1 \leqslant u \leqslant S_r} \frac{\psi(S_r)}{\psi(u)}$.

Якщо відмовитись від умови симетричності, тоді при умові (2.32) *справджується нерівність*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i \right\|_\psi^2 \leqslant 4\widehat{\psi}_r^2 \sum_{i=1}^{n} \|\xi_i\|_\psi^2 . \tag{2.34}$$

Тобто в цьому випадку для простору $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$ виконується умова $\mathbf{H}$ із константою $C_\psi = 4\widehat{\psi}_r^2$.

Якщо ξ_i – не симетричні і виконується умова

$$C_{2k}^{2l} \left(1 + \frac{k}{3}\right) \frac{\left(\psi(2l)\right)^{2l} \left(\psi(2k-2l)\right)^{2k-2l}}{\left(\psi(2k)\right)^{2k}} \leqslant C_k^l,\ l = \overline{1, k-1}, \tag{2.35}$$

тоді маємо нерівність

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i \right\|_\psi^2 \leqslant \widehat{\psi}_r^2 \sum_{i=1}^{n} \|\xi_i\|_\psi^2 . \tag{2.36}$$

Тобто в цьому випадку для простору $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$ виконується умова $\mathbf{H}$ із константою $C_\psi = \widehat{\psi}_r^2$.

Розглянемо приклади просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, для яких виконуються умови попередніх теорем. Насамперед доведемо таку лему.

Лема 2.2. *Має місце нерівність*

$$C_{2k}^{2l} \leqslant C_k^l \frac{k^k}{l^l(k-l)^{k-l}}$$

при $k \geqslant 2,\ 1 \leqslant l \leqslant k-1.$

Доведення. Розглянемо рівність

$$C_{2k}^{2l} = C_k^l \frac{C_{2k}^{2l}}{C_k^l}.$$

За формулою Стірлінга $n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{\theta_n}$, де $|\theta_n| < \frac{1}{12n}$ отримаємо:
$\frac{C_{2k}^{2l}}{C_k^l} = \frac{(2k)!l!(k-l)!}{(2l)!(2k-2l)!k!} = \frac{k^{2k}l^l(k-l)^{k-l}}{\sqrt{2}l^{2l}(k-l)^{2(k-l)}k^k} \exp\left\{\theta_{2k} + \theta_{2l} + \theta_k + \theta_l + \theta_{k-l}\right\} \leqslant$
$\leqslant \frac{k^k}{l^l(k-l)^{k-l}} \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left\{\frac{1}{24k} + \frac{1}{24l} + \frac{1}{24(k-l)} + \frac{1}{12k} + \frac{1}{12l} + \frac{1}{12(k-l)}\right\} \leqslant$
$\leqslant \frac{k^k}{l^l(k-l)^{k-l}} \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left\{\frac{1}{8}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 1\right)\right\} \leqslant \frac{k^k}{l^l(k-l)^{k-l}},$
що й треба було довести. □

Приклад 2.4. *Розглянемо простір* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, *де* $\psi(u) = u^\theta$, $\theta \geqslant \frac{1}{2}$. *Доведемо, що в цьому випадку виконується умова* (2.32). *Справедливі такі співвідношення:*

$$C_{2k}^{2l} \frac{(2l)^{2l\theta}(2k-2l)^{(2k-2l)\theta}}{(2k)^{2k\theta}} = C_{2k}^{2l} \left(\frac{l^{2l}(k-l)^{(2k-2l)}}{k^{2k}}\right)^\theta \leqslant$$

$$\leqslant C_k^l \frac{k^k}{l^l(k-l)^{k-l}} \left(\frac{l^{2l}(k-l)^{(2k-2l)}}{k^{2k}}\right)^\theta = C_k^l \left(\frac{l^l(k-l)^{k-l}}{k^k}\right)^{2\theta-1},$$

але оскільки

$$\left(\frac{l^l(k-l)^{k-l}}{k^k}\right)^{2\theta-1} \leqslant \left(\frac{l^l}{k^l}\frac{(k-l)^{k-l}}{k^{k-l}}\right)^{2\theta-1} \leqslant 1,$$

тоді $\left(\frac{l^l}{k^l}\right)^{2\theta-1} \leqslant 1$ *і* $\left(\frac{(k-l)^{k-l}}{k^{k-l}}\right)^{2\theta-1} \leqslant 1.$

Очевидно, що при $\theta \geqslant \frac{1}{2}$ *і* $k > 2$ *має місце нерівність* (2.32), *тобто для простору* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, *де* $\psi(u) = u^\theta$ *виконується умова* $\mathbf{H}$ *і має місце* *така нерівність:*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i \right\|_{\psi}^{2} \leqslant 4 \cdot 9^{\theta} \sum_{i=1}^{n} \|\xi_i\|_{\psi}^{2}.$$

Зауважимо, що при $\theta < \frac{1}{2}$ *для цього простору умова* **H** *не виконується.*

Приклад 2.5. *Розглянемо простір* $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$, *де* $\psi(u) = u^{\theta}$. *Знайдемо такі* θ, *при яких виконується умова* (2.35). *Тобто з леми 2.2 при* $k \geqslant 2$ *випливає, що*

$$\left(\frac{l^{l}(k-l)^{k-l}}{k^{k}}\right)^{2\theta-1}\left(1+\frac{k}{3}\right) \leqslant 1. \tag{2.37}$$

Мають місце співвідношення:

$$\left(\frac{l^{l}(k-l)^{k-l}}{k^{k}}\right) = \left(\frac{l}{k}\right)^{l}\left(\frac{k-l}{k}\right)^{k-l} = \left(\frac{l}{k}\right)^{l}\left(1-\frac{l}{k}\right)^{k-l} = A(k,l),$$

$$\ln A(k,l) = l(\ln l - \ln k) + (k-l)(\ln(k-l) - \ln k).$$

Розглянемо l, *яка змінюється на проміжку* $[1, k-1]$, *тоді*

$$\left(\ln A(k,l)\right)' = (\ln l - \ln k) + 1 - (\ln(k-l) - \ln k) - 1 = \ln\frac{l}{k} - \ln\frac{k-l}{k}.$$

Причому $\left(\ln A(k,l)\right)' = 0$, *коли* $l = \frac{k}{2}$. *Отже,* $A(k) = \sup\limits_{l>1} A(k,l) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k}$, *тоді* (2.37) *виконується коли*

$$\frac{1}{2^{k(2\theta-1)}}\left(1+\frac{k}{3}\right) \leqslant 1$$

при $k \geqslant 2$ *і* $\theta > \frac{1}{2}$ *та* $2\theta - 1 \geqslant \sup\limits_{k\geqslant 2}\frac{\ln\left(1+\frac{k}{3}\right)}{k\ln 2}$. *Оскільки при підрахунку* $\sup\limits_{k\geqslant 2}\frac{\ln\left(1+\frac{k}{3}\right)}{k\ln 2} \leqslant 0,369$, *то* $\theta \geqslant 0,6845$.

Теорема 2.14. *Нехай розглянемо простір* $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$, *де функція* $\psi(u)$, $u \geqslant 1$ *така, що* $\varphi(u) = \frac{\psi(u)}{u^{1/2}}$ *– монотонно зростає при* $u \geqslant u_0$. *Якщо* $u_0 = 1$, *тоді для* $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$ *виконується умова* **H** *із константою* $C_{\psi} = 4\widehat{\psi}_r^{2}$, *де* $\widehat{\psi}_r$ *задано в наслідку 2.2, а коли* $u_0 > 1$, *тоді для* $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$ *виконується умова* **H** *із константою* $C_{\psi} = 4\widehat{\psi}_r^{2} S_{\psi}^{2} S_{\hat{\psi}}^{2}$, *де*

$$S_\psi = \max\left(1, \max_{1\leqslant u<u_0} \frac{\psi(u_0)}{\psi(u)} \left(\frac{u}{u_0}\right)^{1/2}\right),$$

$$S_{\hat\psi} = \max\left(1, \max_{1\leqslant u<u_0} \frac{\psi(u)}{\psi(u_0)} \left(\frac{u_0}{u}\right)^{1/2}\right).$$

Доведення. Спочатку доведемо теорему, коли $u_0 = 1$. Перевіримо умову (2.32). Із леми 2.2 випливає

$$C_{2k}^{2l} \frac{(\psi(2l))^{2l} (\psi(2k-2l))^{2k-2l}}{(\psi(2k))^{2k}} \leqslant$$

$$\leqslant C_k^l \frac{\frac{(\psi(2l))^{2l}}{(2l)^l} \cdot \frac{(\psi(2k-2l))^{2k-2l}}{(2k-2l)^{k-l}}}{\frac{(\psi(2k))^{2k}}{(2k)^k}} = C_k^l \frac{(\varphi(2l))^{2l} (\varphi(2k-2l))^{2k-2l}}{(\varphi(2k))^{2k}}.$$

Оскільки функція $\varphi(u)$ монотонно зростає при $u \geqslant 1$, то

$$\frac{(\varphi(2l))^{2l} (\varphi(2k-2l))^{2k-2l}}{(\varphi(2k))^{2k}} = \left(\frac{\varphi(2l)}{\varphi(2k)}\right)^{2l} \left(\frac{\varphi(2k-2l)}{\varphi(2k)}\right)^{2k-2l} \leqslant 1.$$

Із наслідку 2.2 випливає, що для простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, який породжений функцією $\psi(u)$ справджується нерівність (2.34), тобто виконується твердження теореми.

Доведемо теорему у випадку $u_0 > 1$. Розглянемо два простори $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ і $\mathbf{F}_{\hat\psi}(\Omega)$, де

$$\hat\psi(u) = \begin{cases} \psi(u), & \text{якщо } u \geqslant u_0; \\ \frac{\psi(u_0)}{u_o^{1/2}} u^{1/2}, & \text{якщо } 1 \leqslant u < u_0. \end{cases}$$

Оскільки

$$\|\xi\|_\psi = \max\left(\sup_{1\leqslant u<u_0} \frac{(E\,|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)}, \sup_{u\geqslant u_0} \frac{(E\,|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)}\right)$$

і

$$\sup_{1\leqslant u<u_0} \frac{(E\,|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)} = \sup_{1\leqslant u<u_0} \frac{(E\,|\xi|^u)^{1/u}}{\frac{\psi(u_0)}{u_o^{1/2}} u^{1/2}} \cdot \frac{\psi(u_0) u^{1/2}}{\psi(u) u_o^{1/2}},$$

тоді

$$\|\xi\|_\psi \leqslant S_\psi \max\left(\sup_{1\leqslant u<u_0} \frac{\left(E\left|\xi\right|^u\right)^{1/u}}{\frac{\psi(u_0)}{u_o^{1/2}}u^{1/2}}, \sup_{u\geqslant u_0} \frac{\left(E\left|\xi\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)}\right),$$

тобто $\|\xi\|_\psi \leqslant S_\psi \|\xi\|_{\hat{\psi}}$.

Тепер розглянемо

$$\|\xi\|_{\hat{\psi}} = \max\left(\sup_{1\leqslant u<u_0} \frac{\left(E\left|\xi\right|^u\right)^{1/u}}{\frac{\psi(u_0)}{u_o^{1/2}}u^{1/2}}, \sup_{u\geqslant u_0} \frac{\left(E\left|\xi\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)}\right).$$

Оскільки

$$\sup_{1\leqslant u<u_0} \frac{\left(E\left|\xi\right|^u\right)^{1/u}}{\frac{\psi(u_0)}{u_o^{1/2}}u^{1/2}} = \sup_{1\leqslant u<u_0} \frac{\left(E\left|\xi\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} \cdot \frac{\psi(u)u_o^{1/2}}{\psi(u_0)u^{1/2}},$$

тоді

$$\|\xi\|_{\hat{\psi}} \leqslant S_{\hat{\psi}} \max\left(\sup_{1\leqslant u<u_0} \frac{\left(E\left|\xi\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)}, \sup_{u\geqslant u_0} \frac{\left(E\left|\xi\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)}\right),$$

тобто $\|\xi\|_{\hat{\psi}} \leqslant S_{\hat{\psi}} \|\xi\|_\psi$.

Отже, простори $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ і $\mathbf{F}_{\hat{\psi}}(\Omega)$ містять одні й тіж елементи і норми в цих просторах – еквівалентні.

Функція $\hat{\psi}(u)$, така що $\frac{\hat{\psi}(u)}{u^{1/2}}$ – монотонна, тоді з першої частини теореми випливає, що

$$\left\|\sum_{i=1}^n \xi_i\right\|_{\hat{\psi}}^2 \leqslant 4\widehat{\psi}_r^2 \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_{\hat{\psi}}^2.$$

Отже,

$$\left\|\sum_{i=1}^n \xi_i\right\|_\psi^2 \leqslant S_\psi^2 \left\|\sum_{i=1}^n \xi_i\right\|_{\hat{\psi}}^2 \leqslant 4\widehat{\psi}_r^2 S_\psi^2 \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_{\hat{\psi}}^2 \leqslant 4\widehat{\psi}_r^2 S_\psi^2 S_{\hat{\psi}}^2 \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_\psi^2.$$

З останньої нерівності випливає твердження теореми. □

Зауваження 2.2. Очевидно, що $S_\psi \leqslant \frac{\psi(u_0)}{\psi(u)}$ і $S_{\hat{\psi}} \leqslant (u_0)^{1/2}$.

Наслідок 2.3. *Якщо при* $u \leqslant u_0$ *функція* $\varphi(u)$ *монотонно спадає, тоді* $S_\psi = 1$, *а* $S_{\hat{\psi}} = \max\left(1, \frac{\psi(1)}{\psi(u_0)}u_0^{1/2}\right)$.

Доведення наслідку тривіальне.

Теорема 2.15. *Нехай* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ *– такий простір, що функція* $\psi(u) = e^{au^\beta}$, *де* $a > 0$, $0 < \beta < 1$. *Якщо* $\frac{1}{(2a\beta)^{1/\beta}} = 1$, *тоді для простору* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ *виконується умова* $\mathbf{H}$ *із константою* $C_\psi = 4e^{2^\beta a}$, *а коли* $\frac{1}{(2a\beta)^{1/\beta}} > 1$, *тоді для* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ *виконується умова* $\mathbf{H}$ *із константою* $C_\psi = \frac{4e^{a\left(2^\beta+1\right)-\frac{1}{2\beta}}}{(2a\beta)^{1/2\beta}}$.

Доведення. Теорема випливає з теореми 2.14. Дійсно, згідно з наслідком 2.3 в нашому випадку $S_\psi = 1$, а $S_{\hat{\psi}} = \frac{e^{a-\frac{1}{2\beta}}}{(2a\beta)^{1/2\beta}}$ $\left(u_0 = \frac{1}{(2a\beta)^{1/\beta}}\right)$, причому в цьому випадку $\frac{e^{a-\frac{1}{2\beta}}}{(2a\beta)^{1/2\beta}} > 1$. $\square$

Наслідок 2.4. *Нехай покладемо в теоремі 2.15* $a = 1$, *тоді при* $\beta = \frac{1}{2}$ *для простору* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ *виконується умова* $\mathbf{H}$ *із константою* $C_\psi \approx 16,453$, *а при* $0 < \beta < \frac{1}{2}$ *для* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ *виконується умова* $\mathbf{H}$ *із константою* $C_\psi = \frac{4e^{1+2^\beta-\frac{1}{2\beta}}}{(2\beta)^{1/2\beta}}$.

Доведення. Наслідок випливає з теореми 2.15. $\square$

Висновки до розділу 2

У розділі 2 введено банахів простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Вивчено його основні властивості та розглянуто приклади випадкових величин із цього простору. Знайдено нерівності великих відхилень та мажоруючу характеристику для випадкових величин із цього простору. Введено класи просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u^\alpha$, $\psi(u) = e^{au^\beta}$, $\psi(u) = (\ln(u+1))^\lambda$ та знайдено мажоруючі характеристики відповідних просторів. Розглянуто простори $\mathbf{F}_{S_k,\psi,r}(\Omega)$ і умови, при яких ці простори еквівалентні простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Також вивчено умови, при яких для просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ виконується умова $\mathbf{H}$.

Розділ 3

Випадкові процеси з просторів $\mathbf{F}_\psi^*(\Omega)$, що задані на компакті

У даному розділі $\mathbf{F}_\psi^*(\Omega)$ – один із просторів Банаха випадкових величин $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$ або $\mathbf{F}_{S_k,\psi,r}(\Omega)$. Норму в цьому просторі позначаємо так $\|\cdot\|$. Знаходяться оцінки розподілу супремумів випадкових процесів на компакті з цього простору. Розглядаються ймовірності великих відхилень для сум незалежних випадкових процесів із просторів $\mathbf{F}_\psi^*(\Omega)$. Знаходяться оцінки для розподілу супремумів приростів із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

3.1. Оцінки розподілу супремумів випадкових процесів із просторів $\mathbf{F}_\psi^*(\Omega)$, що задані на компакті

Означення 3.1. *Скажемо, що випадковий процес $X = \{X(t),\ t \in T\}$, де T – деяка параметрична множина, належить простору $\mathbf{F}_\psi^*(\Omega)$, якщо для будь-якого $t \in T$ випадкова величина $X(t)$ належить простору $\mathbf{F}_\psi^*(\Omega)$.*

Приклад 3.1. *Розглянемо випадковий процес $X = \{X(t),\ t \in T\}$, такий що*

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k L_k(t), \tag{3.1}$$

де ξ_k належать простору $\mathbf{F}_\psi^*(\Omega)$, $L_k(t)$ – деякі функції. Оскільки $\|X(t)\| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|\xi_k\| \, |L_k(t)|$ і якщо для всіх $t \in T$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\xi_k\| \, |L_k(t)| < \infty, \tag{3.2}$$

тоді, очевидно, що $X(t)$ належить простору $\mathbf{F}_\psi^*(\Omega)$, тобто $X \in \mathbf{F}_\psi^*(\Omega)$ і ряд (3.1) *збігається в нормі простору $\mathbf{F}_\psi^*(\Omega)$ для кожного $t \in T$.*

Зауважимо, що справджується така нерівність:

$$\left\|X(t)-X(s)\right\|=\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\left(L_k(t)-L_k(s)\right)\right\|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\xi_k\right\|\left|L_k(t)-L_k(s)\right|. \tag{3.3}$$

Ряд (3.1) *зручно записувати у такий спосіб:*

$$X(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k\lambda_k L_k(t),$$

де $\|\eta_k\|=1$, $\lambda_k>0$ *– константи. Тоді умова* (3.2) *має вигляд:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left|L_k(t)\right|<\infty.$$

Приклад 3.2. *Нехай* η_k *– незалежні центровані випадкові величини з простору* $\mathbf{F}_{\psi}^{*}(\Omega)$ *для якого виконується умова* $\mathbf{H}$, *де* $\|\eta_k\|=1$. *Позначимо* $X(t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\eta_k\lambda_k L_k(t)$, $\lambda_k>0$. *Нехай для кожного* $t\in T$ *збігається ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2L_k^2(t)$, *тоді* $X(t)$ *належить простору* $\mathbf{F}_{\psi}^{*}(\Omega)$ *і* $EX(t)=0$ *та справджується нерівність*

$$\|X(t)\|^2\leqslant C_{\psi}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2L_k^2(t),$$

де C_{ψ} *– константа з означення 2.5. Оскільки*

$$\|X(t)\|^2\leqslant C_{\psi}\sum_{k=1}^{\infty}\|\eta_k\lambda_k L_k(t)\|^2=C_{\psi}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2L_k^2(t), \tag{3.4}$$

тоді в цьому випадку

$$\left\|X(t)-X(s)\right\|^2\leqslant C_{\psi}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left(L_k(t)-L_k(s)\right)^2.$$

Приклад 3.3. *Нехай* $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $t\in T$ *– гауссові випадкові процеси,* $E\xi_1(t)=0$, $E\xi_2(t)=0$, $E\xi_1^2(t)=\sigma_1^2(t)$, $E\xi_2^2(t)=\sigma_2^2(t)$. *Розглянемо процес*

$$\eta(t)=b_1(t)\exp\left\{\xi_1(t)c_1(t)\right\}+b_2(t)\exp\left\{\xi_2(t)c_2(t)\right\},$$

де $b_i(t)$, $c_i(t)$, $i = 1,2$ – обмежені функції. Покажемо, що $\eta(t)$ належить простору $\mathbf{F}^*_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = e^{u^\alpha}$, $\alpha > 1$ і оцінимо норму цього процесу. Таким чином,

$$\|\eta(t)\| = \|b_1(t)\exp\{\xi_1(t)c_1(t)\} + b_2(t)\exp\{\xi_2(t)c_2(t)\}\| \leqslant$$

$$\leqslant |b_1(t)|\,\|\exp\{\xi_1(t)c_1(t)\}\| + |b_2(t)|\,\|\exp\{\xi_2(t)c_2(t)\}\|\,.$$

Позначимо $\eta_1(t) = \exp\{\xi_1(t)c_1(t)\}$, а $\eta_2(t) = \exp\{\xi_2(t)c_2(t)\}$. Розглянемо $\eta_1(t)$ (для $\eta_2(t)$ все робиться аналогічно). Із нерівності (2.1) *отримаємо, що*

$$\|\eta_1(t)\| = \sup_{u\geqslant 1}\frac{\left(E\,|\eta_1(t)|^u\right)^{1/u}}{e^{u^\alpha}}. \qquad (3.5)$$

Оскільки $\left(E\left(\eta_1(t)\right)^u\right)^{1/u} = \exp\left\{\frac{u\sigma_1^2(t)c_1^2(t)}{2}\right\}$, тоді підставляємо це значення в рівність (3.5) *і отримаємо:*

$$\|\eta_1(t)\| = \sup_{u\geqslant 1}\frac{\exp\left\{\frac{u\sigma_1^2(t)c_1^2(t)}{2}\right\}}{e^{u^\alpha}}. \qquad (3.6)$$

Із рівності

$$\left(\frac{u\sigma_1^2(t)c_1^2(t)}{2} - u^\alpha\right)' = \frac{\sigma_1^2(t)c_1^2(t)}{2} - \alpha u^{\alpha-1} = 0$$

випливає, що супремум досягається в точці $u = \left(\frac{\sigma_1^2(t)c_1^2(t)}{2\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$. Підставляючи значення u в рівність (3.6), *одержимо:*

$$\|\eta_1(t)\| = \exp\left\{\frac{\alpha-1}{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}\left(\frac{\sigma_1^2(t)c_1^2(t)}{2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right\}.$$

Отже,

$$\|\eta(t)\| \leqslant |b_1(t)|\exp\left\{\frac{\alpha-1}{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}\left(\frac{\sigma_1^2(t)c_1^2(t)}{2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right\} +$$

$$+ |b_2(t)|\exp\left\{\frac{\alpha-1}{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}\left(\frac{\sigma_2^2(t)c_2^2(t)}{2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right\}.$$

Означення 3.2. *Метричною масивністю $N(u)$ компактного метричного простору (T,ρ) називається найменше число замкнених куль радіуса не більше u, що покривають множину T.*

Теорема 3.1. *Нехай $T = (T, \rho)$ – компактний метричний простір, $N(u)$ – метрична масивність простору (T, ρ), $X = \{X(t), t \in T\}$ – сепарабельний випадковий процес із простору $\mathbf{F}^*_\psi(\Omega)$, $\varkappa(n)$ – мажоруюча характеристика простору $\mathbf{F}^*_\psi(\Omega)$, а $\varkappa(u)$, $u \geqslant 1$ – будь-яка монотонно зростаюча функція, що співпадає з $\varkappa(n)$ при цілих $n \geqslant 1$. Нехай існує така функція*

$$\sigma = \left\{\sigma(h),\ 0 \leqslant h \leqslant \sup_{t,s\in T} \rho(t,s)\right\},$$

що $\sigma(h)$ – неперервна, монотонно зростає та $\sigma(0) = 0$ і

$$\sup_{\rho(t,s)\leqslant h} \left\|X(t) - X(s)\right\| \leqslant \sigma(h).$$

Якщо для будь-якого $z > 0$ виконується умова

$$\int_0^z \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du < \infty,$$

де $\sigma^{(-1)}(u)$ – обернена функція до $\sigma(u)$, тоді з імовірністю одиниця випадкова величина $\sup_{t\in T} |X(t)|$ належить простору $\mathbf{F}^*_\psi(\Omega)$ та

$$\left\|\sup_{t\in T} |X(t)|\right\| \leqslant B(p),$$

де $B(p) = \inf_{t\in T} \|X(t)\| + \frac{1}{p(1-p)} \int_0^{\gamma p} \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du$, $\gamma = \sigma\left(\sup_{t,s\in T} \rho(t,s)\right)$, число p таке, що $0 < p < 1$.

Доведення. При всіх $u > 1$ справедливі нерівності:

$$P\left\{|X(t) - X(s)| > \varepsilon\right\} \leqslant \frac{E\left|X(t) - X(s)\right|^u}{\varepsilon^u} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left\|X(t) - X(s)\right\|^u (\psi(u))^u}{\varepsilon^u} \leqslant \frac{\sigma(\rho(t,s))(\psi(u))^u}{\varepsilon^u}.$$

Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ $P\left\{|X(t) - X(s)| > \varepsilon\right\} \to 0$ при $\rho(t,s) \to 0$. Таким чином, $X(t)$ – неперервний за ймовірністю випадковий процес на просторі (T, ρ). Тому будь-яка зліченна скрізь щільна множина в просторі (T, ρ) може бути множиною сепарабельності процесу $X(t)$. Нехай $\varepsilon_k = \sigma^{(-1)}\left(\gamma p^k\right)$, де $k \geqslant 0$.

Нехай V_{ε_k} – множина центрів замкнених куль радіуса не більше ε_k, що покривають T, причому число цих куль мінімальне (мінімальна ε_k сітка). Позначимо $V = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} V_{\varepsilon_k}$. Зрозуміло, що V – це злічення скрізь щільна множина, тому V є множиною сепарабельності процесу $X(t)$. Отже, з імовірністю одиниця

$$\sup_{t\in T} |X(t)| = \sup_{t\in V} |X(t)| \,.$$

Введемо на V відображення $\alpha_k(t)$ у такий спосіб. Якщо $t \in V_{\varepsilon_m}$ (m – деяке число), тоді $\alpha_{m-1}(t)$ – це така точка з $V_{\varepsilon_{m-1}}$, що $\rho(t, \alpha_{m-1}(t)) \leqslant \varepsilon_{m-1}$. Така точка існує. Якщо таких точок декілька, то фіксуємо одну з них, якщо $t \in V_{\varepsilon_{m-1}}$, то $\alpha_{m-1}(t) = t$.

Нехай t – довільна точка з V, тоді зрозуміло, що t належить якомусь V_{ε_m}. Позначимо $t_m = t$, $t_{m-1} = \alpha_{m-1}(t_m), t_{m-2} = \alpha_{m-2}(t_{m-1}), \ldots, t_1 = \alpha_1(t_2), t_0 = \alpha_0(t_1)$. Тому

$$X(t) = X(t_m) = X(t_m) - X(t_{m-1}) + X(t_{m-1}) - X(t_{m-2}) +$$
$$+ X(t_{m-2}) - \ldots - X(t_1) - X(t_0) + X(t_0),$$

тоді

$$|X(t)| \leqslant |X(t_m) - X(t_{m-1})| + |X(t_{m-1}) - X(t_{m-2})| + \ldots$$
$$\ldots + |X(t_1) - X(t_0)| + |X(t_0)| \leqslant \max_{t\in V_{\varepsilon_m}} |X(t) - X(\alpha_{m-1}(t))| +$$
$$+ \max_{t\in V_{\varepsilon_{m-1}}} |X(t) - X(\alpha_{m-2}(t))| + \ldots\ldots + \max_{t\in V_{\varepsilon_1}} |X(t) - X(t_0)| + |X(\alpha_0(t))| \,.$$

Отже,

$$\sup_{t\in T} |X(t)| = \sup_{t\in V} |X(t)| \leqslant |X(t_0)| +$$
$$+ \sum_{l=1}^{m} \max_{t\in V_{\varepsilon_l}} |X(t) - X(\alpha_{l-1}(t))| \leqslant |X(t_0)| + \sum_{l=1}^{\infty} \max_{t\in V_{\varepsilon_l}} |X(t) - X(\alpha_{l-1}(t))| \,,$$

тому

$$\left\| \sup_{t\in T} |X(t)| \right\| \leqslant \|X(t_0)\| + \sum_{l=1}^{\infty} \left\| \max_{t\in V_{\varepsilon_l}} |X(t) - X(\alpha_{l-1}(t))| \right\| .$$

З означення 2.3 випливає, що

$$\left\|\sup_{t\in T}|X(t)|\right\| \leqslant \inf_{t\in T}\|X(t)\| + \sum_{l=1}^{\infty} \varkappa\left(N(\varepsilon_l)\right) \max_{t\in V_{\varepsilon_l}} \|X(t) - X(\alpha_{l-1}(t))\| \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{t\in T}\|X(t)\| + \sum_{l=1}^{\infty} \varkappa\left(N(\varepsilon_l)\right) \sigma(\varepsilon_{l-1}) \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{t\in T}\|X(t)\| + \sum_{l=1}^{\infty} \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(\gamma p^l)\right)\right) \gamma p^{l-1}. \quad (3.7)$$

Оскільки

$$\int_{\gamma p^{l+1}}^{\gamma p^l} \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du \geqslant \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(\gamma p^l)\right)\right) \left(\gamma p^l - \gamma p^{l+1}\right) =$$

$$= \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(\gamma p^l)\right)\right) \gamma p^{l-1}(p - p^2),$$

тоді отримаємо, що $\gamma p^{l-1}\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(\gamma p^l)\right)\right) \leqslant \frac{\int_{\gamma p^{l+1}}^{\gamma p^l} \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du}{p(1-p)}$. Таким чином, із нерівності (3.7) маємо

$$\left\|\sup_{t\in T}|X(t)|\right\| \leqslant \inf_{t\in T}\|X(t)\| + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{p(1-p)} \int_{\gamma p^{l+1}}^{\gamma p^l} \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du =$$

$$= \inf_{t\in T}\|X(t)\| + \frac{1}{p(1-p)} \int_0^{\gamma p} \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du,$$

що й треба було довести. □

Наслідок 3.1. *Нехай для процесу $X = \{X(t),\ t \in T\}$, який належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ виконуються умови теореми 3.1, тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконується нерівність:*

$$P\left\{\sup_{t\in T}|X(t)| > \varepsilon\right\} \leqslant \inf_{u\geqslant 1} \frac{B^u(p)(\psi(u))^u}{\varepsilon^u}.$$

Доведення. Наслідок випливає з теореми 2.2. □

Зауваження 3.1. Наслідок 3.1 для інших просторів $\mathbf{F}^*_\psi(\Omega)$ очевидний. Наприклад, для просторів $\mathbf{F}_{S_k,\psi,r}(\Omega)$ має місце нерівність:

$$P\left\{\sup_{t\in T}|X(t)|>\varepsilon\right\}\leqslant\inf_{k\geqslant r}\frac{B^{S_k}(p)(\psi(S_k))^{S_k}}{\varepsilon^{S_k}}.$$

Приклад 3.4. *Розглянемо простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u)=u^\alpha$, $\alpha>0$, то з наслідку 3.1 та теореми 2.3 при $\varepsilon\geqslant e^\alpha B(p)$ отримаємо:*

$$P\left\{\sup_{t\in T}|X(t)|>\varepsilon\right\}\leqslant\exp\left\{-\frac{\alpha}{e}\left(\frac{\varepsilon}{B(p)}\right)^{1/\alpha}\right\}.$$

Приклад 3.5. *Розглянемо простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u)=e^{au^\beta}$, $a>0$, $\beta>0$, то з наслідку 3.1 та теореми 2.4 при $\varepsilon\geqslant e^{a(\beta+1)}B(p)$ дістанемо:*

$$P\left\{\sup_{t\in T}|X(t)|>\varepsilon\right\}\leqslant\exp\left\{-\frac{\beta}{a^{1/\beta}}\left(\frac{\ln\frac{\varepsilon}{B(p)}}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}\right\}.$$

Приклад 3.6. *Розглянемо простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u)=(\ln(u+1))^\lambda$, $\lambda>0$, то з наслідку 3.1 та теореми 2.5 при $\varepsilon\geqslant(e\ln 2)^\lambda B(p)$ маємо:*

$$P\left\{\sup_{t\in T}|X(t)|>\varepsilon\right\}\leqslant e^\lambda\exp\left\{-\lambda\exp\left\{\left(\frac{\varepsilon}{B(p)}\right)^{1/\lambda}\frac{1}{e}\right\}\right\}.$$

Наслідок 3.2. *Нехай $X=\{X(t),\ t\in[c,d]\}$, $-\infty<c<d<+\infty$ – сепарабельний випадковий процес із простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Нехай справджується умова*

$$\sup_{\substack{|t-s|\leqslant h\\ t,s\in[c,d]}}\left\|X(t)-X(s)\right\|_\psi\leqslant\sigma(h), \tag{3.8}$$

де $\sigma=\{\sigma(h),\ 0\leqslant h\leqslant d-c\}$ – неперервна, монотонно зростаюча функція та $\sigma(0)=0$. Якщо для будь-якого $z>0$ виконується умова

$$\int_0^z \varkappa\left(\frac{d-c}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)du<\infty,$$

тоді з імовірністю одиниця $\sup\limits_{t\in[c,d]}|X(t)|\in\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ і для будь-якого $0<$

$p < 1$ є справедливою нерівність

$$\left\| \sup_{t \in [c,d]} |X(t)| \right\|_{\psi} \leqslant \widetilde{B}(p), \tag{3.9}$$

де $\widetilde{B}(p) = \inf\limits_{t \in [c,d]} \|X(t)\|_{\psi} + \frac{1}{p(1-p)} \int\limits_0^{\gamma p} \varkappa\left(\frac{d-c}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right) du$, $\gamma = \sigma(d-c)$, $\varkappa(u)$ *– мажоруюча характеристика простору* $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$, $\sigma^{(-1)}(u)$ *– обернена функція до* $\sigma(u)$.

Крім того, для будь-якого $\varepsilon > 0$ має місце нерівність:

$$P\left\{ \sup_{t \in [c,d]} |X(t)| > \varepsilon \right\} \leqslant \inf_{u \geqslant 1} \frac{\widetilde{B}^u(p)(\psi(u))^u}{\varepsilon^u}. \tag{3.10}$$

Доведення. Наслідок випливає з теореми 3.1, оскільки метрична масивність інтервалу $[c, d]$ оцінюється у такий спосіб:

$$N(u) \leqslant \frac{d-c}{2u} + 1.$$

Нерівність (3.10) випливає з наслідку 3.1. □

Наслідок 3.3. *Нехай $X = \{X(t),\ t \in [c,d]\}$, $-\infty < c < d < +\infty$ – сепарабельний випадковий процес із простору $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$ і для деякого $0 < \mu < 1$ виконується умова*

$$\sup_{\substack{|t-s| \leqslant h \\ t,s \in [c,d]}} \left\| X(t) - X(s) \right\|_{\psi} \leqslant \frac{C}{\left(\varkappa\left(\frac{d-c}{2h} + 1\right)\right)^{1/\mu}}, \tag{3.11}$$

де $C > 0$ – деяка константа, $h < d - c$. Тоді з імовірністю одиниця $\sup\limits_{t \in [c,d]} |X(t)|$ належить простору $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$ та справджується нерівність

$$\left\| \sup_{t \in [c,d]} |X(t)| \right\|_{\psi} \leqslant \inf_{t \in [c,d]} \|X(t)\|_{\psi} + C\left(\varkappa\left(\frac{3}{2}\right)\right)^{(\mu-1)/\mu} \frac{(1+\mu)^{\mu+1}}{\mu^{\mu}(1-\mu)} = \widetilde{B}.$$

Крім того, для будь-якого $\varepsilon > 0$ справедливо

$$P\left\{ \sup_{t \in [c,d]} |X(t)| > \varepsilon \right\} \leqslant \inf_{u \geqslant 1} \frac{\widetilde{B}^u(\psi(u))^u}{\varepsilon^u}. \tag{3.12}$$

Доведення. Наше твердження випливає з наслідку 3.2. Дійсно,

$$\sigma(h) = \frac{C}{\left(\varkappa\left(\frac{d-c}{2h}+1\right)\right)^{1/\mu}},$$

тоді встановлюється, що

$$\frac{1}{p(1-p)}\int\limits_0^{\gamma p}\varkappa\left(\frac{d-c}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)du =$$
$$= \frac{1}{p(1-p)}\int\limits_0^{\gamma p}\frac{C^\mu}{u^\mu}du = \frac{C^\mu}{1-\mu}\gamma^{1-\mu}\frac{1}{(1-p)p^\mu}.$$

Якщо вираз $\frac{C^\mu}{1-\mu}\gamma^{1-\mu}\frac{1}{(1-p)p^\mu}$ мінімізувати по p, тоді з нерівності (3.9) отримаємо наше твердження, а нерівність (3.12) випливає з наслідку 3.1. □

Приклад 3.7. *Розглянемо простір* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, *де* $\psi(u) = u^\alpha$, $\alpha > 0$. *Згідно теореми 2.8* $\varkappa(n) = (\ln n)^\alpha\left(\frac{e}{\alpha}\right)^\alpha$, *тому, підставивши значення* $\varkappa(n)$ *в нерівність* (3.11), *одержимо:*

$$\sigma(h) = \frac{C}{\left(\frac{e}{\alpha}\ln\left(\frac{d-c}{2h}+1\right)\right)^{\alpha/\mu}}.$$

Тоді

$$\left\|\sup_{t\in[c,d]}|X(t)|\right\|_\psi \leqslant \inf_{t\in[c,d]}\sup_{u\geqslant 1}\frac{\left(E\,|X(t)|^u\right)^{1/u}}{u^\alpha}+$$
$$+C\left(\frac{e}{\alpha}\ln\frac{3}{2}\right)^{\alpha(\mu-1)/\mu}\frac{(1+\mu)^{\mu+1}}{\mu^\mu(1-\mu)} = B_1.$$

Із наслідку 3.3 і теореми 2.3 при $\varepsilon \geqslant e^\alpha B_1$ *отримаємо:*

$$P\left\{\sup_{t\in[c,d]}|X(t)| > \varepsilon\right\} \leqslant \exp\left\{-\frac{\alpha}{e}\left(\frac{\varepsilon}{B_1}\right)^{1/\alpha}\right\}. \qquad (3.13)$$

Приклад 3.8. *Розглянемо простір* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, *де* $\psi(u) = e^{au^\beta}$, $a > 0$, $\beta > 0$. *Згідно з теоремою 2.7* $\varkappa(n) = \frac{1}{e^a}\exp\left\{S(a,\beta)(\ln n)^{\frac{\beta}{\beta+1}}\right\}$, *тому, підставивши значення* $\varkappa(n)$ *в нерівність* (3.11), *одержимо:*

$$\sigma(h) = \frac{C}{\left(\frac{1}{e^a}\exp\left\{S(a,\beta)(\ln\left(\frac{d-c}{2h}+1\right))^{\frac{\beta}{\beta+1}}\right\}\right)^{\frac{1}{\mu}}},$$

де $S(a,\beta) = (\beta a)^{\frac{1}{\beta+1}}(\beta^{-1}+1)$. *Тоді*

$$\left\|\sup_{t\in[c,d]}|X(t)|\right\|_\psi \leqslant \inf_{t\in[c,d]}\sup_{u\geqslant 1}\frac{(E|X(t)|^u)^{1/u}}{e^{au^\beta}} +$$

$$+ C\left(\frac{1}{e^a}\exp\left\{S(a,\beta)\left(\ln\frac{3}{2}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}\right\}\right)^{(\mu-1)/\mu}\frac{(1+\mu)^{\mu+1}}{\mu^\mu(1-\mu)} = B_2.$$

Із наслідку 3.3 і теореми 2.4 для будь-якого $\varepsilon \geqslant e^{a(\beta+1)}B_2$ *отримаємо:*

$$P\left\{\sup_{t\in[c,d]}|X(t)| > \varepsilon\right\} \leqslant \exp\left\{-\frac{\beta}{a^{1/\beta}}\left(\frac{\ln\frac{x}{B_2}}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}\right\}. \qquad (3.14)$$

Приклад 3.9. *Розглянемо простір* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, *де* $\psi(u) = (\ln(u+1))^\lambda$, $\lambda > 0$. *Згідно з теоремою 2.9* $\varkappa(n) = e\left(\frac{\ln(\ln n+2)}{\ln 2}\right)^\lambda$, *тому, підставивши значення* $\varkappa(n)$ *в нерівність* (3.11), *одержимо:*

$$\sigma(h) = \frac{C}{\left(e\left(\frac{\ln(\ln\left(\frac{d-c}{2h}+1\right)+2)}{\ln 2}\right)^\lambda\right)^{\frac{1}{\mu}}}.$$

Тоді

$$\left\|\sup_{t\in[c,d]}|X(t)|\right\|_\psi \leqslant \inf_{t\in[c,d]}\sup_{u\geqslant 1}\frac{(E|X(t)|^u)^{1/u}}{(\ln(u+1))^\lambda} +$$

$$+ C\left(e\left(\frac{\ln(\ln\frac{3}{2}+2)}{\ln 2}\right)^\lambda\right)^{(\mu-1)/\mu}\frac{(1+\mu)^{\mu+1}}{\mu^\mu(1-\mu)} = B_3.$$

Із наслідку 3.3 і теореми 2.5 при $\varepsilon > 0$ *отримаємо:*

$$P\left\{\sup_{t\in[c,d]}|X(t)|>\varepsilon\right\}\leqslant e^{\lambda}\exp\left\{-\lambda\exp\left\{\left(\frac{x}{B_3}\right)^{1/\lambda}\frac{1}{e}\right\}\right\}. \qquad (3.15)$$

У багатьох випадках для процесу $X(t)$ оцінки (3.13) та (3.14) знайти важко. Набагато легше отримати оцінку вигляду $\sigma(h)=\overline{C}\,|h|^{\delta}$, де $\overline{C}$ – деяка константа, $0<\delta\leqslant 1$. Покажемо, як із цих оцінок отримати оцінки з прикладів 3.7 та 3.8.

Приклад 3.10. *Розглянемо простір* $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$, *де* $\psi(u)=u^{\alpha}$, $\alpha>1$. *У цьому випадку* $\varkappa(n)=\left(\frac{e}{\alpha}\right)^{\alpha}(\ln n)^{\alpha}$. *При* $x>0$ *та* $0\leqslant\tau\leqslant 1$ *справджується нерівність:*

$$\ln(1+x)=\frac{\tau}{\tau}\ln(1+x)=\frac{1}{\tau}\ln(1+x)^{\tau}\leqslant\frac{1}{\tau}\ln(1+x^{\tau})\leqslant\frac{x^{\tau}}{\tau},$$

яка буде використана надалі. При $\tau<\frac{\delta}{\alpha}$ *з наслідку 3.2 випливає, що*

$$\varkappa\left(\frac{d-c}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)=\left(\frac{e}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\ln\left(\frac{d-c}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\right)^{\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{e}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\left(\frac{d-c}{2\sigma^{(-1)}(u)}\right)^{\tau}\frac{1}{\tau}\right)^{\alpha}=\left(\frac{e}{\alpha\tau}\right)^{\alpha}\left(\frac{d-c}{2}\right)^{\alpha\tau}\left(\left(\frac{\overline{C}}{u}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right)^{\alpha\tau}=$$

$$=\left(\frac{e}{\alpha\tau}\right)^{\alpha}\left(\frac{d-c}{2}\right)^{\alpha\tau}\overline{C}^{\frac{\alpha\tau}{\delta}}u^{-\frac{\alpha\tau}{\delta}}=A(\alpha,\tau,\delta)u^{-\frac{\alpha\tau}{\delta}},$$

де $A(\alpha,\tau,\delta)=\left(\frac{e}{\alpha\tau}\right)^{\alpha}\left(\frac{d-c}{2}\right)^{\alpha\tau}\overline{C}^{\frac{\alpha\tau}{\delta}}$. *Тоді*

$$\int_0^{\gamma p}\varkappa\left(\frac{d-c}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)du\leqslant A(\alpha,\tau,\delta)\int_0^{\gamma p}u^{-\frac{\alpha\tau}{\delta}}du=A(\alpha,\tau,\delta)\frac{(\gamma p)^{1-\frac{\alpha\tau}{\delta}}}{1-\frac{\alpha\tau}{\delta}}.$$

Отже, нерівність (3.9) *має вигляд*

$$\left\|\sup_{t\in[c,d]}|X(t)|\right\|_{\psi}\leqslant\widetilde{B}(p,\alpha,\tau,\delta),$$

де $\widetilde{B}(p,\alpha,\tau,\delta)=\inf_{t\in[c,d]}\sup_{u\geqslant 1}\frac{(E|X(t)|^{u})^{1/u}}{u^{\alpha}}+\frac{A(\alpha,\tau,\delta)(\gamma p)^{1-\frac{\alpha\tau}{\delta}}}{p(1-p)\left(1-\frac{\alpha\tau}{\delta}\right)}$, $\gamma=\overline{C}\,|d-c|^{\delta}$.

Крім того, з теореми 2.3 при $\varepsilon \geqslant e^{\alpha}\widetilde{B}(p,\alpha,\tau,\delta)$ *отримаємо:*

$$P\left\{\sup_{t\in[c,d]}|X(t)|>\varepsilon\right\}\leqslant \exp\left\{-\frac{\alpha}{e}\left(\frac{\varepsilon}{\widetilde{B}(p,\alpha,\tau,\delta)}\right)^{1/\alpha}\right\}.$$

Приклад 3.11. *Розглянемо простір* $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$, *де* $\psi(u)=e^{au^{\beta}}$, $a>0$, $\beta>0$. *У цьому випадку* $\varkappa(n)=\frac{1}{e^{a}}\exp\left\{S(a,\beta)(\ln n)^{\frac{\beta}{\beta+1}}\right\}$, *де* $S(a,\beta)=(\beta a)^{\frac{1}{\beta+1}}(\beta^{-1}+1)$. *Із наслідку 3.2 випливає, що*

$$\varkappa\left(\frac{d-c}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)=\frac{1}{e^{a}}\exp\left\{S(a,\beta)\left(\ln\left(\frac{D}{u^{\frac{1}{\delta}}}+1\right)\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}\right\},$$

де $D=\frac{\overline{C}^{\frac{1}{\delta}}(d-c)}{2}$, *тоді, підставляючи дане значення в нерівність* (3.9), *маємо:*

$$\int_{0}^{\gamma p}\varkappa\left(\frac{d-c}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)du=\int_{0}^{\gamma p}\frac{1}{e^{a}}\exp\left\{S(a,\beta)\left(\ln\left(\frac{D}{u^{\frac{1}{\delta}}}+1\right)\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}\right\}du\leqslant$$

$$\leqslant\int_{0}^{\gamma p}\frac{1}{e^{a}}\exp\left\{S(a,\beta)\ln\left(\frac{D}{u^{\frac{1}{\delta}}}+1\right)\left(\ln\left(\frac{D}{u^{\frac{1}{\delta}}}+1\right)\right)^{-\frac{1}{\beta+1}}\right\}du=$$

$$=\frac{1}{e^{a}}\int_{0}^{\gamma p}\left(\frac{D}{u^{\frac{1}{\delta}}}+1\right)^{S(a,\beta)\left(\ln\left(\frac{D}{u^{\frac{1}{\delta}}}+1\right)\right)^{-\frac{1}{\beta+1}}}du=I(a,\beta,\delta).$$

Інтеграл $I(a,\beta,\delta)$ *збіжний при будь-яких* $a>0$, $\beta>0$ *і* $\delta>0$, *оскільки* $\left(\ln\left(\frac{D}{u^{\frac{1}{\delta}}}+1\right)\right)^{\frac{1}{\beta+1}}\to 0$ *при* $u\to 0$. *Отже, нерівність* (3.9) *перепишеться так:*

$$\left\|\sup_{t\in[c,d]}|X(t)|\right\|_{\psi}\leqslant\widetilde{B}(p,a,\beta,\delta),$$

де $\widetilde{B}(p,a,\beta,\delta)=\inf\limits_{t\in[c,d]}\sup\limits_{u\geqslant 1}\frac{(E|X(t)|^{u})^{1/u}}{e^{au^{\beta}}}+\frac{I(a,\beta,\delta)}{p(1-p)}$, $\gamma=\overline{C}\,|d-c|^{\delta}$.

Крім того, з теореми 2.4 при $\varepsilon\geqslant e^{a(\beta+1)}$ *отримаємо:*

$$P\left\{\sup_{t\in[c,d]}|X(t)|>\varepsilon\right\}\leqslant\exp\left\{-\frac{\beta}{a^{1/\beta}}\left(\frac{\ln\frac{x}{\widetilde{B}(p,a,\beta,\delta)}}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}\right\}.$$

Приклад 3.12. *Розглянемо випадковий процес* $X = \{X(t), t \in T\}$, *де* $X(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k L_k(t)$, $\xi_k \in \mathbf{F}_\psi(\Omega)$, $t \in [c,d]$. *Функції* $L_k(t)$ *задовольняють умові Ліпшиця:*

$$|L_k(t) - L_k(s)| \leqslant C_k \, |t-s|^\gamma \, ,$$

де γ *– деяка константа,* $0 < \gamma \leqslant 1$, *а* $C_k > 0$, *тоді*

$$\big\|X(t) - X(s)\big\|_\psi \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|\xi_k\|_\psi \, |L_k(t) - L_k(s)| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|\xi_k\|_\psi \, C_k\right) |t-s|^\gamma \, .$$

Отже, якщо є збіжним ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|\xi_k\| \, C_k$, *тоді*

$$\sup_{\substack{|t-s|\leqslant h\\ t,s\in[c,d]}} \big\|X(t) - X(s)\big\|_\psi \leqslant \widehat{C} h^\gamma,$$

де $\widehat{C} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|\xi_k\|_\psi \, C_k$.

Отже, до процесу $X(t)$ можна застосувати оцінки з прикладів 3.10 і 3.11. Якщо ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|\xi_k\| \, C_k$ розбіжний, тоді проілюструємо, як можна отримати подібні оцінки. З цією метою розглянемо таку лему. Нехай для простоти $\gamma = 1$.

Лема 3.1. *Нехай для функцій* $Y_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, $t \in [c,d]$ *виконуються умови:*

1. $\sup\limits_{t\in[c,d]} |Y_k(t)| \leqslant B_k$;

2. $\sup\limits_{\substack{|t-s|\leqslant h\\ t,s\in[c,d]}} |Y_k(t) - Y_k(s)| \leqslant \check{C}_k h$.

Крім того, функція $\varphi(\lambda)$, $\lambda > 0$ *– неперервна, зростаюча і функція* $\frac{\lambda}{\varphi(\lambda)}$ *зростає при* $\lambda > 0$. *Тоді справджується нерівність:*

$$\sup_{\substack{|t-s|\leqslant h\\ t,s\in[c,d]}} |Y_k(t) - Y_k(s)| \leqslant \max\left(1, 2B_k\right) \frac{\varphi(\check{C}_k)}{\varphi\left(\frac{1}{|h|}\right)}.$$

Доведення. З умови леми маємо, що $|Y_k(t) - Y_k(s)| \leqslant \check{C}_k \, |t-s|$ і $|Y_k(t)| <$

B_k. Розглянемо два випадки. В першому, якщо $\check{C}_k > \frac{1}{|t-s|}$, тоді

$$\frac{|Y_k(t) - Y_k(s)|}{2B_k} \leqslant \frac{|Y_k(t)| + |Y_k(s)|}{2B_k} \leqslant 1 \leqslant \frac{\varphi(\check{C}_k)}{\varphi\left(\frac{1}{|t-s|}\right)}.$$

В другому, якщо $\check{C}_k \leqslant \frac{1}{|t-s|}$, тоді

$$|Y_k(t) - Y_k(s)| \leqslant \check{C}_k\, |t-s| = \frac{\check{C}_k}{|t-s|^{-1}} \leqslant \frac{\varphi(\check{C}_k)}{\varphi\left(\frac{1}{|t-s|}\right)}.$$

З нерівностей, отриманих в обох випадках, випливає справедливість даної леми. □

Приклад 3.13. *Якщо в лемі 3.1 покласти* $Y_k(t) = L_k(t)$ *та* $\varphi(\lambda) = \lambda^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, *тоді (оскільки в цьому випадку* $\frac{\lambda}{\varphi(\lambda)}$ *зростає при* $\lambda > 0$*) справджується нерівність:*

$$\sup_{|t-s|\leqslant h} |L_k(t) - L_k(s)| \leqslant \max\left(1, 2B_k\right) \check{C}_k{}^{\alpha} h^\alpha,$$

де $B_k = \sup\limits_{t\in[c,d]} |L_k(t)|$.

Таким чином,

$$\left\|X(t) - X(s)\right\|_\psi \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left\|\xi_k\right\|_\psi \check{C}_k{}^{\alpha} \max\left(1, 2B_k\right)\right) h^\alpha.$$

Якщо $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|\xi_k\|\, \check{C}_k{}^{\alpha} \max\left(1, 2B_k\right) = \widetilde{C}$, тоді $\sigma(h) = \widetilde{C}\, |h|^\alpha$. Отже, для оцінки супремумів $X(t)$ можна застосовувати формули з прикладів 3.10, 3.11 і 3.12.

Приклад 3.14. *Нехай у прикладі 3.12 випадкові величини незалежні, а для простору* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ *виконується умова* $\mathbf{H}$, *тоді*

$$\left\|X(t) - X(s)\right\|_\psi^2 \leqslant C_\psi \sum_{k=1}^{\infty} \left\|\xi_k\right\|_\psi^2 \left(L_k(t) - L_k(s)\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_\psi \sum_{k=1}^{\infty} \left\|\xi_k\right\|_\psi^2 C_k^2\, |t-s|^{2\gamma} = C_\psi\, |t-s|^{2\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} \left\|\xi_k\right\|_\psi^2 C_k^2.$$

Якщо збігається ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|\xi_k\|_{\psi}^2 C_k^2$, *тоді*

$$\sup_{|t-s|\leqslant h} \left\|X(t) - X(s)\right\|_{\psi} \leqslant \check{C} h^{\gamma}, \text{ де } \check{C} = \sqrt{C_{\psi} \sum_{k=1}^{\infty} \|\xi_k\|_{\psi}^2 C_k^2}.$$

Отже, для оцінки розподілів супремумів процесу $X(t)$ можна застосувати формули з розділу 2 для просторів, де виконується умова **H**.

Приклад 3.15. *Нехай* $X(t)$ *– гауссів центрований процес,* $t \in [c, d]$, $EX(t)X(s) = B(t, s)$. *Позначимо* $\sigma^2(t) = B(t, t)$. *Розглянемо* $e^{X(t)} - e^{X(s)}$. *Нехай* $X(t) > X(s)$, *тоді*

$$e^{X(t)} - e^{X(s)} = e^{X(t)} \left(1 - e^{-(X(t)-X(s))}\right) \leqslant e^{X(t)} \left(X(t) - X(s)\right).$$

Отже, завжди

$$\left|e^{X(t)} - e^{X(s)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max\left(e^{X(t)}, e^{X(s)}\right) |X(t) - X(s)| \leqslant \left(e^{X(t)} + e^{X(s)}\right) |X(t) - X(s)| .$$

Розглянемо вираз

$$I(u) = \frac{\left(E\left|e^{X(t)} - e^{X(s)}\right|^u\right)^{\frac{1}{u}}}{\psi(u)} \leqslant \frac{\left(E\left(e^{X(t)} + e^{X(s)}\right)^u |X(t) - X(s)|^u\right)^{\frac{1}{u}}}{\psi(u)}.$$

Використовуючи нерівність Гельдера, де $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ *при* $q > 1$, *маємо*

$$I(u) \leqslant \frac{1}{\psi(u)} \left(E\left(e^{X(t)} + e^{X(s)}\right)^{pu}\right)^{\frac{1}{pu}} \left(E\left|X(t) - X(s)\right|^{qu}\right)^{\frac{1}{qu}} .$$

Нехай $\psi(u) = \exp\left\{u^{\beta}\right\}$ *і* $\omega > \frac{1}{\beta}$, *де* $\beta > 0$, *тоді*

$$I(u) \leqslant \frac{1}{(\psi(u))^{1-\omega}} \times$$

$$\times \left[\frac{\left(E\exp\left\{puX(t)\right\}\right)^{\frac{1}{pu}}}{(\psi(u))^{\omega}} + \frac{\left(E\exp\left\{puX(s)\right\}\right)^{\frac{1}{pu}}}{(\psi(u))^{\omega}}\right] \left(E\left|X(t) - X(s)\right|^{qu}\right)^{\frac{1}{qu}} .$$

Із нерівності $\left(E\exp\left\{puX(t)\right\}\right)^{\frac{1}{pu}} = \left(\exp\left\{\sigma^2(t)\frac{p^2u^2}{2}\right\}\right)^{\frac{1}{pu}} \leqslant \exp\left\{\frac{\sigma^2 pu}{2}\right\}$, *де* $\sigma^2 = \sup\limits_{t\in[c,d]} \sigma^2(t)$ *отримаємо, що*

$$\frac{\left(E\exp\left\{puX(t)\right\}\right)^{\frac{1}{pu}}}{\exp\left\{\omega u^{\beta}\right\}}\leqslant\exp\left\{\frac{\sigma^2 pu}{2}-\omega u^{\beta}\right\}.$$

Знайдемо супремум правої частини останньої нерівності. Супремум досягається в точці $u=\left(\frac{\sigma^2 p}{2\omega\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}$, *тоді*

$$\frac{\left(E\exp\left\{puX(t)\right\}\right)^{\frac{1}{pu}}}{\exp\left\{\omega u^{\beta}\right\}}\leqslant\exp\left\{\left(\frac{\sigma^2 p}{2}\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}}\left(\frac{1}{\beta\omega}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}\left(1-\frac{1}{\beta\omega}\right)\right\}.$$

Аналогічно оцінюється другий доданок. Отже,

$$I(u)\leqslant 2\exp\left\{\left(\frac{\sigma^2 p}{2}\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}}\left(\frac{1}{\beta\omega}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}\left(1-\frac{1}{\beta\omega}\right)\right\}\frac{\left(E\left|X(t)-X(s)\right|^{qu}\right)^{\frac{1}{qu}}}{\exp\left\{u^{\beta}(1-\omega)\right\}}.$$

Покладемо $\sigma^2(t,s)=E\left(X(t)-X(s)\right)^2$. *Розглянемо вираз*

$$\frac{\left(E\left|X(t)-X(s)\right|^{qu}\right)^{\frac{1}{qu}}}{\exp\left\{u^{\beta}(1-\omega)\right\}}=\frac{\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x|^{qu}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t,s)}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2(t,s)}\right\}dx\right)^{\frac{1}{qu}}}{\exp\left\{u^{\beta}(1-\omega)\right\}}.$$

Зробимо заміну $\frac{x}{\sigma}=v$, *тоді отримаємо:*

$$\frac{\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x|^{qu}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t,s)}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2(t,s)}\right\}dx\right)^{\frac{1}{qu}}}{\exp\left\{u^{\beta}(1-\omega)\right\}}=$$

$$=\frac{\left((\sigma(t,s))^{qu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|v|^{qu}\exp\left\{-\frac{v^2}{2}\right\}dv\right)^{\frac{1}{qu}}}{\exp\left\{u^{\beta}(1-\omega)\right\}}=$$

$$=\frac{\sigma(t,s)\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}v^{qu}\exp\left\{-\frac{v^2}{2}\right\}dv\right)^{\frac{1}{qu}}}{\exp\left\{u^{\beta}(1-\omega)\right\}}=\sigma(t,s)\frac{\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}2^{\frac{qu}{2}+\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{qu}{2}+\frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{qu}}}{\exp\left\{u^{\beta}(1-\omega)\right\}}.$$

Нехай $C(\beta,\omega) = \sup\limits_{u\geqslant 1} \frac{\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^{\frac{qu}{2}+\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{qu}{2}+\frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{qu}}}{\exp\{u^\beta(1-\omega)\}}$. *Отже,*

$$\left\| e^{X(t)} - e^{X(s)} \right\| = \sup_{u\geqslant 1} I(u) \leqslant Z\sigma(t,s),$$

де $Z = 2C(\beta,\omega)\exp\left\{ \left(\frac{\sigma^2 p}{2}\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}} \left(\frac{1}{\beta\omega}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} \left(1-\frac{1}{\beta\omega}\right) \right\}$,
$\sigma(t,s) = \sqrt{E\left(X(t)-X(s)\right)^2}$. *Якщо*

$$\sigma(t,s) \leqslant \Delta \left|t-s\right|^\gamma, \tag{3.16}$$

де Δ *– деяка константа, то для знаходження супремума процесу* $X(t)$ *можна використати приклади 3.8 та 3.11.*

Приклад 3.16. *Нехай у прикладі 3.15* $X(t)$ *– стаціонарний гауссів процес,* $EX(t) = 0$, $EX(t)X(s) = B(t-s)$. *Очевидно, що*

$$E\left|X(t)-X(s)\right|^2 = EX^2(t) + EX^2(s) - 2EX(t)X(s) = 2\left(B(0)-B(t-s)\right).$$

Нехай $F(\lambda)$ *– спектральна функція процесу* $X(t)$, *тобто* $B(\tau) = \int\limits_0^\infty \cos\lambda\tau dF(\lambda)$, *тоді*

$$B(0)-B(\tau) = \int\limits_0^\infty (1-\cos\lambda\tau)dF(\lambda) = \int\limits_0^\infty 2\sin^2\frac{\lambda\tau}{2}dF(\lambda).$$

Має місце нерівність $|\sin u| \leqslant |u|^\gamma$, *де* γ *– будь-яке число,* $0 < \gamma < 1$. *Таким чином,*

$$B(0)-B(\tau) \leqslant \int\limits_0^\infty 2\left(\frac{\lambda\left|\tau\right|}{2}\right)^{2\gamma} dF(\lambda) = 2^{1-2\gamma}\left|\tau\right|^{2\gamma} \int\limits_0^\infty \lambda^{2\gamma} dF(\lambda).$$

Якщо $\int\limits_0^\infty \lambda^{2\gamma}dF(\lambda) < \infty$, *то*

$$\left(E\left|X(t)-X(s)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \acute{C}\left|t-s\right|^\gamma,$$

де $\acute{C} = 2^{\frac{1-2\gamma}{2}} \left(\int\limits_0^\infty \lambda^{2\gamma}dF(\lambda)\right)^{\frac{1}{2}}$. *Тобто виконується умова* (3.16).

3.2. Ймовірності великих відхилень для сум незалежних випадкових процесів із просторів $\mathbf{F}_\psi^*(\Omega)$

Наведемо лему, яка буде використана далі.

Лема 3.2. *Нехай* $\xi \in \mathbf{F}_\psi(\Omega)$, $p \geqslant 1$. *Тоді*

$$\|E\,|\xi|\|_\psi \leqslant \|\xi\|_\psi\,. \tag{3.17}$$

Доведення. Якщо m – довільна константа, тоді

$$\|m\|_\psi = \sup_{u\geqslant 1}\frac{\left(E\,|m|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} = \sup_{u\geqslant 1}\frac{m}{\psi(u)} = \frac{m}{\psi(1)}. \tag{3.18}$$

З означення норми $\|\xi\|_\psi$ випливає, що

$$E\,|\xi| \leqslant \|\xi\|_\psi\,\psi(1). \tag{3.19}$$

Отже, справедливість леми випливає з рівності (3.18) і нерівності (3.19).□

Теорема 3.2. *Нехай* (T,ρ) *– компактний метричний простір,* $Y = \{Y(t),\ \ t\in T\}$ *– випадковий процес, який належить простору* $\mathbf{F}_\psi^*(\Omega)$ *і для якого виконується умова* **H** *з константою* C_ψ, Y *– сепарабельний процес на* (T,ρ). *Крім того, нехай існує неперервна монотонно зростаюча функція* $\sigma(h)$ $(\sigma(0)=0)$ *така, що*

$$\sup_{\rho(t,s)\leqslant h}\left\|Y(t)-Y(s)\right\|_\psi \leqslant \sigma(h)$$

і для будь-якого $z>0$ *виконується умова*

$$\int\limits_0^z \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du < \infty,$$

де $\varkappa(n)$ *– мажоруюча характеристика простору* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Нехай $X(t) = Y(t) - m(t)$, *де* $m(t) = EX(t)$ *і* $X_k(t)$ *– незалежні копії процесу* $X(t)$, $S_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^n X_k(t)$.

Тоді для будь-якого $0<p<1$ *справджується нерівність:*

$$\left\|\sup_{t\in T}|S_n(t)|\right\|_\psi \leqslant \widehat{B}(p),$$

де $\widehat{B}(p) = 2\sqrt{C_\psi}\inf\limits_{t\in T}\|Y(t)\|_\psi + \frac{1}{p(1-p)}\int\limits_0^{\gamma p}\varkappa\left(N\left(\sigma_1^{(-1)}(u)\right)\right)du$,
$\gamma = \sigma_1\left(\sup\limits_{t,s\in T}\rho(t,s)\right) = 2\sqrt{C_\psi}\sigma\left(\sup\limits_{t,s\in T}\rho(t,s)\right)$.

Доведення. Із означення 2.5 маємо, що

$$\|S_n(t)-S_n(s)\|_\psi^2 = \left\|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n (X_k(t)-X_k(s))\right\|_\psi^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_\psi\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \|X_k(t)-X_k(s)\|_\psi^2 = C_\psi\|X(t)-X(s)\|_\psi^2$$

і

$$\|X(t)-X(s)\|_\psi^2 = \|Y(t)-Y(s)-(m(t)-m(s))\|_\psi^2 \leqslant$$

$$\leqslant\left(\|Y(t)-Y(s)\|_\psi + \|m(t)-m(s)\|_\psi\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant\left(\|Y(t)-Y(s)\|_\psi + \frac{|m(t)-m(s)|}{\psi(1)}\right)^2.$$

З леми 3.2 випливає, що

$$|m(t)-m(s)| \leqslant E\|Y(t)-Y(s)\|_\psi \leqslant \|Y(t)-Y(s)\|_\psi\,\psi(1).$$

Тоді

$$\|S_n(t)-S_n(s)\|_\psi^2 \leqslant 4C_\psi\|Y(t)-Y(s)\|_\psi^2.$$

Отже,

$$\sup_{\rho(t,s)\leqslant h}\left\|S_n(t)-S_n(s)\right\|_\psi \leqslant \sigma_1(h),$$

де $\sigma_1(h) = 2\sqrt{C_\psi}\sigma(h)$.

Очевидно, що при будь-якому $t_0 \in T$

$$\|X(t_0)\|_\psi^2 \leqslant 4C_\psi\|Y(t_0)\|_\psi^2. \qquad \square$$

Тому справедливість теореми випливає з теореми 3.1.

Наслідок 3.4. *Якщо для процесу $X = \{X(t),\ t\in T\}$, який належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ виконуються умови теореми 3.2, тоді для будь-якого*

$\varepsilon > 0$ *справджується нерівність:*

$$P\left\{\sup_{t\in T}|S_n(t)| > \varepsilon\right\} \leqslant \inf_{u\geqslant 1}\frac{\widehat{B}^u(p)(\psi(u))^u}{\varepsilon^u}.$$

Доведення. Справедливість наслідку 3.4 випливає з наслідку 3.1. □

3.3. Розподіл супремумів приростів випадкових процесів із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$

Нехай (T,ρ) – компактний метричний простір, V_{θ_l} – мінімальне покриття множини T кулями радіуса не більше θ_l, де $\theta_l = \sigma^{(-1)}(bp^l)$, $b = \sup\limits_{t,s\in T}\rho(t,s)$, $0 < p < 1$.

Теорема 3.3. *Нехай $X = \{X(t), t \in T\}$ – сепарабельний випадковий процес на (T,ρ) з простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ і виконується умова*

$$\sup_{\rho(t,s)\leqslant h}\left\|X(t)-X(s)\right\|_\psi \leqslant \sigma(h), \tag{3.20}$$

де $\sigma(h)$ неперервна монотонно зростаюча функція, така що $\sigma(0) = 0$. Якщо для будь-якого $z > 0$ має місце умова

$$\int\limits_0^z \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du < \infty, \tag{3.21}$$

де $\varkappa(n)$ – мажоруюча характеристика, $\sigma^{(-1)}(u)$ – обернена функції до $\sigma(u)$, $0 < \theta \leqslant z$ – деяке число, тоді справджується нерівність

$$\left\|\sup_{\rho(t,s)\leqslant\theta}|X(t)-X(s)|\right\|_\psi \leqslant \varkappa\left(D_k(\theta,p)\right)\sigma(\theta)\frac{3-p}{1-p}+$$

$$+2\frac{1}{p(1-p)}\int\limits_0^{\sigma(\theta)p}\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du = S_k(\theta,p),$$

де $D_k(\theta,p)$ – число точок u, v з V_{θ_k}, таких що $\|X(u)-X(v)\| \leqslant \sigma(\theta)\frac{3-p}{1-p}$ та при будь-якому $\varepsilon > 0$ виконується нерівність:

$$P\left\{\sup_{\rho(t,s)\leqslant\theta}|X(t)-X(s)| > \varepsilon\right\} \leqslant \inf_{u\geqslant 1}\frac{\left(S_k(\theta,p)\right)^u(\psi(u))^u}{\varepsilon^u}. \tag{3.22}$$

Доведення. Зауважимо, що справедливі нерівності:

$$\sigma(\theta_k) < \sigma(\theta) \leqslant \sigma(\theta_{k-1}),\ bp^k < \sigma(\theta) \leqslant bp^{k-1},$$

де k – таке ціле число, що $\theta_k < \theta \leqslant \theta_{k-1}$. Позначимо $V_k = \bigcup\limits_{j=k}^{\infty} V_{\theta_j}$. Оскільки за умови (3.20) процес неперервний за ймовірністю (див. доведення теореми 3.1), тоді V_k – сепаранта, тому

$$\sup_{\substack{\rho(t,s)\leqslant\theta \\ t,s\in T}} |X(t) - X(s)| = \sup_{\substack{\rho(t,s)\leqslant\theta \\ t,s\in V_k}} |X(t) - X(s)|\,.$$

Нехай t та s – такі точки, що $t, s \in V_k$ та $\rho(t,s) \leqslant \theta$. Оскільки t та s належать V_k, то існують такі $m \geqslant k$ та $r \geqslant k$, що $t \in V_{\theta_m}$, а $s \in V_{\theta_r}$. Позначимо $t_m = t$, $t_{m-1} = \alpha_{m-1}(t_m)$, $t_{m-2} = \alpha_{m-2}(t_{m-1})$, $\ldots$, $t_k = \alpha_k(t_{k+1})$ і $s_r = s$, $s_{r-1} = \alpha_{r-1}(s_r)$, $s_{r-2} = \alpha_{r-2}(s_{r-1})$, $\ldots$, $s_k = \alpha_k(s_{k+1})$. Очевидно, що має місце рівність:

$$X(t) - X(s) =$$
$$= \sum_{l=k}^{m-1} (X(t_{l+1}) - X(t_l)) + (X(t_k) - X(s_k)) - \sum_{l=k}^{r-1} (X(s_{l+1}) - X(s_l))\,. \tag{3.23}$$

З рівності (3.23) маємо:

$$|X(t_k) - X(s_k)| \leqslant |X(t) - X(s)| + \sum_{l=k}^{m-1} |X(t_{l+1}) - X(t_l)| +$$
$$+ \sum_{l=k}^{r-1} |X(s_{l+1}) - X(s_l)|\,.$$

Отже,

$$\|X(t_k) - X(s_k)\| \leqslant \|X(t) - X(s)\| + \sum_{l=k}^{m-1} \|X(t_{l+1}) - X(t_l)\| +$$

$$+\sum_{l=k}^{r-1}\|X(s_{l+1})-X(s_l)\| \leqslant \sigma(\theta)+\sum_{l=k}^{m-1}\sigma(\theta_l)+\sum_{l=k}^{r-1}\sigma(\theta_l) \leqslant \sigma(\theta)+2\sum_{l=k}^{\infty}\sigma(\theta_l) =$$

$$=\sigma(\theta)+2\sum_{l=k}^{\infty}bp^l=\sigma(\theta)+2b\frac{p^k}{1-p} \leqslant \sigma(\theta)+2\sigma(\theta)\frac{1}{1-p}=\sigma(\theta)\frac{3-p}{1-p}.$$

Тоді з рівності (3.23) отримаємо нерівність:

$$|X(t)-X(s)| \leqslant \sum_{l=k}^{m-1}|X(t_{l+1})-X(t_l)|+\sum_{l=k}^{r-1}|X(s_{l+1})-X(s_l)|+$$

$$+|X(t_k)-X(s_k)| \leqslant \sum_{l=k}^{m-1}\max_{u\in V_{\theta_{l+1}}}|X(u)-X(\alpha_l(u))|+$$

$$+\sum_{l=k}^{r-1}\max_{u\in V_{\theta_{l+1}}}|X(u)-X(\alpha_l(u))|+\max_{\substack{u,v\in V_{\theta_k}\\ \|X(u)-X(v)\|\leqslant\sigma(\theta)\frac{3-p}{1-p}}}|X(u)-X(v))| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\substack{u,v\in V_{\theta_k}\\ \|X(u)-X(v)\|\leqslant\sigma(\theta)\frac{3-p}{1-p}}}|X(u)-X(v))|+2\sum_{l=k}^{\infty}\max_{u\in V_{\theta_{l+1}}}|X(u)-X(\alpha_l(u))|\,. \tag{3.24}$$

Оскільки останній вираз у нерівності (3.24) не залежить від $t,s\in V_k$, таких що $\rho(t,s)\leqslant\theta$, тоді, враховуючи сепарабельність процесу X, з імовірністю одиниця дістанемо нерівність:

$$\sup_{\substack{\rho(t,s)\leqslant\theta\\ t,s\in T}}|X(t)-X(s)|=\sup_{\substack{\rho(t,s)\leqslant\theta\\ t,s\in V_k}}|X(t)-X(s)| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\substack{u,v\in V_{\theta_k}\\ \|X(u)-X(v)\|\leqslant\sigma(\theta)\frac{3-p}{1-p}}}|X(u)-X(v)|+2\sum_{l=k}^{\infty}\max_{u\in V_{\theta_{l+1}}}|X(u)-X(\alpha_l(u))|\,. \tag{3.25}$$

Із нерівності (3.25) та означення 2.3 отримаємо такі нерівності:

$$\left\|\sup_{\rho(t,s)\leqslant\theta}|X(t)-X(s)|\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \max_{\substack{u,v\in V_{\theta_k}\\ \|X(u)-X(v)\|\leqslant\sigma(\theta)\frac{3-p}{1-p}}} |X(u)-X(v)| \right\| + 2\sum_{l=k}^{\infty} \left\| \max_{u\in V_{\theta_{l+1}}} |X(u)-X(\alpha_l(u))| \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \varkappa\left(D_k(\theta,p)\right)\sigma(\theta)\frac{3-p}{1-p} + 2\sum_{l=k}^{\infty}\varkappa\left(N(\theta_{l+1})\right)\sigma(\theta_l).$$

Перетворимо другий доданок у правій частині останньої нерівності

$$\sum_{l=k}^{\infty}\varkappa\left(N(\theta_{l+1})\right)\sigma(\theta_l) = \sum_{l=k}^{\infty}\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(bp^{l+1})\right)\right)bp^l,$$

тоді дістанемо:

$$\int\limits_{bp^{l+2}}^{bp^{l+1}} \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du \geqslant \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(bp^{l+1})\right)\right)(bp^{l+1}-bp^{l+2}),$$

$$bp^l\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(bp^{l+1})\right)\right) \leqslant \frac{1}{p(1-p)}\int\limits_{bp^{l+2}}^{bp^{l+1}}\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du.$$

Отже,

$$\sum_{l=k}^{\infty}\varkappa\left(N(\theta_{l+1})\right)\sigma(\theta_l) \leqslant \frac{1}{p(1-p)}\int\limits_{0}^{bp^{k+1}}\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{p(1-p)}\int\limits_{0}^{p\sigma(\theta)}\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du.$$

Для завершення доведення теореми зауважимо, що нерівність (3.22) випливає з теореми 2.2. □

Наслідок 3.5. *Нехай виконуються умови теореми 3.3 і справджується умова $\sigma(\theta)\varkappa(D_k(\theta,p)) \to 0$ при $\theta \to 0$. Тоді*

$$\left\|\sup_{\rho(t,s)\leqslant\theta}|X(t)-X(s)|\right\| \to 0 \qquad (3.26)$$

при $\theta \to 0$. Крім того, випадковий процес $X(t)$ рівномірно неперервний *на (T,ρ) з імовірністю одиниця.*

Доведення. Оскільки з умови наслідку при $\theta \to 0$ маємо $S_k(\theta,p) \to 0$, тоді співвідношення (3.26) очевидне. З нерівності (3.22) випливає, що для будь-якого $u > 1$ справедлива оцінка

$$P\left\{\sup_{\rho(t,s)\leqslant\theta} |X(t)-X(s)| > \varepsilon\right\} \leqslant \frac{(S_k(\theta,p))^u\,(\psi(u))^u}{\varepsilon^u},$$

тоді при $\theta \to 0$ $\sup\limits_{\rho(t,s)\leqslant\theta} |X(t)-X(s)| \to 0$. Отже, існує така послідовність $\check{\theta}_n$, що $\check{\theta}_{n+1} < \check{\theta}_n$, $\check{\theta}_n \to 0$ при $n \to \infty$, і $\sup\limits_{\rho(t,s)\leqslant\check{\theta}_n} |X(t)-X(s)| \to 0$ при $n \to \infty$ з імовірністю одиниця. Оскільки $\sup\limits_{\rho(t,s)\leqslant\theta} |X(t)-X(s)|$ монотонно спадає по θ, тоді і $\sup\limits_{\rho(t,s)\leqslant\theta} |X(t)-X(s)| \to 0$ при $\theta \to 0$ з імовірністю одиниця. □

Теорема 3.4. *Нехай $X = \{X(t),\ t \in T\}$ – сепарабельний випадковий процес на (T,ρ) з простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u)$ – така вагова функція, що для мажоруючої характеристики простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ справедлива нерівність:*

$$\varkappa(n^2) \leqslant C\varkappa(n), \tag{3.27}$$

де $C > 0$ – деяка константа.

Якщо виконуються умови (3.20) та (3.21), тоді

$$\left\|\sup_{\rho(t,s)\leqslant\theta} |X(t)-X(s)|\right\|_\psi \leqslant A(C) \int\limits_0^{\sigma(\theta)} \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du = \check{S}_k(\theta), \tag{3.28}$$

де $A(C) = \frac{4\left(3C^2-12C+4\right)}{3C+2} \cdot \left(\frac{C+2}{C-2}\right)^2$.

Причому, для будь-якого $\varepsilon > 0$ справджується нерівність:

$$P\left\{\sup_{\rho(t,s)\leqslant\theta} |X(t)-X(s)| > \varepsilon\right\} \leqslant \inf_{u\geqslant 1} \frac{\left(\check{S}_k(\theta)\right)^u (\psi(u))^u}{\varepsilon^u}. \tag{3.29}$$

Крім того, випадковий процес $X(t)$ рівномірно неперервний на просторі (T,ρ) з імовірністю одиниця.

Доведення. Теорема 3.4 випливає з теореми 3.3. Дійсно,

$$D_k(\theta,p) \leqslant (N(\theta_k))^2 \leqslant \left(N\left(\sigma^{(-1)}(bp^k)\right)\right)^2,$$

тому

$$\sigma(\theta)\varkappa\left(D_k(\theta,p)\right) \leqslant \varkappa\left(N^2\left(\sigma^{(-1)}(bp^k)\right)\right)\sigma(\theta).$$

Оскільки виконується нерівність (3.27), тоді

$$\varkappa\left(N^2\left(\sigma^{(-1)}(bp^k)\right)\right)\sigma(\theta) \leqslant C\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(bp^k)\right)\right)\sigma(\theta). \tag{3.30}$$

Очевидно, що

$$\int\limits_{bp^{k+1}}^{bp^k} \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du \geqslant \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(bp^k)\right)\right)bp^k(1-p),$$

тому

$$\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(bp^k)\right)\right) \leqslant \frac{1}{bp^{k-1}p(1-p)}\int\limits_{bp^{k+1}}^{bp^k}\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sigma(\theta)p(1-p)}\int\limits_0^{\sigma(\theta)}\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du.$$

Отже, з нерівності (3.30) випливає:

$$\varkappa\left(D_k(\theta,p)\right)\sigma(\theta)\frac{3-p}{1-p} + \frac{2}{p(1-p)}\int\limits_0^{\sigma(\theta)p}\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du \leqslant$$

$$\leqslant \varkappa\left(N^2\left(\sigma^{(-1)}(bp^k)\right)\right)\sigma(\theta)\frac{3-p}{1-p} + \frac{2}{p(1-p)}\int\limits_0^{\sigma(\theta)}\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du \leqslant$$

$$\leqslant C\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(bp^k)\right)\right)\sigma(\theta)\frac{3-p}{1-p} + \frac{2}{p(1-p)}\int\limits_0^{\sigma(\theta)}\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{p(1-p)}\left(C\cdot\frac{3-p}{1-p}+2\right)\int\limits_0^{\sigma(\theta)}\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du.$$

Мінімум виразу $\frac{1}{p(1-p)}\left(C\cdot\frac{3-p}{1-p}+2\right)$ досягається в точці $p=\frac{3C+2}{2C+4}$. Підставляючи це значення в останню нерівність, отримаємо нерівність (3.28). А нерівність (3.29) випливає з теореми 2.2. Твердження про вибіркову неперервність доводиться аналогічно доведенню наслідку 3.5. $\square$

Зауваження 3.2. Умови теореми виконуються для функцій $\psi(u)=u^{\alpha}$, $\psi(u)=(\ln(u+1))^{\lambda}$. Якщо $\psi(u)=u^{\alpha}$, тоді $\varkappa(n^2)=2^{\alpha}\varkappa(n)$, тобто $C=2^{\alpha}$, а коли $\psi(u)=(\ln(u+1))^{\lambda}$, тоді $\varkappa(n^2)=\left(\frac{\ln(2(\ln n+1))}{\ln 2}\right)^{\lambda}e\leqslant 2^{\lambda}\varkappa(n)$, тобто $C=2^{\lambda}$.

Зауваження 3.3. Нехай $W(h),\ h>0$ – неперервна, монотонно спадна функція, причому $N(h)\leqslant W(h)$. Тоді умова (3.21) виконується, якщо

$$\int\limits_0^z \varkappa\left(W\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du<\infty. \tag{3.31}$$

Наслідок 3.6. *Нехай у теоремі 3.4*

$$\sigma(h)=\frac{R}{\left(\varkappa\left(W(h)\right)\right)^{1/\gamma}},$$

де γ – деяке число, таке що $0<\gamma<1$. Тоді

$$\left\|\sup_{\rho(t,s)\leqslant\theta}|X(t)-X(s)|\right\|\leqslant A(C)\frac{R}{1-\gamma}\left(\varkappa\left(W(\theta)\right)\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=Q(\theta,\gamma)$$

і для будь-якого $\varepsilon>0$ має місце нерівність:

$$P\left\{\sup_{\rho(t,s)\leqslant\theta}|X(t)-X(s)|>\varepsilon\right\}\leqslant\inf_{u\geqslant 1}\frac{(Q(\theta,\gamma))^u(\psi(u))^u}{\varepsilon^u}. \tag{3.32}$$

Доведення. Дійсно, в цьому випадку $\sigma^{(-1)}(u)=W^{(-1)}\left(\varkappa^{(-1)}\left(\frac{R^{\gamma}}{u^{\gamma}}\right)\right)$. Тоді

$$\int\limits_0^{\sigma(\theta)}\varkappa\left(W\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du=\int\limits_0^{\sigma(\theta)}\frac{R^{\gamma}}{u^{\gamma}}du=\frac{R^{\gamma}}{1-\gamma}\sigma(\theta)^{1-\gamma}<\infty. \tag{3.33}$$

$\square$

Приклад 3.17. *Якщо в наслідку 3.6 вагова функція зображується так: $\psi(u)=u^{\alpha}$, де $\alpha>0$, тоді при $\varepsilon\geqslant e^{\alpha}Q(\theta,\gamma)$*

$$P\left\{\sup_{\rho(t,s)\leqslant\theta}|X(t)-X(s)|>\varepsilon\right\}\leqslant\exp\left\{-\frac{\alpha}{e}\left(\frac{\varepsilon}{Q(\theta,\gamma)}\right)^{1/\alpha}\right\}$$

і, використовуючи значення мажоруючої характеристики, отримаємо:

$$\sigma(h)=R\left(\frac{e}{\alpha}\ln W(h)\right)^{-\alpha/\gamma},\ 0<\gamma<1.$$

Приклад 3.18. *Якщо в наслідку 3.6 вагова функція має вигляд* $\psi(u)=e^{au^{\beta}}$, *де* $a>0$, $\beta>0$, *тоді при* $\varepsilon>e^{a(\beta+1)}Q(\theta,\gamma)$

$$P\left\{\sup_{\rho(t,s)\leqslant\theta}|X(t)-X(s)|>\varepsilon\right\}\leqslant\exp\left\{-\frac{\beta}{a^{1/\beta}}\left(\frac{\ln\frac{\varepsilon}{Q(\theta,\gamma)}}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}\right\}$$

і використовуючи значення мажоруючої характеристики отримаємо:

$$\sigma(h)=R\cdot\exp\left\{-\frac{2}{\gamma}\sqrt{a\ln W(h)}+\frac{a}{\gamma}\right\},\ 0<\gamma<1.$$

Приклад 3.19. *Якщо в наслідку 3.6 вагова функція записується так:* $\psi(u)=(\ln(u+1))^{\lambda}$, *де* $\lambda>0$, *тоді при* $\varepsilon\geqslant(e\ln 2)^{\lambda}Q(\theta,\gamma)$

$$P\left\{\sup_{\rho(t,s)\leqslant\theta}|X(t)-X(s)|>\varepsilon\right\}\leqslant e^{\lambda}\exp\left\{-\lambda\exp\left\{\left(\frac{\varepsilon}{Q(\theta,\gamma)}\right)^{1/\lambda}\frac{1}{e}\right\}\right\}$$

і, використовуючи значення мажоруючої характеристики, отримаємо:

$$\sigma(h)=\frac{R}{\left(\frac{1}{e^{a}}\exp\left\{S(a,\beta)(\ln W(h))^{\frac{\beta}{\beta+1}}\right\}\right)^{\frac{1}{\mu}}},$$

де $S(a,\beta)=(\beta a)^{\frac{1}{\beta+1}}(\beta^{-1}+1)$, $0<\gamma<1$.

Теорема 3.5. *Нехай* $X=\{X(t),\ t\in[c,d]\}$, $c<d$ *– сепарабельний випадковий процес із простору* $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$ *і виконується умова* (3.27) *та:*

$$\sup_{\substack{|t-s|\leqslant h\\ t,s\in[c,d]}}\left\|X(t)-X(s)\right\|_{\psi}\leqslant\sigma(h),$$

де $\sigma=\{\sigma(h),\ h>0\}$ *– неперервна, монотонно зростаюча функція, та-*

ка що $\sigma(0) = 0$. Якщо для будь-якого $z > 0$ має місце умова

$$\int_0^z \varkappa\left(\frac{d-c}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right) du < \infty,$$

тоді справджується нерівність:

$$\left\|\sup_{t\in[c,d]} |X(t) - X(s)|\right\|_\psi \leqslant A(C)\frac{R}{1-\gamma}\left(\varkappa\left(\frac{d-c}{2\theta}+1\right)\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \tilde{Q}(\theta,\gamma).$$

Причому, для будь-якого $\varepsilon > 0$ має місце оцінка

$$P\left\{\sup_{t\in[c,d]} |X(t) - X(s)| > \varepsilon\right\} \leqslant \inf_{u\geqslant 1} \frac{\left(\tilde{Q}(\theta,\gamma)\right)^u (\psi(u))^u}{\varepsilon^u}. \tag{3.34}$$

Крім того, випадковий процес $X(t)$ рівномірно неперервний на просторі (T,ρ) з імовірністю одиниця.

Доведення. Теорема 3.5 випливає з теореми 3.4, оскільки метрична масивність відрізку $[c,d]$ оцінюється так:

$$N(u) \leqslant \frac{d-c}{2u} + 1.$$

□

Приклад 3.20. *Розглянемо простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u^\alpha$, $\alpha > 0$, тоді при*
$\varepsilon \geqslant e^\alpha A(C)\frac{R}{1-\gamma}\left(\frac{e}{\alpha}\ln\left(\frac{d-c}{2\theta}+1\right)\right)^{\frac{\alpha(\gamma-1)}{\gamma}}$ *маємо, що*

$$P\left\{\sup_{t\in[c,d]} |X(t) - X(s)| > \varepsilon\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{-\frac{\alpha}{e}\left(\frac{\varepsilon}{A(C)\frac{R}{1-\gamma}\left(\frac{e}{\alpha}\ln\left(\frac{d-c}{2\theta}+1\right)\right)^{\frac{\alpha(\gamma-1)}{\gamma}}}\right)^{1/\alpha}\right\}.$$

Аналогічні оцінки можна одержати у всіх прикладах, які були наведені вище.

Висновки до розділу 3

У розділі 3 знайдені оцінки розподілу супремумів на компакті випадкових процесів із просторів $\mathbf{F}_{\psi}^{*}(\Omega)$. Розглянуті ймовірності великих відхилень для сум незалежних випадкових процесів із просторів $\mathbf{F}_{\psi}^{*}(\Omega)$ і наведені приклади. Знайдені оцінки та умови вибіркової неперервності з імовірністю одиниця із цих просторів.

Розділ 4

Випадкові процеси з просторів Орліча випадкових величин

У розділі 4 розглядаються основні властивості просторів Орліча, зокрема просторів Орліча експоненціального типу. Досліджується зв'язок просторів Орліча з просторами $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Знаходяться нерівності великих відхилень для випадкових процесів із просторів Орліча.

4.1. Основні властивості просторів Орліча та зв'язок із просторами $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$

Означення 4.1. *[30] Скажемо, що C-функція U задовольняє* g*-умову, якщо існують константи $z_0 \geqslant 0$, $K > 0$ і $A > 0$ такі, що при $x \geqslant z_0$, $y \geqslant z_0$ має місце нерівність:*

$$U(x)U(y) \leqslant AU(Kxy).$$

Означення 4.2. *[30] C-функція Орліча $U = \{U(x),\ x \in \mathbb{R}\}$ називається N-функцією Орліча (N-функція), якщо виконуються такі умови:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{U(x)}{x} = 0;\ \lim_{x\to 0} \frac{U(x)}{x} = \infty.$$

Означення 4.3. *[134] Нехай $\varphi = \{\varphi(x),\ x \in \mathbb{R}\}$ – N-функція. Функція φ^* визначається умовою*

$$\varphi^*(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}}(xy - \varphi(y))$$

і називається перетворенням Юнга-Фенхеля відносно φ.

Приклад 4.1. *Функція $U(x) = a\,|x|^\alpha, x \in \mathbb{R}, a > 0, \alpha \geqslant 1$ задовольняє* g*-умову при $K = 1$, $A = a$ і $z_0 = 0$.*

C-функція $U(x) = \exp\{\varphi(x)\} - 1, x \in \mathbb{R}$, де $\varphi = (\varphi(x), x \in \mathbb{R})$ – довільна C-функція, яка задовольняє g-умову при $K = 1$, $A = 1$, $z_0 = 2$ (якщо $\varphi(x) = |x|^\alpha, \alpha \geqslant 1$, тоді $z_0 = 2^{1/\alpha}$).

Лема 4.1. *Нехай m – деяка константа. Тоді для будь-якого простору Орліча $m \in L_U(\Omega)$ і $\|m\|_U = \frac{|m|}{U^{(-1)}(1)}$.*

Лема 4.1 очевидна.

Лема 4.2. *Нехай ξ належить простору $L_U(\Omega)$. Тоді існує така константа d_U, що $E|\xi| \leqslant d_U \|\xi\|_U$.*

Ця лема є наслідком теореми 2.3.2 з [16].

Приклад 4.2. *Для функції $U(x) = |x|^p, p \geqslant 2$ ми маємо $d_U = 1$. Для $U(x) = \exp\{\varphi(x)\} - 1$, де $\varphi(x)$ є N-функцією ми маємо $d_U = \frac{2}{\varphi^{*(-1)}(1)}$. Тут $\varphi^{*(-1)}(x)$ – обернена функція до $\varphi^*(x)$, $x \in \mathbb{R}$ є перетворенням Юнга-Фенхеля функції $\varphi(x)$ (див. лема 2.3.3 з [16]).*

Наприклад: якщо $\varphi(x) = \frac{|x|^\alpha}{\alpha}, \alpha > 1$, тоді $\varphi^*(x) = \frac{|x|^\beta}{\beta}$, де $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = 1$, $\varphi^{*(-1)}(x) = (x\beta)^{1/\beta}$ і $\varphi^{*(-1)}(1) = (\beta)^{1/\beta}$. Якщо $\alpha = 2$, тоді $\beta = 2$ і $d_U = \sqrt{2}$. Якщо $\alpha = 4$, тоді $\beta = \frac{4}{3}$ і $d_U = \frac{3^{3/4}}{4^{1/4}}$.

Наслідок 4.1. [16] Нехай C-функція задовільняє g-умову з константами A, K і z_0. Тоді послідовність $(\varkappa(n),\ n \geqslant 1)$ є мажоруючою характеристикою простору $L_U(\Omega)$, якщо

$$\varkappa(n) = \begin{cases} n, & \text{якщо} \quad n \leqslant U(z_0), \\ K(1 + U(z_0)) \max\{1, A\} U^{(-1)}(n), & \text{якщо} \quad n > U(z_0). \end{cases}$$

Означення 4.4. *Для простору Орліча $L_U(\Omega)$ виконується умова* **H**, *якщо для будь-яких центрованих незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ із простору $L_U(\Omega)$ справедлива наступна нерівність:*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \right\|_U^2 \leqslant C_U \sum_{k=1}^{n} \|\xi_k\|_U^2,$$

де C_U – деяка абсолютна константа.

Приклади просторів Орліча, для яких виконується умова **H**:

- простори $L_p(\Omega), p \geqslant 2$, де $C_U = C_p = \sqrt{2}\left(\Gamma(p+1)/2\sqrt{\pi}\right)^{1/p}$ [155];

- простори $L_U(\Omega)$, де $U(x)$ такі C-функції, що існують $p > q \geqslant 2$, для яких $U(\sqrt[q]{x})$ – опукла, а $U(\sqrt[p]{x})$ – увігнута і $C_U = 2B_p$ [118], де $B_p = 2k^{\frac{1}{2}}$, а $2k$ – найменше парне число, не менше, ніж p (див. [43] с. 341);

- простори Орліча породжені C-функцією $U(x) = exp\{|x|^\alpha\} - 1$, де $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$ (див. [134] і [16]). У роботі Ю. В. Козаченка [61] показано, що при $\alpha \geqslant 2$ для цих просторів умова **H** не виконується.

Далі покажемо, що умова **H** виконується для деяких просторів Орліча $L_U(\Omega)$ таких, що функція $U(x)$, зростає як експонента при $x \to \infty$.

Розглянемо C-функцію Орліча

$$U(x) = \begin{cases} \left(\frac{e\alpha}{2}\right)^{2/\alpha} x^2, & \text{якщо } |x| \leqslant x_\alpha; \\ \exp\left\{|x|^\alpha\right\}, & \text{якщо } |x| > x_\alpha, \end{cases} \tag{4.1}$$

де $x_\alpha = \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{1/\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. $L_U(\Omega)$ – простір Орліча, що породжений функцією $U(x)$.

Розглянемо функцію $U_1(x) = \exp\left\{|x|^\alpha\right\}$, $0 < \alpha \leqslant 1$. Позначимо символом $\mathcal{S}_{U_1}(\Omega)$ – сім'ю ξ, для яких існує r така, що виконується $EU_1\left(\frac{\xi}{r}\right) < \infty$. Введемо на $\mathcal{S}_{U_1}(\Omega)$ функціонал

$$\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1} = \inf\left\{r > 0; EU_1\left(\frac{\xi}{r}\right) \leqslant 2\right\}.$$

Лема 4.3. *Для того, щоб $\xi \in L_U(\Omega)$ необхідно й достатньо, щоб $\xi \in \mathcal{S}_{U_1}(\Omega)$ і справджувалися нерівності:*

$$\|\xi\|_U \leqslant \left(e^{2/\alpha+2}\right)\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1}, \tag{4.2}$$

$$\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1} \leqslant \|\xi\|_U \left(e^{2/\alpha}+1\right)^{1/\alpha}. \tag{4.3}$$

Доведення. Спочатку доведемо нерівність (4.2). Нехай $r > 0$, тоді

$$EU\left(\frac{\xi}{r}\right) = EU\left(\frac{\xi}{r}\right)\mathbb{I}\left\{\frac{|\xi|}{r} \leqslant x_\alpha\right\} + EU\left(\frac{\xi}{r}\right)\mathbb{I}\left\{\frac{|\xi|}{r} > x_\alpha\right\} \leqslant$$
$$\leqslant U\left(x_\alpha\right) + E\exp\left\{\left|\frac{\xi}{r}\right|^\alpha\right\} = e^{2/\alpha} + E\exp\left\{\left|\frac{\xi}{r}\right|^\alpha\right\}.$$

Нехай тепер $r = \langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1}$, тоді $EU\left(\frac{\xi}{\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1}}\right) \leqslant e^{2/\alpha}+2$. Оскільки при $0 < \alpha < 1$ справджується нерівність $U(\alpha x) \leqslant \alpha\ U(x)$ (лема 2.2.2 з книги [16]), тоді

$$EU\left(\frac{\xi}{\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1}\left(e^{2\alpha}+2\right)}\right) \leqslant \frac{1}{e^{2\alpha}+2}EU\left(\frac{\xi}{\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1}}\right) \leqslant 1.$$

Отже,

$$\|\xi\|_U \leqslant \left(e^{2/\alpha+2}\right)\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1}. \tag{4.4}$$

Для перевірки справедливості нерівності (4.3) зауважимо, що

$$E\exp\left\{\left|\frac{\xi}{r}\right|^{\alpha}\right\} = E\exp\left\{\left|\frac{\xi}{r}\right|^{\alpha}\right\}\mathbb{I}\left\{\frac{|\xi|}{r} < x_\alpha\right\} +$$

$$+E\exp\left\{\left|\frac{\xi}{r}\right|^{\alpha}\right\}\mathbb{I}\left\{\frac{|\xi|}{r} \geqslant x_\alpha\right\} \leqslant \exp\left\{(x_\alpha)^{\alpha}\right\} + EU\left(\frac{\xi}{r}\right).$$

Покладемо $r = \|\xi\|_U$, тоді маємо:

$$E\exp\left\{\left|\frac{\xi}{\|\xi\|_U}\right|^{\alpha}\right\} \leqslant e^{2/\alpha} + 1. \tag{4.5}$$

Використовуючи нерівність $\exp\{|ax|\} - 1 \leqslant a(\exp\{|x|\} - 1)$, коли $0 < a \leqslant 1$, маємо:

$$E\exp\left\{\left|\frac{\xi}{\|\xi\|_U}\right|^{\alpha}\frac{1}{e^{2/\alpha}+1}\right\} - 1 \leqslant \frac{1}{e^{2/\alpha}+1}\left(E\exp\left\{\left|\frac{\xi}{\|\xi\|_U}\right|^{\alpha}\right\} - 1\right).$$

Отже, з нерівності (4.5) випливає, що

$$E\exp\left\{\left|\frac{\xi}{\|\xi\|_U}\right|^{\alpha}\frac{1}{e^{2/\alpha}+1}\right\} - 1 \leqslant \frac{1}{e^{2/\alpha}+1}\left(E\exp\left\{\left|\frac{\xi}{\|\xi\|_U}\right|^{\alpha}\right\} - 1\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{e^{2/\alpha}+1}\left(e^{2/\alpha}+1-1\right) = \frac{e^{2/\alpha}}{e^{2/\alpha}+1}.$$

Ми отримали

$$E\exp\left\{\left|\frac{\xi}{\|\xi\|_U\left(e^{2/\alpha}+1\right)^{1/\alpha}}\right|^{\alpha}\right\} \leqslant \frac{e^{2/\alpha}}{e^{2/\alpha}+1} + 1 \leqslant 2.$$

З цього випливає, що $\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1} \leqslant \|\xi\|_U\left(e^{2/\alpha}+1\right)^{1/\alpha}$. □

Лема 4.4. *Є справедливою нерівність*

$$\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1} \geqslant \alpha^{1/\alpha}e^{1/\alpha}\left(\sup_{n\geqslant 1}\frac{\left(E|\xi|^n\right)^{1/n}}{n^{1/\alpha}}\right)$$

при $0 < \alpha < 1$.

Доведення. Із нерівностей

$$x^n \exp\{-x^\alpha\} \leqslant \left(\frac{n}{\alpha}\right)^{n/\alpha} \exp\left\{-\frac{n}{\alpha}\right\},$$

$$x^n \leqslant \exp\{x^\alpha\} \left(\frac{n}{\alpha}\right)^{n/\alpha} \exp\left\{-\frac{n}{\alpha}\right\}$$

випливає, що

$$\frac{E\,|\xi|^n}{r^n} \leqslant E \exp\left\{\left(\frac{|\xi|}{r}\right)^\alpha\right\} \left(\frac{n}{\alpha}\right)^{n/\alpha} \exp\left\{-\frac{n}{\alpha}\right\},$$

$$E\,|\xi|^n \leqslant \langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1}^n\, 2 \left(\frac{n}{\alpha}\right)^{n/\alpha} \exp\left\{-\frac{n}{\alpha}\right\},$$

$$\left(E\,|\xi|^n\right)^{1/n} \leqslant \langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1}\, 2^{1/n} \left(\frac{n}{\alpha}\right)^{1/\alpha} \exp\left\{-\frac{1}{\alpha}\right\}.$$

Оскільки $\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1} = \inf\left\{r > 0; E\exp\left\{\left(\frac{\xi}{r}\right)^\alpha\right\}\right\} \leqslant 2$, тоді

$$\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1} \geqslant \left(E\,|\xi|^n\right)^{1/n} \frac{1}{2^{1/n}\left(\frac{n}{\alpha}\right)^{1/\alpha} \exp\left\{-\frac{1}{\alpha}\right\}} \geqslant \frac{\left(E\,|\xi|^n\right)^{1/n}}{n^{1/\alpha}} \alpha^{1/\alpha} e^{1/\alpha},$$

що й треба було довести. □

Лема 4.5. *При* $0 < \alpha < 1$ *справджується нерівність*

$$\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1} \leqslant \left(1 + \frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1/\alpha} e^{1/\alpha} \left(\sup_{n\geqslant 1} \frac{\left(E\,|\xi|^n\right)^{1/n}}{n^{1/\alpha}}\right).$$

Доведення. Із нерівності Ляпунова випливає, що при $0 < \alpha < 1$ має місце нерівність

$$E\,|\xi|^{n\alpha} \leqslant \left(E\,|\xi|^n\right)^\alpha.$$

Позначимо $J_\alpha = E\exp\left\{\frac{|\xi|^\alpha}{r^\alpha}\right\} - 1$. Отже,

$$J_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\,|\xi|^{n\alpha}}{n! r^{\alpha n}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(E\,|\xi|^n\right)^\alpha}{n! r^{\alpha n}}.$$

Нехай $\hat{z} = \sup\limits_{n\geqslant 1} \frac{(E|\xi|^n)^{1/n}}{n^{1/\alpha}}$. Оскільки $E\,|\xi|^n \leqslant \hat{z}^n n^{n/\alpha}$, тоді $J_\alpha \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{z}^{n\alpha} n^n}{n! r^{\alpha n}}$. Із формули Стірлінга маємо, що

$$J_\alpha \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\hat{z}^\alpha e}{r^\alpha}\right)^n \frac{e^{1/12n}}{\sqrt{2\pi n}} \leqslant \frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\hat{z}^\alpha e}{r^\alpha}\right)^n.$$

Покладемо $r = \frac{1}{s^{1/\alpha}} \hat{z} e^{1/\alpha}$, де $0 < s < 1$, тоді

$$J_\alpha \leqslant \frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} s^n = \frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}} \frac{s}{1-s}.$$

Якщо покласти $s = \frac{1}{\left(1+\frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}}\right)}$, тоді отримаємо:

$$E \exp\left\{ \frac{|\xi|^\alpha}{\left(\frac{1}{s^{1/\alpha}} \hat{z} e^{1/\alpha}\right)^\alpha} \right\} \leqslant 2.$$

Із цих міркувань випливає, що справедливим є твердження леми. $\square$

Теорема 4.1. *Простори Орліча $L_U(\Omega)$, де функція $U(x)$ задана як (4.1), містять ті ж самі елементи, що і простори $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u^{1/\alpha}$, $\alpha > 0$, причому норми в цих просторах – еквівалентні та мають місце нерівності:*

$$\|\xi\|_U \leqslant C_{\psi U} \|\xi\|_\psi, \tag{4.6}$$

$$\|\xi\|_U \geqslant C_{U\psi} \|\xi\|_\psi, \tag{4.7}$$

де $C_{\psi U} = e^{2/\alpha+2}\left(1 + \frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1/\alpha} e^{1/\alpha}$, $C_{U\psi} = \frac{1}{2^{1/\alpha}}\left(e^{2/\alpha}+1\right)^{-1/\alpha} \alpha^{1/\alpha} e^{1/\alpha}$.

Доведення. Теорема випливає з лем 4.3, 4.4 і 4.5. Із лем 4.3, 4.5 маємо, що

$$\|\xi\|_U \leqslant e^{2/\alpha+2}\left(1 + \frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1/\alpha} e^{1/\alpha} \left(\sup_{n\geqslant 1} \frac{\left(E|\xi|^n\right)^{1/n}}{n^{1/\alpha}}\right),$$

а з лем 4.3, 4.4 випливає нерівність

$$\|\xi\|_U \geqslant \left(e^{2/\alpha}+1\right)^{-1/\alpha} \alpha^{1/\alpha} e^{1/\alpha} \left(\sup_{n\geqslant 1} \frac{\left(E|\xi|^n\right)^{1/n}}{n^{1/\alpha}}\right).$$

Легко бачити, що $\sup\limits_{n\geqslant 1} \frac{(E|\xi|^n)^{1/n}}{n^{1/\alpha}} \leqslant \sup\limits_{u\geqslant 1} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{u^{1/\alpha}} = \|\xi\|_\psi$. Тоді

$$\sup_{u\geqslant 1} \frac{\left(E|\xi|^u\right)^{1/u}}{u^{1/\alpha}} \leqslant \sup_{n\geqslant 2} \sup_{n-1\leqslant u\leqslant n} \frac{\left(E|\xi|^u\right)^{1/u}}{u^{1/\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{n\geqslant 2} \frac{\left(E\left|\xi\right|^n\right)^{1/n}}{(n-1)^{1/\alpha}} \leqslant 2^{1/\alpha} \sup_{n\geqslant 1} \frac{\left(E\left|\xi\right|^n\right)^{1/n}}{n^{1/\alpha}},$$

тому справджуються нерівності (4.6) і (4.7). □

Теорема 4.2. *Для простору Орліча $L_U(\Omega)$, де $U(x)$ задана, як* (4.1), *справджується умова* **H** *із константою*

$$C_U = 4 \cdot 9^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{C_{\psi U}}{C_{U\psi}}\right)^2,$$

де $C_{\psi U}$ та $C_{U\psi}$ визначені у теоремі 4.1.

Доведення. Нехай ξ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ – незалежні випадкові величини з простору Орліча $L_U(\Omega)$, тоді з теореми 4.1 випливає, що

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right\|_U^2 \leqslant C_{\psi U}^2 \sum_{k=1}^{n} \|\xi_k\|_\psi^2, \tag{4.8}$$

де $\psi(u) = u^{1/\alpha}$. Із викладок у прикладі 2.4 маємо:

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right\|_\psi^2 \leqslant 4 \cdot 9^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{i=1}^{n} \|\xi_i\|_\psi^2. \tag{4.9}$$

Із теореми 4.1 та нерівностей (4.8) і (4.9) очевидно, що справджується нерівність:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right\|_U^2 \leqslant C_{\psi U}^2 \cdot 4 \cdot 9^{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{C_{U\psi}^2} \sum_{k=1}^{n} \|\xi_k\|_U^2,$$

що й треба було довести. □

4.2. Простори Орліча експоненціального типу

Означення 4.5. *[16,134] Нехай ψ – довільна N-функція. Простір Орліча породжений N-функцією*

$$U(x) = \exp\{\psi(x)\} - 1,\ x \in \mathbb{R}$$

називається простором Орліча експоненціального типу.

Позначимо цей простір $Exp_\psi(\Omega)$, а норму $\|\cdot\|_{U(\psi)}$.

Означення 4.6. *[134] Для N-функції ψ виконується умова Q, якщо*

$$\liminf_{x\to 0} \frac{\psi(x)}{x^2} = C > 0,$$

де C може дорівнювати $+\infty$.

Прикладом N-функції, для яких виконується умова Q, є такі функції:

1) $\psi(x) = C\left|x\right|^\alpha,\ C > 0,\ 1 < \alpha \leqslant 2;$

2) $\psi(x) = \begin{cases} C\left|x\right|^2,\ |x| \leqslant 1, \\ C\left|x\right|^\alpha,\ |x| > 1,\ \alpha > 2. \end{cases}$

Означення 4.7. *[134] Нехай φ – N-функція, для якої виконується умова Q. Випадкова величина ξ належить простору $Sub_\varphi(\Omega)$ (φ-субгауссова), якщо $E\xi = 0$, $E\exp\{\lambda\xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує константа $a > 0$ така, що наступна нерівність виконується для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$E\exp\{\lambda\xi\} \leqslant \exp\{\varphi(\lambda a)\}.$$

У роботах [61,134] показано, що простір $Sub_\varphi(\Omega)$ є простором Банаха відносно норми

$$\tau_\varphi(\xi) = \inf\left(a \geqslant 0 : E\exp\lambda\xi \leqslant \exp\{\varphi(\lambda a)\},\ \lambda \in \mathbb{R}\right).$$

Нехай $L_U(\Omega)$ – простір Орліча експоненціального типу, породжений N - функцією $U(x) = \exp\{\psi(x)\} - 1$, де $\psi(x)$ така N-функція, що для N-функції $\psi^*(x)$ виконується умова Q.

Приклад 4.3. *Якщо $\psi(x) = C\left|x\right|^\alpha$, $\alpha \geqslant 2$, тоді $\psi^*(x) = C_\beta \left|x\right|^\beta$, де $C_\beta = \frac{\alpha-1}{\alpha}\left(\frac{1}{C\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$, $\beta > 1$ таке число, що $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Причому, коли $C = \frac{1}{\alpha}$, тоді $C_\beta = \frac{1}{\beta}$.*

Розглянемо простір Орліча експоненціального типу $L_U(\Omega)$, де $U(x) = \exp\{\psi(x)\} - 1$, такий що для $\psi^*(x)$ виконується умова Q, а також простір $Sub_{\psi^*}(\Omega)$.

Теорема 4.3. [134] Для того, щоб випадкова величина ξ, $E\xi = 0$ належала простору $Exp_\psi(\Omega)$, необхідно й достатньо, щоб ξ належала простору $Sub_{\psi^*}(\Omega)$, причому норми $\|\xi\|_{U(\psi)}$ та $\tau_{\psi^*}(\xi)$ еквівалентні, тобто справджуються нерівності

$$\|\xi\|_{U(\psi)} \leqslant 3\tau_{\psi^*}(\xi),$$

$$\tau_{\psi^*}(\xi) \leqslant R_\psi \|\xi\|_{U(\psi)},$$

де $R_\psi = S_{\psi^*} e^{\frac{49}{48}}$, $S_{\psi^*} = \max\limits_{i=\overline{1,3}} \gamma_i^{-1}$, а $\gamma_i = \gamma_i(\lambda_0)$ визначаються у такий спосіб: γ_1 – корінь рівняння $\gamma = \lambda_0\sqrt{c_0(1-\gamma)}$, де $\lambda_0 > 0$, $c_0 = \inf\limits_{0<|\lambda|\leqslant\lambda_0} \frac{\psi^*(\lambda)}{\lambda^2}$, γ_2 – корінь рівняння $\gamma^3 - 2(1-\gamma) = 0$, γ_3 – корінь рівняння $\gamma = \psi^{*(-1)}(2)\sqrt{c_0(1-\gamma)}$.

Приклад 4.4. *Якщо функція $\psi^*(x) = \frac{|x|^\beta}{\beta}$, де $1 < \beta \leqslant 2$, тоді з теореми 4.3 маємо, що $c_0 = \frac{1}{\beta}\left|\lambda_0\right|^{\beta-2}$ і $\gamma_1 = \lambda_0^{\frac{\beta}{2}} \frac{1}{\sqrt{\beta}}\sqrt{1-\gamma}$, $\gamma_2 = 0,770917$, $\gamma_3 = 2^{\frac{1}{\beta}} \beta^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{2}} \lambda_0^{\frac{\beta}{2}-1}\sqrt{1-\gamma}$. Вибиремо λ_0 таке, щоб $\gamma_1 > \gamma_2$ і $\gamma_3 > \gamma_2$, тоді $S_{\psi^*} = \frac{1}{\gamma_2} = 1,2972$.*

Теорема 4.4. [134] Нехай простір $Sub_{\psi^*}(\Omega)$ такий, що функція $\psi^*\left(\sqrt{x}\right)$, $x > 0$ опукла і $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – незалежні центровані випадкові величини з простору $Sub_{\psi^*}(\Omega)$, тоді справедлива нерівність:

$$\tau_{\psi^*}^2\Big(\sum_{k=1}^n \xi_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^n \tau_{\psi^*}^2(\xi_k).$$

Теорема 4.5. *Нехай $Exp_\psi(\Omega)$ такий простір, що функція $\psi^*\left(\sqrt{x}\right)$, $x > 0$ опукла і $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – незалежні центровані випадкові величини з цього простору. Тоді справедлива нерівність*

$$\left\|\sum_{k=1}^n \xi_k\right\|_{U(\psi)}^2 \leqslant 9R_\psi^2 \sum_{k=1}^n \|\xi_k\|_{U(\psi)}^2,$$

тобто для цього простору виконується умова **H** *з константою $9R_\psi^2$, де R_ψ записана в теоремі 4.3.*

Доведення. З теорем 4.3 і 4.4 отримаємо, що

$$\left\|\sum_{k=1}^n \xi_k\right\|_{U(\psi)}^2 \leqslant 9\tau_{\psi^*}^2\Big(\sum_{k=1}^n \xi_k\Big) \leqslant 9\sum_{k=1}^n \tau_{\psi^*}^2(\xi_k) \leqslant 9R_\psi^2 \sum_{k=1}^n \|\xi_k\|_{U(\psi)}^2.$$

Із цих нерівностей випливає твердження теореми. □

Теорема 4.5 виконується для просторів Орліча $Exp_\psi(\Omega)$, коли

$$\psi^*(x) = \begin{cases} \frac{|x|^2}{\alpha}, & |x| \leqslant 1; \\ \frac{|x|^\alpha}{\alpha}, & |x| > 1, \ \alpha > 2, \end{cases} \tag{4.10}$$

оскільки

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{\beta|x|^2}{4(\beta-1)}, \ x \leqslant 2\left(1-\frac{1}{\beta}\right); \\ |x| - \left(1-\frac{1}{\beta}\right), \ 2\left(1-\frac{1}{\beta}\right) < x < 1; \\ \frac{|x|^\beta}{\beta}, \ x \geqslant 1, \end{cases} \tag{4.11}$$

де $\beta > 1$ таке число, що $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

Зауважимо, що при $\alpha \geqslant 2$ маємо $1 < \beta \leqslant 2$.

Зауваження 4.1. Легко бачити, що умова **H** виконується також для просторів $Exp_{\widetilde{\psi}}(\Omega)$, де $\widetilde{\psi}(x) = C\,|x|^\beta$, $1 < \beta \leqslant 2$.

Очевидно, що функція $\widetilde{\psi}(x) = C\,|x|^\beta$ еквівалентна функції (4.11). Отже, простори $Exp_\psi(\Omega)$ та $Exp_{\widetilde{\psi}}(\Omega)$ містять одні й ті ж елементи і їх норми – еквівалентні. Дійсно, нехай ξ належить простору $Exp_{\widetilde{\psi}}(\Omega)$. Для простоти покладемо $C = \frac{1}{\beta}$, тобто $\widetilde{\psi}(x) = \frac{|x|^\beta}{\beta}$. Отже, $\widetilde{\psi}(x) = \psi(x)$ при $|x| \geqslant 1$. Нехай $r > 0$, тоді

$$E\exp\left\{\psi\left(\frac{|\xi|}{r}\right)\right\} - 1 = E\,\mathbb{I}\left\{\frac{|\xi|}{r} \leqslant 1\right\}\exp\left\{\psi\left(\frac{|\xi|}{r}\right)\right\} +$$

$$+ E\,\mathbb{I}\left\{\frac{|\xi|}{r} > 1\right\}\exp\left\{\psi\left(\frac{|\xi|}{r}\right)\right\} - 1 \leqslant \exp\{\psi(1)\} +$$

$$+ E\,\mathbb{I}\left\{\frac{|\xi|}{r} > 1\right\}\exp\left\{\widetilde{\psi}\left(\frac{|\xi|}{r}\right)\right\} - 1 \leqslant e^{\frac{1}{\beta}} + E\exp\left\{\widetilde{\psi}\left(\frac{|\xi|}{r}\right)\right\} - 1.$$

Якщо покласти $r = \|\xi\|_{U(\widetilde{\psi})}$, тоді отримаємо, що

$$E\exp\left\{\psi\left(\frac{|\xi|}{\|\xi\|_{U(\widetilde{\psi})}}\right)\right\} - 1 \leqslant e^{\frac{1}{\beta}} + 1.$$

Отже,

$$\|\xi\|_{U(\psi)} \leqslant \|\xi\|_{U(\widetilde{\psi})}\left(1 + e^{\frac{1}{\beta}}\right).$$

Аналогічно дістанемо, що

$$\|\xi\|_{U(\widetilde{\psi})} \leqslant \|\xi\|_{U(\psi)}\left(1 + e^{\frac{1}{\beta}}\right).$$

Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – незалежні центровані випадкові величини з простору $Exp_{\widetilde{\psi}}(\Omega)$, тоді з теореми 4.5 випливає наступна нерівність:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right\|^2_{U(\widetilde{\psi})} \leqslant \left(1+e^{\frac{1}{\beta}}\right)^2 \left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right\|^2_{U(\psi)} \leqslant$$

$$\leqslant 9R_\psi^2\left(1+e^{\frac{1}{\beta}}\right)^2\sum_{k=1}^{n}\|\xi_k\|^2_{U(\psi)} \leqslant 9R_\psi^2\left(1+e^{\frac{1}{\beta}}\right)^4\sum_{k=1}^{n}\|\xi_k\|^2_{U(\widetilde{\psi})}.$$

Тобто, для простору $Exp_{\widetilde{\psi}}(\Omega)$ виконується умова **H** з константою $C_{\widetilde{\psi}} = R_\psi^2\left(1+e^{\frac{1}{\beta}}\right)^4$.

4.3. Випадкові процеси з просторів Орліча

Означення 4.8. *Нехай $X = \{X(t),\ t\in T\}$ – випадковий процес, де T – деяка параметрична множина. Скажемо, що процес X належить простору Орліча $L_U(\Omega)$, якщо для будь-якого $t\in T$ випадкова величина $X(t)$ належить простору $L_U(\Omega)$.*

Нехай $\rho(t,s) = \|X(t)-X(s)\|_U$ – псевдометрика, яка породжена в T процесом $X = \{X(t),\ t\in T\}$, який належить простору Орліча $L_U(\Omega)$. Розглянемо псевдометричний простір (T,ρ), $N(u)$– метрична масивність простору (T,ρ) (див. означення 3.2).

Теорема 4.6. *Нехай $X = \{X(t),\ t\in T\}$ – випадковий процес із простору $L_U(\Omega)$, де $U(x)$ – C-функція, яка задовільняє g-умову і процес X сепарабельний на (T,ρ). Якщо*

1. $\sup\limits_{t\in T}\big\|X(t)\big\|_U < \infty$;
2. *виконується умова*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} U^{(-1)}(N(\varepsilon))d\varepsilon < \infty, \tag{4.12}$$

де $\varepsilon_0 = \sup\limits_{t,s\in T}\rho(t,s)$, *тоді:*

1. $\sup\limits_{t\in T}|X(t)| \in L_U(\Omega)$;
2. $\left\|\sup\limits_{t\in T}|X(t)|\right\|_U \leqslant B$, *де* $B = \inf\limits_{t\in T}\|X(t)\|_U + \inf\limits_{0<\theta<1}\frac{1}{\theta(1-\theta)}\int\limits_0^{\theta\varepsilon_0}\varkappa(N(\varepsilon))d\varepsilon$, *де* $\varkappa(n)$ – *мажоруюча характеристика простору* $L_U(\Omega)$;

3. Для всіх $x > 0$

$$P\left\{\sup_{t\in T}|X(t)| \geqslant x\right\} \leqslant \frac{1}{U\left(\frac{x}{B}\right)}.$$

Доведення. Теорема 4.6 є модифікованим наслідком 3.3.1 з книги [16].□

Теорема 4.7. *Нехай (T, w) – компактний метричний простір, $N_w(u)$ – метрична масивність простору (T, w), $X = \{X(t), t \in T\}$ – сепарабельний випадковий процес із простору Орліча $L_U(\Omega)$, $\varkappa(n)$ – мажоруюча характеристика простору $L_U(\Omega)$. Для функції $U(x)$ виконується* g*-умова. Нехай існує така функція*

$$\sigma = \{\sigma(h),\ 0 \leqslant h \leqslant \sup_{t,s\,\in\, T} w(t,s)\},$$

що $\sigma(h)$ – монотонно зростає, неперервна та $\sigma(h) \to 0$ коли $h \to 0$ і

$$\sup_{w(t,s)\leqslant h}\left\|X(t) - X(s)\right\|_U \leqslant \sigma(h).$$

Якщо

$$\int_0^{\delta_0} U^{(-1)}(N_w(\sigma^{(-1)}(u)))du < \infty,$$

де $\delta_0 = \sigma\left(\sup\limits_{t,s\,\in\, T} w(t,s)\right)$, $\sigma^{(-1)}(u)$ – функція обернена до $\sigma(u)$, тоді

1. $\sup\limits_{t\in T}|X(t)| \in L_U(\Omega)$*;*

2. $\left\|\sup\limits_{t\in T}|X(t)|\right\|_U \leqslant \widetilde{B},$

   де $\widetilde{B} = \inf\limits_{t\in T}\|X(t)\|_U + \inf\limits_{0<\theta<1}\frac{1}{\theta(1-\theta)}\int\limits_0^{\theta\delta_0}\varkappa(N_w(\sigma^{(-1)}(u)))du.$

Доведення. Ця теорема випливає з теореми 4.6, оскільки процес X – сепарабельний на (T, w), то процес $X(t)$ – сепарабельний на (T, ρ) і справджується нерівність

$$N(u) \leqslant N_w\left(\sigma^{-1}(u)\right).$$ □

Розглянемо простір R^d з метрикою $m\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\right) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant d}|x_i - y_i|$.

Наслідок 4.2. *Нехай T – куб $\left\{0 \leqslant x_i < T, i = \overline{1,d}\right\}, T > 0$. Тоді в теоремі 4.7*

$$N_w(u) \leqslant \left(\frac{T}{2u} + 1\right)^d$$

і виконується така нерівність:

$$\widetilde{B} \leqslant \widehat{B} = \inf_{t \in T} \|X(t)\|_U + \inf_{0<\theta<1} \frac{1}{\theta(1-\theta)} \int\limits_0^{\theta\delta_0} \varkappa\left(\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right)^d\right) du.$$

Теорема 4.8. *Нехай $Y = \{Y(t), t \in T\}$ – випадковий процес, який належить простору Орліча $L_U(\Omega)$. Для функції U виконується g-умова і для простору $L_U(\Omega)$ виконується умова $\mathbf{H}$ з константою C_U.*

Нехай (T, w) – компактний метричний простір і Y – сепарабельний процес на (T, w), $N_w(u)$ – метрична масивність простору (T, w). Нехай існує така функція

$$\sigma = \{\sigma(h),\ \ 0 \leqslant h \leqslant \sup_{t,s\,\in T} w(t,s)\},$$

що $\sigma(h)$ – монотонно зростає неперервна, $\sigma(h) \to 0$, коли $h \to 0$ і

$$\sup_{w(t,s) \leqslant h} \left\|Y(t) - Y(s)\right\|_U \leqslant \sigma(h)$$

та

$$\int\limits_0^{\delta_0} U^{(-1)}(N_w(\sigma^{(-1)}(u)))du < \infty. \tag{4.13}$$

Нехай $X(t) = Y(t) - m(t)$, де $m(t) = EX(t)$ і $X_k(t)$ – незалежні копії $X(t)$, $S_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k(t)$.

Тоді для всіх $\varepsilon > 0$ справджується нерівність

$$P\{\sup_{t \in T} |S_n(t)| > \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{U\left(\frac{\varepsilon}{B(t_0,\theta)}\right)}, \tag{4.14}$$

де t – довільна точка з T, $0 < \theta < 1$,

$$B(t_0, \theta) = \|X(t_0)\|_U + \frac{1}{\theta(1-\theta)} \int\limits_0^{\delta_0\theta} \varkappa(N_w(\sigma_1^{(-1)}(u))du, \tag{4.15}$$

де $\sigma_1(h) = C_U\left(1+\frac{d_U}{U^{(-1)}(1)}\right)\sigma(h)$, d_U *– константа, яка визначена в лемі 4.2,* $\delta_0 = \sigma_1\left(\sup\limits_{t,s\in T} w(t,s)\right)$, $\varkappa(n)$ *– мажоруюча характеристика простору* $L_U(\Omega)$.

Доведення. Із означення 4.4 маємо, що

$$\|S_n(t)-S_n(s)\|_U^2 = \left\|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(X_k(t)-X_k(s))\right\|_U^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_U\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|X_k(t)-X_k(s)\|_U^2 = C_U\,\|X(t)-X(s)\|_U^2\,. \quad (4.16)$$

Із леми 4.1 і леми 4.2 отримуємо:

$$\|X(t)-X(s)\|_U = \|Y(t)-Y(s)-(m(t)-m(s))\|_U \leqslant \|Y(t)-Y(s)\|_U +$$

$$+\frac{1}{U^{(-1)}(1)}\,|m(t)-m(s)| \leqslant \|Y(t)-Y(s)\|_U +$$

$$+\frac{1}{U^{(-1)}(1)}E\,|Y(t)-Y(s)| \leqslant \|Y(t)-Y(s)\|_U +$$

$$+\frac{d_U}{U^{(-1)}(1)}\,\|Y(t)-Y(s)\|_U = \|Y(t)-Y(s)\|_U\left(1+\frac{d_U}{U^{(-1)}(1)}\right). \quad (4.17)$$

Тому з (4.16) випливає, що

$$\sup_{w(t,s)\leqslant h}\|X(t)-X(s)\|_U \leqslant \sigma_1(h).$$

Тепер твердження теореми 4.8 встановлюється на основі теореми 4.7.□

Зауваження 4.2. Легко довести (як в (4.17)), що

$$\|X(t_0)\|_U \leqslant \left(1+\frac{d_U}{U^{(-1)}(1)}\right)\|Y(t_0)\|\,. \quad (4.18)$$

Висновки до розділу 4

У даному розділі розглянуті основні властивості просторів Орліча та просторів Орліча експоненціального типу. Досліджено зв'язок просторів Орліча з просторами $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Знайдено нерівності великих відхилень для випадкових процесів із просторів Орліча.

Розділ 5

Простори випадкових величин $D_{V,W}(\Omega)$

У цьому розділі розглядаються передбанахові K_σ-простори $D_{V,W}(\Omega)$. Вивчаються основні властивості цих просторів, а також умови збіжності рядів у $D_{V,W}(\Omega)$.

5.1. Означення та основні властивості простору $D_{V,W}(\Omega)$.

Означення 5.1. *Нехай* $W = \{W(x), x \in R\}$ *та* $V = \{V(x), x \in R\}$, $W(x) > 0$, $V(x) > 0$, $x \neq 0$ *- деякі парні монотонно зростаючі при* $x > 0$ *неперервні функції, які мають наступні властивості:*

1. *Існує константа C>0, для якої при* $x > 0$, $y > 0$ $W^{(-1)}(x+y) \leqslant C(W^{(-1)}(x)+W^{(-1)}(y))$, *де* $W^{(-1)}(x)$ *- функція, обернена при* $x > 0$ *до* $W(x)$, $V^{(-1)}(x)$ *- функція, обернена при* $x > 0$ *до* $V(x)$*;*

2. *Існує неперервна функція* $Z = \{Z(x), x > 0\}$, *така, і* $0 < Z(x) < \infty$, $|x| < \infty$, *та для будь-якої константи* $a > 0$ *виконується нерівність* $V(ax) \leqslant Z(a)V(x)$ *при* $x > 0$*;*

3. $W(0) = 0$.

Випадкова величина ξ *належить простору* $D_{V,W}(\Omega)$, *якщо*

$$\sup_{x \geqslant 0} V(x)W^{(-1)}(P\{|\xi| > x\}) < \infty. \tag{5.1}$$

Прикладами функцій W та V можуть слугувати такі функції: $W(x) = |x|^a$, $V(x) = |x|^b$ $(Z(x) = |x|^b)$, $W(x) = \exp\{|x|^a\} - 1$, $a > 0$, $b > 0$.

Будемо казати, що для функцій V та W виконується умова B1, якщо:

B1) W - С-функція Орліча, а V - функція, обернена до С-функції Орліча

Теорема 5.1. *Простір* $D_{V,W}(\Omega)$ *є простором з передномою*

$$||\xi||_{V,W} = (\sup_{x>0} V(x)W^{-1}(P\{|\xi| > x\}))^{1/2}.$$

Якщо ξ_n - послідовність випадкових величин з $D_{V,W}(\Omega)$ така, що $||\xi_n - \xi_m||_{V,W} \to \infty$ коли $n, m \to \infty$ та $\sup_n ||\xi_n||_{V,W} < \infty$, то існує випадкова величина $\xi \in D_{V,W}(\Omega)$ така, що $||\xi_n - \xi||_{V,W} \to 0$, $n \to \infty$. Крім того, переднорма $||\cdot||_{V,W}$ підпорядкована функції $J(\lambda) = (Z(\lambda))^{1/2}$

Якщо для W та V виконується умова B1, то тоді функціонал $||\cdot||$ є квазінормою, і простір є повним відносно цієї квазінорми.

Також при всіх $x > 0$ має місце нерівність

$$P\{|\xi| > x\} \leqslant W\left(\frac{||\xi||^2_{V,W}}{V(x)}\right). \tag{5.2}$$

Доведення. Зрозуміло, що для простору $D_{V,W}(\Omega)$ виконуються умови a1-a3 означення 1.3, тобто $D_{V,W}(\Omega)$ - перед-K_σ-простір. Також, $||\xi||_{V,W} = 0$ тоді і лише тоді, коли $\xi = 0$ з імовірністю одиниця. Нерівність 5.2 очевидна і випливає з означення переднорми.

Доведемо тепер, що простір $D_{V,W}(\Omega)$ - лінійний. Для цього досить довести, що, коли ξ та η належать $D_{V,W}$, то $a \cdot \xi \in D_{V,W}(\Omega)$ та $\xi + \eta \in D_{V,W}(\Omega)$. Якщо $a \neq 0$, то

$$||a\xi||_{V,W} = (\sup_{x>0} V(x) W^{(-1)}(P\{|a\xi| > x\}))^{1/2} =$$

$$= (\sup_{x>0} V(x) W^{(-1)}(P\{|\xi| > \frac{x}{|a|}\}))^{1/2} =$$

$$= (\sup_{x>0} V(x\frac{|a|}{|a|}) W^{(-1)}(P\{|\xi| > \frac{x}{|a|}\}))^{1/2}.$$

Поклавши $y := x/|a|$, отримаємо:

$$||a\xi||_{V,W} = \sup_{y>0} V(|a|y) W^{(-1)}(P\{|\xi| > y\}))^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant (Z(|a|) \cdot \sup_{y>0} V(y) W^{(-1)}(P\{|\xi| > y\}))^{1/2} = Z(|a|)^{1/2} ||\xi||_{V,W} < \infty.$$

Тут ми також показали, що переднорма $||\cdot||_{V,W}$ підпорядкована функції $J(\lambda) = (Z(\lambda))^{1/2}$.

Доведемо тепер, що сума елементів простору $D_{V,W}$ також належить цьому простору:

$$||\xi + \eta||_{V,W} = (\sup_{x>0} V(x) W^{(-1)}(P\{|\xi + \eta| > x\}))^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant (\sup_{x>0} V(x) W^{(-1)}(P\{|\xi| > x/2\} + P\{|\eta| > x/2\}))^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant (\sup_{x>0} V(x) \cdot C \cdot (W^{(-1)}(P\{|\xi| > x/2\}) + W^{(-1)}(P\{|\eta| > x/2\})))^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant (C \sup_{x>0} V(x) \cdot (W^{(-1)}(P\{|\xi| > x/2\}))+$$
$$+\sup_{x>0} V(x) \cdot (W^{(-1)}(P\{|\eta| > x/2\})))^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant (CZ(2)(||\xi||_{V,W} + ||\eta||_{V,W})) < \infty. \tag{5.3}$$

Нехай $\xi_n \in D_{V,W}(\Omega)$ - така послідовність, що $||\xi_n - \xi_m||_{V,W} \to 0$ та $\sup_n ||\xi_n||_{V,W} < \infty$ при $n, m \to \infty$. З нерівності (5.2) випливає

$$P\{|\xi_n - \xi_m| > \epsilon\} \leqslant W\left(\frac{||\xi_n - \xi_m||^2_{V,W}}{V(\epsilon)}\right) \to 0.$$

Отже, існує випадкова величина ξ, така, що $\xi_n \to \xi$ за ймовірністю, отже, $P\{|\xi_n| > x\} \to P\{|\xi| > x\}$ в точках, де функція $P\{|\xi| > x\}$ неперервна. Тоді в точках неперервності функції $P\{|\xi| > x\}$

$$P\{|\xi| > x\} \leqslant \sup_{n\geqslant 1} P\{|\xi_n| > x\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{n\geqslant 1} W(\frac{||\xi_n||^2_{V,W}}{V(x)}) = W(\frac{\sup_{n\geqslant 1} ||\xi_n||^2_{V,W}}{V(x)}).$$

Оскільки функція $W(\frac{a}{V(x)})$ неперервна по x (де $a > 0$ - будь-яка константа), а $P\{|\xi| > x\}$ монотонно не зростає, то остання нерівність вірна і для всіх $x > 0$. Отже, $\xi \in D_{V,W}$ та $||\xi||_{V,W} \leqslant \sup_{n\geqslant 1} ||\xi_n||_{V,W}$.

Розглянемо тепер замість послідовності ξ_n послідовність $\xi_n - \xi_m$, $n > m$. Як і в попередньому випадку, маємо $||\xi - \xi_m||_{V,W} \leqslant \sup_{n\geqslant m} ||\xi_n - \xi_m||_{V,W}$, тобто $||\xi_m - \xi||_{V,W} \to 0$ при $m \to \infty$.

Нехай $0 < \alpha < 1$ і виконується умова B1. З властивостей C-функцій ($V(ax) \leqslant aV(x)$, $a > 1$, та $W(x+y) \leqslant W(x) + W(y)$) випливає, що

$$||\xi + \eta||^2_{V,W} = \sup_{x>0} V(x) W^{-1}(P\{|\xi + \eta| > x\}) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x>0}(V(x)W^{-1}(P\{|\xi|+|\eta|>x\})) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{x>0}(V(x)W^{-1}(P\{|\xi|>\alpha x\}+P\{|\eta|>(1-\alpha)x\})) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{x>0} V\left(\frac{\alpha x}{\alpha}\right) W^{-1}(P\{|\xi|>\alpha x\}) + \sup_{x>0} V\left(\frac{(1-\alpha)x}{(1-\alpha)}\right) \times$$
$$\times W^{-1}(P\{|\eta|>(1-\alpha)x\}) \leqslant \frac{1}{\alpha}||\xi||^2_{V,W} + \frac{1}{1-\alpha}||\eta||^2_{V,W}.$$

Нерівність трикутника випливає з останньої нерівності, якщо покласти

$$\alpha = \frac{||\xi||_{V,W}}{(||\xi||_{V,W}+||\eta||_{V,W})}.$$

Доведемо, що за умови (B1) простір $D_{V,W}(\Omega)$ - повний.

Оскільки $|\ ||\xi_n||_{V,W} - ||\xi_m||_{V,W}\ | \leqslant ||\xi_n - \xi_m||_{V,W} \to 0$ при $n, m \to \infty$, то існує границя $\sigma = \lim\limits_{n\to\infty} ||\xi_n||_{V,W}$.

Якщо в нерівності

$$P\{|\xi_n|>x\} \leqslant W\left(\frac{||\xi_n||^2_{V,W}}{V(x)}\right).$$

перейти до границі при $n \to \infty$ (досить розглянути точки x, що є точками неперервності функції розподілу випадкової величини ξ), то отримуємо нерівність

$$P\{|\xi|>x\} \leqslant W\left(\frac{\sigma^2}{V(x)}\right).$$

Отже, випадкова величина ξ належить простору $D_{V,W}(\Omega)$ та $||\xi||_{V,W} \leqslant \sigma$.

Розглянемо тепер замість послідовності ξ_n послідовність $\xi_m - \xi_n$, $m \to \infty$. Як і в попередньому випадку, отримуємо $||\xi-\xi_n||_{V,W} \leqslant \lim\limits_{m\to\infty} ||\xi_m - \xi_n||_{V,W}$. Отже, $||\xi - \xi_n||_{V,W} \to 0$ при $n \to \infty$, тобто простір $D_{V,W}$ - повний. $\diamondsuit$

Знайдемо тепер мажоруючу характеристику простору $D_{V,W}(\Omega)$.

Теорема 5.2. *Послідовність*

$$\varkappa(n) = \sup_{0<t<1/n}\left(\frac{W^{(-1)}(tn)}{W^{(-1)}(t)}\right)^{1/2}$$

є мажоруючою характеристикою простору $D_{V,W}(\Omega)$.

Доведення. Нехай ξ_i, $i = 1, \dots, n$ - випадкові величини з простору $D_{V,W}(\Omega)$, $a = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} ||\xi_i||_{V,W}$. Мають місце співвідношення

$$|| \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\xi_i| ||^2_{V,W} = \sup_{x>0} (V(x) W^{(-1)}(P\{\max_{1\leqslant i\leqslant n} |\xi_i| > x\})) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x>0} (V(x) W^{(-1)}(\min\{1, \sum_{i=1}^{n} P\{|\xi_i| > x\}\})) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x>0} \left(V(x) W^{(-1)} \left(\min \left\{ 1, \sum_{i=1}^{n} W \left(\frac{||\xi_i||^2_{V,W}}{V(x)} \right) \right\} \right) \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x>0} \left(V(x) W^{(-1)} \left(\min \left\{ 1, nW \left(\frac{a^2}{V(x)} \right) \right\} \right) \right). \tag{5.4}$$

$\diamondsuit$

Покладемо $t = W(\frac{a^2}{V(x)})$. Тоді $V(x) = \frac{a^2}{W^{(-1)}(t)}$. Отже, з (5.4) отримаємо, що

$$|| \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\xi_i| ||^2_{V,W} \leqslant \sup_{t>0} \left(\frac{a^2}{W^{(-1)}(t)} W^{(-1)}(\min\{1, nt\}) \right) =$$

$$= a^2 \sup_{0<t\leqslant \frac{1}{n}} \left(\frac{W^{(-1)}(nt)}{W^{(-1)}(t)} \right).$$

Далі у цьому розділі передноруму $||\cdot||_{V,W}$ будемо позначати $||\cdot||$.

5.2. Збіжність рядів у просторах $D_{V,W}$

Теорема 5.3. *Нехай ξ_k - випадкові величини з простору $D_{V,W}(\Omega)$, $||\xi_k||$ - переднорма, $||\xi_k|| > 0$, $f(x) = xV(W(x))$, $x > 0$, $f^{(-1)}(x)$ - функція, обернена до $f(x)$. Для того, щоб ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \tag{5.5}$$

збігався за ймовірністю, досить, щоб збігався ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^*, \tag{5.6}$$

де $\alpha_k^* = V^{(-1)}\left(\frac{||\xi_k||^2}{f^{(-1)}(||\xi_k||^2)}\right)$. *При цьому, для*

$$x \geqslant \mu = \sum_{k=1}^{\infty} V^{(-1)}\left(\frac{||\xi_k||^2}{f^{(-1)}(||\xi_k||^2)}\right)$$

має місце нерівність

$$P\left\{\left|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\right| \geqslant x\right\} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} W\left(\frac{||\xi_k||^2}{V(\frac{\alpha_k^* x}{\mu})}\right) < \infty. \tag{5.7}$$

Зауваження 5.1. Функція $x/f^{(-1)}(x)$ монотонно зростає. Це випливає з того, що монотонно зростає функція $f(x)/x = V(W(x))$.

Доведення. Доведемо, що із збіжності ряду (5.6) випливає збіжність ряду в правій частині (5.7). Очевидно, що при $x \geqslant \mu$ ряд (5.7) збігається, коли збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} W\left(\frac{||\xi_k||^2}{V(\alpha_k^*)}\right), \tag{5.8}$$

адже функції W та V монотонно зростаючі.

Доведемо тепер наступну рівність. За умови $||\xi_k||^2 \neq 0$

$$W\left(\frac{||\xi_k||^2}{V(\alpha_k^*)}\right) = V^{(-1)}\left(\frac{||\xi_k||^2}{f^{(-1)}(||\xi_k||^2)}\right). \tag{5.9}$$

Дійсно,

$$\frac{||\xi_k||^2}{f^{(-1)}(||\xi_k||^2)} = \frac{f(f^{(-1)}(||\xi_k||^2))}{f^{(-1)}(||\xi_k||^2)} =$$

$$= \frac{f^{(-1)}(||\xi_k||^2)V(W(f^{(-1)}(||\xi_k||^2)))}{f^{(-1)}(||\xi_k||^2)} =$$

$$= V\left(W\left(\frac{||\xi_k||^2 f^{(-1)}(||\xi_k||^2)}{||\xi_k||^2}\right)\right) =$$

$$= V\left(W\left(\frac{||\xi_k||^2}{V(V^{(-1)}(||\xi_k||^2/f^{(-1)}(||\xi_k||^2)))}\right)\right) =$$

$$= V\left(W\left(\frac{||\xi_k||^2}{V(\alpha_k^*)}\right)\right).$$

З останньої рівності отримуємо 5.9.

Розглянемо тепер ймовірність $P\{|\sum_{k=l}^{m}\xi_k| > x\}$. Зафіксуємо $x > 0$. Тоді

$$P\left\{\left|\sum_{k=l}^{m}\xi_k\right| > x\right\} \leqslant \sum_{k=l}^{m} P\left\{|\xi_k| > \alpha_k x\right\},$$

де $\sum_{k=l}^{m}\alpha_k = 1$, $\alpha_k > 0$. Так як, згідно з теоремою 5.1, для всіх $\xi \in D_{V,W}(\Omega)$ виконується нерівність $P\{|\xi| > x\} \leqslant W(\frac{||\xi||^2}{V(x)})$, то

$$\sum_{k=l}^{m} P\{|\xi_k| > \alpha_k x\} \leqslant \sum_{k=l}^{m} W\left(\frac{||\xi_k||^2}{V(\alpha_k x)}\right). \tag{5.10}$$

Поклавши $\alpha_k = \alpha_k^*/\mu_{lm}$, де $\mu_{lm} = \sum_{k=l}^{m} V^{(-1)}(||\xi_k||^2/f^{(-1)}(||\xi_k||^2))$, отримаємо

$$\sum_{k=l}^{m} W\left(\frac{||\xi_k||^2}{V(\alpha_k x)}\right) = \sum_{k=l}^{m} W\left(\frac{||\xi_k||^2}{V(\alpha_k^* x/\mu_{lm})}\right). \tag{5.11}$$

$\diamondsuit$

Оскільки ряд (5.8) збігається, то з (5.9) видно, що $\mu_{lm} < x$ для досить великих l, m. Тоді $P\{|\sum_{k=l}^{m}\xi_k| > x\} \leqslant \sum_{k=l}^{m} W(||\xi_k||^2/V(\alpha_k^* x))$.

Також, зі збіжності ряду (5.8) випливає, що $P\{|\sum_{k=l}^{m}\xi_k| > x\} \to 0$ при $l, m \to \infty$, тобто ряд (5.5) збігається за ймовірністю.

Нерівність (5.7) випливає з (5.10) та (5.11), коли покласти $l := 1$ та спрямувати m до нескінченності.

Знайдемо умови збіжності рядів випадкових величин із просторів $D_{V,W}(\Omega)$, коли $V(x) = |x|^b$, $W(x) = |x|^a$, $0 < b < 1$, $a > 1$. Має місце наступне твердження.

Теорема 5.4. *Нехай $W(x) = |x|^a$ та $V(x) = |x|^b$, $a > 0, b > 0$. Тоді ряд (5.5) збігається за ймовірністю, коли збігається ряд*

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}},$$

і при $x \geqslant \mu$ має місце нерівність

$$P\{|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k| > x\} \leqslant \frac{1}{x^{ab}}\left(\sum_{k=1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}}\right)^{ab+1},$$

тобто $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ належить простору $D_{V,W}$ та

$$||\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k|| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty}||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}}\right)^{\frac{ab+1}{2a}}.$$

Доведення.

$$P\{|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k|>x\} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}P\{|\xi_k|>\alpha_k x\},$$

де $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k = 1$. Так як, згідно з теоремою 5.3, для всіх $\xi \in D_{V,W}(\Omega)$ виконується нерівність $P\{|\xi|>x\} \leqslant W(\frac{||\xi||^2}{V(x)})$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty}P\{|\xi_k|>\alpha_k x\} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}W\left(\frac{||\xi_k||^2}{V(\alpha_k x)}\right).$$

Підставивши явний вигляд W та V, отримаємо

$$\sum_{k=1}^{\infty}W\left(\frac{||\xi_k||^2}{V(\alpha_k x)}\right) = \frac{1}{x^{ab}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{||\xi_k||^{2a}}{\alpha_k^{ab}}.$$

Мінімум останнього виразу досягається при наступних α_k:

$$\alpha_k = \frac{||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}}}{\sum_{i=1}^{\infty}||\xi_i||^{\frac{2a}{ab+1}}}.$$

При таких значеннях α_k

$$\frac{1}{x^{ab}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{||\xi_k||^{2a}}{\alpha_k^{ab}} = \frac{1}{x^{ab}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{||\xi_k||^{2a}}{\frac{||\xi_k||^{\frac{2a^2b}{ab+1}}}{(\sum_{i=1}^{\infty}||\xi_i||^{\frac{2a}{ab+1}})^{ab}}} =$$

$$= \frac{1}{x^{ab}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}}\right)^{ab}\sum_{i=1}^{\infty}||\xi_i||^{\frac{2a}{ab+1}} = \frac{1}{x^{ab}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}}\right)^{ab+1},$$

тобто

$$P\left\{\left|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\right|>x\right\} \leqslant \frac{1}{x^{ab}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}}\right)^{ab+1}.$$

Твердження теореми випливає з останньої нерівності.

Підставимо тепер у (5.6) вирази для функцій W та V:

$$\sum_{k=1}^{\infty} V^{(-1)}\left(\frac{||\xi_k||^2}{f^{(-1)}(||\xi_k||^2)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{||\xi_k||^{2/b}}{||\xi_k||^{2/(b(ab+1))}} = \sum_{k=1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}} < \infty.$$

Як видно, результати співпадають, тобто умови теореми 5.3 покращити не вдається.

У випадку, коли переднорма $||\cdot||$ є квазінормою, має місце наступне очевидне твердження, котре випливає з теореми 5.1.

Теорема 5.5. *Нехай випадкові величини $\xi_k \in D_{V,W}$, W і V задовольняють умову В1, і збігається ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||\xi_k||.$$

Тоді ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$$

збігається за ймовірністю, і його сума належить простору $D_{V,W}$. При цьому має місце нерівність

$$P\{|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k| \geqslant x\} \leqslant W\left(\frac{(\sum_{k=1}^{\infty} ||\xi_k||)^2}{V(x)}\right).$$

Зауваження 5.2. У випадку, коли $W(x) = |x|^a$, $a \geqslant 1$, $V(x) = |x|^b$, $0 < b \leqslant 1$, то для функцій V та W виконується умова В1, то $\frac{2a}{ab+1} \geqslant 1$, тобто якщо виконується умова теореми 5.4, умова теореми 5.5 може і не виконуватися.

5.3. Умови збіжності нескінченних рядів випадкових величин з заданими розподілами у просторах $D_{V,W}(\Omega)$.

Нехай для простору $D_{V,W}(\Omega)$ $V(x) = |x|^b$, $W(x) = |x|^a$, $a > 0$, $b > 0$. Нехай ξ_k - випадкові величини з простору $D_{V,W}(\Omega)$. Тоді, як відомо з теореми 5.4, умова збіжності ряду має вигляд

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}} < \infty. \tag{5.12}$$

Нехай $\xi_k = a_k\hat{\xi}_k$, де $\hat{\xi}_k$ - незалежні однаково розподілені симетричні випадкові величини.

Приклад 5.1. *Нехай* $P\{|\hat{\xi}_k| > x\} = \frac{1}{x^c+1}$, $x > 0$, $c > 0$. *Тоді*

$$||\xi_k|| = \left(\sup_{x>0} \frac{x^b}{(x^c/a_k^c + 1)^{1/a}}\right)^{1/2}$$

і (5.12) можна переписати як

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sup_{x>0} \frac{x^b}{(x^c/a_k^c + 1)^{1/a}}\right)^{\frac{a}{ab+1}} < \infty \qquad (5.13)$$

При $b > c/a$ *супремум функції* $\frac{x^b}{(x^c+a_k^c)^{1/a}}$ *нескінченний. При* $b < c/a$ *дана функція має екстремум у точці*

$$x = a_k \left(\frac{ab}{c - ab}\right)^{1/c}.$$

Підставивши це значення у (5.13), при $b < c/a$ *маємо*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^{c/a} \sup_{x>0} \frac{x^b}{(x^c + a_k^c)^{1/a}}\right)^{\frac{a}{ab+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^b \frac{(ab)^{b/c}}{c^{1/a}} (c - ab)^{\frac{c-ab}{ac}}\right)^{\frac{a}{ab+1}} < \infty$$

Якщо ж $b = c/a$, *то екстремум буде досягатися на* $+\infty$ *і буде рівним* a_k^b.

Отже, умова збіжності ряду при $b < c/a$ *буде мати вигляд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}} = \left(\frac{(ab)^{b/c}}{c^{1/a}} (c - ab)^{\frac{c-ab}{ac}}\right)^{\frac{a}{ab+1}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\frac{ab}{ab+1}} < \infty,$$

тобто

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\frac{ab}{ab+1}} < \infty,$$

Оцінка для функції розподілу суми ряду буде мати вигляд

$$P\{|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k| > x\} \leqslant \frac{1}{x^{ab}} R_c \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\frac{ab}{ab+1}}\right)^{ab+1},$$

де $R_c = \left(\frac{(ab)^{ab/c}}{c} (c - ab)^{\frac{c-ab}{c}}\right)$ *коли* $b < c/a$. *Легко бачити, що* $R_c \to 1$,

$c \to ab$, адже $\frac{(ab)^{ab/c}}{c} \to 1$, $c \to ab$, і $(c-ab)^{\frac{c-ab}{c}} \to 1$, $c \to ab$. Отже, для $b = c/a$ оцінка функції розподілу суми ряду буде мати вигляд

$$P\{|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k| > x\} \leqslant \frac{1}{x^c} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\frac{c}{c+1}} \right)^{c+1}.$$

Приклад 5.2. *Нехай $\hat{\xi}_k$ мають нормальний розподіл, $\xi_k = a_k \hat{\xi}_k$. Тоді*

$$P\{|\xi_k| > x\} = 2 - \frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2 a_k^2}\right) du.$$

Підставивши у вираз для передномри, отримаємо

$$||\xi_k|| = \left(\sup_{x>0} x^b \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2 a_k^2}\right) du \right)^{1/a} \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x>0} \left(x^b \left(\frac{\sqrt{2} a_k \sigma}{x\sqrt{\pi}} e^{x^2/a_k^2\sigma^2} \right)^{1/a} \right)^{1/2}$$

Супремум досягається у точці $x = a_k \sigma \sqrt{(ab-1)/2}$, і шукана передноррма набуває вигляду

$$||\xi_k|| = (\sigma^2(ab-1))^{b/2} \left(\frac{e^{ab-1} 2^{2-ab}}{\pi(ab-1)} \right) a_k^b.$$

Отже, умова збіжності запишеться як

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}} = \left((\sigma^2(ab-1))^{ab} \left(\frac{e^{ab-1} 2^{2-ab}}{\pi(ab-1)} \right) \right)^{1/2ab+2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\frac{ab}{ab+1}} < \infty,$$

тобто,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\frac{ab}{ab+1}} < \infty.$$

Оцінка для функції розподілу суми ряду буде мати вигляд

$$P\{|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k|>x\}\leqslant\frac{1}{x^{ab}}N_c\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{\frac{ab}{ab+1}}\right)^{ab+1},$$

де

$$N_c=\left((\sigma^2(ab-1))^{ab}\left(\frac{e^{ab-1}2^{2-ab}}{\pi(ab-1)}\right)\right)^{1/2}.$$

Приклад 5.3. *Нехай величина $\hat{\xi}_k$ має розподіл Коші, $\xi_k=a_k\hat{\xi}_k$. Тоді*

$$P\{|\xi_k|>x\}=1-\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{\gamma a_k}\right)=\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\gamma a_k}{x}\right)$$

для $x>0$. Замінивши $t=\frac{x}{\gamma a_k}$, маємо

$$\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\gamma a_k}{x}\right)=\frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{t}=\frac{2}{\pi}\int_t^{\infty}\frac{du}{1+u^2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{\pi}\int_t^{\infty}\frac{du}{u^2}=\frac{2}{\pi t}=\frac{2\gamma a_k}{\pi x},$$

і, отже,

$$P\{|\xi_k|>x\}\leqslant\frac{2\gamma a_k}{\pi x}.$$

Так як $P\{|\xi_k|>x\}\leqslant 1$ $\forall x\in R$, то потрібно розглянути два випадки: коли $2\gamma a_k/\pi x>1$ та $2\gamma a_k/\pi x\leqslant 1$. У першому випадку можна покласти $P\{|\xi_k|>x\}=1$ за умови, що $x<2\gamma a_k/\pi x$. Тоді

$$||\xi_k||=\left(\sup_{x>0}V(x)W^{(-1)}(P\{|\xi_k|>x\})\right)^{1/2}=\left(\sup_{x>0}x^b1^{1/a}\right)^{1/2}=\sup_{x>0}x^{b/2}.$$

Так як $x<2\gamma a_k/\pi x$, то супремум буде досягатися саме в цій точці, і тоді

$$||\xi_k||=\left(\frac{2\gamma a_k}{\pi}\right)^{b/2}.$$

Розглянемо тепер другий випадок, коли $2\gamma a_k/\pi x\leqslant 1$. У даному випадку будемо мати, що за умови $x\geqslant 2\gamma a_k/\pi x$

$$||\xi_k||=\left(\sup_{x>0}x^b\left(\frac{2\gamma a_k}{\pi x}\right)^{1/a}\right)^{1/2}.$$

Так як $b/a > 0$ завжди, то така функція буде зростаючою, і супремум її буде нескінченним, а, отже, переднорма ξ_k буде невизначеною.

Остаточно, будемо мати

$$||\xi_k|| = \left(\frac{2\gamma a_k}{\pi}\right)^{b/2}.$$

Відповідна умова збіжності запишеться як

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}} = \left(\frac{2\gamma}{\pi}\right)^{ab/(ab+1)} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{ab/(ab+1)} < \infty,$$

тобто

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{ab/(ab+1)} < \infty.$$

Оцінка для функції розподілу суми ряду буде мати вигляд

$$P\{|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k| > x\} \leqslant \left(\frac{2\gamma}{\pi x}\right)^{\frac{ab}{ab+1}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\frac{ab}{ab+1}}\right)^{ab+1}$$

за умови, що $x < 2\gamma a_k/\pi$.

Висновки до розділу 5

У розділі 5 введено простори $D_{V,W}$ - передбанахові простори випадкових величин із заданою переднормою. Вивчено їх основні властивості, знайдено мажоруючу характеристику даних просторів. Доведено теорему про умови збіжності нескінченних сум випадкових величин із $D_{V,W}$ у загальному випадку, а також для випадків, коли V та W є степеневими функціями, та коли W є C-функцією, а у V є функцією, оберненою до C-функції. Розглянуто декілька прикладів випадкових величин із $D_{V,W}$.

Розділ 6

Випадкові процеси з просторів $D_{V,W}$ та їх моделювання

У даному розділі вводиться поняття випадкового процесу із $D_{V,W}(\Omega)$. Вивчаються такі властивості цих процесів, як розподіл супремуму, вибіркова неперервність, рівномірна збіжність. Спираючись на досліджені властивості оцінюється точність та надійність побудови моделей процесів із $D_{V,W}(\Omega)$ у даному просторі.

6.1. Випадкові процеси з просторів $D_{V,W}$

Означення 6.1. *Будемо казати, що випадковий процес $X(t) = \{X(t), t \in T\}$ належить простору $D_{V,W}$, якщо для кожного t $X(t) \in D_{V,W}$.*

Прикладами випадкових процесів з простору $D_{V,W}$ є випадкові процеси, які можуть бути зображені у вигляді ряду

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \phi_k(t), \ t \in T, \tag{6.1}$$

коли $\xi_k \in D_{V,W}$ і цей ряд збігається в просторі $D_{V,W}$.

Умови збіжності ряду (6.1) дає наступна теорема.

Теорема 6.1. *Нехай $W(x) = |x|^a$, $V(x) = |x|^b$, $a \geqslant 1$, $0 < b \leqslant 1$. Тоді ряд (6.1) збігається за ймовірністю, якщо збігається ряд*

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k^{\frac{ab}{ab+1}}(t) ||\xi_k||_{V,W}^{\frac{2a}{ab+1}}.$$

Крім того, для всіх $x \geqslant \mu$ виконується

$$P\{|\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(t)\xi_k| \geqslant x\} \leqslant \frac{1}{x^{ab}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k^{\frac{ab}{ab+1}}(t) ||\xi_k||_{V,W}^{\frac{2a}{ab+1}} \right)^{ab+1},$$

тобто $X(t) \in D_{V,W}$.

Доведення. Твердження теореми випливає із теорем 5.4 та 5.1.

Надалі у цьому розділі передномру $||\cdot||_{V,W}$ простору $D_{V,W}$ позначатимемо $||\cdot||$.

Нехай $X = \{X(t), t \in T\}$ - випадковий процес з простору $D_{V,W}$, $\rho_X(t,s) = ||X(s) - X(t)||$ - передметрика, породжена процесом X.

Будемо казати, що для процесу $X(t)$ виконується умова A1, якщо

A1) $\sup_{t\in T} ||X(t)|| < \infty$.

Будемо казати, що для процесу $X(t)$ виконується умова А2, якщо

A2) Простір (T,ρ_X) - сепарабельний та процес X сепарабельний на (T,ρ_X).

Позначимо $\varepsilon_0 = \sup_{t,s\in T} \rho_X(t,s)$. З умови (А1) та теореми 5.1 випливає, що $\varepsilon_0 < \infty$. Позначимо $\varepsilon_k = \varepsilon_0\theta^k$, $\theta \in (0,1)$; також позначимо $N(\varepsilon)$ - метричну масивність простору (T,ρ_X), тобто мінімальне число замкнених куль радіуса ε, які покривають (T,ρ_X).

Позначимо S_n найменшу ε_n-сітку множини T відносно псевдометрики ρ_X, і покладемо $S = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$. Множина S_0 складається лише з однієї точки (будь-якої); позначимо її t_0. Множина S злічена і скрізь щільна в T відносно псевдометрики ρ_X. Так як процес X неперервний за ймовірністю та сепарабельний, будь-яка злічена скрізь щільна множина в (T,ρ_X) є множиною сепарабельності для процесу X. Тоді

$$\sup_{t\in T} |X(t)| = \sup_{t\in S} |X(t)|$$

майже напевно.

Означення 6.2. *Сім'я відображень $\alpha_k(t)$, $k = 0,1,\ldots$ називається α-процедурою, якщо кожній точці з S ставиться у відповідність одна точка α_k з S_k, така, що $\rho_X(t,\alpha_k(t)) \leqslant \varepsilon_k$.*

Наступна теорема дає нам умови, при яких $\sup_{t\in T} X(t)$ э скінченним з імовірністю 1, та оцінки для розподілу цього супремуму.

Теорема 6.2. *Нехай процес X задовольняє умови А1 та А2. Тоді, якщо збігається ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} V^{(-1)}\left(\frac{\varkappa(N(\varepsilon_n))^2\varepsilon_{n-1}^2}{f^{(-1)}(\varkappa(N(\varepsilon_n))^2\varepsilon_{n-1}^2)}\right), \tag{6.2}$$

де $f = xV(W(x))$, то

$$P\{\sup_{t\in T} |X(t)| \geqslant x\} \leqslant$$

$$\leqslant W\left(\frac{\inf_{t\in T} ||X(t)||^2}{V(\psi_0 x)}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} W\left(\frac{\varkappa(N(\varepsilon_k))^2\varepsilon_{k-1}^2}{V(\psi_k x)}\right), \tag{6.3}$$

де $x > \Psi$,

$$\psi_0 = \frac{1}{\Psi} V^{(-1)}\left(\frac{\inf_{t\in T} ||X(t)||^2}{f^{(-1)}(\inf_{t\in T} ||X(t)||^2)}\right),$$

$$\psi_k = \frac{1}{\Psi} V^{(-1)} \left(\frac{\varkappa(N(\varepsilon_k))^2 \varepsilon_{k-1}^2}{f^{(-1)}(\varkappa(N(\varepsilon_k))^2 \varepsilon_{k-1}^2)} \right),$$

$$\Psi = V^{(-1)} \left(\frac{\inf_{t\in T} ||X(t)||^2}{f^{(-1)}(\inf_{t\in T} ||X(t)||^2)} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} V^{(-1)} \left(\frac{\varkappa(N(\varepsilon_k))^2 \varepsilon_{k-1}^2}{f^{(-1)}(\varkappa(N(\varepsilon_k))^2 \varepsilon_{k-1}^2)} \right).$$

Доведення. Використовуючи α-процедуру для вибору точок множин S_n, отримуємо набір точок $t = t_m, t_{m-1} = \alpha_{m-1}(t_m), ..., t_1 = \alpha_1(t_2), t_0 = \alpha_0(t_1)$, таких, що $t_n \in S_n, n = 0, 1, \ldots, m$, і $S_0 = t_0$. Так як

$$X(t) = X(t_0) + \sum_{n=1}^{m} (X(t_n) - X(t_{n-1})),$$

то

$$\sup_{t\in T} |X(t)| \leqslant |X(t_0)| + \sum_{k=1}^{\infty} \max_{s\in S_k} |X(s) - X(\alpha_{k-1}(s))|, \tag{6.4}$$

отже,

$$P\{\sup_{t\in T} |X(t)| \geqslant x\} \leqslant P\{|X(t_0)| \geqslant \psi_0 x\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} P\{\max_{s\in S_k} |X(s) - X(\alpha_{k-1}(s))| \geqslant \psi_k x\},$$

де ψ_k - числа, такі, що $\psi_k > 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k = 1$. Використовуючи нерівність з теореми 5.1, маємо

$$P\{|X(t_0)| \geqslant \psi_0 x\} + \sum_{k=1}^{\infty} P\{\max_{s\in S_k} |X(s) - X(\alpha_{k-1}(s))| \geqslant \psi_k x\} \leqslant$$

$$\leqslant W \left(\frac{||X(t_0)||^2}{V(\psi_0 x)} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} W \left(\frac{|| \max_{s\in S_k} |X(s) - X(\alpha_{k-1}(s))|||^2}{V(\psi_k x)} \right). \tag{6.5}$$

Розглянемо окремо $|| \max_{s\in S_k} |X(s) - X(\alpha_{k-1}(s))|||$. Маємо

$$|| \max_{s\in S_k} |X(s) - X(\alpha_{k-1}(s))||| \leqslant \varkappa(N(\varepsilon_k)) \max_{s\in S_k} ||X(s) - X(\alpha_{k-1}(s))||,$$

а, так як $\rho_X(s,\alpha_{k-1}(s)) = ||X(s) - X(\alpha_{k-1}(s))|| \leqslant \varepsilon_{k-1}$, то

$$\varkappa(N(\varepsilon_k)) \max_{s\in S_k} ||X(s) - X(\alpha_{k-1}(s))|| \leqslant \varkappa(N(\varepsilon_k))\varepsilon_{k-1}.$$

Підставивши отриману оцінку у нерівність (6.5), отримаємо

$$P\{\sup_{t\in T} |X(t)| \geqslant x\} \leqslant W\left(\frac{||X(t_0)||^2}{V(\psi_0 x)}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} W\left(\frac{\varkappa(N(\varepsilon_k))^2\varepsilon_{k-1}^2}{V(\psi_k x)}\right).$$

Так як t_0 можна обрати довільно, то

$$P\{\sup_{t\in T} |X(t)| \geqslant x\} \leqslant W\left(\frac{\inf_{t\in T} ||X(t)||^2}{V(\psi_0 x)}\right) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} W\left(\frac{\varkappa(N(\varepsilon_k))^2\varepsilon_{k-1}^2}{V(\psi_k x)}\right). \qquad (6.6)$$

Точно так, як і при доведенні теореми 5.3, легко показати, що ряд у (6.6) збігається, якщо обрати ψ_0 та ψ_k наступним чином:

$$\psi_0 = \frac{1}{\Psi} V^{(-1)}\left(\frac{\inf_{t\in T} ||X(t)||^2}{f^{(-1)}(\inf_{t\in T} ||X(t)||^2)}\right),$$

$$\psi_k = \frac{1}{\Psi} V^{(-1)}\left(\frac{\varkappa(N(\varepsilon_k))^2\varepsilon_{k-1}^2}{f^{(-1)}(\mu(N(\varepsilon_k))^2\varepsilon_{k-1}^2)}\right),$$

де

$$\Psi = V^{(-1)}\left(\frac{\inf_{t\in T} ||X(t)||^2}{f^{(-1)}(\inf_{t\in T} ||X(t)||^2)}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} V^{(-1)}\left(\frac{\varkappa(N(\varepsilon_k))^2\varepsilon_{k-1}^2}{f^{(-1)}(\varkappa(N(\varepsilon_k))^2\varepsilon_{k-1}^2)}\right)$$

та $f = xV(W(x))$.

Оскільки в (6.6) мажоруючий ряд збіжний та $P\{\sup_{t\in T} |X(t)| \geqslant x\} \to 0$ при $x \to \infty$, то $\sup_{t\in T} |X(t)|$ обмежений майже напевне. $\diamondsuit$

Теорема 6.3. *Нехай процес $X = \{X(t), t \in T\}$ такий, що $X \in D_{V,W}$, $W = |x|^a$, $V = |x|^b$, $a > 0, b > 0$; крім того, X задовольняє умови A1 та A2.*

Якщо виконується умова

$$\int\limits_0^{\Delta_0 p} (N(u^{\frac{ab+1}{2a}}))^{\frac{1}{ab+1}} du < \infty, \tag{6.7}$$

де $p := \theta^{\frac{2a}{ab+1}}$, θ *– будь-яке число,* $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, $\Delta_0 := \varepsilon_0^{\frac{2a}{ab+1}}$,
$\varepsilon_0 = \sup_{t,s\in T} \rho_X(t,s)$, *то тоді* $\sup_{t\in T} |X(t)| \in D_{V,W}$, *і, крім того,*

$$P\{\sup_{t\in T} |X(t)| \geqslant x\} \leqslant \frac{1}{x^{ab}} \Bigg(\inf_{t\in T} ||X(t)||^{\frac{2a}{ab+1}} +$$
$$+ \frac{1}{p(1-p)} \int\limits_0^{\Delta_0 p} (N(u^{\frac{ab+1}{2a}}))^{\frac{1}{ab+1}} du \Bigg). \tag{6.8}$$

Доведення. При заданих W та V умова 6.2 буде мати вигляд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varkappa(N(\varepsilon_k))^{\frac{2a}{ab+1}} \varepsilon_{k-1}^{\frac{2a}{ab+1}} =$$
$$= \varepsilon_0^{\frac{2a}{ab+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \varkappa(N(\varepsilon_0 \theta^k))^{\frac{2a}{ab+1}} (\theta^{k-1})^{\frac{2a}{ab+1}} < \infty,$$

оскільки $\varepsilon_k = \theta^k \varepsilon_0$. Якщо покласти $\Delta_0 = \varepsilon_0^{\frac{2a}{ab+1}}$, $p = \theta^{\frac{2a}{ab+1}}$, то отримаємо

$$\varepsilon_0^{\frac{2a}{ab+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \varkappa(N(\varepsilon_0 \theta^k))^{\frac{2a}{ab+1}} (\theta^{k-1})^{\frac{2a}{ab+1}} =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} (\varkappa(N((\Delta_0 p^k)^{\frac{ab+1}{2a}})))^{\frac{2a}{ab+1}} \Delta_0 p^{k-1}.$$

Отже

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\varkappa(N((\Delta_0 p^k)^{\frac{ab+1}{2a}})))^{\frac{2a}{ab+1}} \Delta_0 p^{k-1} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Delta_0 p^{k+1}}^{\Delta_0 p^k} (\varkappa(N(u^{\frac{ab+1}{2a}})))^{\frac{2a}{ab+1}} du \frac{1}{p(1-p)} =$$
$$= \frac{1}{p(1-p)} \int\limits_0^{\Delta_0 p} (\varkappa(N(u^{\frac{ab+1}{2a}})))^{\frac{2a}{ab+1}} du.$$

Якщо цей інтеграл збіжний, то тоді $\sup_{t\in T} |X(t)| \in D_{V,W}$. Це випливає з (6.8).

Твердження теореми випливає з того, що для даних V,W

$$\varkappa(n) = \sup_{0<t<1/n} \left(\frac{W^{(-1)}(tn)}{W^{(-1)}(t)} \right)^{1/2} = n^{1/2a}.$$

Теорема 6.4. *Нехай процес* $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$ *такий, що* $X \in D_{V,W}$, $W(x) = |x|^a$, $V(x) = |x|^b$, $a > 0$, $b > 0$, *для процесу* X *виконується умова (A1), та* X*-сепарабельний на* $[0,T]$. *Нехай*

$$\sup_{|t-s|\leqslant h} ||X(t) - X(s)|| \leqslant Dh^{\zeta} = \delta(h),$$

$D > 0$, $\zeta > \frac{1}{2a}$. *Тоді* $\sup_{t\in[0,T]} |X(t)| \in D_{V,W}$, *і, крім того, для будь-якого* $x > 0$

$$P\{\sup_{t\in[0,T]} |X(t)| > x\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{x^{ab}} \left(\inf_{t\in[0,T]} ||X(t)||^{\frac{2a}{ab+1}} + \int_0^{\Delta_0 p} \left(\frac{TD^{1/\zeta}}{2u^{\frac{ab+1}{2a\zeta}}} + 1 \right)^{\frac{1}{ab+1}} du \right),$$

Δ_0 *та* p *задані в попередній теоремі.*

Доведення. З попередньої теореми $\sup_{t\in T} |X(t)| \in D_{V,W}$, якщо інтеграл (6.7) скінченний. За умов даної теореми,

$$N(\varepsilon) \leqslant \frac{T}{2\delta^{(-1)}(\varepsilon)} + 1.$$

Тоді умову (6.7) можна переписати як

$$\int_0^{\Delta_0 p} \left(\frac{T}{2\delta^{(-1)}(u^{(ab+1)/2a})} + 1 \right)^{1/(ab+1)} du < \infty,$$

або, підставивши $\delta(h)$,

$$\int_0^{\Delta_0 p} \left(\frac{D^{1/\zeta}T}{2u^{(ab+1)/2a\zeta}} + 1 \right)^{1/(ab+1)} du < \infty.$$

Для того, щоб цей інтеграл був скінченним, досить, щоб був скінченним інтеграл

$$\int_0^{\Delta_0 p} \frac{1}{u^{1/2a\zeta}} du.$$

Це виконується коли $\zeta > \frac{1}{2a}$.

6.2. Неперервність процесів з простору $D_{V,W}$

Нехай $X = \{X(t), t \in T\}$ - випадковий процес з простору $D_{V,W}$, такий, що $\sup_{t\in T} ||X(t)|| < \infty$. Нехай ρ_X - квазіметрика, породжена процесом X, простір (T, ρ_X) - сепарабельний, а процес $X(t)$ сепарабельний на (T, ρ_X). Нехай $\theta \in (0,1)$ та $\varepsilon_l = \varepsilon_0\theta^l, l \geqslant 1$, $\varepsilon_0 = \sup_{t,s\in T} ||X(t) - X(s)||$. Позначимо через V_{ε_k} множину центрів замкнених куль радіуса ε_k, які утворюють мінімальне покриття простору (T, ρ_X). Кількість точок множини V_{ε_k} дорівнює $N(\varepsilon_k)$. Припустимо, що $N(\varepsilon) < \infty$ $\forall \varepsilon > 0$. Нехай $t, s \in T$ - такі точки, що $\rho_X(t,s) < \varepsilon$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

Виберемо k таким чином, щоб $\varepsilon_k < \varepsilon \leqslant \varepsilon_{k-1}$. Множина $V_k = \cup_{j=k}^{\infty} V_{\varepsilon_j}$ є множиною сепарабельності процесу $X(t)$, бо $X(t)$ є неперервним за ймовірністю в просторі (T, ρ_X).

Позначимо S_n найменшу ε_n-сітку множини T відносно псевдометрики ρ_X, і покладемо $S = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$.

Теорема 6.5. *Якщо процес X задовольняє вищенаведеним умовам і ряд*

$$\sum_{l=k}^{\infty} V^{(-1)}\left(\frac{(\varkappa((N(\varepsilon_l))^2))^2\varepsilon_{l-1}^2}{f^{(-1)}((\varkappa(N(\varepsilon_l))^2)^2\varepsilon_{l-1}^2)}\right)$$

збігається, та $x \geqslant \Psi$, де

$$\Psi = V^{(-1)}\left(\frac{(\varkappa((N(\varepsilon_k))^2))^2\hat{\varepsilon}^2}{f^{(-1)}((\varkappa(N^2(\varepsilon_k))^2)^2\hat{\varepsilon}^2)}\right) +$$
$$+2\sum_{l=k}^{\infty} V^{(-1)}\left(\frac{(\varkappa((N(\varepsilon_l))^2))^2\varepsilon_{l-1}^2}{f^{(-1)}((\varkappa(N(\varepsilon_l))^2)^2\varepsilon_{l-1}^2}\right),$$

то тоді

$$P\{\sup_{\rho_X(t,s)<\varepsilon} |X(t) - X(s)| \geqslant x\} \leqslant$$

$$\leqslant W\left(\frac{(\varkappa((N(\varepsilon_k))^2))^2\varepsilon_{k-1}^2}{V(\psi_0 x)}\right) + 2\sum_{l=k}^{\infty} W\left(\frac{(\varkappa((N(\varepsilon_l))^2))^2\hat{\varepsilon}^2}{V(\psi_l x)}\right),$$

де

$$\psi_0 = \frac{1}{\Psi} V^{(-1)}\left(\frac{(\varkappa((N(\varepsilon_k))^2))^2\hat{\varepsilon}^2}{f^{(-1)}((\varkappa(N^2(\varepsilon_k))^2)^2\hat{\varepsilon}^2)}\right),$$

$$\psi_l = \frac{1}{\Psi} V^{(-1)} \left(\frac{(\varkappa((N(\varepsilon_l))^2))^2 \varepsilon_{l-1}^2}{f^{(-1)}((\varkappa(N(\varepsilon_l))^2)^2 \varepsilon_{l-1}^2} \right),$$
$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_k \frac{5 - 3\theta}{1 - \theta}.$$

При цьому процес $X(t)$ вибірково неперервний у просторі (T, ρ_X).

Доведення. Нехай t та s - довільні точки з V_k, такі, що $\rho(t, s) \leqslant \varepsilon$. Зрозуміло, що існують точки m та m_1 такі, що $t \in V_{\varepsilon_m}$, $s \in V_{\varepsilon_{m_1}}$, $m > k$, $m_1 > k$. Нехай

$$t_m = \alpha_m(t), t_{m-1} = \alpha_{m-1}(t_m), \ldots, t_k = \alpha_k(t_{k+1}),$$
$$s_{m_1} = \alpha_{m_1}(t), s_{m_1 - 1} = \alpha_{m_1 - 1}(s_{m_1}), \ldots, s_k = \alpha_k(s_{k+1}),$$

де $\alpha_k(t)$ -альфа-процедура. Тоді

$$X(t) - X(s) = \sum_{l=k}^{m-1} (X(t_{l+1}) - X(t_l)) +$$
$$+ \sum_{l=k}^{m-1} (X(s_{l+1}) - X(s_l)) + (X(t_k) - X(s_k)). \tag{6.9}$$

$\diamondsuit$

З останньої рівності випливає, що

$$||X(t_k) - X(s_k)|| \leqslant ||X(t) - X(\alpha_m(t))|| + ||X(s) - X(\alpha_m(s))|| +$$
$$+ \sum_{l=k}^{m-1} ||X(t_{l+1}) - X(t_l)|| + \sum_{l=k}^{m-1} ||X(s_{l+1}) - X(s_l)|| + ||X(t) - X(s)|| \leqslant$$
$$\leqslant 2 \sum_{l=k}^{m-1} \max_{u \in V_l} ||X(u) - X(\alpha_l(u))|| + ||X(t) - X(\alpha_k(t))|| +$$
$$+ ||X(s) - X(\alpha_k(s))|| + ||X(t) - X(s)|| \leqslant 2 \sum_{l=k}^{m} \varepsilon_l + 2\varepsilon_k + \varepsilon \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_k \frac{5 - 3\theta}{1 - \theta} := \hat{\varepsilon}.$$

З (6.9), спрямувавши m до нескінченності, отримаємо

$$\sup_{\rho_X(t,s)\leqslant\varepsilon}|X(t)-X(s)| = \sup_{|t-s|\leqslant\varepsilon,t,s,\in V_k}|X(t)-X(s)| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{u,v\in V_k}|X(u)-X(v)| + 2\sum_{l=k}^{\infty}\max_{u\in V_{l+1}}|X(u)-X(\alpha_l(u))|.$$

Отже, для $\psi_0 > 0$, $\psi_l > 0$, таких, що $\psi_0 + 2\sum_{l=k}^{\infty}\psi_l \leqslant 1$ має місце нерівність

$$P\{\sup_{\rho_X(t,s)\leqslant\varepsilon}|X(t)-X(s)| \geqslant x\} \leqslant$$

$$\leqslant P\{\max_{t_k,s_k\in V_k}|X(t_k)-X(s_k)| \geqslant \psi_0 x\} +$$

$$+2\sum_{l=k}^{\infty}P\{\max_{u\in V_{l+1}}|X(u)-X(\alpha_l(u))| \geqslant \psi_l x\}.$$

Аналогічно до доведення теореми 6.2, отримаємо

$$P\{\sup_{\rho_X(t,s)\leqslant\varepsilon}|X(t)-X(s)| \geqslant x\} \leqslant$$

$$\leqslant W\left(\frac{(\varkappa((N(\varepsilon_k))^2))^2\hat{\varepsilon}^2}{V(\psi_0 x)}\right) + 2\sum_{l=k}^{\infty}W\left(\frac{(\varkappa((N(\varepsilon_l))^2))^2\varepsilon_{l-1}^2}{V(\psi_l x)}\right),$$

де

$$\psi_0 = \frac{1}{\Psi}V^{(-1)}\left(\frac{(\varkappa((N(\varepsilon_k))^2))^2\hat{\varepsilon}^2}{f^{(-1)}((\varkappa(N(\varepsilon_k))^2))^2\hat{\varepsilon}^2)}\right),$$

$$\psi_l = \frac{1}{\Psi}V^{(-1)}\left(\frac{\varkappa(N(\varepsilon_l))^2\varepsilon_{l-1}^2}{f^{(-1)}((\varkappa(N(\varepsilon_l))^2)^2\varepsilon_{l-1}^2}\right),$$

$$\Psi = V^{(-1)}\left(\frac{(\varkappa((N(\varepsilon_k))^2))^2\hat{\varepsilon}^2}{f^{(-1)}((\varkappa(N(\varepsilon_k))^2))^2\hat{\varepsilon}^2)}\right) +$$

$$+\sum_{l=k}^{\infty}V^{(-1)}\left(\frac{(\varkappa(N(\varepsilon_l))^2)^2\varepsilon_{l-1}^2}{f^{(-1)}((\varkappa(N(\varepsilon_l))^2)^2\varepsilon_{l-1}^2}\right).$$

Перше твердження теореми доведено.

Так як $W(x)$ монотонно зростає для всіх $x > 0$, то при фіксованому x

$$W\left(\frac{(\varkappa((N(\varepsilon_k))^2))^2\hat{\varepsilon}^2}{V(\psi_0 x)}\right) \to 0,$$

а, так як ряд

$$\sum_{l=k}^{\infty} W\left(\frac{\varkappa(N(\varepsilon_l))^2\varepsilon_{l-1}^2}{V(\psi_l x)}\right)$$

збігається, то, якщо спрямувати $k \to \infty$, отримаємо

$$W\left(\frac{(\varkappa((N(\varepsilon_k))^2))^2\hat{\varepsilon}^2}{V(\psi_0 x)}\right) + \sum_{l=k}^{\infty} W\left(\frac{\varkappa(N(\varepsilon_l))^2\varepsilon_{l-1}^2}{V(\psi_l x)}\right) \to 0,$$

що автоматично означає

$$P\{\sup_{\rho_X(t,s)<\varepsilon} |X(t)-X(s)| \geqslant x\} \to 0, k \to \infty.$$

Звідси видно, що процес є вибірково неперервним на (T, ρ_X).

Теорема 6.6. *Нехай $W(x) = x^a$, $V(x) = x^b$, $a > 1$, $0 < b < 1$. Тоді, якщо*

$$\int_0^{\Delta_0 p^k} N(u^{\frac{ab+1}{2a}})^{2/(ab+1)} du < \infty, \tag{6.10}$$

то

$$P\{\sup_{\rho_X(t,s)<\varepsilon} |X(s)-X(t)| \geqslant x\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{x^{ab}p(1-p)}\left(2\int_0^{\Delta_0 p^{k+1}} N(u^{\frac{ab+1}{2a}})^{2/(ab+1)} du + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{5-3\theta}{(1-\theta)\theta}\right)^{\frac{1}{ab+1}} \int_{\Delta_0 p^{k+1}}^{\Delta_0 p^k} N(u^{\frac{ab+1}{2a}})^{2/(ab+1)} du\right), \tag{6.11}$$

Δ_0 та p задані у теоремі 6.2, $\theta \in (0,1)$. При цьому процес $X(t)$ є вибірково неперервним на (T, ρ_X).

Доведення.

$$P\{\sup_{\rho_X(t,s)<\varepsilon} |X(s)-X(t)| \geqslant x\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{x^{ab}p(1-p)}\left((\varkappa((N(\varepsilon_k))^2)\hat{\varepsilon})^{\frac{2a}{ab+1}}+2\sum_{l=k+1}^{\infty}(\varkappa((N(\varepsilon_l))^2)\varepsilon_{l-1})^{\frac{2a}{ab+1}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{x^{ab}p(1-p)}\left(\int\limits_{\Delta_0 p^{k+1}}^{\Delta_0 p^k}\left(\varkappa\left(\left(N(u^{\frac{ab+1}{2a}})\right)^2\frac{5-3\theta}{(1-\theta)\theta}\right)\right)^{\frac{2a}{ab+1}}du+\right.$$

$$\left.+2\int\limits_{0}^{\Delta_0 p^{k+1}}(\varkappa((N(u^{\frac{ab+1}{2a}}))^2))^{\frac{2a}{ab+1}}du\right).$$

Останній результат отримано використовуючи доведення теореми 6.2.

З теореми 5.2 маємо, що

$$\varkappa(n)=\sup_{0<t<1/n}\left(\frac{W^{(-1)}(tn)}{W^{(-1)}(t)}\right)^{1/2}=n^{1/2a}.$$

Врахувавши цей вираз , отримаємо наступне

$$P\{\sup_{\rho_X(t,s)<\varepsilon}|X(s)-X(t)|\geqslant x\}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{x^{ab}p(1-p)}\left(\left(\frac{5-3\theta}{(1-\theta)\theta}\right)^{\frac{1}{ab+1}}\int\limits_{\Delta_0 p^{k+1}}^{\Delta_0 p^k}(N(u^{\frac{ab+1}{2a}}))^{2/(ab+1)}du+\right.$$

$$\left.+\,2\int\limits_{0}^{\Delta_0 p^{k+1}}N(u^{\frac{ab+1}{2a}})^{2/(ab+1)}du\right)\leqslant\frac{1}{x^{ab}p(1-p)}\times$$

$$\times\left(2\int\limits_{0}^{\Delta_0 p^{k+1}}N(u^{\frac{ab+1}{2a}})^{2/(ab+1)}du+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{5-3\theta}{(1-\theta)\theta}\right)^{\frac{1}{ab+1}}\int\limits_{\Delta_0 p^{k+1}}^{\Delta_0 p^k}N(u^{\frac{ab+1}{2a}})^{2/(ab+1)}du\right).$$

Теорема 6.7. *Нехай процес* $X=\{X(t),t\in[0,T]\}$ *такий, що* $X\in D_{V,W}$, X*-сепарабельний на* $[0,T]$, $W(x)=|x|^a$, $V(x)=|x|^b$, $a\geqslant 1$,

$0 < b \leqslant 1$. *Нехай*

$$\sup_{|t-s|\leqslant h} ||X(t) - X(s)|| \leqslant Dh^{\zeta},$$

$D > 0$, $\zeta > \frac{1}{2a}$. *Тоді* $\sup_{t\in[0,T]} |X(t)| \in D_{V,W}$, *і, крім того, для будь-якого* $x > 0$

$$P\{\sup_{\rho_X(t,s)\leqslant\varepsilon} |X(s) - X(t)| \geqslant x\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{x^{ab}p(1-p)} \left(\left(\frac{5-3\theta}{(1-\theta)\theta}\right)^{\frac{1}{ab+1}} \int\limits_{\Delta_0 p^{k+1}}^{\Delta_0 p^k} \left(\frac{D^{1/\zeta}T}{2u^{\frac{ab+1}{2a\zeta}}} + 1\right)^{2/(ab+1)} du + \right.$$

$$\left. + 2 \int\limits_0^{\Delta_0 p^{k+1}} \left(\frac{D^{1/\zeta}T}{2u^{\frac{ab+1}{2a\zeta}}} + 1\right)^{2/(ab+1)} du \right),$$

Δ_0 *та* p *задані у теоремі 6.2,* $\theta \in (0,1)$. *При цьому процес* $X(t)$ *є вибірково неперервним на* (T, ρ_X).

Доведення. За умов теореми,

$$N(\varepsilon) \leqslant \frac{D^{1/\zeta}T}{2\varepsilon^{1/\zeta}} + 1,$$

Тоді умову (6.11) можна переписати як

$$P\{\sup_{\rho_X(t,s)<\varepsilon} |X(s) - X(t)| \geqslant x\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{x^{ab}p(1-p)} \left(2 \int\limits_0^{\Delta_0 p^{k+1}} N(u^{\frac{ab+1}{2a}})^{2/(ab+1)} du + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{5-3\theta}{(1-\theta)\theta}\right)^{\frac{1}{ab+1}} \int\limits_{\Delta_0 p^{k+1}}^{\Delta_0 p^k} N(u^{\frac{ab+1}{2a}})^{2/(ab+1)} du \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{x^{ab}p(1-p)} \left(\left(\frac{5-3\theta}{(1-\theta)\theta}\right)^{\frac{1}{ab+1}} \int\limits_{\Delta_0 p^{k+1}}^{\Delta_0 p^k} \left(\frac{D^{1/\zeta}T}{2u^{\frac{ab+1}{2a\zeta}}} + 1\right)^{2/(ab+1)} du + \right.$$

$$+ 2 \int\limits_{0}^{\Delta_0 p^{k+1}} \left(\frac{D^{1/\zeta} T}{2u^{\frac{ab+1}{2a\zeta}}} + 1 \right)^{2/(ab+1)} du \right).$$

Інтеграли в останньому виразі збіжні, коли збіжний інтеграл

$$\int\limits_{0}^{\Delta_0 p^{k+1}} \frac{1}{u^{\frac{1}{a\zeta}}} du,$$

що досягається при $\zeta > \frac{1}{a}$. Значення цих інтегралів можна оцінити за допомогою гіпергеометричної функції.

6.3. Рівномірна збіжність функціональних рядів у $D_{V,W}(\Omega)$.

Нехай процес $X(t)$ можна зобразити у вигляді 6.1, тобто

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \phi_k(t), \ t \in T,$$

коли $\xi_k \in D_{V,W}$ і цей ряд збігається в просторі $D_{V,W}$. Позначимо

$$X_{N,M}(t) := \sum_{k=N+1}^{M} \xi_k \phi_k(t).$$

Розглянемо випадок, коли $V(x) = |x|^b$, $W(x) = |x|^a$, $a > 0$, $b > 0$, $T = [0, T]$ - відрізок. За таких умов, метрична масивність набуде вигляду:

$$N(\varepsilon) = \frac{D^{1/\zeta} T}{2\varepsilon^{1/\zeta}} + 1,$$

коли при всіх N, M виконується умова

$$\sup_{|t-s|<h} (||X_{N,M}(s) - X_{N,M}(t)||) \leqslant D_{N,M} |h|^{\zeta}, \tag{6.12}$$

$D_{N,M} < D$.

Теорема 6.8. *Нехай $V(x) = |x|^b$, $W(x) = |x|^a$, $a > 0$, $b > 0$, $T = [0, T]$ - відрізок, $||X_{N,M}(t)|| \to 0$, $N, M \to \infty$ рівномірно по $t \in [0, T]$ і виконується умова (6.12). Тоді*

$$P\{\sup_{t \in T} |X_{N,M}(t)| \geqslant x\} \to 0, N, M \to \infty,$$

тобто $X_{N,M}$ рівномірно збіжний за ймовірністю.

Доведення. З теореми 6.4 маємо, що

$$P\{\sup_{t\in[0,T]}|X_{N,M}(t)|>x\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{x^{ab}}\left(\inf_{t\in[0,T]}||X_{N,M}(t)||^{\frac{2a}{ab+1}}+\int\limits_0^{\Delta_{N,M}p}\left(\frac{D^{1/\zeta}T}{2u^{\frac{ab+1}{2a\zeta}}}+1\right)^{\frac{1}{(ab+1)}}du\right),$$

де $\Delta_{N,M}=\varepsilon_{N,M}^{\frac{2a}{ab+1}}$, $p=\theta^{\frac{2a}{ab+1}}$. Позначимо праву частину нерівності як $Z(N,M,x)$. За умов теореми, $||X_{N,M}(t)||\to 0$, $N,M\to\infty$, звідки $\inf_{t\in[0,T]}$ $||X_{N,M}(t)||\to 0$, $N,M\to\infty$, а також $\Delta_{N,M}\to 0$, $N,M\to\infty$. Звідси отримуємо, що $Z(N,M,x)\to 0$, $N,M\to\infty$.

Зауваження 6.1. Спрямувавши $M\to\infty$, отримаємо, що $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty}\xi_k\phi_k(t)\to 0$, $N\to\infty$ за ймовірністю.

6.4. Моделі випадкових процесів з просторів $D_{V,W}$

Нехай випадковий процес може бути зображений у вигляді

$$X(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\phi_k(t), \tag{6.13}$$

де $t\in[0,T]$. Нехай:

$$X_N(t)=\sum_{k=1}^{N}\xi_k\phi_k(t).$$

Вираз $X_N(t)$ будемо називати моделлю процесу X.

Позначимо

$$\tilde{X}_N(t):=\sum_{k=N+1}^{\infty}\xi_k\phi_k(t)=X(t)-X_N(t). \tag{6.14}$$

Теорема 6.9. *Нехай процес $X=\{X(t),t\in[0,T]\}$ (див (6.13)) такий, що $\xi_k\in D_{V,W}$, X задовольняє умови A1 та A2; крім того, $W(x)=|x|^a$, $V(x)=|x|^b$, $a\geqslant 1$, $0<b\leqslant 1$.*

Якщо при

$$\sup_{|t-s|<h}|\phi_k(s)-\phi_k(t)|\leqslant C_k|h|^{\zeta}$$

виконуються умови

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}} C_k^{\frac{ab}{ab+1}} < \infty$$

та

$$\zeta > \frac{1}{ab},$$

то $\sup_{t\in T} |\tilde{X}_N(t)| \in D_{V,W}$*, і, крім того,*

$$P\{\sup_{t\in[0,T]} |\tilde{X}_N(t)| > x\} \leqslant \frac{1}{x^{ab}} \left(\inf_{t\in[0,T]} ||\tilde{X}_N(t)||^{\frac{2a}{ab+1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{T^{1/(ab+1)} (\sum_{k=N+1}^{\infty} C_k^{\frac{ab}{ab+1}} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}})^{\frac{1}{ab\zeta}}}{p(1-p)2^{ab/(ab+1)}} \frac{ab\zeta(\Delta_N p)^{1-\frac{1}{ab\zeta}}}{ab\zeta - 1} + \frac{\Delta_N}{1-p} \right),$$

$\Delta_N = \Delta_{N,\infty}$*, де* $\Delta_{N,M}$ *задане у теоремі 6.8,* $p = \theta^{\frac{2a}{ab+1}}$*,* $\theta \in (0,1)$*.*

Доведення. Оскільки $\sup_{|t-s|<h} |\phi_k(t) - \phi_k(s)| \leqslant C_k |h|^\zeta$. З теорем 5.1 та 5.4 випливає, що

$$\sup_{|t-s|<h} ||\tilde{X}_N(t) - \tilde{X}_N(s)|| = \sup_{|t-s|<h} || \sum_{k=N+1}^{\infty} \xi_k(\phi_k(t) - \phi_k(s))|| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}} \sup_{|t-s|<h} J^{\frac{2a}{ab+1}} (\phi_k(t) - \phi_k(s)) \right)^{\frac{ab+1}{2a}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}} \left(C_k^{b/2} h^{b\zeta/2} \right)^{\frac{2a}{ab+1}} \right)^{\frac{ab+1}{2a}} = h^{b\zeta/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}} C_k^{\frac{ab}{ab+1}} \right)^{\frac{ab+1}{2a}},$$

так як $J(z) = z^{b/2}$ та $|| \sum_{k=N+1}^{\infty} \xi_k|| \leqslant (\sum_{k=N+1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}})^{\frac{ab+1}{2a}}$.

Оскільки за умовою теореми $t \in [0,T]$, то $N(\varepsilon) \leqslant \frac{T}{2\delta^{(-1)}(h)} + 1$, де $\delta(h)$ можна покласти

$$\delta(h) = h^{b\zeta/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}} C_k^{\frac{ab}{ab+1}} \right)^{\frac{ab+1}{2a}}$$

за умови, що ряд $\sum_{k=N+1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}} C_k^{\frac{ab}{ab+1}}$ збігається.

За теоремою 6.3

$$P\{\sup_{t\in[0,T]} |\tilde{X}_N(t)| > x\} \leqslant \frac{1}{x^{ab}} \left(\inf_{t\in[0,T]} ||\tilde{X}_N(t)||^{\frac{2a}{ab+1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{p(1-p)} \int_0^{\Delta_N p} (N(u^{\frac{ab+1}{2a}}))^{1/(ab+1)} du \right) \leqslant \frac{1}{x^{ab}} \left(\inf_{t\in[0,T]} ||\tilde{X}_N(t)||^{\frac{2a}{ab+1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{p(1-p)} \int_0^{\Delta_N p} \left(\frac{T}{2\delta^{(-1)}(u^{\frac{ab+1}{2a}})} + 1 \right)^{1/(ab+1)} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{x^{ab}} \left(\inf_{t\in[0,T]} ||\tilde{X}_N(t)||^{\frac{2a}{ab+1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{p(1-p)} \int_0^{\Delta_N p} \left(\frac{T(\sum_{k=N+1}^{\infty} C_k^{\frac{ab}{ab+1}} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}})^{\frac{ab+1}{ab\zeta}}}{2u^{\frac{ab+1}{ab\zeta}}} + 1 \right)^{1/(ab+1)} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{x^{ab}} \left(\inf_{t\in[0,T]} ||\tilde{X}_N(t)||^{\frac{2a}{ab+1}} + \frac{T^{1/(ab+1)} (\sum_{k=N+1}^{\infty} C_k^{\frac{ab}{ab+1}} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}})^{\frac{1}{ab\zeta}}}{2^{1/(ab+1)} p(1-p)} \right.$$

$$\left. \int_0^{\Delta_N p} \frac{du}{u^{\frac{1}{ab\zeta}}} + \frac{\Delta_N}{1-p} \right) \leqslant \frac{1}{x^{ab}} \left(\inf_{t\in[0,T]} ||\tilde{X}_N(t)||^{\frac{2a}{ab+1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{T^{1/(ab+1)} (\sum_{k=N+1}^{\infty} C_k^{\frac{ab}{ab+1}} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}})^{\frac{1}{ab\zeta}}}{2^{ab/(ab+1)} p(1-p)} \frac{ab\zeta (\Delta_N p)^{1-\frac{1}{ab\zeta}}}{ab\zeta - 1} + \frac{\Delta_N}{1-p} \right),$$

за умови, що інтеграл

$$\int_0^{\Delta_N p} \frac{1}{u^{\frac{1}{ab\zeta}}} du$$

скінчений, тобто коли $\zeta > \frac{1}{ab}$.

Наслідок 6.1. *Нехай процес* $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$, *котрий може бу-*

ти зображений у вигляді (6.13), такий, що $\xi_k \in D_{V,W}$, $W(x) = |x|^a$, $V(x) = |x|^b$, $a \geqslant 1$, $0 < b \leqslant 1$. *крім того,* X *задовольняє умови A1 та A2.*

Модель $X_N(t)$ *наближає процес* $X(t)$ *при* $t \in [0, T]$ *із заданими надійністю* $1 - \nu$, $0 < \nu < 1$ *та точністю* $æ > 0$ *у просторі* $D_{V,W}(\Omega)$, *тобто*

$$P\{\sup_{t\in[0,T]} |\widetilde{X}_N(t)| > æ\} \leqslant \nu,$$

при умові, що $\sup_{|t-s|<h} |\phi_k(s) - \phi_k(t)| \leqslant C_k|h|^{\zeta}$, *якщо виконуються наступні умови:*

$$\frac{1}{æ^{ab}}\left(\inf_{t\in[0,T]} ||\tilde{X}_N(t)||^{\frac{2a}{ab+1}} + \frac{\Delta_N}{1-p} + \right.$$

$$\left. + \frac{T^{1/(ab+1)}(\sum_{k=N+1}^{\infty} C_k^{\frac{ab}{ab+1}} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}})^{\frac{1}{ab\zeta}}}{2^{ab/(ab+1)}p(1-p)} \frac{ab\zeta(\Delta_N p)^{1-\frac{1}{ab\zeta}}}{ab\zeta - 1}\right) \leqslant \nu, \quad (6.15)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^{\frac{ab}{ab+1}} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}} < \infty,$$

$$\zeta > \frac{1}{ab},$$

де $p = \theta^{\frac{2a}{ab+1}}$, θ *- будь-яке число, таке, що* $0 < \theta < 1$, $\Delta_N = \left(\sup_{t,s\in T} ||X(s) - X(t)||\right)^{\frac{2a}{ab+1}}$.

Зауваження 6.2. Ліва частина (6.15) досягає свого мінімума, коли θ є розв'язком рівняння

$$\frac{ab\zeta T^{1/(ab+1)}(\sum_{k=N+1}^{\infty} C_k^{\frac{ab}{ab+1}} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}})^{\frac{1}{ab\zeta}}}{2^{ab/(ab+1)}(ab\zeta - 1)} \Delta_N((ab+1)\theta^{\frac{2a}{ab+1}} - 1) -$$

$$-\Delta_N^{\frac{ab+1}{ab}} \theta^{\frac{2}{b}}((\Delta_N + 1)\theta^{\frac{1}{ab+1}} - \Delta_N - ab - 1) = 0.$$

6.5. Побудова моделей випадкових процесів з просторів $D_{V,W}$

У даному розділі ми будемо розглядати процеси вигляду

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(t),$$

де $\xi_k \in D_{V,W}$, на проміжку $[0,T]$.

Приклад 6.1. Узагальненый броунівський рух. *Нехай* $V(x) = |x|^b$, $W(x) = |x|^a$, $a > 1$, $0 < b < 1$, *і нехай процес* $X(t)$ *може бути представлений у вигляді*

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \sin(\pi k t),$$

$\xi_k \in D_{V,W}$. *В такому випадку* $\varphi_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \sin(\pi k t)$. *Для цього процесу*

$$\sup_{|t-s|<h} |\varphi_k(t) - \varphi_k(s)| = \sup_{|t-s|<h} \left| \frac{\sqrt{2}(\sin(\pi k t) - \sin(\pi k s))}{\sqrt{\pi k}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2/\pi k \left| \sin\left(\frac{\pi k h}{2}\right) \right| \leqslant (2/\pi k)^{1/2-\alpha} h^{\alpha},$$

адже $|\sin t| \leqslant t^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. *Отже,* $C_k = (2/\pi k)^{1/2-\alpha}$, $\zeta = \alpha$, *і* $\frac{1}{ab} < \alpha$. *Це досягаєтсья для* $a \in (1/b\alpha, +\infty)$. *Для цього ж процесу*

$$\inf_{t \in [0,T]} ||X(t)||^{\frac{ab}{ab+1}} = 0,$$

$$\Delta_N = \left(\sup_{t,s \in [0,T]} ||\tilde{X}_N(t) - \tilde{X}_N(s)|| \right)^{\frac{2a}{ab+1}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sup_{t,s \in [0,T]} \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \left|\left| \sqrt{\frac{2}{\pi k}} (\xi_k (\sin(\pi k t) - \sin(\pi k s))) \right|\right|^{\frac{2a}{ab+1}} \right)^{\frac{ab+1}{2a}} \right)^{\frac{2a}{ab+1}} \leqslant$$

$$\leqslant (8/\pi k)^{3ab/4ab+4} \sum_{k=N+1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}}.$$

Обравши необхідні значення точності æ, *надійності* $1 - \nu$ *та підрахувавши значення сталої* θ, *при якій мінімізується (6.15), із нерівності*

$$\nu \geqslant \frac{1}{æ^{ab}} \left(\frac{ab\alpha T^{1/(ab+1)} \left(\theta^{\frac{2a}{ab+1}} (8/\pi k)^{3ab/4ab+4} \sum_{k=N+1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}} \right)^{1-\frac{1}{ab\alpha}}}{\theta^{\frac{2a}{ab+1}}(1-\theta^{\frac{2a}{ab+1}})(ab\alpha-1)2^{ab/(ab+1)}} \times \right.$$

$$\times \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}} (2/\pi k)^{\frac{ab(1/2-\alpha)}{ab+1}} \right)^{\frac{1}{ab\alpha}} +$$

$$\left. + \frac{(8/\pi k)^{3ab/4ab+4} \sum_{k=N+1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}}}{1-\theta^{\frac{2a}{ab+1}}} \right)$$

за умови

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2/\pi k)^{\frac{ab(1/2-\alpha)}{ab+1}} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}} < \infty$$

знаходимо необхідне нам значення N.

Приклад 6.2. *Нехай* $V(x) = |x|^b, W(x) = |x|^a$, $a > 1$, $0 < b < 1$, *і нехай процес* $X(t)$ *може бути представлений у вигляді*

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k A_k (\sin(B_k t) + \cos(B_k t)),$$

$\xi_k \in D_{V,W}$, $A_k > 0, B_k > 0$. *В даному випадку*

$$\sup_{|t-s|<h} |A_k(\sin(B_k t) + \cos(B_k t)) - A_k(\sin(B_k s) + \cos(B_k s))| =$$

$$= \sup_{|t-s|<h} \left| A_k \left(2\sin\left(\frac{B_k}{2}(t-s)\right) \cos\left(\frac{B_k}{2}(t+s)\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. +2\sin\left(\frac{B_k}{2}(t+s)\right) \sin\left(\frac{B_k}{2}(t-s)\right)\right)\right| \leqslant \sup_{|t-s|<h} 4A_k \left|\sin\left(\frac{B_k}{2}(t-s)\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2-\alpha} A_k B_k^{\alpha} h^{\alpha},$$

адже $\sin t \leqslant t^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. *Умова збіжності інтегралу виконується, якщо* $\frac{1}{ab} < \alpha$, *тобто коли* $a \in (\frac{1}{b\alpha}, +\infty)$. *Для цього ж процесу*

$$\inf_{t\in[0,T]} |A_k(\sin(B_k t)+\cos(B_k t))| \leqslant |A_k|,$$

$$\Delta_N = \sup_{t,s\in[0,T]} \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} ||\xi_k (A_k(\sin(B_k t)+\cos(B_k t)) - A_k(\sin(B_k s)+\right.$$

$$\left. +\cos(B_k s)))) \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} ||\xi_k 2\sqrt{2} A_k||^{\frac{2a}{ab+1}} = 2^{\frac{3ab}{4ab+4}} A_k^{\frac{ab}{ab+1}} \sum_{k=N+1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}}.$$

Обравши надійність $1-\nu$, точність æ та обрахувавши сталу θ, маємо

$$\nu \geqslant \frac{1}{æ^{ab}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}} |A_k|^{\frac{ab}{ab+1}} + \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}} (2^{2-\alpha} A_k B_k^{\alpha})^{\frac{ab}{ab+1}} \right)^{\frac{1}{ab\alpha}} \times \right.$$

$$\times \frac{ab\alpha T^{1/(ab+1)} \left(\theta^{\frac{2a}{ab+1}} 2^{\frac{3ab}{4ab+4}} A_k^{\frac{ab}{ab+1}} \sum_{k=N+1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}} \right)^{1-\frac{1}{ab\alpha}}}{\theta^{\frac{2a}{ab+1}} (1-\theta^{\frac{2a}{ab+1}})(ab\alpha-1) 2^{ab/(ab+1)}} +$$

$$\left. + \frac{2^{\frac{3ab}{4ab+4}} A_k^{\frac{ab}{ab+1}} \sum_{k=N+1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}}}{1-\theta^{\frac{2a}{ab+1}}} \right)$$

за умови

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||\xi_k||^{\frac{2a}{ab+1}} (2^{2-\alpha} A_k B_k^{\alpha})^{\frac{ab}{ab+1}} < \infty$$

знаходимо відповідне значення N.

Висновки до розділу 6

У розділі 6 введено поняття випадкового процесу в просторах $D_{V,W}$, вивчено розподіл супремуму такого процесу, а також умови його вибіркової неперервності. Також, вивчено умови рівномірної збіжності функціональних рядів, що містять елементи з $D_{V,W}$. Крім того, розглянуто оцінку надійності та точності моделей процесів з просторів $D_{V,W}$, а також розглянуто приклади таких випадкових процесів.

Розділ 7

Оцінки норм в $L_p(T)$ випадкових процесів із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$

У розділі 7 знаходяться оцінки для розподілів норм у $L_p(T)$ випадкових процесів із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Лема 7.1. *Нехай ξ – випадкова величина, яка належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Тоді при $p \geqslant 1$*

$$\|\xi\|_\psi \leqslant \frac{\psi(p)}{\psi(1)} \sup_{u \geqslant p} \frac{\left(E\,|\xi|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)}.$$

Доведення. Очевидно, з нерівності Ляпунова маємо:

$$\sup_{1 \leqslant u \leqslant p} \frac{\left(E\,|\xi|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} \leqslant \frac{\psi(p)}{\psi(1)} \frac{\left(E\,|\xi|^p\right)^{1/p}}{\psi(p)}.$$

Отже,

$$\|\xi\|_\psi = \max\left(\sup_{1 \leqslant u \leqslant p} \frac{\left(E\,|\xi|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)}, \sup_{u \geqslant p} \frac{\left(E\,|\xi|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \max\left(\frac{\psi(p)}{\psi(1)} \frac{\left(E\,|\xi|^p\right)^{1/p}}{\psi(p)}, \sup_{u \geqslant p} \frac{\left(E\,|\xi|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)}\right) \leqslant \frac{\psi(p)}{\psi(1)} \sup_{u \geqslant p} \frac{\left(E\,|\xi|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)}.$$

З останньої нерівності випливає те, що треба було довести. □

Теорема 7.1. *Нехай ν – σ-скінченна міра в компактному метричному просторі (T, ρ), $X = \{X(t),\ t \in T\}$ – випадковий, вимірний процес із простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Для деякого $p \geqslant 1$ виконується умова*

$$\int_T \|X(t)\|_\psi^p \, d\nu(t) < \infty. \tag{7.1}$$

Тоді:

1) *з імовірністю одиниця існує інтеграл $\int_T |X(t)|^p \, d\nu(t)$ та має місце нерівність:*

$$\left\| \left(\int_T |X(t)|^p \, d\nu(t) \right)^{1/p} \right\|_\psi \leqslant \frac{\psi(p)}{\psi(1)} \left(\int_T \|X(t)\|_\psi^p \, d\nu(t) \right)^{1/p}; \tag{7.2}$$

2) для будь-якого $\varepsilon > 0$ справедлива нерівність:

$$P\left\{\left(\int_T |X(t)|^p \, d\nu(t)\right)^{1/p} > \varepsilon\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{u \geqslant 1} \frac{\left(\frac{\psi(p)}{\psi(1)}\right)^u \left(\int_T \|X(t)\|_\psi^p \, d\nu(t)\right)^{u/p} (\psi(u))^u}{\varepsilon^u}. \quad (7.3)$$

Доведення. Оскільки

$$E\int_T |X(t)|^p \, d\nu(t) = \int_T E\,|X(t)|^p \, d\nu(t) \leqslant \int_T (\psi(p))^p \, \|X(t)\|_\psi^p \, d\nu(t) < \infty,$$

тоді $\int_T |X(t)|^p \, d\nu(t)$ існує з імовірністю одиниця. Із узагальненої нерівності Мінковського випливає, що при $u \geqslant p$

$$E\left(\int_T |X(t)|^p \, d\nu(t)\right)^{u/p} = \left(\left(E\left(\int_T |X(t)|^p \, d\nu(t)\right)^{u/p}\right)^{p/u}\right)^{u/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_T \left(E\,|X(t)|^u\right)^{p/u} d\nu(t)\right)^{u/p} \leqslant \left(\int_T \|X(t)\|_\psi^p \, (\psi(u))^p d\nu(t)\right)^{u/p} \leqslant$$

$$\leqslant (\psi(u))^u \left(\int_T \|X(t)\|_\psi^p \, d\nu(t)\right)^{u/p}. \quad (7.4)$$

З леми 7.1 та нерівності (7.4) отримаємо, що

$$\left\|\left(\int_T |X(t)|^p \, d\nu(t)\right)^{1/p}\right\|_\psi \leqslant \frac{\psi(p)}{\psi(1)} \sup_{u \geqslant p} \frac{\left(E\left|\int_T |X(t)|^p \, d\nu(t)\right|^{u/p}\right)^{1/u}}{\psi(u)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\psi(p)}{\psi(1)} \sup_{u \geqslant p} \frac{\psi(u)\left(\int_T \|X(t)\|_\psi^p \, d\nu(t)\right)^{1/p}}{\psi(u)} = \frac{\psi(p)}{\psi(1)} \left(\int_T \|X(t)\|_\psi^p \, d\nu(t)\right)^{1/p}.$$

Нерівність (7.2) доведена, а (7.3) випливає з теореми 2.2. □

Приклад 7.1. *Розглянемо простір* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, *де* $\psi(u) = u^\alpha$, $\alpha > 0$. *Із теорем 7.1 і 2.3 при* $\varepsilon \geqslant e^\alpha \frac{\psi(p)}{\psi(1)} \left(\int\limits_T \|X(t)\|_\psi^p \, d\nu(t) \right)^{1/p}$ *отримаємо:*

$$P\left\{ \left(\int\limits_T |X(t)|^p \, d\nu(t) \right)^{1/p} > \varepsilon \right\} \leqslant \exp\left\{ -\frac{\alpha}{e} \left(\frac{\varepsilon}{\frac{\psi(p)}{\psi(1)} \left(\int\limits_T \|X(t)\|_\psi^p \, d\nu(t) \right)^{1/p}} \right)^{1/\alpha} \right\}.$$

Приклад 7.2. *Розглянемо простір* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, *де* $\psi(u) = e^{au^\beta}$, $a > 0$, $\beta > 0$. *Із теорем 7.1 і 2.4 при* $\varepsilon \geqslant e^{a(\beta+1)} \frac{\psi(p)}{\psi(1)} \left(\int\limits_T \|X(t)\|_\psi^p \, d\nu(t) \right)^{1/p}$ *випливає, що*

$$P\left\{ \left(\int\limits_T |X(t)|^p \, d\nu(t) \right)^{1/p} > \varepsilon \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{ -\frac{\beta}{a^{1/\beta}} \left(\frac{\ln \frac{\varepsilon}{\frac{\psi(p)}{\psi(1)} \left(\int\limits_T \|X(t)\|_\psi^p \, d\nu(t) \right)^{1/p}}}{\beta + 1} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta}} \right\}.$$

Приклад 7.3. *Розглянемо простір* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, *де* $\psi(u) = (\ln(u+1))^\lambda$, $\lambda > 0$. *Згідно з теоремами 7.1 і 2.5 при* $\varepsilon > 0$ *можемо стверджувати, що*

$$P\left\{ \left(\int\limits_T |X(t)|^p \, d\nu(t) \right)^{1/p} > \varepsilon \right\} \leqslant$$

$$\leqslant e^\lambda \exp\left\{ -\lambda \exp\left\{ \left(\frac{\varepsilon}{\frac{\psi(p)}{\psi(1)} \left(\int\limits_T \|X(t)\|_\psi^p \, d\nu(t) \right)^{1/p}} \right)^{1/\lambda} \frac{1}{e} \right\} \right\}.$$

Теорема 7.2. *Нехай* ν – σ-*скінченна міра в компактному метричному просторі* (T, ρ), $Y = \{Y(t),\ t \in T\}$ – *випадковий процес із простору* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ *і для цього простору виконується умова* $\mathbf{H}$ *із константою* C_ψ.

Нехай $EY(t)=m(t)$, $Z_n(t)=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}Y_k(t)-m(t)=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(Y_k(t)-m(t))$, *де* $Y_k(t)$ *– незалежні копії* $Y(t)$. *Тоді для всіх* $p\geqslant 1$ *має місце нерівність*

$$\left\|\left(\int_T |Z_n(t)|^p\,d\nu(t)\right)^{1/p}\right\|_\psi \leqslant \frac{2\sqrt{C_\psi}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\psi(p)}{\psi(1)}\left(\int_T \|Y(t)\|_\psi^p\,d\nu(t)\right)^{1/p} \tag{7.5}$$

і для будь-якого $\varepsilon>0$ *є справедливою оцінка*

$$P\left\{\left(\int_T |Z_n(t)|^p\,d\nu(t)\right)^{1/p}>\varepsilon\right\}\leqslant$$

$$\leqslant \inf_{u\geqslant 1}\frac{\left(\frac{2\sqrt{C_\psi}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\psi(p)}{\psi(1)}\right)^u\left(\int_T \|Y(t)\|_\psi^p\,d\nu(t)\right)^{u/p}(\psi(u))^u}{\varepsilon^u}. \tag{7.6}$$

Доведення. З означення 2.5 і леми 3.2 випливає, що

$$\|Z_n(t)\|_\psi^2\leqslant\frac{1}{n^2}C_\psi\sum_{k=1}^{n}\|Y_k(t)-m(t)\|_\psi^2=\frac{1}{n}C_\psi\,\|Y(t)-m(t)\|_\psi^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{n}C_\psi\left(\|Y(t)\|_\psi+\|m(t)\|_\psi\right)^2\leqslant\frac{4}{n}C_\psi\,\|Y(t)\|_\psi^2.$$

Оскільки з теореми 7.1 встановлюється співвідношення

$$\left\|\left(\int_T |Z_n(t)|^p\,d\nu(t)\right)^{1/p}\right\|_\psi\leqslant\frac{\psi(p)}{\psi(1)}\left(\int_T\|Z_n(t)\|_\psi^p\,d\nu(t)\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\psi(p)}{\psi(1)}\left(\int_T\left(\frac{2\sqrt{C_\psi}}{\sqrt{n}}\|Y(t)\|_\psi\right)^p d\nu(t)\right)^{1/p}=$$

$$=\frac{2\sqrt{C_\psi}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\psi(p)}{\psi(1)}\left(\int_T\|Y(t)\|_\psi^p\,d\nu(t)\right)^{1/p},$$

тоді нерівність (7.5) справджується, а нерівність (7.6) випливає з теореми 2.2. □

Приклад 7.4. *Розглянемо простір* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, *де* $\psi(u)=u^\alpha$, $\alpha>0$, *тоді з* *теорем 7.2 і 2.3 при* $\varepsilon \geqslant e^{\alpha} \frac{2\sqrt{C_\psi}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\psi(p)}{\psi(1)} \left(\int\limits_T \|Y(t)\|_\psi^p \, d\nu(t) \right)^{1/p}$ *отримаємо:*

$$P\left\{ \left(\int\limits_T |Z_n(t)|^p \, d\nu(t) \right)^{1/p} > \varepsilon \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{ -\frac{\alpha}{e} \left(\frac{\varepsilon}{\frac{2\sqrt{C_\psi}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\psi(p)}{\psi(1)} \left(\int\limits_T \|Y(t)\|_\psi^p \, d\nu(t) \right)^{1/p}} \right)^{1/\alpha} \right\}.$$

Приклад 7.5. *Розглянемо простір* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, *де* $\psi(u) = e^{au^\beta}$, $a > 0$, $\beta > 0$, *тоді з теорем 7.2 і 2.4 при* $\varepsilon \geqslant e^{a(\beta+1)} \frac{2\sqrt{C_\psi}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\psi(p)}{\psi(1)} \left(\int\limits_T \|Y(t)\|_\psi^p \, d\nu(t) \right)^{1/p}$ *можемо зробити висновок, що*

$$P\left\{ \left(\int\limits_T |Z_n(t)|^p \, d\nu(t) \right)^{1/p} > \varepsilon \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{ -\frac{\beta}{a^{1/\beta}} \left(\frac{\ln \frac{\varepsilon}{\frac{2\sqrt{C_\psi}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\psi(p)}{\psi(1)} \left(\int\limits_T \|Y(t)\|_\psi^p d\nu(t) \right)^{1/p}}}{\beta + 1} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta}} \right\}.$$

Приклад 7.6. *Розглянемо простір* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, *де* $\psi(u) = (\ln(u+1))^\lambda$, $\lambda > 0$, *тоді з теорем 7.2 і 2.5 при* $\varepsilon \geqslant 0$ *маємо таку оцінку:*

$$P\left\{ \left(\int\limits_T |Z_n(t)|^p \, d\nu(t) \right)^{1/p} > \varepsilon \right\} \leqslant$$

$$\leqslant e^{\lambda} \exp\left\{ -\lambda \exp\left\{ \left(\frac{\varepsilon}{\frac{2\sqrt{C_\psi}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\psi(p)}{\psi(1)} \left(\int\limits_T \|Y(t)\|^p \, d\nu(t) \right)^{1/p}} \right)^{1/\lambda} \frac{1}{e} \right\} \right\}.$$

Висновки до розділу 7

Знайдено оцінки для розподілів норм в $L_p(T)$ випадкових процесів із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, а також оцінки норм сум незалежних копій випадкового процесу з цього простору.

Розділ 8

Точність та надійність обчислення інтегралів методом Монте-Карло

У цьому розділі проводиться дослідження методу Монте-Карло обчислення кратних інтегралів заданих на $\mathbb{R}^n$ із заданою надійністю та точністю. Запропоновано два підходи до розв'язку цієї задачі. Перший підхід базується на теорії просторів Орліча випадкових величин, а другий – на теорії $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ просторів. Розглядаються також інтеграли, які залежать від параметру.

8.1. Обчислення інтегралів методом Монте-Карло

Нехай $\{\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mu\}$ – вимірний простір, μ – σ-скінченна міра, $p(s) \geqslant 0, s \in \mathcal{S}$ – така функція, що $\int\limits_{\mathcal{S}} p(s)d\mu(s) = 1$, $P(A)$, $A \in \mathcal{A}$ – міра, яка визначається так: $P(A) = \int\limits_A p(s)d\mu(s)$. Оскільки $P(A)$ є ймовірнісною мірою, тоді простір $\{\mathcal{S}, \mathcal{A}, P\}$ є ймовірнісним простором.

Нехай $f(s)$ – вимірна функція на $\{\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mu\}$. Введемо в розгляд інтеграл: $\int\limits_{\mathcal{S}} f(s)p(s)d\mu(s) = I$ (вважається, що цей інтеграл існує).

Зауваження 8.1. Ми можемо розглянути інтеграл виду $\int\limits_{\mathcal{S}} \varphi(s)d\mu(s)$. Якщо $p(s) > 0$ – щільність ймовірнісного розподілу в просторі $\{\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mu\}$, тоді

$$\int\limits_{\mathcal{S}} \varphi(s)d\mu(s) = \int\limits_{\mathcal{S}} \frac{\varphi(s)}{p(s)} p(s)d\mu(s) = \int\limits_{\mathcal{S}} f(s)p(s)d\mu(s),$$

де $f(s) = \frac{\varphi(s)}{p(s)}$.

Вважаємо, що функції $f(s) = \xi$ – випадкові величини з $\{\mathcal{S}, \mathcal{A}, P\}$ і $\int\limits_{\mathcal{S}} f(s)p(s)d\mu(s) = \int\limits_{\mathcal{S}} f(s)dP(s) = E\xi$.

Нехай ξ_i, $i = 1, \ldots, n$ – незалежні копії випадкової величини ξ, $Z_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$, тоді за посиленим законом великих чисел $Z_n \to E\xi_1 = I$ з імовірністю одиниця. Розглянемо Z_n, як оцінку для I.

Означення 8.1. *Скажемо, що Z_n наближає I з надійністю $1-\delta$ $(0 < \delta < 1)$ і точністю $\varepsilon > 0$, якщо виконується наступна нерівність:*

$$P\{|Z_n - I| > \varepsilon\} \leqslant \delta. \tag{8.1}$$

8.2. Застосування теорії просторів Орліча

8.2.1. Точність та надійність обчислення інтегралів

Теорема 8.1. *Нехай* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *– незалежні, однаково розподілені випадкові величини, які належать простору Орліча* $L_U(\Omega)$. *Для простору Орліча* $L_U(\Omega)$ *виконується умова* **H**. *Нехай* $Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{i=1}^{n} (\xi_i - I)$, *де* $I = E\xi_1$.

Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ *виконується нерівність:*

$$P\left\{|Y_n| > \varepsilon\right\} \leqslant \frac{1}{U\left(\frac{\varepsilon}{L}\right)}, \tag{8.2}$$

де $L = \|\xi_1 - I\|_U \sqrt{C_U}$, C_U *– константа з означення 4.4.*

Доведення. З означення 4.4 випливає, що

$$\|Y_n\|_U^2 = \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - I) \right\|_U^2 = \frac{1}{n} \left\| \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - I) \right\|_U^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n} C_U \sum_{i=1}^{n} \|\xi_i - I\|_U^2 = C_U \|\xi_1 - I\|_U^2 .$$

Нерівність (8.2) встановлюється на основі леми 1.2. □

Наслідок 8.1. *Нехай виконуються умови теореми 8.1. Тоді для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *виконується нерівність:*

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i - I\right| > \varepsilon\right\} \leqslant \frac{1}{U\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{L}\right)}. \tag{8.3}$$

Доведення. Очевидна рівність

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i - I = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - I) = \frac{1}{\sqrt{n}} Y_n,$$

тому отримаємо:

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i - I\right| > \varepsilon\right\} = P\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}|Y_n| > \varepsilon\right\} = P\left\{|Y_n| > \sqrt{n}\varepsilon\right\} \leqslant \frac{1}{U\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{L}\right)},$$

що й треба було довести. □

Теорема 8.2. *Нехай* $I = \int\limits_{\mathcal{S}} f(s)p(s)d\mu(s)$, $\xi(s)$ *– випадкова величина,* $s \in \{\mathcal{S}, \mathcal{A}, P\}$, $p(s)$ *– щільність розподілу* ξ, ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ *– незалежні копії випадкової величини* ξ, $Z_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$. *Якщо випадкова величина* ξ *належить простору* $L_U(\Omega)$, *для якого виконується умова* **H** *з константою* C_U, *тоді* Z_n *наближає* I *з надійністю* $1 - \delta$ *і точністю* ε *(див. означення 8.1) при виконанні нерівності:*

$$n \geqslant \left(\frac{LU^{(-1)}\left(\frac{1}{\delta}\right)}{\varepsilon} \right)^2, \tag{8.4}$$

де $L = \|\xi - I\|_U \sqrt{C_U}$.

Доведення. З наслідка 8.1 випливає, що

$$P\left\{|Z_n - I| > \varepsilon\right\} \leqslant \left(U\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{L} \right) \right)^{-1}.$$

Твердження цієї теореми справедливе, якщо $\left(U\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{L} \right) \right)^{-1} \leqslant \delta$, тобто, якщо виконується нерівність (8.4). $\square$

Зауваження 8.2. Легко показати, що

$$\|\xi - I\|_U \leqslant \left(1 + \frac{d_U}{U^{(-1)}(1)} \right) \|\xi\|_U, \tag{8.5}$$

де d_U – визначено в лемі 4.2.

Оскільки

$$\|\xi - I\|_U \leqslant \|\xi\|_U + \|I\|_U,$$

тоді з леми 4.1 маємо, що $\|I\|_U < \frac{|I|}{U^{(-1)}(1)}$, а з леми 4.2 випливає, що $|I| \leqslant d_U \|f\|_U$. Таким чином, нерівність (8.5) справедлива. Отже, в нерівності (8.4) замість L можна підставити $\widehat{L} = \|\xi\|_U \sqrt{C_U} \left(1 + \frac{d_U}{U^{(-1)}(1)} \right)$.

Приклад 8.1. *Часто метод Монте-Карло використовується для підрахунку кратних інтегралів. Але для спрощення розглянемо інтеграл від однієї змінної. Нехай* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp\{\frac{-x^2}{2a^2} - bx\}dx = I$, $a > 0$, $|f(x)| < 1$, *тоді* $I = \sqrt{2\pi}a \frac{1}{\sqrt{2\pi}a} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp\{\frac{-x^2}{2a^2} - bx\}dx$. *Позначимо* $J = E\exp\{-\xi b\}$, *де* $\xi = N(0, a^2)$, $\eta_i = f(\xi_i)\exp\{-\xi_i b\}$, ξ_i *– незалежні копії випадко-*

вої величини ξ. *Нехай* $J_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_i = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\exp\{-\xi_i b\}$. *Оцінкою для* I *буде* $I_n = \sqrt{2\pi}aJ_n$. *Нехай* $U(x) = |x|^p, p \geqslant 2$, *тоді відповідно до зауваження 8.2 до теореми 8.2 і значення* C_U *для простору* $L_U(\Omega)$ *отримаємо (в цьому випадку* $\|\eta\|_U = \|\eta\|_p = (E|\eta|^p)^{1/p}$*):*

$$L = \|\eta\|_p 2\sqrt{\sqrt{2}\left(\Gamma(p+1)/2\sqrt{\pi}\right)^{1/p}},$$

де $\|\eta\|_p^p = E|f(\xi)|^p(\exp\{-\xi b\})^p \leqslant E\exp\{-\xi bp\} = \exp\{\frac{p^2b^2a^2}{2}\}$.

Згідно з нерівністю 8.4 інтеграл I *буде обчислений із точністю* ε *та надійністю* $1-\delta$ *при виконанні нерівності:*

$$n \geqslant \frac{a^2 2\pi L^2}{\varepsilon^2\delta^{2/p}}.$$

Остання нерівність повинна справджуватись для $p \geqslant 2$, *тобто необхідно знайти найменше* n *– знайти мінімум правої частини по* p, *точніше знайти наближене значення мінімума. Згідно з формулою Стірлінга* $\Gamma(p) \cong \exp\{-p\}p^{p-1/2}(2\pi)^{1/2}$ *маємо, що*

$$\frac{L^2}{\delta^{2/p}} \cong \frac{4\sqrt{2}\exp\{pb^2a^2\}p(p/2)^{1/2p}}{\delta^{2/p}}.$$

Легко бачити, що вираз $\frac{L^2}{\delta^{2/p}}$ *набуває наближеного найменшого значення в точці*

$$p \cong \frac{2(-ln\delta)}{1+\sqrt{1+4a^2b^2(-ln\delta)}}.$$

Теорема 8.3. *Нехай виконуються умови теореми 8.1. Тоді з імовірністю одиниця при досить великих* n *є справедливою нерівність*

$$|Z_n - I| \leqslant \frac{L}{\sqrt{n}}U^{(-1)}\left(\frac{1}{\delta_n}\right),$$

де $\delta_n > 0$ *будь-яка послідовність, що* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\delta_n < \infty$.

Доведення. Ця теорема випливає з леми Бореля-Кантеллі. Дійсно, з наслідка 8.1 випливає, що

$$P\left\{|Z_n - I| > \frac{L}{\sqrt{n}} U^{(-1)}\left(\frac{1}{\delta_n}\right)\right\} \leqslant \left(U\left(\frac{\sqrt{n}}{L}\frac{L}{\sqrt{n}}U^{(-1)}\left(\frac{1}{\delta_n}\right)\right)\right)^{-1} = \delta_n.$$

□

Приклад 8.2. *Якщо $U(x) = |x|^p$, $p \geqslant 2$ і $\delta_n = \frac{1}{n^{1+\varkappa}}$, $\varkappa > 0$, де $\varkappa$ таке, що $\frac{1+\varkappa}{p} < \frac{1}{2}$, тоді при достатньо великих n маємо:*

$$|Z_n - I| \leqslant \frac{L}{n^{1/2-1/p-\varkappa/p}}.$$

Якщо $U(x) = exp\{|x|^\alpha\} - 1$, $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$ і $\delta_n = \frac{1}{n^{1+\varkappa}}$, $\varkappa > 0$, тоді теж при достатньо великих n отримаємо таку оцінку:

$$|Z_n - I| \leqslant \check{L}\frac{1}{n^{1/2}}(\ln n)^{1/\alpha},$$

де $\check{L}$ – деяка константа.

8.2.2. Надійність та точність у просторі $C(T)$ обчислення інтегралів, залежних від параметру

Розглянемо інтеграл $\int\limits_{\mathcal{S}} f(s,t)p(s)d\mu(s) = I(t)$, $t \in T$. Вважаємо, що він існує. Нехай всі припущення в розділі 8.1 виконуються, але функція $f(s,t)$ залежить від $t \in T$, де (T,ρ) – компактний метричний простір і ця функція $f(s,t)$ неперервна відносно t.

Розглянемо $f(s,t)$ як випадковий процес на $\{\mathcal{S}, \mathcal{A}, P\}$ і позначимо його $\xi(s,t) = \xi(t)$ та $I(t) = \int\limits_{\mathcal{S}} f(s,t)p(s)d\mu(s) = \int\limits_{\mathcal{S}} f(s,t)dP(s) = E\xi(t)$.

Нехай $\xi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ – незалежні копії випадкового процесу $\xi(t)$, $Z_n(t) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i(t)$. Тоді за посиленим законом великих чисел $Z_n(t) \to E\xi(t) = I(t)$ з імовірністю одиниця для будь-якого $t \in T$.

Означення 8.2. *Скажемо, що $Z_n(t)$ наближається до $I(t)$ в просторі $C(T)$ з надійністю $1-\delta > 0$ і точністю $\varepsilon > 0$, якщо виконується така нерівність:*

$$P\left\{\sup_{t\in T}|Z_n(t) - I(t)| > \varepsilon\right\} \leqslant \delta.$$

Теорема 8.4. *Нехай:*

1. *випадковий процес $\xi(t)$ належить простору $L_U(\Omega)$, де для про-*

стору $L_U(\Omega)$ виконується умова **H** *з константою C_U та функція U задовільняє умову* g;

2. *існує неперервна, зростаюча функція $\sigma = (\sigma(h), 0 \leqslant h \leqslant \delta_0)$, $\delta_0 = \sigma_1\left(\sup\limits_{t,s\in T} \rho(t,s)\right)$, така, що*

$$\sup_{\rho(t,s)\leqslant h} \left\|\xi(t) - \xi(s)\right\|_U \leqslant \sigma(h) \tag{8.6}$$

і

$$\int_0^{\delta_0} U^{(-1)}(N(\sigma^{(-1)}(u)))du < \infty; \tag{8.7}$$

3. *виконується така нерівність*

$$\left(U\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\check{B}(\theta)}\right)\right)^{-1} \leqslant \delta,$$

тобто

$$n \geqslant \frac{\check{B}^2(\theta)U^{(-1)}\left(\frac{1}{\delta}\right)}{\varepsilon^2}, \tag{8.8}$$

де $\check{B}(\theta) = C_U\left(1 + \frac{d_U}{U^{(-1)}(1)}\right)\inf\limits_{t\in T}\|\xi(t)\|_U + \frac{1}{\theta(1-\theta)}\int\limits_0^{\delta_0\theta} \varkappa(N(\sigma_1^{(-1)}(u))du$, $\sigma_1(h) = C_U\left(1 + \frac{d_U}{U^{-1}(1)}\right)\sigma(h)$, $0 < \theta < 1$, $\varkappa(u)$ *мажоруюча характеристика простору $L_U(\Omega)$, $N(u)$ – метрична масивність цього простору.*

Тоді $Z_n(t)$ наближає $I(t)$ з надійністю $1-\delta$ і точністю ε в просторі $C(T)$ (див. означення 8.2).

Доведення. Теорема випливає з теореми 4.8 та зауваження 4.2. Функція $f(t,s)$ – неперервна. Тобто процес $\xi(t)$ – сепарабельний. Таким чином, із нерівності (4.14) та зауваження 4.2 маємо, що

$$P\{\sup_{t\in T}\sqrt{n}\,|Z_n(t) - m(t)| > \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{U\left(\frac{\varepsilon}{\check{B}(\theta)}\right)}.$$

Тобто,

$$P\{\sup_{t\in T}|Z_n(t) - m(t)| > \varepsilon\} =$$

$$= P\{\sup_{t\in T}\sqrt{n}\,|Z_n(t)-m(t)| > \sqrt{n}\varepsilon\} \leqslant \frac{1}{U\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\check{B}(\theta)}\right)}.$$

З останньої нерівності отримаємується нерівність (8.8). □

Приклад 8.3. *Нехай* $I(t) = \sqrt{2\pi}a\frac{1}{\sqrt{2\pi}a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp\{\frac{-x^2}{2a^2} - tx\}dx$, *де* $a > 0$, $|f(x)| < 1$ *і* $0 \leqslant t \leqslant T$. *Використовуємо ті ж позначення, що і в прикладі 8.1. Оцінкою для* $I(t)$ *буде* $I_n(t) = \sqrt{2\pi}aJ_n(t)$, *де* $J_n(t) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_i$, $\eta_i = f(\xi_i)\exp\{-\xi_i t\}$. *Покладемо* $U(x) = |x|^p$, $p \geqslant 2$, *тоді, відповідно до теореми 8.4, маємо, що*

$$\check{B}(\theta) = 2\big\|\eta(t)\big\|_p + \frac{1}{\theta(1-\theta)}\int\limits_0^{\delta_0\theta} \varkappa(N_w(\sigma_1^{(-1)}(u))du,$$

де $\big\|\eta(t)\big\|_p \leqslant \exp\left\{\frac{pt^2a^2}{2}\right\}$, *а* $\inf\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\big\|\eta(t)\big\|_p = 1$.

Оскільки при $u < \delta_0$ *справедливі умови* $\frac{T}{2\sigma_1^{(-1)}(u)} > \frac{1}{2}$ *та* $\sigma_1(h) = 2\sigma(h)$, *тоді з теореми 8.4 випливає оцінка:*

$$\int\limits_0^{\delta_0\theta} \varkappa(N_w(\sigma_1^{(-1)}(u))du \leqslant \int\limits_0^{\delta_0\theta}\left(\frac{T}{2\sigma_1^{(-1)}(u)} + 1\right)^{1/p} du \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{\delta_0\theta}\left(\frac{3}{2}T\right)^{1/p}\left(\frac{1}{\sigma_1^{(-1)}(u)}\right)^{1/p} du = 2\left(\frac{3}{2}T\right)^{1/p}\int\limits_0^{\delta_0\theta/2}\left(\frac{1}{\sigma^{(-1)}(v)}\right)^{1/p} dv.$$

Із нерівності (8.6) *знайдемо* $\sigma(v)$, *де* $0 \leqslant v \leqslant T$*:*

$$\|\exp\{-\xi t\} - \exp\{-\xi s\}\|_p^p \leqslant E\,|\exp\{-\xi t\} - \exp\{-\xi s\}|^p =$$

$$= EI\{\xi \geqslant 0\}\,|\exp\{-\xi t\} - \exp\{-\xi s\}|^p +$$

$$+ EI\{\xi < 0\}\,|\exp\{-\xi t\} - \exp\{-\xi s\}|^p = \Delta_+ + \Delta_-$$

Нехай $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, $\beta > 1$ *і* $s > t$. *Тоді*

$$\Delta_- = EI\{\xi < 0\}\,|\exp\{-\xi t\} - \exp\{-\xi s\}|^p =$$

$$= EI\{\xi < 0\}\,|\exp\{-\xi t\}(1 - \exp\{-\xi(s-t)\})|^p \leqslant$$

$$\leqslant EI\{\xi < 0\}\,|\exp\{-\xi t\}\,|\xi|\,(s-t)|^p \leqslant$$

$$\leqslant \left(EI\{\xi<0\}\exp\{-\xi pt\beta\}\right)^{1/\beta}\left(EI\{\xi<0\}\left|\xi\right|^{p\alpha}\right)^{1/\alpha}(s-t)^p.$$

Тоді $\Delta_- \leqslant |t-s|^p \exp\{\frac{a^2p^2t^2\beta}{2}\}\left(E\left|\xi\right|^{p\alpha}\right)^{1/\alpha}$. *Знаходження оцінки для* Δ_+ *аналогічне.*

Отже, $\sigma(v)=|t-s|\,C_p$, *де* $C_p=2^{1/p}\exp\left\{\frac{a^2p\beta T^2}{2}\right\}\left(E\left|\xi\right|^{p\alpha}\right)^{1/p\alpha}$. *Оцінимо інтеграл*

$$E\left|\xi\right|^{p\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x|^{p\alpha}\exp\left\{\frac{-x^2}{2a^2}\right\}dx=\frac{a^{p\alpha}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|t|^{p\alpha}\exp\left\{\frac{-t^2}{2}\right\}dt.$$

Із нерівності $x^s\leqslant\left(\frac{s}{e}\right)\exp\{x\}$ *випливає, що*

$$E\left|\xi\right|^{p\alpha}\leqslant\frac{a^{p\alpha}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{p\alpha}{e}\right)^{p\alpha}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{|t|\right\}\exp\left\{\frac{-t^2}{2}\right\}dt\leqslant 2\exp\left\{1/2\right\}a^{p\alpha}\left(\frac{p\alpha}{e}\right)^{p\alpha}.$$

Ми отримаємо, що $C_p=\left(2\exp\left\{1/2\right\}\right)^{1/p\alpha}a\frac{p\alpha}{e}2^{1/p}\exp\left\{\frac{a^2p\beta T^2}{2}\right\}$. *Підставивши отримані значення маємо, що*

$$\check{B}(\theta)=1+\frac{1}{\theta(1-\theta)}\int\limits_0^{\delta_0\theta/2}\left(\frac{C_p}{v}\right)^{1/p}dv=1+\frac{C_p^{1/p}p}{\theta(1-\theta)(p-1)}\left(\frac{\delta_o\theta}{2}\right)^{1-1/p}.$$

Оскільки $\delta_0=\sigma_1\left(\sup\limits_{t,s\,\in\,T}\rho(t,s)\right)$ *і* $\sup\limits_{t,s\,\in\,T}\rho(t,s)=T$, *тоді* $\delta_0=\sigma_1(T)=2\sigma(T)=2TC_p$ *і* $\check{B}(\theta)=2\exp\left\{\frac{a^2pT^2}{2}\right\}+\frac{2^{1/p-1}C_ppT}{(1-\theta)(p-1)}(T\theta)^{-1/p}$. *Відповідно до нерівності (8.8) заданий інтеграл буде обчислений із точністю* ε *і надійністю* $1-\delta$, *якщо має місце нерівність:*

$$n\geqslant\inf_{p\geqslant 2,0<\theta<1}\left(\frac{a^22\pi\check{B}^2(\theta)}{\varepsilon^2\delta^{2/p}}\right).$$

8.3. Застосування теорії просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$

8.3.1. Точність та надійність обчислення інтегралів

У цьому підрозділі зберігаються всі позначення, умови та означення розділу 8.1.

Теорема 8.5. *Нехай* $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ – *незалежні, однаково розподілені випадкові величини, які належать простору* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. *Для простору* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$

виконується умова **H**. *Нехай* $Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{i=1}^{n} (\xi_i - I)$, *де* $I = E\xi_1$.

Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ *справджується нерівність*

$$P\left\{|Y_n| > \varepsilon\right\} \leqslant \inf_{u \geqslant 1} \frac{L^u (\psi(u))^u}{\varepsilon^u}, \tag{8.9}$$

де $L = \|\xi_1 - I\|_\psi \sqrt{C_\psi}$, C_ψ – *константа з означення 2.5.*

Доведення. З означення 2.5 випливає, що

$$\|Y_n\|_\psi^2 = \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - I) \right\|_\psi^2 = \frac{1}{n} \left\| \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - I) \right\|_\psi^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n} C_\psi \sum_{i=1}^{n} \|\xi_i - I\|_\psi^2 = C_\psi \|\xi_1 - I\|_\psi^2 .$$

Нерівність (8.9) випливає з теореми 2.2. □

Наслідок 8.2. *Нехай виконуються умови теореми 8.5. Тоді для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *має місце нерівність*

$$P\left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i - I \right| > \varepsilon \right\} \leqslant \inf_{u \geqslant 1} \frac{L^u (\psi(u))^u}{\left(\sqrt{n}\varepsilon\right)^u}. \tag{8.10}$$

Доведення. Доведення наслідку 8.2 – аналогічне доведенню наслідка 8.1. □

Зауваження 8.3. Очевидно, що

$$\|\xi_1 - I\|_\psi \leqslant 2 \|\xi_1\|_\psi . \tag{8.11}$$

Дійсно, з леми 3.2 маємо, що

$$\|\xi_1 - E\xi_1\|_\psi \leqslant \|\xi_1\|_\psi + \| |E\xi_1| \|_\psi \leqslant 2 \|\xi_1\|_\psi .$$

Наслідок 8.3. *Нехай є справедливими умови теореми 8.5, тоді для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *виконується нерівність*

$$P\left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i - I \right| > \varepsilon \right\} \leqslant \inf_{u \geqslant 1} \frac{2^u \widetilde{L}^u (\psi(u))^u}{\left(\sqrt{n}\varepsilon\right)^u}, \tag{8.12}$$

де $\widetilde{L} = \|\xi_1\|_\psi \sqrt{C_\psi}$.

Доведення. Наслідок 8.3 випливає з наслідка 8.2 і зауваження 8.3. □

Приклад 8.4. *Розглянемо простір* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, *де* $\psi(u) = u^\alpha$, $\alpha > \frac{1}{2}$. *Тоді, враховуючи приклад 2.4, маємо, що для цього простору виконується умова* $\mathbf{H}$ *з константою* $C_\psi = 4 \cdot 9^\alpha$. *Тоді з наслідку 8.3 і теореми 2.3 при* $\varepsilon \geqslant \frac{4(3e)^\alpha \|\xi_1\|_\psi}{\sqrt{n}}$ *випливає, що*

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - I\right| > \varepsilon\right\} \leqslant \exp\left\{-\frac{\alpha}{3e}\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{4\|\xi_1\|_\psi}\right)^{1/\alpha}\right\}.$$

Приклад 8.5. *Розглянемо простір* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, *де* $\psi(u) = e^{au^\beta}$, $a > 0$, $0 < \beta < 1$. *На підставі теореми 2.15 маємо два випадки. У першому випадку, при* $\frac{1}{(2a\beta)^{1/\beta}} = 1$, *для простору* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ *виконується умова* $\mathbf{H}$ *з константою* $C_\psi = 4e^{2^\beta a}$. *Тоді з наслідку 8.3 та теореми 2.4 маємо:*

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - I\right| > \varepsilon\right\} \leqslant \exp\left\{-\frac{\beta}{a^{1/\beta}}\left(\frac{\ln\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{4e^{2^{\beta-1}a}\|\xi_1\|_\psi}}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}\right\},$$

якщо $\varepsilon \geqslant \frac{4e^{a\left(2^{\beta-1}+\beta+1\right)}\|\xi_1\|_\psi}{\sqrt{n}}$.

У другому випадку, при $\frac{1}{(2a\beta)^{1/\beta}} > 1$, *для простору* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ *виконується умова* $\mathbf{H}$ *з константою* $C_\psi = \frac{4e^{a\left(2^\beta+1\right)-\frac{1}{2\beta}}}{(2a\beta)^{1/2\beta}}$. *Тоді з наслідку 8.3 та теореми 2.4 випливає, що*

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - I\right| > \varepsilon\right\} \leqslant \exp\left\{-\frac{\beta}{a^{1/\beta}}\left(\frac{\ln\frac{\sqrt{n}\varepsilon(2a\beta)^{1/4\beta}}{4e^{\frac{a}{2}(2^\beta+1)-\frac{1}{4\beta}}\|\xi_1\|_\psi}}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}\right\},$$

якщо $\varepsilon \geqslant \frac{4e^{a\left(2^{\beta-1}+\beta+\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{4\beta}}\|\xi_1\|_\psi}{\sqrt{n}(2a\beta)^{1/4\beta}}$.

Теорема 8.6. *Нехай* $I = \int\limits_{\mathcal{S}} f(s)p(s)d\mu(s)$, $\xi(s)$ – *випадкова величина,* $s \in \{\mathcal{S}, \mathcal{A}, P\}$, $p(s)$ – *щільність розподілу* ξ, ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ – *незалежні копії випадкової величини* ξ, $Z_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$. *Якщо випадкова величина* ξ *належить простору* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, *для якого виконується умова* $\mathbf{H}$ *з* *константою C_ψ і n таке, що*

$$\inf_{u\geqslant 1}\frac{2^u\widetilde{L}^u(\psi(u))^u}{\left(\sqrt{n}\varepsilon\right)^u}\leqslant\delta, \tag{8.13}$$

тоді Z_n наближає I з надійністю $1-\delta$ і точністю ε (див. означення 8.1). В оцінці 8.13 $\widetilde{\mathrm{L}}$ визначено в наслідку 8.3.

Доведення. Теорема випливає з наслідку 8.3 та нерівності (8.1). □

Приклад 8.6. *Розглянемо простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u)=u^\alpha$, $\alpha\geqslant\frac{1}{2}$. На підставі розглянутого прикладу 8.4 та теореми 8.6 при $\varepsilon\geqslant\frac{4(3e)^\alpha\|\xi\|_\psi}{\sqrt{n}}$ маємо, що*

$$\inf_{u\geqslant 1}\frac{2^u\widetilde{L}^u(\psi(u))^u}{\left(\sqrt{n}\varepsilon\right)^u}=\exp\left\{-\frac{\alpha}{3e}\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{4\|\xi\|_\psi}\right)^{1/\alpha}\right\}.$$

Отже, нерівність (8.13) *виконується, коли справджується нерівність*

$$\exp\left\{-\frac{\alpha}{3e}\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{4\|\xi\|_\psi}\right)^{1/\alpha}\right\}\leqslant\delta.$$

Тоді

$$n\geqslant\left(\frac{4\|\xi\|_\psi}{\varepsilon}\right)^2\left((-\ln\delta)\frac{3e}{\alpha}\right)^{2\alpha}$$

і

$$n\geqslant\left(\frac{4(3e)^\alpha\|\xi\|_\psi}{\varepsilon}\right)^2\max\left(1,\left(\frac{-\ln\delta}{\alpha}\right)^{2\alpha}\right).$$

Зауваження 8.4. Якщо оцінювати точність та надійність за допомогою нерівності Чебишева, то отримаємо, що

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\xi_i-I\right|>\varepsilon\right\}\leqslant\frac{D\xi_1}{n\varepsilon^2},$$

тоді Z_n наближає I з надійністю $1-\delta$ і точністю ε, коли

$$n\geqslant\frac{D\xi_1}{\delta\varepsilon^2}.$$

Отже, якщо $\delta=0,01$, тоді $n\geqslant C_1\frac{100}{\varepsilon^2}$, а з прикладу 8.6 маємо, що $n\geqslant C_2\frac{\ln 100}{\varepsilon^2}\approx C_2\frac{4,61}{\varepsilon^2}$, де C_1, C_2 – деякі константи.

Приклад 8.7. *Нехай маємо простір* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, *де* $\psi(u) = e^{au^\beta}$, $a > 0$, $0 < \beta < 1$. *Враховуючи приклад 8.5 та теорему 8.6, розглянемо два випадки. У першому випадку, при* $\frac{1}{(2a\beta)^{1/\beta}} = 1$, *нерівність* (8.13) *виконується, коли справджується нерівність:*

$$\exp\left\{-\frac{\beta}{a^{1/\beta}}\left(\frac{\ln\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{4e^{2^{\beta-1}a}\|\xi\|_\psi}}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}\right\} \leqslant \delta.$$

Тоді

$$n \geqslant \left(\frac{4e^{2^{\beta-1}a}\left\|\xi\right\|_\psi}{\varepsilon}\right)^2 \exp\left\{2(\beta+1)\left((-\ln\delta)\frac{a^{1/\beta}}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}\right\}$$

і

$$n \geqslant \left(\frac{4e^{2^{\beta-1}a}\left\|\xi\right\|_\psi}{\varepsilon}\right)^2 \max\left(e^{2(\beta+1)}, \exp\left\{2(\beta+1)\left((-\ln\delta)\frac{a^{1/\beta}}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}\right\}\right).$$

У другому випадку, при $\frac{1}{(2a\beta)^{1/\beta}} > 1$, *нерівність* (8.13) *справджується, коли виконується нерівність*

$$\exp\left\{-\frac{\beta}{a^{1/\beta}}\left(\frac{\ln\frac{\sqrt{n}\varepsilon(2a\beta)^{1/4\beta}}{4e^{\frac{a}{2}(2^\beta+1)-\frac{1}{4\beta}}\|\xi\|_\psi}}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}\right\} \leqslant \delta.$$

Тоді

$$n \geqslant \left(\frac{4e^{\frac{a}{2}(2^\beta+1)-\frac{1}{4\beta}}\left\|\xi\right\|_\psi}{\varepsilon(2a\beta)^{1/4\beta}}\right)^2 \exp\left\{2(\beta+1)\left((-\ln\delta)\frac{a^{1/\beta}}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}\right\}$$

і

$$n \geqslant \left(\frac{4e^{\frac{a}{2}(2^\beta+1)-\frac{1}{4\beta}}\left\|\xi\right\|_\psi}{\varepsilon(2a\beta)^{1/4\beta}}\right)^2 \times$$

$$\times \max\left(e^{2a(\beta+1)}, \exp\left\{2(\beta+1)\left((-\ln\delta)\frac{a^{1/\beta}}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}\right\}\right).$$

Приклад 8.8. *Розглянемо інтеграл виду*

$$\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} c(x,y)(x+y)^{v-1}e^{-px}e^{-qy}dxdy,$$

де $|c(x,y)| \leqslant 1$, $v > \frac{3}{2}$. *Позначимо*

$$I = \frac{1}{pq}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} c(x,y)(x+y)^{v-1}pe^{-px}qe^{-qy}dxdy.$$

Нехай ξ *і* η *– незалежні випадкові величини, які розподілені за показниковим розподілом*

$$P\{\xi < x\} = \begin{cases} 1-e^{-px}, & x>0; \\ 0, & x<0, \end{cases}$$

$$P\{\eta < y\} = \begin{cases} 1-e^{-qx}, & y>0; \\ 0, & y<0, \end{cases}$$

де $p(x) = pe^{-px}$, $p(y) = qe^{-qy}$.

Таким чином,

$$I = \frac{1}{pq}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} c(x,y)(x+y)^{v-1}pe^{-px}qe^{-qy}dxdy = \frac{1}{pq}Ec(\xi,\eta)(\xi+\eta)^{v-1}.$$

Нехай функція $\psi(u) = u^{v-1}$, *тоді оскільки* $v > \frac{3}{2}$, *отримуємо:*

$$\sup_{u\geqslant 1}\frac{\left(E\left(c(x,y)(\xi+\eta)^{v-1}\right)^u\right)^{1/u}}{u^{v-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{u\geqslant 1}\frac{\left(E\left(|c(\xi,\eta)|\,(\xi+\eta)^{u(v-1)}\right)^{\frac{1}{u(v-1)}}\right)^{v-1}}{u^{v-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{u\geqslant 1}\frac{\left(E\left((\xi+\eta)^{u(v-1)}\right)^{\frac{1}{u(v-1)}}\right)^{v-1}}{u^{v-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{u\geqslant 1} \frac{\left(\left(E\xi^{u(v-1)}\right)^{\frac{1}{u(v-1)}} + \left(E\eta^{u(v-1)}\right)^{\frac{1}{u(v-1)}}\right)^{v-1}}{u^{v-1}}.$$

Розглянемо $E\xi^{u(v-1)} = \int\limits_0^{+\infty} x^{u(v-1)} p e^{-px} dx$. *Зробимо заміну змінних у цьому інтегралі, тобто* $px = t$. *Тоді*

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{u(v-1)} p e^{-px} dx = \frac{1}{p^{u(v-1)}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} t^{u(v-1)} dt = \frac{1}{p^{u(v-1)}} \Gamma(u(v-1)+1).$$

Отже, $\left(E\xi^{u(v-1)}\right)^{\frac{1}{u(v-1)}} = \frac{1}{p}\left(\Gamma(u(v-1)+1)\right)^{\frac{1}{u(v-1)}}$. *Аналогічно знайдемо* $\left(E\eta^{u(v-1)}\right)^{\frac{1}{u(v-1)}} = \frac{1}{q}\left(\Gamma(u(v-1)+1)\right)^{\frac{1}{u(v-1)}}$.

Таким чином,

$$\sup_{u\geqslant 1} \frac{\left(E\left((\xi+\eta)^{v-1}\right)^u\right)^{1/u}}{u^{v-1}} \leqslant \sup_{u\geqslant 1} \frac{\left(\Gamma(u(v-1)+1)\right)^{\frac{1}{u}} \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)^{v-1}}{u^{v-1}}.$$

Оскільки $\Gamma(z) \leqslant e^{-z} z^{z-\frac{1}{2}} C_z$, *де* $C_z = \sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{12z}}$, *тоді*

$$\left(\Gamma(u(v-1)+1)\right)^{\frac{1}{u}} \leqslant e^{-\left(v-1+\frac{1}{u}\right)} (u(v-1)+1)^{v-1+\frac{1}{2u}} \left(C_z\right)^{\frac{1}{u}},$$

де $z = u(v-1)+1$. *Зауважимо, що* $C_z \leqslant S = \sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{18}}$. *Звідси маємо, що*

$$\sup_{u\geqslant 1} \frac{\left(E\left((\xi+\eta)^{v-1}\right)^u\right)^{1/u}}{u^{v-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{u\geqslant 1} \frac{e^{-(v-1)} e^{-\frac{1}{u}} (u(v-1)+1)^{v-1} (u(v-1)+1)^{\frac{1}{2u}} (S)^{\frac{1}{u}} \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)^{v-1}}{u^{v-1}} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-(v-1)} \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)^{v-1} \sup_{u\geqslant 1} \left(\frac{S}{e}\right)^{\frac{1}{u}} \frac{u^{v-1}(v-1+\frac{1}{u})^{v-1} u^{\frac{1}{2u}} (v-1+\frac{1}{u})^{\frac{1}{2u}}}{u^{v-1}} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-(v-1)} \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)^{v-1} \sup_{u\geqslant 1} \left(\frac{S}{e}\right)^{\frac{1}{u}} u^{\frac{1}{2u}} (v-1+\frac{1}{u})^{v-1+\frac{1}{2u}} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-(v-1)+\frac{1}{2e}} v^{v-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)^{v-1}.$$

Тобто $\left\|c(\xi,\eta)\frac{1}{pq}(\xi+\eta)^{v-1}\right\|_\psi \leqslant \frac{1}{pq}e^{-(v-1)+\frac{1}{2e}}v^{v-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)^{v-1}.$

Згідно з прикладом 8.6 можемо отримати таку нерівність:

$$n \geqslant \left(\frac{4(3)^{v-1}e^{\frac{1}{2e}}v^{v-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)^{v-1}}{pq\varepsilon}\right)^2 \max\left(1, \left(-\frac{\ln\delta}{v-1}\right)^{2(v-1)}\right).$$

8.3.2. Надійність та точність у просторі $C(T)$ обчислення інтегралів, залежних від параметру

Розглянемо інтеграл $\int\limits_S f(s,t)p(s)d\mu(s) = I(t)$ при умові, що він існує. Використовуємо всі умови та позначення підрозділу 8.2.2.

Теорема 8.7. *Нехай випадковий процес $\xi(t)$ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ і для якого виконується умова* **H** *з константою C_ψ, $\widetilde{Z}_n(t) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i(t)-I(t))$, $\xi_i(t)$ – незалежні копії випадкового процесу $\xi(t)$. Причому існує неперервна монотонно зростаюча функція $\sigma(h)$, $\sigma(0)=0$ така, що*

$$\sup_{\rho(t,s)\leqslant h}\left\|\xi(t)-\xi(s)\right\|_\psi \leqslant \sigma(h).$$

Припустимо, що для будь-якого $z>0$ виконується умова

$$\int\limits_0^z \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du < \infty,$$

де $\varkappa(u)$ – мажоруюча характеристика, $N(u)$ – метрична масивність простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, тоді для будь-якого $0<p<1$ справджується нерівність

$$\left\|\sup_{t\in T}\left|\widetilde{Z}_n(t)\right|\right\|_\psi \leqslant \widehat{B}(p),$$

де $\widehat{B}(p) = 2\sqrt{C_\psi}\inf\limits_{t\in T}\|\xi(t)\|_\psi + \frac{1}{p(1-p)}\int\limits_0^{\gamma p}\varkappa\left(N\left(\sigma_1^{(-1)}(u)\right)\right)du$, $\sigma_1^{(-1)}(u)$ – обернена функція до $\sigma_1(u)$, $\sigma_1(h) = 2\sqrt{C_\psi}\sigma(h)$, $\gamma = 2\sqrt{C_\psi}\sigma\left(\sup\limits_{t,s\in T}\rho(t,s)\right)$.

При цьому $Z_n(t)$ наближає $I(t)$ з надійністю $1-\delta$ і точністю ε в просторі $C(T)$ (див. означення 8.2), якщо число n таке, що справджу-

ється умова

$$\inf_{u \geqslant 1} \frac{\widehat{B}^u(p)(\psi(u))^u}{(\varepsilon\sqrt{n})^u} \leqslant \delta. \tag{8.14}$$

Доведення. Теорема випливає з теорем 3.2 та 8.4 та наслідку 3.4. □

Приклад 8.9. *Розглянемо простір* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, *де* $\psi(u) = u^\alpha$, $\alpha > \frac{1}{2}$. *З прикладу 3.4 та теореми 2.8 при* $\varepsilon \geqslant \frac{e^\alpha \widehat{B}(p)}{\sqrt{n}}$ *випливає, що*

$$\inf_{u \geqslant 1} \frac{\widehat{B}^u(p)(\psi(u))^u}{(\varepsilon\sqrt{n})^u} = \exp\left\{ -\frac{\alpha}{e} \left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\widehat{B}(p)} \right)^{1/\alpha} \right\},$$

де $\widehat{B}(p) = 4 \cdot 3^\alpha \inf\limits_{t \in T} \|\xi(t)\|_\psi + \frac{1}{p(1-p)} \left(\frac{e}{\alpha}\right)^\alpha \int\limits_0^{\gamma p} \left(\ln \left(N \left(\sigma_1^{(-1)}(u) \right) \right) \right)^\alpha du$. *Отже, нерівність* (8.14) *виконується, коли справджується нерівність*

$$\exp\left\{ -\frac{\alpha}{e} \left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\widehat{B}(p)} \right)^{1/\alpha} \right\} \leqslant \delta,$$

при умові

$$n \geqslant \left(\frac{\widehat{B}(p)}{\varepsilon} \right)^2 \left((-\ln \delta) \frac{e}{\alpha} \right)^{2\alpha}$$

і

$$n \geqslant \left(\frac{e^{2\alpha} \widehat{B}(p)}{\varepsilon} \right)^2 \max\left(1, \left(\frac{-\ln \delta}{\alpha} \right)^{2\alpha} \right).$$

Приклад 8.10. *Розглянемо інтеграл виду*

$$\int\limits_0^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} c(t, x, y)(x + y)^{v-1} e^{-px} e^{-qy} dx dy,$$

де $0 \leqslant t \leqslant 1$, $|c(t, x, y)| \leqslant 1$. *Якщо* $t_1, t_2 \in [0, 1]$, *тоді* $|c(t_1, x, y) - c(t_2, x, y)| \leqslant \widetilde{\gamma}\,(t_1 - t_2)\, R$, *де* $R > 0$, $\widetilde{\gamma}(h)$, $0 \leqslant h \leqslant 1$ *монотонно зростаюча, неперервна функція така, що* $\widetilde{\gamma}(0) = 0$. *З прикладу 8.8 випливає, що* $\|I(t)\|_\psi \leqslant \frac{1}{pq} e^{-v} v^{v-\frac{1}{2}} S \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right)^{v-1}$, *де* $S = \sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{18}}$, *тоді*

$$\|I(t_1)-I(t_2)\|_\psi = \left\|\left(c(t_1,\xi,\eta)-c(t_2,\xi,\eta)\right)\frac{1}{pq}(\xi+\eta)^{v-1}\right\|_\psi \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{\gamma}\left(t_1-t_2\right)R\frac{1}{pq}e^{-v}v^{v-\frac{1}{2}}S\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)^{v-1}.$$

Тобто в термінах теореми 8.7 та прикладу 8.9 маємо, що

$$\sigma(h)=\widetilde{\gamma}(h)R\frac{1}{pq}e^{-v}v^{v-\frac{1}{2}}S\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)^{v-1},$$

а

$$\sigma_1(h)=4\cdot 3^{v-1}R\frac{1}{pq}e^{-v}v^{v-\frac{1}{2}}S\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)^{v-1}\widetilde{\gamma}(h)=D(v)\widetilde{\gamma}(h),$$

тоді $\sigma_1^{(-1)}(h)=\widetilde{\gamma}^{(-1)}\frac{h}{D(v)}$. *Крім того,* $N(u)\leqslant\frac{1}{2u}+1$, *тоді з прикладу 8.9 випливає, що* $Z_n(t)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}I_n(t)$ *наближає* $I(t)$ *в просторі* $C([0,1])$ *з надійністю* $1-\delta$ *і точністю* ε, *якщо справджується нерівність*

$$n\geqslant\left(\frac{\widehat{B}(r)}{\varepsilon}\right)^2\left((-\ln\delta)\frac{e}{v-1}\right)^{2(v-1)},$$

де $\widehat{B}(r)=4\cdot 3^{v-1}\frac{1}{pq}e^{-v}v^{v-\frac{1}{2}}S\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)^{v-1}+$
$+\frac{1}{r(1-r)}\left(\frac{e}{v-1}\right)^{v-1}\int\limits_0^{\gamma r}\left(\ln\left(\frac{1}{2\widetilde{\gamma}^{(-1)}\frac{x}{D(v)}}+1\right)\right)^{v-1}dx$, $\gamma=D(v)\widetilde{\gamma}(1)$.

Прикладом функції $c(t,x,y)$ може бути функція

$$c(t,x,y)=2^\theta\frac{\sin(t(x+1)(y+1))}{((x+1)(y+1))^\theta},$$

де $0<\theta\leqslant 1$. Дійсно,
$|c(t_1,x,y)-c(t_2,x,y)|=\left|\frac{2^\theta\cdot 2\sin\left(\frac{(t_1-t_2)(x+1)(y+1)}{2}\right)\cos\left(\frac{(t_1+t_2)(x+1)(y+1)}{2}\right)}{(x+1)^\theta(y+1)^\theta}\right|$.

Оскільки $|\sin x|\leqslant|x|^\theta$, де $0<\theta\leqslant 1$, тоді

$$|c(t_1,x,y)-c(t_2,x,y)|\leqslant 2\left|t_1-t_2\right|^\theta.$$

Приклад 8.11. *Нехай у прикладі 8.10* $\widetilde{\gamma}(h)=Lh^\beta$, *тоді* $\widetilde{\gamma}^{(-1)}\left(\frac{x}{D(v)}\right)=$

$\left(\frac{x}{LD(v)}\right)^{1/\beta}$. *Таким чином,*

$$\int\limits_0^{\gamma r}\left(\ln\left(\frac{1}{2\widetilde{\gamma}^{(-1)}\frac{x}{D(v)}}+1\right)\right)^{v-1}dx=\int\limits_0^{\gamma r}\left(\ln\left(\frac{(L\cdot D(v))^{1/\beta}}{2x^{1/\beta}}+1\right)\right)^{v-1}dx.$$

Із нерівності $\ln(1+x)\leqslant\frac{x^\tau}{\tau}$, *де* $x>0$, $0\leqslant\tau\leqslant1$, *випливає, що*

$$\left(\ln\left(\frac{(L\cdot D(v))^{1/\beta}}{2x^{1/\beta}}+1\right)\right)^{v-1}\leqslant\frac{1}{2^{\tau(v-1)}}\left(\frac{L\cdot D(v)}{x}\right)^{\frac{\tau(v-1)}{\beta}}\frac{1}{\tau^{v-1}}.$$

Тоді інтеграл $\int\limits_0^{\gamma r}\frac{1}{2^{\tau(v-1)}}\left(\frac{L\cdot D(v)}{x}\right)^{\frac{\tau(v-1)}{\beta}}\frac{1}{\tau^{v-1}}dx$ *буде збігатися, коли* $\frac{\tau(v-1)}{\beta}<1$.

Приклад 8.12. *Розглянемо простір* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, *де* $\psi(u)=e^{au^\beta}$, *де* $a>0$, $0<\beta<1$. *З прикладу 3.5 та теореми 2.7 при* $\varepsilon\geqslant\frac{e^{a(\beta+1)}\widehat{B}(p)}{\sqrt{n}}$ *випливає, що*

$$\inf_{u\geqslant1}\frac{\widehat{B}^u(p)(\psi(u))^u}{(\varepsilon\sqrt{n})^u}=\exp\left\{-\frac{\beta}{a^{1/\beta}}\left(\frac{\ln\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\widehat{B}(p)}}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}\right\}.$$

Якщо $\frac{1}{(2a\beta)^{1/\beta}}=1$, *тоді маємо:*

$$\widehat{B}(p)=4e^{2^{\beta-1}a}\inf_{t\in T}\|\xi(t)\|_\psi+$$
$$+\frac{1}{p(1-p)}\int\limits_0^{\gamma p}\frac{1}{e^a}\exp\left\{S(a,\beta)\left(\ln\left(N\left(\sigma_1^{(-1)}(u)\right)\right)\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}\right\},$$

де $S(a,\beta)=(\beta a)^{\frac{1}{\beta+1}}(\beta^{-1}+1)$. *Коли* $\frac{1}{(2a\beta)^{1/\beta}}>1$, *тоді аналогічно*

$$\widehat{B}(p)=\frac{4e^{\frac{a}{2}\left(2^\beta+1\right)-\frac{1}{4\beta}}}{(2a\beta)^{1/4\beta}}\inf_{t\in T}\|\xi(t)\|_\psi+$$
$$+\frac{1}{p(1-p)}\int\limits_0^{\gamma p}\frac{1}{e^a}\exp\left\{S(a,\beta)\left(\ln\left(N\left(\sigma_1^{(-1)}(u)\right)\right)\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}\right\}.$$

Отже, нерівність (8.14) *виконується, коли справджується нерівність*

$$\exp\left\{-\frac{\beta}{a^{1/\beta}}\left(\frac{\ln\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\widehat{B}(p)}}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}\right\}\leqslant\delta$$

при умові

$$n\geqslant\left(\frac{\widehat{B}(p)}{\varepsilon}\right)^2\exp\left\{2(\beta+1)\left((-\ln\delta)\frac{a^{1/\beta}}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}\right\}$$

і

$$n\geqslant\left(\frac{\widehat{B}(p)}{\varepsilon}\right)^2\max\left(e^{a(\beta+1)},\exp\left\{2(\beta+1)\left((-\ln\delta)\frac{a^{1/\beta}}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}\right\}\right).$$

8.3.3. Надійність та точність у просторі $L_p(T)$ обчислення інтегралів, залежних від параметру

У цьому підрозділі зберігаються позначення попереднього підрозділу.

Означення 8.3. *Скажемо, що $Z_n(t)$ наближається до $I(t)$ в просторі $L_p(T)$ з надійністю $1-\delta>0$ і точністю $\varepsilon>0$, якщо виконується така нерівність:*

$$P\left\{\left(\int\limits_T|Z_n(t)-I(t)|^p\,d\mu(t)\right)^{1/p}>\varepsilon\right\}\leqslant\delta.$$

Теорема 8.8. *Нехай $I(t)=E\xi(t)=\int\limits_S f(s,t)p(s)d\mu(s)$, $\xi(t)$ – випадковий процес, який належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, для якого виконується умова* **H** *з константою C_ψ, $\widetilde{Z}_n(t)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i(t)-I(t))$, $\xi_i(t)$ – незалежні копії випадкового процесу $\xi(t)$.*

Тоді для всіх $p\geqslant1$ має місце нерівність

$$\left\|\left(\int\limits_T\left|\widehat{Z}_n(t)\right|^p d\mu(t)\right)^{1/p}\right\|\leqslant\frac{2\sqrt{C_\psi}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\psi(p)}{\psi(1)}\left(\int\limits_T\|\xi(t)\|_\psi^p\,d\mu(t)\right)^{1/p},$$

причому $Z_n(t)$ наближає $I(t)$ з надійністю $1-\delta$ і точністю ε в просторі $L_p(T)$ при n такому, що

$$\inf_{u\geqslant 1} \frac{\left(\frac{2\sqrt{C_\psi}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\psi(p)}{\psi(1)}\right)^u \left(\int\limits_T \|\xi(t)\|^p \, d\mu(t)\right)^{u/p} (\psi(u))^u}{\varepsilon^u} \leqslant \delta. \tag{8.15}$$

Доведення. Теорема випливає з теореми 7.2, якщо виконується нерівність (8.15). □

Приклад 8.13. *Розглянемо простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u)=u^\alpha$, $\alpha>\frac{1}{2}$. Тоді з прикладу 2.4 випливає, що для цього простору виконується умова* **H** *з константою $C_\psi = 4\cdot 9^\alpha$, а з прикладу 7.4 та теореми 8.8 при $\varepsilon \geqslant \frac{4(3pe)^\alpha\left(\int\limits_T \|\xi(t)\|_\psi^p d\mu(t)\right)^{1/p}}{\sqrt{n}}$ випливає, що*

$$\inf_{u\geqslant 1} \frac{\left(\frac{2\sqrt{C_\psi}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\psi(p)}{\psi(1)}\right)^u \left(\int\limits_T \|\xi(t)\|^p \, d\mu(t)\right)^{u/p} (\psi(u))^u}{\varepsilon^u} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{-\frac{\alpha}{e}\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{4(3pe)^\alpha\left(\int\limits_T \|\xi(t)\|_\psi^p \, d\mu(t)\right)^{1/p}}\right)^{1/\alpha}\right\}.$$

Отже, нерівність (8.15) *виконується, коли справедливо*

$$\exp\left\{-\frac{\alpha}{e}\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{4(3pe)^\alpha\left(\int\limits_T \|\xi(t)\|_\psi^p \, d\mu(t)\right)^{1/p}}\right)^{1/\alpha}\right\} \leqslant \delta,$$

при

$$n \geqslant \left(\frac{4(3pe)^\alpha\left(\int\limits_T \|\xi(t)\|_\psi^p \, d\mu(t)\right)^{1/p}}{\varepsilon}\right)^2 \left((-\ln\delta)\frac{e}{\alpha}\right)^{2\alpha}.$$

Тоді

$$n \geqslant \left(\frac{4(3p)^\alpha \left(\int\limits_T \|\xi(t)\|_\psi^p \, d\mu(t) \right)^{1/p}}{\varepsilon} \right)^2 \max\left(1, \left(-\frac{\ln \delta}{\alpha}\right)^{2\alpha}\right).$$

Приклад 8.14. *Розглянемо простір* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, *де* $\psi(u) = e^{au^\beta}$, *де* $a > 0$, $0 < \beta < 1$. *Тоді з теореми 2.15 випливає, що можливими є два випадки. У першому випадку при* $\frac{1}{(2a\beta)^{1/\beta}} = 1$ *для простору* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ *виконується умова* $\mathbf{H}$ *з константою* $C_\psi = 4e^{2^\beta a}$. *Тоді з прикладу 7.5 та теореми 8.8 випливає, що*

$$\inf_{u \geqslant 1} \frac{\left(\frac{2\sqrt{C_\psi}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\psi(p)}{\psi(1)} \right)^u \left(\int\limits_T \|\xi(t)\|^p \, d\mu(t) \right)^{u/p} (\psi(u))^u}{\varepsilon^u} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{ -\frac{\beta}{a^{1/\beta}} \left(\frac{\ln \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{4e^{a\left(2^{\beta-1}+p^\beta-1\right)} \left(\int\limits_T \|\xi(t)\|_\psi^p d\mu(t) \right)^{1/p}}}{\beta + 1} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta}} \right\}.$$

Отже, нерівність (8.15) *виконується, коли справедливо*

$$\exp\left\{ -\frac{\beta}{a^{1/\beta}} \left(\frac{\ln \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{4e^{a\left(2^{\beta-1}+p^\beta-1\right)} \left(\int\limits_T \|\xi(t)\|_\psi^p d\mu(t) \right)^{1/p}}}{\beta + 1} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta}} \right\} \leqslant \delta.$$

Звідси випливає, що

$$n \geqslant \left(\frac{4e^{a\left(2^{\beta-1}+p^\beta-1\right)} \left(\int\limits_T \|\xi(t)\|_\psi^p \, d\mu(t) \right)^{1/p}}{\varepsilon} \right)^2 \times$$

$$\times \exp\left\{2(\beta+1)\left((-\ln\delta)\frac{a^{1/\beta}}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}\right\}.$$

Тоді

$$n \geqslant \left(\frac{4e^{a\left(2^{\beta-1}+p^{\beta}-1\right)}\left(\int\limits_T \|\xi(t)\|_\psi^p\, d\mu(t)\right)^{1/p}}{\varepsilon}\right)^2 \times$$

$$\times \max\left(e^{a(\beta+1)}, \exp\left\{2(\beta+1)\left((-\ln\delta)\frac{a^{1/\beta}}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}\right\}\right).$$

У другому випадку при $\frac{1}{(2a\beta)^{1/\beta}} > 1$ *маємо*

$$\inf_{u\geqslant 1}\frac{\left(\frac{2\sqrt{C_\psi}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\psi(p)}{\psi(1)}\right)^u\left(\int\limits_T \|\xi(t)\|^p\, d\mu(t)\right)^{u/p}(\psi(u))^u}{\varepsilon^u} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{-\frac{\beta}{a^{1/\beta}}\left(\frac{\ln\frac{\sqrt{n}\varepsilon(2a\beta)^{\frac{1}{4\beta}}}{\frac{4e^{a\left(2^{\beta-1}+p^{\beta}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4\beta}-1}}{(2a\beta)^{1/4\beta}}\left(\int\limits_T\|\xi(t)\|_\psi^p d\mu(t)\right)^{1/p}}}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}\right\}$$

і нерівність (8.15) *виконується, коли є справедливою така оцінка*

$$\exp\left\{-\frac{\beta}{a^{1/\beta}}\left(\frac{\ln\frac{\sqrt{n}\varepsilon(2a\beta)^{\frac{1}{4\beta}}}{\frac{4e^{a\left(2^{\beta-1}+p^{\beta}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4\beta}}}{(2a\beta)^{1/4\beta}}\left(\int\limits_T\|\xi(t)\|_\psi^p d\mu(t)\right)^{1/p}}}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}\right\} \leqslant \delta$$

при

$$n \geqslant \left(\frac{\frac{4e^{a\left(2^{\beta-1}+p^{\beta}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4\beta}}}{(2a\beta)^{1}/4\beta} \left(\int\limits_T \|\xi(t)\|_{\psi}^{p} \, d\mu(t) \right)^{1/p}}{(2a\beta)^{\frac{1}{4\beta}} \varepsilon} \right)^2 \times$$

$$\times \exp \left\{ 2(\beta+1) \left((-\ln \delta) \frac{a^{1/\beta}}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\beta+1}} \right\}.$$

Тоді

$$n \geqslant \left(\frac{\frac{4e^{a\left(2^{\beta-1}+p^{\beta}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4\beta}}}{(2a\beta)^{1}/4\beta} \left(\int\limits_T \|\xi(t)\|_{\psi}^{p} \, d\mu(t) \right)^{1/p}}{(2a\beta)^{\frac{1}{4\beta}} \varepsilon} \right)^2 \times$$

$$\times \max \left(e^{a(\beta+1)}, \exp \left\{ 2(\beta+1) \left((-\ln \delta) \frac{a^{1/\beta}}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\beta+1}} \right\} \right).$$

Висновки до розділу 8

У розділі 8 знайдені точність і надійність обчислення кратних інтегралів методом Монте-Карло. Розглянуті інтеграли, які залежать від параметру. Знайдені надійність та точність обчислення цих інтегралів у $C(T)$ та $L_p(T)$.

Розділ 9

Точність та надійність моделювання у $L_p(T)$ випадкових процесів, що допускають розклади в ряд з незалежними членами.

У даному розділі проведено оцінку моделювання випадкових процесів з просторів $Sub_\varphi(\Omega)$, котрі є підкласом K_σ-просторів, із заданими надійністю та точністю у просторах $L_p(T)$.

9.1. Точність та надійність моделювання випадкових процесів у $L_p(0,T)$

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ - стандартній ймовірнісний простір, $L_2^o(\Omega)$ - простір центрованих випадкових величин зі скінченним другим моментом, $E\xi^2 < \infty$, $\{\Lambda, \mathcal{U}, \mu\}$ - вимірний простір, міра μ - σ-скінченна. Нехай $L_p(\Lambda, \mu)$ - простір Банаха інтегровних в степені p функцій з мірою ν.

Означення 9.1. *Нехай $X = \{X(t), t \in T\}$ - випадковий процес з $Sub_\varphi(\Omega)$. Випадковий процес $X_N = \{X_N(t), t \in T\}$ з $Sub_\varphi(\Omega)$ будемо називати моделлю, що наближає випадкових процес X із заданими надійністю $1 - \alpha$ та точністю δ в просторі $L_p(0,T)$, якщо*

$$P\left\{\int_0^T (X(t) - X_N(t))^p dt)^{1/p} > \delta\right\} \leqslant \alpha.$$

У [57] було доведено наступне твердження.

Теорема 9.1. *[57] Нехай $\{T, \Lambda, M\}$ - вимірний простір, $X = \{X(t), t \in T\} \subset Sub_\varphi(\Omega)$, $\tau_\varphi(t) = \tau_\varphi(X(t))$. Нехай існує $\int_0^T (\tau_\varphi(t))^p d\mu(t)$, $p \geqslant 1$. Тоді з ймовірністю 1 існує $\int_0^T |X(t)|^p d\mu(t)$ та $\forall \delta : \delta > c(f(\frac{c^{1/p}p}{\delta^{1/p}}))^p$, де $c = \int_0^T (\tau_\varphi(t))^p d\mu(t)$, f - функція, така, що $\forall u > 0 : \varphi(u) = \int_0^u f(v) dv$. Тоді*

$$P\left\{\int_T |X(T)|^p d\mu(t) > \delta\right\} \leqslant 2\exp\left\{-\varphi^*\left(\left(\frac{\delta}{c}\right)^{1/p}\right)\right\},$$

де φ^* - перетворення Юнга-Фенхеля φ.

Дану теорему можна перетворити до наступного вигляду.

Теорема 9.2. *Нехай $\{T, \Lambda, M\}$ - вимірний простір, $X = \{X(t), t \in$*

$T\} \subset Sub_\varphi(\Omega)$, X_N - модель процесу X. Нехай f - функція, така, що $\forall u > 0 : \varphi(u) = \int_0^u f(v)dv$. Нехай

$$c_N = \int\limits_0^T (\tau_\varphi(X(t) - X_N(t)))^p d\mu(t) < \infty.$$

Модель $X_N(t)$ наближає випадковий процес $X(t)$ з надійністю $1-\alpha$ та точністю δ у просторі $L_p(T)$, коли

$$c_N \leqslant \frac{\delta}{(\varphi^{*(-1)}(ln\frac{2}{\alpha}))^p} \tag{9.1}$$

та

$$\delta > c_N \left(f \left(\frac{c_N^{1/p} p}{\delta^{1/p}} \right) \right)^p, \tag{9.2}$$

де φ^* - перетворення Юнга-Фенхеля φ.

Доведення. Оскільки $|X(t) - X_N(t)| \in Sub_\varphi(\Omega)$, та за теоремою 9.1

$$P\left\{ \int\limits_T |X(t)|^p d\mu(t) > \delta \right\} \leqslant 2\exp\left\{ -\varphi^* \left(\left(\frac{\delta}{c} \right)^{1/p} \right) \right\},$$

то

$$P\left\{ \int\limits_T |X(t) - X_N(t)|^p d\mu(t) > \delta \right\} \leqslant 2\exp\left\{ -\varphi^* \left(\left(\frac{\delta}{c_N} \right)^{1/p} \right) \right\},$$

тому повинна виконуватися нерівність (9.2) та

$$2\exp\left\{ -\varphi^* \left(\left(\frac{\delta}{c_N} \right)^{1/p} \right) \right\} \leqslant \alpha,$$

звідки

$$\varphi^* \left(\left(\frac{\delta}{c_N} \right)^{1/p} \right) \geqslant ln\frac{2}{\alpha},$$

і, остаточно,

$$c_N^{1/p} \leqslant \frac{\delta^{1/p}}{\varphi^{*(-1)}(ln\frac{2}{\alpha})}.$$

Спираючись на дану теорему, можна довести наступні твердження.

Теорема 9.3. *Нехай випадковий процес* $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$ *належить* $Sub_\varphi(\Omega)$,

$$\varphi(t) = \frac{t^\gamma}{\gamma},$$

коли $1 < \gamma \leqslant 2$. *Нехай*

$$c_N = \int_0^T (\tau_\varphi(X(t) - X_N(t)))^p d\mu(t) < \infty.$$

Модель $X_N(t)$ *наближає випадковий процес* $X(t)$ *з надійністю* $1-\alpha$ *та точністю* δ *у просторі* $L_p(T)$, *коли*

$$\begin{cases} c_N \leqslant \delta/(\beta ln\frac{2}{\alpha})^{p/\beta} \\ c_N < \delta/p^{p(1-1/\gamma)} \end{cases},$$

β *-число, таке, що* $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 1$.

Доведення. Перша нерівність відразу випливає з теореми 9.2. Дійсно, оскільки $\varphi(t) = t^\gamma/\gamma$, то $\varphi^*(t) = t^\beta/\beta$, звідки і випливає потрібний результат.

Розглянемо тепер другу нерівність. Знову, так як $\varphi(t) = \frac{t^\gamma}{\gamma}$, то $f(t) = t^{\gamma-1}$, $t > 0$, і

$$\delta > c_N \left(\left(\frac{c_N^{1/p} p}{\delta^{1/p}} \right)^{\gamma-1} \right)^p = \frac{c_N^\gamma p^{p(\gamma-1)}}{\delta^{\gamma-1}},$$

звідки

$$c_N^\gamma < \frac{\delta^\gamma}{p^{p(\gamma-1)}}.$$

Теорема 9.4. *Нехай випадковий процес* $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$ *належить* $Sub_\varphi(\Omega)$,

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{\gamma}, t < 1 \\ \frac{t^\gamma}{\gamma}, t \geqslant 1 \end{cases},$$

де $\gamma > 2$. *Нехай*

$$c_N = \int_0^T (\tau_\varphi(X(t) - X_N(t)))^p d\mu(t) < \infty.$$

Модель $X_N(t)$ *наближає випадковий процес* $X(t)$ *з надійністю* $1-\alpha$ *та точністю* δ *у просторі* $L_p(T)$, *коли*

$$\begin{cases} c_N \leqslant \delta/(\beta ln\frac{2}{\alpha})^{p/\beta} \\ c_N < \delta/p^{p(1-1/\gamma)} \end{cases},$$

де
коли $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 1$.

Доведення. Знайдемо вигляд функції $f^{(-1)}(t)$. Так як

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{\gamma}, t < 1 \\ \frac{t^\gamma}{\gamma}, t \geqslant 1 \end{cases},$$

то

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{\gamma}t, t < 1 \\ t^{\gamma-1}, t \geqslant 1 \end{cases},$$

звідки

$$f^{(-1)}(t) = \begin{cases} \frac{\gamma}{2}t, t < \frac{2}{\gamma} \\ t^{\frac{1}{\gamma-1}}, t \geqslant 1 \end{cases}.$$

Розглянемо тепер $\varphi^*(t)$. Коли $t > 1$,

$$\varphi^*(t) = \int_0^{2/\gamma} \frac{\gamma}{2} u du + \int_{2/\gamma}^1 du + \int_1^t u^{\frac{1}{\gamma-1}} du = \frac{\gamma}{2}\frac{u^2}{2}\Big|_0^{\gamma/2} + (1 - \frac{2}{\gamma}) + u^{\frac{1}{\gamma-1}+1}\Big|_1^t =$$

$$= \frac{\gamma}{2}\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\gamma}\right)^2 + 1 - \frac{2}{\gamma} + \frac{t^\beta}{\beta} - \frac{1}{\beta} = \frac{t^\beta}{\beta}.$$

Звідси та з теореми 9.2 випливає перша нерівність теореми.

Розглянемо тепер другу нерівність. Проаналізуємо спочатку випадок, коли $(c_N^{1/p} p)/(\delta^{1/p}) > 1$. В такому разі $f(x) = x^{\gamma-1}$, і

$$\delta > c_N \left(\left(\frac{c_N^{1/p} p}{\delta^{1/p}} \right)^{\gamma - 1} \right)^p,$$

тобто

$$c_N < \frac{\delta}{p^{p(1-1/\gamma)}},$$

звідки

$$\frac{\delta}{p^p} < c_N < \frac{\delta}{p^{p(1-1/\gamma)}}.$$

Для випадку $(c_N^{1/p} p)/(\delta^{1/p}) < 1$ маємо $f(x) = x\frac{2}{\gamma}$, і

$$\begin{cases} c_N < \frac{\delta}{p^p} \\ c_N < \frac{\delta}{p^p/2} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{p/2} \end{cases}.$$

так як $\gamma > 2$ та $p > 1$, то отримаємо

$$c_N < \frac{\delta}{p^p}.$$

Остаточно маємо, що

$$c_N < \frac{\delta}{p^{p(1-1/\gamma)}}.$$

9.2. Точність та надійність у $L_p(T)$ моделювання випадкових процесів, які допускають розклад в ряд з незалежними членами

Нехай випадковий процес $X = \{X(t), t \in [0, T]\}$ може бути зображений у вигляді ряду

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k(t), \tag{9.3}$$

де $\xi_k \in Sub_\varphi(\Omega)$, ξ_k - незалежні, і для даного ряду виконується умова

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tau_\varphi^2(\xi_k) a_k^2(t) < \infty.$$

Зазвичай у якості моделі такого випадкового процесу використовують суму перших N доданків такого розкладу. Проте, часто буває так, що функції $a_k(t)$ не можуть бути знайдені у явному вигляді. В такому випадку, в якості елементів моделі випадкового процесу можна використовувати $\hat{a}_k(t)$ - наближені значення функцій $a_k(t)$, врахувавши вплив похибки такого наближення на точність та надійність, з якими модель наближає процес.

Означення 9.2. *Моделлю випадкового процесу $X(t)$ будемо називати вираз*

$$X_N(t) = \sum_{k=1}^{N} \xi_k \hat{a}_k(t),$$

де $\hat{a}_k(t)$ - наближені значення функцій $a_k(t)$, $\xi_k \in Sub_\varphi(\Omega)$, ξ_k - незалежні.

Введемо наступні позначення:

$$\delta_k(t) = |a_k(t) - \hat{a}_k(t)|;$$

$$\Delta_N(t) = |X(t) - X_N(t)| = \left| \sum_{k=1}^{N} \xi_k \delta_k(t) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \xi_k a_k(t) \right|.$$

Будемо казати, що модель X_N наближає випадковий процес X із заданими надійністю та точністю у просторі $L_p[0,T]$, якщо

$$P\left\{ \left(\int_0^T (\Delta_N(t))^p dt \right)^{\frac{1}{p}} > \delta \right\} \leqslant \alpha.$$

Сформулюємо загальну теорему для оцінки надійності та точності моделювання таких процесів у $L_p(T)$.

Теорема 9.5. *Нехай випадковий процес $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$ належить $Sub_\varphi(\Omega)$, X_N - модель процесу X. Нехай*

$$c_N = \int_0^T \left(\tau_\varphi \left(\sum_{k=1}^{N} \xi_k \delta_k(t) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \xi_k a_k(t) \right) \right)^p dt < \infty.$$

Модель $X_N(t)$ наближає випадковий процес $X(t)$ з надійністю $1-\alpha$ та точністю δ у просторі $L_p(T)$, коли

$$\begin{cases} c_N \leqslant \delta / (\varphi^{*(-1)}(ln\frac{2}{\alpha}))^p \\ \delta > c_N (f(\frac{c_N^{1/p} p}{\delta^{1/p}}))^p \end{cases},$$

f задане у теоремі 9.1, φ^* - перетворення Юнга-Фенхеля φ.

Доведення. Доведення даної теореми аналогічне доведенню теореми 9.2.$\diamondsuit$

Для подальших теорем нам буде потрібне наступне твердження.

Теорема 9.6. *[16] Нехай $\xi_1, \xi_1, \ldots, \xi_n \in Sub_\varphi(\Omega)$ - незалежні випадкові величини. Якщо функція $\varphi(|x|^{1/s})$, $x \in R$ опукла для $s \in (0,2]$, то*

$$\tau_\varphi^s \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k \right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \tau_\varphi^s(\xi_k).$$

Теорема 9.7. *Нехай випадковий процес $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$ належить $Sub_\varphi(\Omega)$,*

$$\varphi(t) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{t^2}{\gamma}, t < 1 \\ \frac{t^\gamma}{\gamma}, t \geqslant 1 \end{array} \right. ,$$

де $\gamma > 2$. Нехай

$$c_N = \int_0^T \left(\sum_{k=1}^{N} \tau_\varphi^2(\xi_k)\delta_k^2(t) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \tau_\varphi^2(\xi_k) a_k^2(t) \right)^{p/2} dt < \infty.$$

Випадковий процес X_N наближає випадковий процес X з надійністю $1-\alpha$ та точністю δ в просторі $L_p(0,T)$, коли

$$\left\{ \begin{array}{l} c_N \leqslant \delta/(\beta ln\frac{2}{\alpha})^{p/\beta} \\ c_N < \delta/p^{p(1-1/\gamma)} \end{array} \right. ,$$

де β таке, що $1/\beta + 1/\gamma = 1$.

Доведення. З теореми 9.6 для $s = 2$ випливають наступні нерівності:

$$c_N = \int_0^T (\tau_\varphi(\Delta_N(t)))^p d\mu(t) = \int_0^T \left(\tau_\varphi \left(\sum_{k=1}^{N} \xi_k \delta_k(t) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{k=N+1}^{\infty} \xi_k a_k(t) \right)\right)^p dt \leqslant \int_0^T \left(\sum_{k=1}^{N} \tau_\varphi^2(\xi_k)\delta_k^2(t) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \tau_\varphi^2(\xi_k) a_k^2(t) \right)^{p/2} dt.$$

Теорема 9.8. *Нехай випадковий процес $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$ належить $Sub_\varphi(\Omega)$,*

$$\varphi(t) = \frac{t^\gamma}{\gamma},$$

де $1 < \gamma < 2$. *Нехай*

$$c_N = \int\limits_0^T \left(\sum_{k=1}^{N} \tau_\varphi^\gamma(\xi_k)\delta_k^\gamma(t) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \tau_\varphi^\gamma(\xi_k)a_k^\gamma(t) \right)^{p/\gamma} dt < \infty.$$

Модель X_N *наближає випадковий процес* X *з надійністю* $1-\alpha$ *та точністю* δ *в просторі* $L_p(0,T)$, *коли*

$$\begin{cases} c_N \leqslant \delta/(\beta ln\frac{2}{\alpha})^{p/\beta} \\ c_N < \delta/p^{p(1-1/\gamma)} \end{cases},$$

де β *таке, що* $1/\beta + 1/\gamma = 1$.

Доведення. З теореми 9.6 для $s=\gamma$ випливають наступні нерівності:

$$c_N = \int\limits_0^T (\tau_\varphi(\Delta_N(t)))^p d\mu(t) = \int\limits_0^T \left(\tau_\varphi \left(\sum_{k=1}^{N} \xi_k\delta_k(t) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{k=N+1}^{\infty} \xi_k a_k(t) \right)\right)^p dt \leqslant \int\limits_0^T \left(\sum_{k=1}^{N} \tau_\varphi^\gamma(\xi_k)\delta_k^\gamma(t) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \tau_\varphi^\gamma(\xi_k)a_k^\gamma(t) \right)^{p/\gamma} dt.$$

9.2.1. Моделювання випадкових процесів за допомогою розкладу Карунена-Лоева у $L_p(0,T)$

Теорема 9.9. *[62] (Про розклад Карунена-Лоева) Нехай* $X(t)$, $t \in D$ *- випадковий процес другого порядку,* $EX(t) = 0$ $\forall t \in D$, *з кореляційною функцією* $B(t,s) = EX(t)\overline{X(s)}$, $f(t,\lambda) \in L_2(\Lambda,\mu)$. *Кореляційна функція* $B(t,s)$ *допускає зображення*

$$B(t,s) = \int\limits_\Lambda f(t,\lambda)f(s,\lambda)d\mu(\lambda)$$

тоді і тільки тоді, коли

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}}\xi_k, \tag{9.4}$$

де $a_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$ *- власні функції однорідного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду*

$$a(t) = \lambda \int\limits_D B(t,s)a(s)d\mu(s), \tag{9.5}$$

ξ_k - центровані незалежні випадкові величини, такі, що $E\xi_k = 0$, $E\xi_n\xi_m = \delta_{nm}\lambda_n^{-1}$, λ_n - власні числа даного рівняння, занумеровані в порядку зростання.

Означення 9.3. *Нехай $X = \{X(t), t \in [0,T]\} \in Sub_\varphi(\Omega)$ випадковий процес з кореляційною функцією $B(t,s) = EX(t)\overline{X(s)}$, що може бути зображений за допомогою розкладу Карунена-Лоева. Моделлю Карунена-Лоева такого випадкового процесу будемо називати процес $X_N = \{X_N(t), t \in B\} \in Sub_\varphi(\Omega)$, такий, що*

$$X_N(t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\hat{a}_k(t)}{\sqrt{\hat{\lambda}_k}}\xi_k,$$

де $\hat{a}_k(t)$ - наближення власних функцій однорідного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду (9.5), $\hat{\lambda}_k$ - наближення власних чисел цього ж рівняння.

Сформулюємо теореми, що дозволять будувати моделі випадкових процесів з таким розкладом у $L_p(T)$.

Теорема 9.10. *Нехай випадковий процес $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$ належить $Sub_\varphi(\Omega)$,*

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{\gamma}, t < 1 \\ \frac{t^\gamma}{\gamma}, t \geqslant 1 \end{cases}$$

при $\gamma > 2$, та допускає зображення у вигляді (9.4). Нехай

$$c_N = \int\limits_0^T \left(\sum_{k=1}^{N} \tau_\varphi^2(\xi_k) \left(\frac{\delta_k^2(t)}{\hat{\lambda}_k - \eta_k} + \hat{a}_k^2(t) \frac{(\sqrt{\hat{\lambda}_k} - \sqrt{\hat{\lambda}_k - \eta_k})^2}{\hat{\lambda}_k(\hat{\lambda}_k - \eta_k)} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\tau_\varphi^2(\xi_k) a_k^2(t)}{\lambda_k} \right)^{p/2} dt < \infty,$$

де $\delta_k(t) = |\varphi_k(t) - \hat{\varphi}_k(t)|$ - похибка знаходження k-ї власної функції рівняння (9.5), $\hat{\lambda}_k$ - наближене значення k-го власного числа, $\eta_k = |\lambda_k - \hat{\lambda}_k|$ - похибка наближення k-го власного числа. Модель X_N наближає випадковий процес X з надійністю $1-\alpha$ та точністю δ в просторі

$L_p(0,T)$, *якщо виконані наступні умови:*

$$\begin{cases} c_N \leqslant \delta/(\beta ln\frac{2}{\alpha})^{p/\beta} \\ c_N < \delta/p^{p(1-1/\gamma)} \end{cases}.$$

Доведення. Твердження теореми випливає із теорем 9.7 та 9.9. Дійсно,

$$c_N = \int_0^T \left(\tau_\varphi \left(\sum_{k=1}^N \xi_k \left(\frac{a_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}} - \frac{\hat{a}_k(t)}{\sqrt{\hat{\lambda}_k}}\right) + \sum_{k=N+1}^\infty \xi_k \frac{a_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}}\right)\right)^p dt =$$

$$= \int_0^T \left(\tau_\varphi \left(\sum_{k=1}^N \xi_k \left(\frac{a_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}} - \frac{\hat{a}_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}} + \frac{\hat{a}_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}} - \frac{\hat{a}_k(t)}{\sqrt{\hat{\lambda}_k}}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{k=N+1}^\infty \xi_k \frac{a_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}}\right)\right)^p dt = \int_0^T \left(\tau_\varphi \left(\sum_{k=1}^N \xi_k \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \delta_k(t) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{k=1}^N \xi_k \hat{a}_k(t) \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} - \frac{1}{\sqrt{\hat{\lambda}_k}}\right) + \sum_{k=N+1}^\infty \tau_\varphi(\xi_k) \frac{a_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}}\right)\right)^p dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T \left(\sum_{k=1}^N \tau_\varphi^2(\xi_k) \left(\frac{\delta_k^2(t)}{\hat{\lambda}_k - \eta_k} + \hat{a}_k^2(t) \frac{(\sqrt{\hat{\lambda}_k} - \sqrt{\hat{\lambda}_k - \eta_k})^2}{\hat{\lambda}_k(\hat{\lambda}_k - \eta_k)}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=N+1}^\infty \frac{\tau_\varphi^2(\xi_k) a_k^2(t)}{\lambda_k}\right)^{p/2} dt.$$

У випадку, коли $\tau_\varphi(\xi_k) \leqslant \tau \ \forall k$, отримаємо наступне твердження.

Теорема 9.11. *Нехай випадковий процес* $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$ *належить* $Sub_\varphi(\Omega)$,

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{\gamma}, t < 1 \\ \frac{t^\gamma}{\gamma}, t \geqslant 1 \end{cases}$$

при $\gamma > 2$, *і нехай* $\forall k : \tau_\varphi(\xi_k) = \tau$. *Нехай процес* X *допускає зображе-*

ння у вигляді (9.4), і нехай

$$c_N = \tau^{p/2} \int_0^T \left(\left(B(t,t) - \sum_{k=1}^{N} \frac{(\hat{a}_k(t) - \delta_k(t))^2}{\hat{\lambda}_k + \eta_k} \right) + \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\delta_k^2(t)}{\hat{\lambda}_k - \eta_k} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \hat{a}_k^2(t) \frac{(\sqrt{\hat{\lambda}_k} - \sqrt{\hat{\lambda}_k - \eta_k})^2}{\hat{\lambda}_k(\hat{\lambda}_k - \eta_k)} \right) \right)^{p/2} dt < \infty,$$

де $\delta_k(t) = |\varphi_k(t) - \hat{\varphi}_k(t)|$ *- похибка знаходження* k*-ї власної функції рівняння (9.5),* $\hat{\lambda}_k$ *- наближене значення* k*-го власного числа,* $\eta_k = |\lambda_k - \hat{\lambda}_k|$ *- похибка наближення* k*-го власного числа. Модель* X_N *наближає випадковий процес* X *з надійністю* $1 - \alpha$ *та точністю* δ *в просторі* $L_p(0, T)$*, якщо виконані наступні умови:*

$$\begin{cases} c_N \leqslant \delta / (\beta ln \frac{2}{\alpha})^{p/\beta} \\ c_N < \delta / p^{p(1-1/\gamma)} \end{cases} .$$

Доведення. Твердження теореми випливає з теореми Мерсера [106] та попередньої теореми. Дійсно, згідно з Теоремою Мерсера

$$B(t,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2(t)}{\lambda_k},$$

тому

$$c_N = \int_0^T \left(\sum_{k=1}^{N} \tau^2 \left(\frac{\delta_k^2(t)}{\hat{\lambda}_k - \eta_k} + \hat{a}_k^2(t) \frac{(\sqrt{\hat{\lambda}_k} - \sqrt{\hat{\lambda}_k - \eta_k})^2}{\hat{\lambda}_k(\hat{\lambda}_k - \eta_k)} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\tau^2 a_k^2(t)}{\lambda_k} \right)^{p/2} dt = \tau^{p/2} \int_0^T \left(\sum_{k=1}^{N} \tau^2 \left(\frac{\delta_k^2(t)}{\hat{\lambda}_k - \eta_k} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \hat{a}_k^2(t) \frac{\left(\sqrt{\hat{\lambda}_k} - \sqrt{\hat{\lambda}_k - \eta_k}\right)^2}{\hat{\lambda}_k(\hat{\lambda}_k - \eta_k)} \right) + B(t,t) - \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k^2(t)}{\lambda_k} \right)^{p/2} dt \leqslant$$

$$\leqslant \tau^{p/2} \int\limits_0^T \left(\left(B(t,t) - \sum_{k=1}^{N} \frac{(\hat{a}_k(t) - \delta_k(t))^2}{\hat{\lambda}_k + \eta_k} \right) + \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\delta_k^2(t)}{\hat{\lambda}_k - \eta_k} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \hat{a}_k^2(t) \frac{(\sqrt{\hat{\lambda}_k} - \sqrt{\hat{\lambda}_k - \eta_k})^2}{\hat{\lambda}_k(\hat{\lambda}_k - \eta_k)} \right)\right)^{p/2} dt.$$

Теорема 9.12. *Нехай випадковий процес $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$ належить $Sub_\varphi(\Omega)$,*

$$\varphi(t) = \frac{t^\gamma}{\gamma}$$

при $1 < \gamma < 2$. Нехай

$$c_N = \int\limits_0^T \left(\sum_{k=1}^{N} \tau_\varphi^\gamma(\xi_k) \left(\frac{\delta_k^\gamma(t)}{(\lambda_k - \eta_k)^\gamma} + \hat{a}_k^\gamma(t) \frac{(\sqrt{\hat{\lambda}_k} - \sqrt{\hat{\lambda}_k - \eta_k})^\gamma}{(\hat{\lambda}_k(\hat{\lambda}_k - \eta_k))^\gamma} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\tau_\varphi^\gamma(\xi_k) a_k^{2\gamma}(t)}{\lambda_k^\gamma} \right)^{p/\gamma} dt,$$

де $\delta_k(t) = |\varphi_k(t) - \hat{\varphi}_k(t)|$ - похибка знаходження k-ї власної функції рівняння (9.5), $\hat{\lambda}_k$ - наближене значення k-го власного числа, $\eta_k = |\lambda_k - \hat{\lambda}_k|$ - похибка наближення k-го власного числа. Модель X_N наближає випадковий процес X з надійністю $1-\alpha$ та точністю δ в просторі $L_p(0,T)$ якщо виконані наступні умови:

$$\begin{cases} c_N \leqslant \delta/(\beta ln\frac{2}{\alpha})^{p/\beta} \\ c_N < \delta/p^{p(1-1/\gamma)} \end{cases}$$

Доведення. Твердження теореми випливає з теорем 9.8, 9.9 та доведення теореми 9.10. ♢

9.2.2. Моделювання випадкових процесів за допомогою розкладу їх по певним базисам у $L_p(0,T)$

Теорема 9.13. *[143] (Про рсклад процесу за базисом) Нехай $X(t)$, $t \in T$ - випадковий процес другого порядку, $EX(t) = 0$ $\forall t \in T$, з кореляційною функцією $B(t,s) = EX(t)\overline{X(s)}$, $f(t,\lambda) \in L_2(\Lambda,\mu)$, $\{g_k(\lambda), k \in Z\}$ - ортонормований базис в $L_2(\Lambda,\mu)$. Кореляційна функція $B(t,s)$ допу-*

скає зображення

$$B(t,s) = \int\limits_{\Lambda} f(t,\lambda) f(s,\lambda) d\mu(\lambda)$$

тоді і тільки тоді, коли

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)\xi_k, \tag{9.6}$$

де

$$a_k(t) = \int\limits_{\Lambda} f(t,\lambda)\overline{g_k(\lambda)} d\mu(\lambda), \tag{9.7}$$

ξ_k *- центровані некорельовані випадкові величини, такі, що* $E\xi_k = 0$, $E\xi_k\xi_l = \delta_{kl}$, $E\xi_k^2 = 1$.

Означення 9.4. *Нехай випадковий процес* $X = \{X(t), t \in T\}$ *може бути зображений у вигляді (9.6). Моделлю такого процесу будемо називати такий процес* $X_N = \{X_N(t), t \in T\}$, *що*

$$X_N(t) = \sum_{k=1}^{N} \xi_k \hat{a}_k(t), \tag{9.8}$$

де $\hat{a}_k(t)$ *- наближення функцій* $a_k(t)$, *заданих у вигляді (9.7),* ξ_k *- центровані некорельовані випадкові величини, такі, що* $E\xi_k = 0$, $E\xi_k\xi_l = \delta_{kl}$, $E\xi_k^2 = 1$.

Розглянемо приклад розклад процесу за базисом на скінченому інтервалі:

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k(t),$$

$$a_k(t) = \int\limits_0^T f(t,\lambda)\cos \pi k\lambda d\lambda.$$

Теорема 9.14. *Нехай випадковий процес* $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$ *належить простору* $Sub_\varphi(\Omega)$,

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{\gamma}, t < 1 \\ \frac{t^\gamma}{\gamma}, t \geqslant 1 \end{cases}$$

при $\gamma > 2$. *Нехай* $f(t,s)$ *диференційовна по* s, *а процес* $X(t)$ *може бути* *представлений у вигляді (9.6) при $g_k(t) = cos(\pi kt)$. Нехай крім того*

$$c_N = \int\limits_0^T \left(\delta_f^2(t) \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{4\tau_\varphi^2(\xi_k)}{\pi^2 k^2} + \sum_{k=1}^{N} \tau_\varphi^2(\xi_k)\delta_k^2(t) \right)^{p/2} dt < \infty,$$

$\delta_f(t) = f(t,T) - f(t,0)$. Модель $X_N(t)$ наближає процес $X(t)$ із заданими надійністю $1-\alpha$ та точністю δ у просторах $L_p(0,T)$, коли

$$\begin{cases} c_N \leqslant \delta/(\beta ln\frac{2}{\alpha})^{p/\beta} \\ c_N < \delta/p^{p(1-1/\gamma)} \end{cases}$$

для таких β, що $1/\gamma + 1/\beta = 1$.

Доведення. З теореми 9.7 маємо, що

$$c_N = \int\limits_0^T (\tau_\varphi(\Delta_N(t)))^p \, dt = \int\limits_0^T \left(\tau_\varphi \left(\sum_{k=1}^{N} \xi_k \delta_k(t) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \xi_k a_k(t) \right) \right)^p dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^T \left(\sum_{k=1}^{N} \tau_\varphi^2(\xi_k)\delta_k^2(t) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \tau_\varphi^2(\xi_k) a_k^2(t) \right)^{p/2} dt.$$

Тепер твердження теореми випливає з того, що:

$$a_k(t) = \int\limits_0^T f(t,\lambda)\cos(\pi k\lambda) d\lambda = \frac{1}{\pi k} f(t,\lambda)\sin(\pi k\lambda)\Big|_0^T -$$

$$- \int\limits_0^T \frac{\partial f(t,\lambda)}{\partial \lambda} \frac{\sin(\pi k \lambda)}{\pi k} d\lambda \leqslant (f(t,T) - f(t,0)) \frac{2}{\pi k} = \delta_f(t) \frac{2}{\pi k}.$$

Теорема 9.15. *Нехай випадковий процес $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$ належить простору $Sub_\varphi(\Omega)$,*

$$\varphi(t) = \frac{t^\gamma}{\gamma},$$

при $1 < \gamma < 2$. Нехай $f(t,s)$ диференційовна по s, $g_k(t) = cos(\pi kt)$, а процес $X(t)$ може бути представлений у вигляді (9.6). Нехай крім *того*

$$c_N = \int\limits_0^T \left(\delta_f^\gamma(t) \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{4\tau_\varphi^\gamma(\xi_k)}{\pi^\gamma k^\gamma} + \sum_{k=1}^{N} \tau_\varphi^\gamma(\xi_k)\delta_k^\gamma(t) \right)^{p/\gamma} dt < \infty,$$

$\delta_f(t)$ задане теоремі 9.14. Модель $X_N(t)$ наближає процес $X(t)$ із заданими надійністю $1-\alpha$ та точністю δ у просторах $L_p(0,T)$, коли

$$\begin{cases} c_N \leqslant \delta/(\beta ln\frac{2}{\alpha})^{p/\beta} \\ c_N < \delta/p^{p(1-1/\gamma)} \end{cases}$$

для таких β, що $1/\gamma + 1/\beta = 1$.

Доведення. Твердження теореми випливає з теореми 9.14 та 9.8 $\diamondsuit$

9.2.3. Моделювання випадкових процесів за допомогою розкладу їх по базису Ерміта у $L_p(0,T)$

Нехай $X = \{X(t), t \in [0,T]\} \in Sub_\varphi(\Omega)$ - випадковий процес другого порядку, $EX(t) = 0$. Нехай коваріаційна функція процесу $B(t,s) = EX(t)\overline{X(s)}$ допускає зображення

$$B(t,s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t,\lambda)f(s,\lambda)d\lambda,$$

де $f(t,\lambda)$, $t \in [0,T]$, $\lambda \in R$ - сім'я функцій з $L_2(R)$. Оскільки функції Ерміта [108] утворюють ортонормований базис, то, згідно з теоремою 9.13, процес X може бути зображений у вигляді

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t,\lambda)g_k(\lambda)d\lambda,$$

де ξ_k - φ-субгауссові незалежні некорельовані випадкові величини, такі, що $E\xi_k^2 = 1$; $g_k(\lambda)$ - функції Ерміта:

$$g_k(\lambda) = \frac{H_k(\lambda)}{\sqrt{k!}} \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \exp\{-\frac{\lambda^2}{2}\}, \tag{9.9}$$

$H_k(\lambda)$ - поліноми Ерміта, тобто функції вигляду

$$H_k(\lambda) = (-1)^k e^{\lambda^2/2} \frac{d^n}{d\lambda^n} e^{-\lambda^2/2}.$$

Теорема 9.16. *Нехай випадковий процес $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$ належить простору $Sub_\varphi(\Omega)$,*

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{\gamma}, t < 1 \\ \frac{t^\gamma}{\gamma}, t \geqslant 1 \end{cases}$$

при $\gamma > 2$, і нехай процес $X(t)$ може бути представлений у вигляді (9.6), де $g_k(t)$ - функції Ерміта.Нехай

$$c_N = \int_0^T \left(K^2 \int_{-\infty}^{\infty} Z_f^2(t,\lambda) d\lambda \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\tau_\varphi^2(\xi_k)}{k^2+3k+2} + \sum_{k=1}^{N} \tau_\varphi^2(\xi_k) \delta_k^2(t) \right)^{p/2} dt < \infty,$$

$$Z_f(t,\lambda) = \frac{\partial^2 f(t,\lambda)}{\partial \lambda^2} - \lambda \frac{\partial f(t,\lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\lambda^2 - 2}{4} f(t,\lambda),$$

де $K \approx 1.086435$, $f(t,s)$ двічі диференційовна по s та зростає по s не швидше, ніж $\exp^{s^2/4}$, $Z_f(\lambda)$ - інтегровна на R. Модель $X_N(t)$, задана у (9.8), наближає процес $X(t)$ із заданими надійністю $1-\alpha$ та точністю δ у просторах $L_p(0,T)$, коли

$$\begin{cases} c_N \leqslant \delta/(\beta ln \frac{2}{\alpha})^{p/\beta} \\ c_N < \delta/p^{p(1-1/\gamma)} \end{cases},$$

де $1/\gamma + 1/\beta = 1$.

Доведення. За умов теореми

$$a_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t,\lambda) g_k(\lambda) d\lambda = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t,\lambda) \frac{H_k(\lambda) e^{-\lambda^2/4}}{\sqrt{k!}} d\lambda.$$

Із властивостей многочленів Ерміта [108] випливає, що

$$\frac{\partial H_k(t)}{\partial t} = k H_{k-1}(t).$$

Застосувавши інтегрування частинами, отримаємо:

$$\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t,\lambda) \frac{H_k(\lambda) e^{-\lambda^2/4}}{\sqrt{k!}} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t,\lambda) \frac{e^{-\lambda^2/4}}{\sqrt{k+1}\sqrt{(k+1)!}} \frac{\partial H_{k+1}(\lambda)}{\partial \lambda} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} f(t,\lambda) \frac{e^{-\lambda^2/4}}{\sqrt{k+1}\sqrt{(k+1)!}} H_{k+1}(\lambda) \Bigg|_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} -$$

$$-\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(t,\lambda) e^{-\lambda^2/4}}{\partial \lambda} \frac{H_{k+1}(\lambda)}{\sqrt{k+1}\sqrt{(k+1)!}} d\lambda.$$

Так як $H_k(\lambda)\exp\{-\lambda^2/4\}$ прямує до нуля при $\lambda \to \pm\infty$, а $f(t,\lambda)$ зростає по λ не швидше, ніж $\exp \lambda^2/4$, то

$$\phi_k(t) = -\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(t,\lambda) e^{-\lambda^2/4}}{\partial \lambda} \frac{H_{k+1}(\lambda)}{\sqrt{k+1}\sqrt{(k+1)!}} d\lambda.$$

Застосуємо інтегрування частинами іще раз:

$$\phi_k(t) = -\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(t,\lambda) e^{-\lambda^2/4}}{\partial \lambda} \frac{H_{k+1}(\lambda)}{\sqrt{k+1}\sqrt{(k+1)!}} d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(t,\lambda) e^{-\lambda^2/4}}{\partial \lambda} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}\sqrt{(k+2)!}} \frac{\partial H_{k+2}(\lambda)}{\partial \lambda} d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \frac{\partial f(t,\lambda) e^{-\lambda^2/4}}{\partial \lambda} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}\sqrt{(k+2)!}} H_{k+1}(\lambda) \Bigg|_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 f(t,\lambda) e^{-\lambda^2/4}}{\partial \lambda^2} \frac{H_{k+2}(\lambda)}{\sqrt{(k+1)(k+2)}\sqrt{(k+2)!}} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 f(t,\lambda) e^{-\lambda^2/4}}{\partial \lambda^2} \frac{H_{k+2}(\lambda)}{\sqrt{(k+1)(k+2)}\sqrt{(k+2)!}} d\lambda.$$

Із нерівності Крамера [129] для функцій Ейлера випливає, що для всіх λ $|g_k(\lambda)| \leqslant K$, де $K \approx 1.086435$. Нарешті, отримаємо

$$a_k(t) \leqslant \frac{K}{\sqrt{(k+1)(k+2)}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} Z(t,\lambda) d\lambda,$$

де

$$Z_f(t,\lambda) = \frac{\partial^2 f(t,\lambda)}{\partial \lambda^2} - \lambda \frac{\partial f(t,\lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\lambda^2 - 2}{4} f(t,\lambda).$$

Отже,

$$c_N = \int\limits_0^T \left(\sum_{k=1}^N \tau_\varphi^2(\xi_k)\delta_k^2(t) + \sum_{k=N+1}^\infty \tau_\varphi^2(\xi_k) a_k^2(t) \right)^{p/2} dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^T \left(K^2 \int\limits_{-\infty}^\infty Z_f^2(t,\lambda)d\lambda \sum_{k=N+1}^\infty \frac{\tau_\varphi^2(\xi_k)}{k^2+3k+2} + \sum_{k=1}^N \tau_\varphi^2(\xi_k)\delta_k^2(t) \right)^{p/2} dt.$$

Остаточно, твердження теореми випливає з теореми 9.7.

Теорема 9.17. *Нехай випадковий процес $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$ належить простору $Sub_\varphi(\Omega)$,*

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{\gamma}, t < 1 \\ \frac{t^\gamma}{\gamma}, t \geqslant 1 \end{cases}$$

при $\gamma > 2$, і нехай процес $X(t)$ може бути представлений у вигляді (9.6), де $g_k(t)$ - функції Ерміта.Нехай

$$c_N = \int\limits_0^T \left(K^\gamma \int\limits_{-\infty}^\infty Z_f^\gamma(t,\lambda)d\lambda \sum_{k=N+1}^\infty \frac{\tau_\varphi^\gamma(\xi_k)}{(k^2+3k+2)^{2/\gamma}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^N \tau_\varphi^\gamma(\xi_k)\delta_k^\gamma(t) \right)^{p/\gamma} dt < \infty,$$

$$Z_f(t,\lambda) = \frac{\partial^2 f(t,\lambda)}{\partial\lambda^2} - \lambda\frac{\partial f(t,\lambda)}{\partial\lambda} + \frac{\lambda^2-2}{4} f(t,\lambda),$$

де $K \approx 1.086435$, $f(t,s)$ двічі диференційовна по s та зростає по s не швидше, ніж $\exp^{s^2/4}$, $Z_f(\lambda)$ - інтегровна на R. Модель $X_N(t)$, задана у (9.8), наближає процес $X(t)$ із заданими надійністю $1-\alpha$ та точністю δ у просторах $L_p(0,T)$, коли

$$\begin{cases} c_N \leqslant \delta/(\beta ln\frac{2}{\alpha})^{p/\beta} \\ c_N < \delta/p^{p(1-1/\gamma)} \end{cases},$$

де $1/\gamma + 1/\beta = 1$.

Доведення. Твердження теореми випливає з теорем 9.8 та 9.16. ♢

Висновки до розділу 9

У розділі 9 розглянуто випадкові процеси із просторів $Sub_{\varphi}(\Omega)$, що допускають розклад у ряд, елементи якого не можуть бути знайдені у явному вигляді. Розроблено механізм оцінки точності та надійності побудови моделей таких процесів у просторах $L_p(T)$. Розглянуто випадки $\varphi(t) = |t|^{\gamma}/\gamma$, $1 < \gamma < 2$, та $\varphi(t) = |t|^{\gamma}/\gamma$, коли $|t| > 1$, та $\varphi(t) = |t|^2/\gamma$, $|t| < 1$, при $\gamma > 2$. Наведені викладки застосовано для оцінки точності та надійності моделювання у $C(T)$ випадкових процесів за допомогою розкладу Карунена-Лоева у випадку, коли власні числа та власні вектори не можуть бути знайдені явно.

Розділ 10

Точність та надійність моделювання у $C(T)$ випадкових процесів, що допускають розклади в ряд з незалежними членами.

У даному розділі проведено оцінку моделювання випадкових процесів з просторів $Sub_\varphi(\Omega)$, котрі є підкласом K_σ-просторів, із заданими надійністю та точністю у просторах $C(T)$.

10.1. Оцінка точності та надійності моделювання випадкових процесів у просторах $C(T)$

Нехай $X = \{X(t), t \in B\}$ - випадковий процес з $Sub_\varphi(\Omega)$. Нехай (B, ρ) - сепарабельний компакт та процес X сепарабельний на (B, ρ). Припустимо, що існує така неперервно монотонна зростаюча функція $\sigma = \{\sigma(h), h > 0\}$, що $\sigma(h) \to 0$, $h \to 0$, та має місце нерівність:

$$\sup_{\rho(t,s) \leqslant h} \tau_\varphi(X(t) - X(s)) \leqslant \sigma(h), \tag{10.1}$$

причому процес X неперервний. Нехай до того ж $\beta > 0$ таке, що

$$\beta = \sigma\left(\inf_{s \in B} \sup_{t \in B} \rho(t, s)\right),$$

і нехай $N_B(u)$ - мінімальне число замкнених куль радіуса u, які покривають (B, ρ).

Наступна теорема є модифікацією теореми з [19].

Теорема 10.1. *Нехай випадковий процес $X = \{X(t), t \in B\}$ належить $Sub_\varphi(\Omega)$, (B, ρ) - сепарабельний компакт та X сепарабельний на (B, ρ). Нехай для процесу X виконується умова 10.1, і нехай $r_1 = \{r_1(u) : u \geqslant 1\}$ - така неперервна функція, що $r_1(u) > 0$ при $u > 1$, а функція $s(t) = r_1(\exp\{t\})$, $t > 0$ - опукла. Тоді при виконанні умови*

$$\int\limits_0^\beta r_1(N_B(\sigma^{(-1)}(u)))du < \infty,$$

процес $X(t)$ є обмеженим з ймовірністю одиниця, та для всіх $p \in (0, 1)$ і $x > 0$ справджуються нерівності:

$$P\{\sup_{t\in(0,T)} X(t) > x\} \leqslant Z_{r_1}(p,\beta,x),$$
$$P\{\inf_{t\in(0,T)} X(t) < -x\} \leqslant Z_{r_1}(p,\beta,x),$$
$$P\{\sup_{t\in(0,T)} |X(t)| > x\} \leqslant 2Z_{r_1}(p,\beta,x),$$
$$Z_{r_1}(p,\beta,x) = \inf_{\lambda>0} \exp\left\{\theta_\varphi(\lambda,p) + p\varphi(\frac{\lambda\beta}{1-p}) - \lambda x\right\} \times$$
$$\times r_1^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p}\int\limits_0^{\beta p} r_1(N_B(\sigma^{(-1)}(u)))du\right),$$
де $\theta_\varphi(\lambda,p) = \sup_{u\in B}\left((1-p)\varphi(\frac{\gamma(u)\lambda}{1-p})\right)$, $\gamma(u) = \tau_\varphi(X(u))$.

Теорема 10.2. *Нехай випадковий процес* $X = \{X(t), t\in B\}$ *належить* $Sub_\varphi(\Omega)$, (B,ρ) *- сепарабельний компакт та* X *сепарабельний на* (B,ρ). *Нехай* $\varphi(t) = \frac{t^\zeta}{\zeta}$, $\zeta \geqslant 2$, $t > 1$, *та для процесу* X *виконуюься умови попередньої теореми. Тоді процес* $X(t)$ *є обмеженим з ймовірністю одиниця, та для всіх* $p\in(0,1)$ *справджуються нерівності:*

$$P\{\sup_{t\in(0,T)} X(t) > x\} \leqslant Z_{r_1}(p,\beta,x),$$
$$P\{\inf_{t\in(0,T)} X(t) < -x\} \leqslant Z_{r_1}(p,\beta,x),$$
$$P\{\sup_{t\in(0,T)} |X(t)| > x\} \leqslant 2Z_{r_1}(p,\beta,x),$$

коли

$$Z_{r_1}(p,\beta,x) = \exp\left\{\frac{(1-\zeta)(x(1-p))^{\frac{\zeta}{\zeta-1}}}{\zeta(\gamma^\zeta(1-p)+p\beta^\zeta)^{\frac{1}{\zeta-1}}}\right\}\times$$
$$\times r_1^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p}\int\limits_0^{\beta p} r_1(N_B(\sigma^{(-1)}(u)))du\right),$$
$$x > \frac{\gamma^\zeta(1-p)+p\beta^\zeta}{(1-p)v^{\zeta-1}},$$
де $v = \min\{\beta,\gamma\}$, $\gamma^\zeta = \sup_{u\in B}\tau_\varphi^\zeta(X(u))$.

Доведення. Нехай

$$(1-p) \leqslant \gamma\lambda \text{ та } (1-p) \leqslant \beta\lambda. \tag{10.2}$$

Розглянемо степінь експоненти у виразі для $Z_{r_1}(p, x, \beta)$ з попередньої теореми. Підставимо значення для $\varphi(t)$ та $\theta_\varphi(\lambda, p)$:

$$\sup_{u\in(0,T)}\left((1-p)\varphi\left(\frac{\gamma(u)\lambda}{1-p}\right)\right) + p\varphi\left(\frac{\lambda\beta}{1-p}\right) - \lambda x = \tag{10.3}$$

$\diamondsuit$

$$= \sup_{u\in B}\left(\frac{\gamma^\zeta(u)\lambda^\zeta}{\zeta(1-p)^{\zeta-1}}\right) + p\frac{\lambda^\zeta\beta^\zeta}{\zeta(1-p)^\zeta} - \lambda x =$$

$$= \frac{\lambda^\zeta}{\zeta}\left(\frac{\sup_{u\in B}\gamma^\zeta(u)(1-p) + p\beta^\zeta}{(1-p)^\zeta}\right) - \lambda x.$$

Позначимо $\gamma^\zeta := \sup_{u\in B}\gamma^\zeta(u) = \sup_{u\in B}\tau_\varphi^\zeta(X(u))$. Тоді мінімум виразу (10.3) досягається у точці

$$\lambda = \left(\frac{x(1-p)^\zeta}{\gamma^\zeta(1-p) + p\beta^\zeta}\right)^{\frac{1}{\zeta-1}}.$$

Підставивши дане значення у (10.3), отримаємо, що мінімум даного виразу рівний

$$\frac{(1-\zeta)(x(1-p))^{\frac{\zeta}{\zeta-1}}}{\zeta(\gamma^\zeta(1-p) + p\beta^\zeta)^{\frac{1}{\zeta-1}}}.$$

При цьому для

$$\lambda = \left(\frac{x(1-p)^\zeta}{\gamma^\zeta(1-p) + p\beta^\zeta}\right)^{\frac{1}{\zeta-1}}$$

нерівності (10.2) виконуються, коли вираз (10.3) досягає мінімума, тобто коли

$$x > \frac{\gamma^\zeta(1-p) + p\beta^\zeta}{(1-p)v^{\zeta-1}},$$

де $v = \min\{\beta, \gamma\}$.

Означення 10.1. *Модель $X_N(t)$ наближає процес $X(t)$ із заданими надійністю $1-\nu$ та точністю δ у просторі $C(B)$, якщо*

$$P\{\sup_{t\in(B)}|\Delta_N(t)| > \delta\} \leqslant \nu,$$

де

$$\Delta_N(t) = X(t) - X_N(t).$$

Нехай існує така неперервно монотонна зростаюча функція $\sigma_N = \{\sigma_N(h), h > 0\}$, що $\sigma_N(h) \to 0$, $h \to 0$, та має місце нерівність:

$$\sup_{\rho(t,s)\leqslant h} \tau_\varphi(X_N(t) - X_N(s)) \leqslant \sigma_N(h). \tag{10.4}$$

Наслідок 10.1. *Нехай випадковий процес $X = \{X(t), t \in B\}$ належить $Sub_\varphi(\Omega)$, (B,ρ) - сепарабельний компакт та X сепарабельний на (B,ρ). Нехай $\varphi(t) = \frac{t^\zeta}{\zeta}$, $\zeta \geqslant 2$, $t > 1$, та для процесу X виконуюься умови теореми 10.1. Модель $X_N(t)$ наближає процес $X(t)$ із заданими надійністю $1-\nu$ та точністю δ у просторі $C(B)$, коли*

$$\nu \leqslant 2\exp\left\{-\frac{(\zeta-1)(\delta(1-p))^{\frac{\zeta}{\zeta-1}}}{\zeta(\gamma_N^\zeta(1-p)+p\beta^\zeta)^{\frac{1}{\zeta-1}}}\right\} r_1^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p}\int\limits_0^{\beta p} r_1(N_B(\sigma_N^{(-1)}(u)))du\right),$$

$$\delta > \frac{\gamma_N^\zeta(1-p)+p\beta^\zeta}{(1-p)v^{\zeta-1}},$$

де $v = \min\{\beta, \gamma_N\}$, $\gamma_N^\zeta = \sup_{u\in[0,T]} \tau_\varphi^\zeta(\Delta_N(u))$.

Теорема 10.3. *Нехай випадковий процес $X = \{X(t), t \in B\}$ належить $Sub_\varphi(\Omega)$, (B,ρ) - сепарабельний компакт та X сепарабельний на (B,ρ). Нехай $\varphi(t) = \frac{t^\zeta}{\zeta}$, $1 < \zeta \leqslant 2$, та для процесу X виконуюься умови теореми 10.1. Модель $X_N(t)$ наближає процес $X(t)$ із заданими надійністю $1-\nu$ та точністю δ у просторі $C(B)$, коли*

$$\nu \leqslant 2\exp\left\{-\frac{(\zeta-1)(\delta(1-p))^{\frac{\zeta}{\zeta-1}}}{\zeta(\gamma_N^\zeta(1-p)+p\beta^\zeta)^{\frac{1}{\zeta-1}}}\right\} r_1^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p}\int\limits_0^{\beta p} r_1(N_B(\sigma_N^{(-1)}(u)))du\right),$$

де $\gamma_N^\zeta = \sup_{u\in[0,T]} \tau_\varphi^\zeta(\Delta_N(u))$.

Доведення. Дана теорема випливає з теореми 10.2, проте в даному випадку не потрібне обмеження на δ. $\diamondsuit$

Теорема 10.4. *Нехай випадковий процес $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$ належить простору $Sub_\varphi(\Omega)$, $\varphi(t) = \frac{t^\zeta}{\zeta}$, $\zeta \geqslant 2$, $t > 1$. Нехай X сепарабельний, і для нього виконується умова (10.1), де $\sigma(h) = Ch^{æ}$. Тоді процес $X(t)$ є обмеженим з ймовірністю одиниця, та справджуються нерівності:*

$$P\{\sup_{t\in(0,T)} X(t) > x\} \leqslant Z_{r_1}(x),$$
$$P\{\inf_{t\in(0,T)} X(t) < -x\} \leqslant Z_{r_1}(x),$$
$$P\{\sup_{t\in(0,T)} |X(t)| > x\} \leqslant 2Z_{r_1}(x),$$

де

$$Z_{r_1}(x) = \exp\left\{-(x-\gamma)^{\frac{\zeta}{\zeta-1}} \frac{(\zeta-1)x^{\frac{1}{\zeta-1}}}{\zeta(\gamma^\zeta(x-\gamma)+\beta^\zeta\gamma)^{\frac{1}{\zeta-1}}}\right\} 2\,(ex)^{1/æ},$$

причому

$$x > \frac{\gamma(v^{\zeta-1}+1)+\sqrt{\gamma^2(v^{\zeta-1}+1)^2+4v^{\zeta-1}(C^\zeta(T/2)^{æ\zeta}-\gamma^2)}}{2v^{\zeta-1}},$$

коли $v = \min\{C(T/2)^æ, \gamma\}$, $\gamma^\zeta = \sup_{u\in[0,T]} \tau_\varphi^\zeta(X(u))$.

Доведення. Теорема випливає з теореми 10.2. В якості r_1 виберемо функцію $r_1(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < æ$. За умов теореми, другу складову функції $Z_{r_1}(p, \beta, x)$ теореми 10.2 можна перетворити наступним чином:

$$r_1^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p}\int_0^{\beta p} r_1(N_B(\sigma^{(-1)}(u)))du\right) \leqslant$$
$$\leqslant r_1^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p}\int_0^{\beta p} r_1\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)du\right),$$

адже метрична масивність $N_B(u) \leqslant \frac{T}{2u}+1$ на відрізку $[0,T]$. Оскільки $u \leqslant \beta p \leqslant \beta = \sigma(T/2)$, то $\sigma^{(-1)}(u) \leqslant T/2$ при таких u. Отже, $T/2\sigma^{(-1)} \geqslant 1$, тому

$$r_1^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p}\int_0^{\beta p} r_1\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)du\right) \leqslant \left(\frac{1}{\beta p}\int_0^{\beta p}\left(\frac{T}{\sigma^{(-1)}(u)}\right)^\alpha du\right)^{1/\alpha}.$$

Підставляючи в даний вираз $\sigma(u)$, отримаємо

$$\left(\frac{1}{\beta p}\int\limits_0^{\beta p}\left(\frac{T}{\sigma^{(-1)}(u)}\right)^{\alpha}du\right)^{1/\alpha} = \left(\frac{1}{\beta p}\int\limits_0^{\beta p}\frac{T^{\alpha}C^{\alpha/æ}}{u^{\alpha/æ}}du\right)^{1/\alpha} =$$

$$= \left(\frac{1}{\beta p}\frac{T^{\alpha}C^{\alpha/æ}(\beta p)^{1-\frac{\alpha}{æ}}}{1-\alpha/æ}\right)^{1/\alpha} \leqslant \frac{TC^{1/æ}}{(\beta p)^{1/æ}(1-\frac{\alpha}{æ})^{1/\alpha}}.$$

Спрямувавши $\alpha \to 0$, отримаємо, що

$$\frac{TC^{1/æ}}{(\beta p)^{1/æ}(1-\frac{\alpha}{æ})^{1/\alpha}} \to \frac{TC^{1/æ}}{(\beta p)^{1/æ}}e^{1/æ},$$

а, так як $\beta = \sigma(\inf_{t\in(0,T)}\sup_{t\in(0,T)}\rho(t,s)) = C(T/2)^{æ}$, отримаємо

$$\frac{TC^{1/æ}}{(\beta p)^{1/æ}}e^{1/æ} = 2\left(\frac{e}{p}\right)^{1/æ}.$$

Отже,

$$Z_{r_1}(p,\beta,x) = \exp\left\{\frac{(1-\zeta)(x(1-p))^{\frac{\zeta}{\zeta-1}}}{\zeta(\gamma^{\zeta}(1-p)+p\beta^{\zeta})^{\frac{1}{\zeta-1}}}\right\}2\left(\frac{e}{p}\right)^{1/æ}.$$

Твердження теореми випливає з останньої рівності, якщо покласти $p = \gamma/x$. При цьому умова для x попередньої теореми перетворюється в умову вигляду

$$x > \frac{\gamma(1-1/x)+(1/x)C^{\zeta}(T/2)^{æ\zeta}}{(1-1/x)v^{\zeta-1}},$$

звідки

$$x > \frac{\gamma(v^{\zeta-1}+1)+\sqrt{\gamma^2(v^{\zeta-1}+1)^2+4v^{\zeta-1}(C^{\zeta}(T/2)^{æ\zeta}-\gamma^2)}}{2v^{\zeta-1}},$$

де $v = \min\{\beta,\gamma\}$.

Наслідок 10.2. *Нехай випадковий процес $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$ належить простору $Sub_{\varphi}(\Omega)$, $\varphi(t) = \frac{t^{\zeta}}{\zeta}$, $\zeta \geqslant 2$, $t > 1$. Нехай X сепарабельний, і для нього виконується умова (10.1), де $\sigma(h) = Ch^{æ}$. Модель $X_N(t)$ наближає процес $X(t)$ із заданими надійністю $1-\nu$ та точністю δ у просторі $C(0,T)$, коли*

$$\nu \leqslant 2\exp\left\{-\frac{(\zeta-1)\delta^{\frac{1}{\zeta-1}}(\delta-\gamma_N)^{\frac{\zeta}{\zeta-1}}}{\zeta(\gamma_N^{\zeta}(\delta-\gamma_N)+\beta^{\zeta}\gamma_N)^{\frac{1}{\zeta-1}}}\right\} 2\,(e\delta)^{1/æ},$$

причому

$$\delta > \frac{\gamma_N(v^{\zeta-1}+1)+\sqrt{\gamma_N^2(v^{\zeta-1}+1)^2+4v^{\zeta-1}(C^{\zeta}(T/2)^{æ\zeta}-\gamma_N^2)}}{2v^{\zeta-1}},$$

де $v=\min\{\beta,\gamma_N\}$, $\gamma_N^{\zeta}=\sup_{u\in[0,T]}\tau_{\varphi}^{\zeta}(\Delta_N(u))$.

Теорема 10.5. *Нехай випадковий процес* $X=\{X(t),t\in[0,T]\}$ *належить простору* $Sub_{\varphi}(\Omega)$, $\varphi(t)=\frac{t^{\zeta}}{\zeta}$, $1<\zeta\leqslant 2$. *Нехай* X *сепарабельний, і для нього виконується умова (10.1), де* $\sigma(h)=Ch^{æ}$. *Модель* $X_N(t)$ *наближає процес* $X(t)$ *із заданими надійністю* $1-\nu$ *та точністю* δ *у просторі* $C(0,T)$, *коли*

$$\nu \leqslant 2\exp\left\{-\frac{(\zeta-1)\delta^{\frac{1}{\zeta-1}}(\delta-\gamma_N)^{\frac{\zeta}{\zeta-1}}}{\zeta(\gamma_N^{\zeta}(\delta-\gamma_N)+\beta^{\zeta}\gamma_N)^{\frac{1}{\zeta-1}}}\right\} 2\,(e\delta)^{1/æ},$$

де $\gamma_N^{\zeta}=\sup_{u\in[0,T]}\tau_{\varphi}^{\zeta}(\Delta_N(u))$.

Доведення. Дана теорема випливає з теореми 10.4, проте в даному випадку не потрібне обмеження на δ. ♢

10.2. Побудова у $C(T)$ моделей випадкових процесів з $Sub_{\varphi}(\Omega)$ що допускають розклади в ряди з незалежними членами

Нехай випадковий процес $X=\{X(t),t\in B\}$ допускає зображення

$$X(t)=\sum_{k=1}^{N}a_k(t)\xi_k, \qquad (10.5)$$

де $\xi_k\in Sub_{\varphi}(\Omega)$. Нехай $\delta_k(t)=|a_k(t)-\hat{a}_k(t)|$, $\hat{a}_k(t)$ - наближення $a_k(t)$, σ_N задані в означ(10.4). Моделлю такого процесу будемо вважати X_N, задане в означенні 9.2. В такому випадку можна довести наступні теореми.

Теорема 10.6. *Нехай випадковий процес* $X=\{X(t),t\in B\}$ *належить* $Sub_{\varphi}(\Omega)$, (B,ρ) *- сепарабельний компакт та* X *сепарабельний на* (B,ρ). *Нехай* $\varphi(t)=\frac{t^{\zeta}}{\zeta}$, $\zeta\geqslant 2$, $t>1$, *та для процесу* X *виконуюься умови теореми 10.1. Модель* $X_N(t)$ *наближає процес* $X(t)$ *із заданими надійністю* $1-\nu$ *та точністю* δ *у просторі* $C(B)$, *коли*

$$\nu \leqslant 2\exp\left\{-\frac{(\zeta-1)(\delta(1-p))^{\frac{\zeta}{\zeta-1}}}{\zeta(\gamma_N^{\zeta}(1-p)+p\beta^{\zeta})^{\frac{1}{\zeta-1}}}\right\} r_1^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p}\int\limits_0^{\beta p} r_1(N_B(\sigma_N^{(-1)}(u)))du\right),$$

$$\delta > \frac{\gamma_N^{\zeta}(1-p)+p\beta^{\zeta}}{(1-p)v^{\zeta-1}},$$

де $v = \min\{\beta, \gamma_N\}$, $\gamma_N^{\zeta} = \sup_{u\in B}\tau_{\varphi}^{\zeta}(\Delta_N(u))$,

$$\gamma_N^{\zeta} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N}\tau_{\varphi}^2(\xi_k)\sup_{u\in B}\delta_k^2(u) + \sum_{k=N+1}^{\infty}\tau_{\varphi}^2(\xi_k)\sup_{u\in B}a_k^2(u)\right)^{\zeta/2}.$$

Доведення.

$$\gamma_N^{\zeta} = \sup_{u\in B}\tau_{\varphi}^{\zeta}(\Delta_N(u)) = \sup_{u\in B}\tau_{\varphi}^{\zeta}\left(\sum_{k=1}^{N}\xi_k\delta_k(u) + \sum_{k=N+1}^{\infty}\xi_k a_k(u)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{N}\tau_{\varphi}^2(\xi_k)\sup_{u\in B}\delta_k^2(u) + \sum_{k=N+1}^{\infty}\tau_{\varphi}^2(\xi_k)\sup_{u\in B}a_k^2(u)\right)^{\zeta/2}.$$

Остання нерівність випливає з властивостей функції τ_{φ} та теореми 9.6.$\diamondsuit$

Теорема 10.7. *Нехай випадковий процес* $X = \{X(t), t\in B\}$ *належить* $Sub_{\varphi}(\Omega)$, (B,ρ) *- сепарабельний компакт та* X *сепарабельний на* (B,ρ). *Нехай* $\varphi(t) = \frac{t^{\zeta}}{\zeta}$, $1 < \zeta \leqslant 2$, *та для процесу* X *виконуюься умови теореми 10.1. Модель* $X_N(t)$ *наближає процес* $X(t)$ *із заданими надійністю* $1-\nu$ *та точністю* δ *у просторі* $C(B)$, *коли*

$$\nu \leqslant 2\exp\left\{-\frac{(\zeta-1)(\delta(1-p))^{\frac{\zeta}{\zeta-1}}}{\zeta(\gamma_N^{\zeta}(1-p)+p\beta^{\zeta})^{\frac{1}{\zeta-1}}}\right\} r_1^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p}\int\limits_0^{\beta p} r_1(N_B(\sigma_N^{(-1)}(u)))du\right),$$

де $v = \min\{\beta, \gamma_N\}$,

$$\gamma_N^{\zeta} \leqslant \sum_{k=1}^{N}\tau_{\varphi}^{\zeta}(\xi_k)\sup_{u\in B}\delta_k^{\zeta}(u) + \sum_{k=N+1}^{\infty}\tau_{\varphi}^{\zeta}(\xi_k)\sup_{u\in B}a_k^{\zeta}(u).$$

Доведення.

$$\gamma_N^{\zeta} = \sup_{u\in B} \tau_{\varphi}^{\zeta}(\Delta_N(u)) = \sup_{u\in B} \tau_{\varphi}^{\zeta}\left(\sum_{k=1}^{N} \xi_k \delta_k(u) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \xi_k a_k(u)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{N} \tau_{\varphi}^{\zeta}(\xi_k) \sup_{u\in B} \delta_k^{\zeta}(u) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \tau_{\varphi}^{\zeta}(\xi_k) \sup_{u\in B} a_k^{\zeta}(u).$$

Остання нерівність випливає з властивостей функції τ_{φ} та теореми 9.6.$\diamondsuit$

Нехай процес $X =$ заданий на $[0, T]$, і для нього виконується наступна умова:

(C1) $\sigma(h) = Ch^{æ}$, $\delta_k(t) - \delta_k(s) \leqslant \hat{C}_k h^{æ}$, $a_k(t) - a_k(s) \leqslant \tilde{C}_k h^{æ}$.

Тоді можна довести наступні твердження.

Теорема 10.8. *Нехай випадковий процес $X = \{X(t), t \in [0, T]\}$ належить простору $Sub_{\varphi}(\Omega)$, $\varphi(t) = \frac{t^{\zeta}}{\zeta}$, $\zeta \geqslant 2$, $t > 1$. Нехай X сепарабельний, і для нього виконується умовиа (10.1) та* **(C1)**. *Модель $X_N(t)$ наближає процес $X(t)$ із заданими надійністю $1 - \nu$ та точністю δ у просторі $C(0, T)$, коли*

$$\nu \leqslant 2 \exp\left\{-\frac{(\zeta - 1)\delta^{\frac{1}{\zeta-1}}(\delta - \gamma_N)^{\frac{\zeta}{\zeta-1}}}{\zeta(\gamma_N^{\zeta}(\delta - \gamma_N) + \beta^{\zeta}\gamma_N)^{\frac{1}{\zeta-1}}}\right\} 2\left(e\delta\right)^{1/æ},$$

причому

$$\delta > \frac{\gamma_N(v^{\zeta-1} + 1) + \sqrt{\gamma_N^2(v^{\zeta-1} + 1)^2 + 4v^{\zeta-1}(C^{\zeta}(T/2)^{æ\zeta} - \gamma_N^2)}}{2v^{\zeta-1}},$$

де $v = \min\{\beta, \gamma_N\}$,

$$\gamma_N^{\zeta} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} \tau_{\varphi}^2(\xi_k) \sup_{u\in[0,T]} \delta_k^2(u) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \tau_{\varphi}^2(\xi_k) \sup_{u\in[0,T]} a_k^2(u)\right)^{\zeta/2}.$$

Доведення. Дане твердження випливає з теорем 10.4 та 10.6. $\diamondsuit$

Теорема 10.9. *Нехай випадковий процес $X = \{X(t), t \in [0, T]\}$ належить простору $Sub_{\varphi}(\Omega)$, $\varphi(t) = \frac{t^{\zeta}}{\zeta}$, $1 < \zeta \leqslant 2$. Нехай X сепарабельний, і для нього виконується умовиа (10.1) та* **(C1)**. *Модель $X_N(t)$ наближає процес $X(t)$ із заданими надійністю $1 - \nu$ та точністю δ у просторі $C(0, T)$, коли*

$$\nu \leqslant 2\exp\left\{-\frac{(\zeta-1)\delta^{\frac{1}{\zeta-1}}(\delta-\gamma_N)^{\frac{\zeta}{\zeta-1}}}{\zeta(\gamma^\zeta(\delta-\gamma)+\beta^\zeta\gamma)^{\frac{1}{\zeta-1}}}\right\} 2\,(e\delta)^{1/æ},$$

де

$$\gamma^\zeta \leqslant \sum_{k=1}^{N} \tau_\varphi^\zeta(\xi_k) \sup_{u\in[0,T]} \delta_k^\zeta(u) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \tau_\varphi^\zeta(\xi_k) \sup_{u\in[0,T]} a_k^\zeta(u).$$

Доведення. Дане твердження випливає з попередньої теореми та теореми 10.7. ♢

10.2.1. Моделювання випадкових процесів за допомогою розкладу Карунена-Лоева у $C(B)$

Нехай $X = \{X(t), t \in B\}$ - центрований випадковий процес другого порядку з кореляційною функцією $K(t,s) = EX(t)\overline{X(s)}$, $f(t,\lambda) \in L_2(\Lambda,\mu)$, і нехай $K(t,s)$ допускає зображення $K(t,s) = \int_\Lambda f(t,\lambda)f(s,\lambda)$ $d\mu(\lambda)$. Тоді процес X допускає представлення у вигляді розкладу Карунена-Лоева, заданого у теоремі 9.9. В якості моделі такого процесу будемо використовувати X_N, задане в означенні 9.3.

Сформулюємо теореми, що дозволять будувати моделі випадкових процесів з розкладом Карунена-Лоева у $C(B)$.

Теорема 10.10. *Нехай випадковий процес $X = \{X(t), t \in B\}$ належить $Sub_\varphi(\Omega)$, (B,ρ) - сепарабельний компакт та X сепарабельний на (B,ρ), і X допускає представлення у вигляді розкладу Карунена-Лоева. Нехай $\varphi(t) = \frac{t^\zeta}{\zeta}$, $\zeta \geqslant 2$, $t > 1$, та для процесу X виконуюься умови теореми 10.1. Модель $X_N(t)$ наближає процес $X(t)$ із заданими надійністю $1-\nu$ та точністю δ у просторі $C(B)$, коли*

$$\nu \leqslant 2\exp\left\{-\frac{(\zeta-1)(\delta(1-p))^{\frac{\zeta}{\zeta-1}}}{\zeta(\gamma_N^\zeta(1-p)+p\beta^\zeta)^{\frac{1}{\zeta-1}}}\right\} r_1^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p}\int_0^{\beta p} r_1(N_B(\sigma_N^{(-1)}(u)))du\right),$$

$$\delta > \frac{\gamma_N^\zeta(1-p)+p\beta^\zeta}{(1-p)v^{\zeta-1}},$$

де $v = \min\{\beta, \gamma_N\}$,

$$\gamma_N^\zeta \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} \tau_\varphi^2(\xi_k)\left(\frac{\sup_{u\in B}\delta_k^2(u)}{\hat\lambda_k-\eta_k} + \sup_{u\in B}\hat a_k^2(u)\frac{(\sqrt{\hat\lambda_k}-\sqrt{\hat\lambda_k-\eta_k})^2}{\hat\lambda_k(\hat\lambda_k-\eta_k)}\right)+\right.$$

$$+\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{\tau_{\varphi}^{2}(\xi_k)\sup_{u\in B}a_k^2(u)}{\lambda_k}\Bigg)^{\zeta/2},$$

де $\delta_k(t)$ - похибка знаходження k-ї власної функції, $\hat{\lambda}_k$ - наближене значення k-го власного числа, η_k - похибка наближення k-го власного числа.

Доведення. Твердження теореми випливає з теорем 9.10 та 10.6. $\diamondsuit$

У випадку, коли $\forall k:\tau_{\varphi}(\xi_k)=\tau$, отримаємо наступне твердження.

Теорема 10.11. *Нехай для випадкового процесу $X=\{X(t),t\in B\}$ з $Sub_{\varphi}(\Omega)$, $\varphi(t)=\frac{t^{\zeta}}{\zeta}$, $\zeta\geqslant 2$, $t>1$ виконуєюься умови теореми 10.1. Модель $X_N(t)$ наближає процес $X(t)$ із заданими надійністю $1-\nu$ та точністю δ у просторі $C(B)$, коли*

$$\nu\leqslant 2\exp\left\{-\frac{(\zeta-1)(\delta(1-p))^{\frac{\zeta}{\zeta-1}}}{\zeta(\gamma_N^{\zeta}(1-p)+p\beta^{\zeta})^{\frac{1}{\zeta-1}}}\right\}r_1^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p}\int_0^{\beta p}r_1(N_B(\sigma_N^{(-1)}(u)))du\right),$$

$$\delta>\frac{\gamma_N^{\zeta}(1-p)+p\beta^{\zeta}}{(1-p)v^{\zeta-1}},$$

де $v=\min\{\beta,\gamma_N\}$,

$$\gamma_N^{\zeta}\leqslant\Bigg(\sup_{u\in B}K(u,u)+\sum_{k=1}^{N}\Bigg(\frac{\sup_{u\in B}\delta_k^2(u)}{\hat{\lambda}_k-\eta_k}+$$

$$+\sup_{u\in B}\hat{a}_k^2(u)\frac{(\sqrt{\hat{\lambda}_k}-\sqrt{\hat{\lambda}_k-\eta_k})^2}{\hat{\lambda}_k(\hat{\lambda}_k-\eta_k)}-\frac{\sup_{u\in B}(\hat{a}_k(u)-\delta_k(u))^2}{\hat{\lambda}_k+\eta_k}\Bigg)\Bigg)^{\zeta/2},$$

$\delta_k(t)$ - похибка знаходження k-ї власної функції, λ_k - наближене значення k-го власного числа, η_k - похибка наближення k-го власного числа.

Теорема 10.12. *Нехай для випадкового процесу $X=\{X(t),t\in B\}$ з $Sub_{\varphi}(\Omega)$, $\varphi(t)=\frac{t^{\zeta}}{\zeta}$, $1<\zeta\leqslant 2$ виконуєюься умови теореми 10.1. Модель $X_N(t)$ наближає процес $X(t)$ із заданими надійністю $1-\nu$ та точністю δ у просторі $C(B)$, коли*

$$\nu \leqslant 2\exp\left\{-\frac{(\zeta-1)(\delta(1-p))^{\frac{\zeta}{\zeta-1}}}{\zeta(\gamma_N^{\zeta}(1-p)+p\beta^{\zeta})^{\frac{1}{\zeta-1}}}\right\} r_1^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p}\int\limits_0^{\beta p} r_1(N_B(\sigma_N^{(-1)}(u)))du\right),$$

де

$$\gamma_N^{\zeta} \leqslant \sum_{k=1}^{N}\tau_{\varphi}^{\gamma}(\xi_k)\left(\frac{\sup_{u\in B}\delta_k^{\gamma}(u)}{(\lambda_k-\eta_k)^{\gamma}}+\sup_{u\in B}\hat{a}_k^{\gamma}(u)\frac{(\sqrt{\hat{\lambda}_k}-\sqrt{\hat{\lambda}_k-\eta_k})^{\gamma}}{(\hat{\lambda}_k(\hat{\lambda}_k-\eta_k))^{\gamma}}\right)+$$

$$+\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{\tau_{\varphi}^{\gamma}(\xi_k)\sup_{u\in B}a_k^{2\gamma}(u)}{\lambda_k^{\gamma}}$$

$\delta_k(t)$ - похибка знаходження k-ї власної функції, λ_k - наближене значення k-го власного числа, η_k - похибка наближення k-го власного числа.

Доведення. Твердження випливає з теорем 9.11 та 10.7. $\diamondsuit$

Покладемо тепер $B=[0,T]$. Тоді можна довести наступні теореми.

Теорема 10.13. *Нехай випадковий процес $X=\{X(t),t\in[0,T]\}$ належить простору $Sub_{\varphi}(\Omega)$, $\varphi(t)=\frac{t^{\zeta}}{\zeta}$, $\zeta\geqslant 2$, $t>1$. Нехай X допускає представлення у вигляді розкладу Карунена-Лоева (9.4), і для нього виконуються умови (10.1) та* **(C1)**. *Модель $X_N(t)$ наближає процес $X(t)$ із заданими надійністю $1-\nu$ та точністю δ у просторі $C(0,T)$, коли*

$$\nu \leqslant 2\exp\left\{-\frac{(\zeta-1)\delta^{\frac{1}{\zeta-1}}(\delta-\gamma_N)^{\frac{\zeta}{\zeta-1}}}{\zeta(\gamma_N^{\zeta}(\delta-\gamma_N)+\beta^{\zeta}\gamma_N)^{\frac{1}{\zeta-1}}}\right\} 2\left(e\delta\right)^{1/æ},$$

причому

$$\delta > \frac{\gamma_N(v^{\zeta-1}+1)+\sqrt{\gamma_N^2(v^{\zeta-1}+1)^2+4v^{\zeta-1}(C^{\zeta}(T/2)^{æ\zeta}-\gamma_N^2)}}{2v^{\zeta-1}},$$

де $v=\min\{\beta,\gamma_N\}$,

$$\gamma_N^{\zeta} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N}\tau_{\varphi}^{2}(\xi_k)\left(\frac{\sup_{u\in[0,T]}\delta_k^2(u)}{\hat{\lambda}_k-\eta_k}+\sup_{u\in[0,T]}\hat{a}_k^2(u)\frac{(\sqrt{\hat{\lambda}_k}-\sqrt{\hat{\lambda}_k-\eta_k})^2}{\hat{\lambda}_k(\hat{\lambda}_k-\eta_k)}\right)+\right.$$

$$+ \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\tau_\varphi^2(\xi_k) \sup_{u\in[0,T]} a_k^2(u)}{\lambda_k} \Bigg)^{\zeta/2},$$

$$C = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} \tau_\varphi^2(\xi_k) \left(\frac{\hat{\lambda}_k \hat{C}_k + (\sqrt{\hat{\lambda}_k} - \sqrt{\hat{\lambda}_k - \eta_k}) \tilde{C}_k}{\hat{\lambda}_k (\hat{\lambda}_k - \eta_k)} \right)^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} \tau_\varphi^2(\xi_k) \frac{\tilde{C}_k^2}{\lambda_k^2}},$$

$\delta_k(t)$ - похибка знаходження k-ї власної функції, λ_k - наближене значення k-го власного числа, η_k - похибка наближення k-го власного числа.

Доведення. Розглянемо $\sigma(h)$ для даного випадку. Дійсно,

$$\sup_{|t-s|<h} \tau_\varphi(\Delta_N(t) - \Delta_N(s)) = \sup_{|t-s|<h} \tau_\varphi \left(\sum_{k=1}^{N} \xi_k \left(\frac{a_k(t) - a_k(s)}{\lambda_k} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\hat{a}_k(t) - \hat{a}_k(s)}{\hat{\lambda}_k} \right) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \xi_k \left(\frac{a_k(t) - a_k(s)}{\lambda_k} \right) \right) \leqslant$$

$$\leqslant h^{æ} \left(\sum_{k=1}^{N} \tau_\varphi^2(\xi_k) \frac{\hat{\lambda}_k \hat{C}_k + (\sqrt{\hat{\lambda}_k} - \sqrt{\hat{\lambda}_k - \eta_k}) \tilde{C}_k}{\hat{\lambda}_k (\hat{\lambda}_k - \eta_k)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=N+1}^{\infty} \tau_\varphi^2(\xi_k) \frac{\tilde{C}_k}{\lambda_k} \right)^{1/2} = C h^{æ} = \sigma(h).$$

Остання нерівність використовує доведення теореми 9.10. Тепер твердження теореми випливає з теорем 9.10 та 10.8. ♢

Теорема 10.14. *Нехай для випадкового процесу $X = \{X(t), t \in (0,T)\}$ з $Sub_\varphi(\Omega)$, $\varphi(t) = \frac{t^\zeta}{\zeta}$, $\zeta \geqslant 2$, $t > 1$ виконуеюься умови теореми 10.1, і цей процес може бути зображений у вигляді (9.4). Нехай для Δ_N цього процесу виконується умова* **(C1)**, *а також $\tau_\varphi(\xi_k) = \tau$. Модель $X_N(t)$ наближає процес $X(t)$ із заданими надійністю $1 - \nu$ та точністю δ у просторі $C(0,T)$, коли*

$$\nu \leqslant 2 \exp\left\{ - \frac{(\zeta - 1) \delta^{\frac{1}{\zeta-1}} (\delta - \gamma_N)^{\frac{\zeta}{\zeta-1}}}{\zeta (\gamma_N^\zeta (\delta - \gamma_N) + \beta^\zeta \gamma_N)^{\frac{1}{\zeta-1}}} \right\} 2 \, (e\delta)^{1/æ},$$

причому

$$\delta > \frac{\gamma_N(v^{\zeta-1}+1)+\sqrt{\gamma_N^2(v^{\zeta-1}+1)^2+4v^{\zeta-1}(C^{\zeta}(T/2)^{æ\zeta}-\gamma_N^2)}}{2v^{\zeta-1}},$$

де $v = \min\{\beta, \gamma_N\}$,

$$\gamma_N^{\zeta} \leqslant \tau^{\zeta}\left(\sup_{u\in[0,T]} K(u,u) + \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\sup_{u\in[0,T]}\delta_k^2(u)}{\hat{\lambda}_k-\eta_k}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sup_{u\in[0,T]}\hat{a}_k^2(u)\frac{(\sqrt{\hat{\lambda}_k}-\sqrt{\hat{\lambda}_k-\eta_k})^2}{\hat{\lambda}_k(\hat{\lambda}_k-\eta_k)}-\frac{\sup_{u\in[0,T]}(\hat{a}_k(u)-\delta_k(u))^2}{\hat{\lambda}_k+\eta_k}\right)\right)^{\zeta/2},$$

$$C = \tau\left(\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\hat{\lambda}_k\hat{C}_k+(\sqrt{\hat{\lambda}_k}-\sqrt{\hat{\lambda}_k-\eta_k})\tilde{C}_k}{\hat{\lambda}_k(\hat{\lambda}_k-\eta_k)}\right)^2 + C_B - \sum_{k=1}^{N}\frac{\tilde{C}_k^{\,2}}{\hat{\lambda}_k+\eta_k}\right)^{1/2},$$

$$\sup_{|t-s|<h}|K(t,u)-K(s,u)| \leqslant h^{æ}\tilde{K}(u),$$

$$\sup_{|t-s|<h}|\tilde{K}(t)-\tilde{K}(s)| \leqslant h^{æ}C_K,$$

$K(t,s)$ - кореляційна функція процесу, $\delta_k(t)$ - похибка знаходження k-ї власної функції, λ_k - наближене значення k-го власного числа, η_k - похибка наближення k-го власного числа.

Доведення. Розглянемо $\sigma(h)$ для даного випадку. Дійсно,

$$\sup_{|t-s|<h}\tau_{\varphi}(\Delta_N(t)-\Delta_N(s)) = \sup_{|t-s|<h}\tau_{\varphi}\left(\sum_{k=1}^{N}\xi_k\left(\frac{a_k(t)-a_k(s)}{\lambda_k}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\hat{a}_k(t)-\hat{a}_k(s)}{\hat{\lambda}_k}\right)+\sum_{k=N+1}^{\infty}\xi_k\left(\frac{a_k(t)-a_k(s)}{\lambda_k}\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant h^{æ}\tau\left(\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\hat{\lambda}_k\hat{C}_k+(\sqrt{\hat{\lambda}_k}-\sqrt{\hat{\lambda}_k-\eta_k})\tilde{C}_k}{\hat{\lambda}_k(\hat{\lambda}_k-\eta_k)}\right)^2+\right.$$

$$+\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{(a_k(t)-a_k(s))^2}{\lambda_k}\Bigg)^{1/2}=h^{æ}\tau\left(\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\hat{C}_k}{(\hat{\lambda}_k-\eta_k)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(\sqrt{\hat{\lambda}_k}-\sqrt{\hat{\lambda}_k-\eta_k})\tilde{C}_k}{\hat{\lambda}_k(\hat{\lambda}_k-\eta_k)}\right)^2+\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}(a_k^2(t)-2a_k(t)a_k(s)+a_k^2(s))\right)^{1/2}=$$

$$=h^{æ}\tau\left(\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\hat{\lambda}_k\hat{C}_k+(\sqrt{\hat{\lambda}_k}-\sqrt{\hat{\lambda}_k-\eta_k})\tilde{C}_k}{\hat{\lambda}_k(\hat{\lambda}_k-\eta_k)}\right)^2+\right.$$

$$\left.+K(t,t)+K(s,s)-2K(t,s)-\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\lambda_k}(a_k^2(t)-2a_k(t)a_k(s)+a_k^2(s))\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant h^{æ}\tau\left(\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\hat{\lambda}_k\hat{C}_k+(\sqrt{\hat{\lambda}_k}-\sqrt{\hat{\lambda}_k-\eta_k})\tilde{C}_k}{\hat{\lambda}_k(\hat{\lambda}_k-\eta_k)}\right)^2+C_K-\sum_{k=1}^{N}\frac{\tilde{C}_k^{\,2}}{\hat{\lambda}_k+\eta_k}\right)^{1/2}=$$

$$=Ch^{æ}=\sigma(h).$$

Тепер твердження теореми випливає з теорем 9.10 та 10.8. $\diamondsuit$

Наступна теорема є модифікацією теореми із [88].

Теорема 10.15. *Нехай $\varphi_k(t)$ - власні фукнції однорідного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду*

$$\phi(t)=\lambda\int_0^T K(t,s)\phi(s)ds,$$

λ_k - занумеровані в порядку зростання власні числа даного рівняння. Тоді має місце нерівність

$$\sup_{|t-s|<h}|\phi_k(t)-\phi_k(s)|\leqslant\lambda_k\omega_K(h),$$

$$\omega_K(h) = \sup_{|t-s|<h} \left(\int_0^T (K(t,u) - K(s,u))^2 du \right)^{1/2}$$

Доведення. Нехай $|t-s| < h$. Тоді мають місце співвідношення

$$|\phi_k(s) - \phi_k(t)| = \left| \int_0^T \lambda_k \phi_k(u)(K(t,u) - K(s,u))du \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^T \lambda_k^2 \phi_k^2(u) du \right)^{1/2} \times \left(\int_0^T (K(t,u) - K(s,u))^2 du \right)^{1/2} \leqslant \lambda_k \omega_K(h).$$

Спираючись на дане твердження, можна дещо змінити умови теореми 10.14.

Теорема 10.16. *Нехай для випадкового процесу* $X = \{X(t), t \in (0,T)\}$ *з* $Sub_\varphi(\Omega)$, $\varphi(t) = \frac{t^\zeta}{\zeta}$, $\zeta \geqslant 2$, $t > 1$ *виконуеюься умови теореми 10.1, і цей процес може бути зображений у вигляді (9.4). Нехай для* Δ_N *цього процесу виконується умова* **(C1)**, *а також* $\tau_\varphi(\xi_k) = \tau$. *Модель* $X_N(t)$ *наближає процес* $X(t)$ *із заданими надійністю* $1 - \nu$ *та точністю* δ *у просторі* $C(0,T)$, *коли*

$$\nu \leqslant 2 \exp\left\{ -\frac{(\zeta-1)\delta^{\frac{1}{\zeta-1}}(\delta-\gamma_N)^{\frac{\zeta}{\zeta-1}}}{\zeta(\gamma_N^\zeta(\delta-\gamma_N) + \beta^\zeta \gamma_N)^{\frac{1}{\zeta-1}}} \right\} 2\,(e\delta)^{1/æ},$$

причому

$$\delta > \frac{\gamma_N(v^{\zeta-1}+1) + \sqrt{\gamma_N^2(v^{\zeta-1}+1)^2 + 4v^{\zeta-1}(C^\zeta(T/2)^{æ\zeta} - \gamma_N^2)}}{2v^{\zeta-1}},$$

де $v = \min\{\beta, \gamma_N\}$,

$$\gamma_N^\zeta \leqslant \tau^\zeta \left(\sup_{u\in[0,T]} K(u,u) + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\sup_{u\in[0,T]} \delta_k^2(u)}{\hat\lambda_k - \eta_k} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sup_{u\in[0,T]} \hat a_k^2(u) \frac{(\sqrt{\hat\lambda_k} - \sqrt{\hat\lambda_k - \eta_k})^2}{\hat\lambda_k(\hat\lambda_k - \eta_k)} - \frac{\sup_{u\in[0,T]}(\hat a_k(u) - \delta_k(u))^2}{\hat\lambda_k + \eta_k} \right) \right)^{\zeta/2},$$

$$C=\tau\left(\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\hat{C}_k}{\hat{\lambda}_k-\eta_k}+\frac{(\sqrt{\hat{\lambda}_k}-\sqrt{\hat{\lambda}_k-\eta_k})}{\hat{\lambda}_k}\tilde{C}_K\right)^2+C_K-\right.$$

$$\left.-\tilde{C}_K\sum_{k=1}^{N}(\hat{\lambda}_k-\eta_k)\right)^{1/2},$$

$$\sup_{|t-s|<h}|K(t,u)-K(s,u)|\leqslant h^{æ}\tilde{K}(u),$$

$$\sup_{|t-s|<h}|\tilde{K}(t)-\tilde{K}(s)|\leqslant h^{æ}C_K,$$

$$\left(\int_0^T\tilde{K}^2(u)du\right)^{1/2}=\tilde{C}_K,$$

$K(t,s)$ - кореляційна функція процесу, $\delta_k(t)$ - похибка знаходження k-ї власної функції, λ_k - наближене значення k-го власного числа, η_k - похибка наближення k-го власного числа.

Доведення. Розглянемо $\sigma(h)$ для даного випадку. З теореми 10.14 маємо, що

$$C=\tau\left(\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\hat{\lambda}_k\hat{C}_k+(\sqrt{\hat{\lambda}_k}-\sqrt{\hat{\lambda}_k-\eta_k})\tilde{C}_k}{\hat{\lambda}_k(\hat{\lambda}_k-\eta_k)}\right)^2+C_K-\sum_{k=1}^{N}\frac{\tilde{C}_k^{\ 2}}{\hat{\lambda}_k+\eta_k}\right)^{1/2}.$$

Застосувавши теорему 10.15, отримаємо

$$\sup_{|t-s|<h}|a_k(t)-a_k(s)|\leqslant\lambda_k\left(\int_0^T(K(t,u)-K(s,u))^2du\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\lambda_k h^{æ}\left(\int_0^T(K(u))^2du\right)^{1/2},$$

тобто $\tilde{C}_k=\lambda_k\tilde{C}_B$. Підставивши це значення в умови теореми 10.14, отримаємо

$$C = \tau \left(\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\hat{\lambda}_k \hat{C}_k + (\sqrt{\hat{\lambda}_k} - \sqrt{\hat{\lambda}_k - \eta_k})(\hat{\lambda}_k + \eta_k)\tilde{C}_K}{\hat{\lambda}_k(\hat{\lambda}_k - \eta_k)} \right)^2 + C_K - \right.$$

$$\left. - \tilde{C}_K \sum_{k=1}^{N} (\hat{\lambda}_k - \eta_k) \right)^{1/2}.$$

Теорема 10.17. *Нехай для випадкового процесу* $X = \{X(t), t \in (0,T)\}$ *з* $Sub_\varphi(\Omega)$, $\varphi(t) = \frac{t^\zeta}{\zeta}$, $1 < \zeta \leqslant 2$ *виконуєюься умови теореми 10.1, і цей процес може бути зображений у вигляді (9.4). Нехай для* Δ_N *цього процесу виконується умова* **(C1)**. *Модель* $X_N(t)$ *наближає процес* $X(t)$ *із заданими надійністю* $1 - \nu$ *та точністю* δ *у просторі* $C(0,T)$, *коли*

$$\nu \leqslant 2 \exp\left\{ -\frac{(\zeta - 1)\delta^{\frac{1}{\zeta - 1}} (\delta - \gamma)^{\frac{\zeta}{\zeta - 1}}}{\zeta(\gamma^\zeta(\delta - \gamma) + \beta^\zeta \gamma)^{\frac{1}{\zeta - 1}}} \right\} 2\,(e\delta)^{1/æ},$$

де

$$\gamma^\zeta \leqslant \sum_{k=1}^{N} \tau_\varphi^\gamma(\xi_k) \left(\frac{\sup_{u\in[0,T]} \delta_k^\gamma(u)}{(\lambda_k - \eta_k)^\gamma} + \sup_{u\in[0,T]} \hat{a}_k^\gamma(u) \frac{(\sqrt{\hat{\lambda}_k} - \sqrt{\hat{\lambda}_k - \eta_k})^\gamma}{(\hat{\lambda}_k(\hat{\lambda}_k - \eta_k))^\gamma} \right) +$$

$$+ \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\tau_\varphi^\gamma(\xi_k) \sup_{u\in[0,T]} a_k^\gamma(u)}{\lambda_k^\gamma},$$

$$C = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} \tau_\varphi^2(\xi_k) \left(\frac{\hat{\lambda}_k \hat{C}_k + (\sqrt{\hat{\lambda}_k} - \sqrt{\hat{\lambda}_k - \eta_k})\tilde{C}_k}{\hat{\lambda}_k(\hat{\lambda}_k - \eta_k)} \right)^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} \tau_\varphi^2(\xi_k) \frac{\tilde{C}_k^2}{\lambda_k^2}}.$$

Доведення. Дане твердження випливає з попередньої теореми та теореми 10.9. ♢

10.2.2. Моделювання випадкових процесів за допомогою розкладу їх по певним базисам у $C(0,T)$

Нехай $X = \{X(t), t \in [0,T]\} \in Sub_\varphi(\Omega)$ - випадковий процес другого порядку, $EX(t) = 0$. Нехай коваріаційна функція процесу $B(t,s) =$

$EX(t)\overline{X(s)}$ допускає зображення

$$B(t,s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t,\lambda) f(s,\lambda) d\lambda,$$

де $f(t,\lambda)$, $t \in [0,T]$, $\lambda \in R$ - сім'я функцій з $L_2(R)$. Згідно з теоремою 9.13, процес X може бути зображений у вигляді

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k a_k(t),$$

$$a_k(t) = \int\limits_0^T f(t,\lambda) \cos \pi k \lambda d\lambda,$$

де ξ_k - φ-субгауссові незалежні некорельовані випадкові величини, такі, що $E\xi_k^2 = 1$. В якості моделі такого процесу використаємо X_N, задане в означенні 9.4.

Теорема 10.18. *Нехай для випадкового процесу* $X = \{X(t), t \in (0,T)\}$ *з* $Sub_\varphi(\Omega)$, $\varphi(t) = \frac{t^\zeta}{\zeta}$, $\zeta \geqslant 2$, $t > 1$ *виконуєюься умови теореми 10.1, і цей процес може бути зображений у вигляді (9.6),* $g_k(s) = \cos \pi k s$, $f(t,s)$ *диференційовна по* s. *Нехай для* Δ_N *цього процесу виконується умова* **(C1)**. *Модель* $X_N(t)$ *наближає процес* $X(t)$ *із заданими надійністю* $1-\nu$ *та точністю* δ *у просторі* $C(0,T)$, *коли*

$$\nu \leqslant 2 \exp\left\{ -\frac{(\zeta-1)\delta^{\frac{1}{\zeta-1}}(\delta-\gamma)^{\frac{\zeta}{\zeta-1}}}{\zeta(\gamma^\zeta(\delta-\gamma)+\beta^\zeta\gamma)^{\frac{1}{\zeta-1}}} \right\} 2\left(e\delta\right)^{1/æ},$$

причому

$$\delta > \frac{\gamma(v^{\zeta-1}+1) + \sqrt{\gamma^2(v^{\zeta-1}+1)^2 + 4v^{\zeta-1}(C^\zeta (T/2)^{æ\zeta} - \gamma^2)}}{2v^{\zeta-1}},$$

де $v = \min\{\beta, \gamma\}$,

$$\gamma^\zeta \leqslant \left(\delta_f^2(t) \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{4\tau_\varphi^2(\xi_k)}{\pi^2 k^2} + \sum_{k=1}^{N} \tau_\varphi^2(\xi_k) \delta_k^2(t) \right)^{\zeta/2},$$

$$\delta_f(t) = f(t,T) - f(t,0),$$

$$C = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} \tau_\varphi^2(\xi_k) \hat{C}_k^2 + C_f^2 \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{4\tau_\varphi^2(\xi_k)}{\pi^2 k^2}},$$

$$\sup_{|t-s|<h} |f(s,u) - f(t,u)| \leqslant h^{æ} \tilde{f}(u),$$

$$C_f = \tilde{f}(T) - \tilde{f}(0).$$

Доведення. Розглянемо $\sigma(h)$ для даного випадку. Дійсно,

$$\sup_{|t-s|<h} \tau_\varphi(\Delta_N(t) - \Delta_N(s)) = \sup_{|t-s|<h} \tau_\varphi \left(\sum_{k=1}^{N} \xi_k(\delta_k(t) - \delta_k(s)) + \right.$$

$$\left. + \sum_{K=N+1}^{\infty} \xi_k(a_k(t) - a_k(s)) \right) \leqslant$$

$$\leqslant h^{æ} \left(\sum_{k=1}^{N} \tau_\varphi^2(\xi_k) \hat{C}_k^2 + C_f \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{4\tau_\varphi^2(\xi_k)}{\pi^2 k^2} \right)^{1/2} = Ch^{æ} = \sigma(h).$$

Остання нерівність використовує доведення теореми 9.14. Тепер необхідне твердження випливає з теорем 9.14 та 10.8. ♢

Теорема 10.19. *Нехай для випадкового процесу $X = \{X(t), t \in (0,T)\}$ з $Sub_\varphi(\Omega)$, $\varphi(t) = \frac{t^\zeta}{\zeta}$, $1 < \zeta \leqslant 2$ виконуєюься умови теореми 10.1, і цей процес може бути зображений у вигляді (9.6), $g_k(s) = \cos \pi ks$, $f(t,s)$ диференційовна по s. Нехай для Δ_N цього процесу виконується умова* **(C1)**. *Модель $X_N(t)$ наближає процес $X(t)$ із заданими надійністю $1-\nu$ та точністю δ у просторі $C(0,T)$, коли*

$$\nu \leqslant 2 \exp\left\{ -\frac{(\zeta-1)\delta^{\frac{1}{\zeta-1}}(\delta-\gamma)^{\frac{\zeta}{\zeta-1}}}{\zeta(\gamma^\zeta(\delta-\gamma)+\beta^\zeta\gamma)^{\frac{1}{\zeta-1}}} \right\} 2\,(e\delta)^{1/æ},$$

де

$$\gamma^\zeta \leqslant \left(\delta_f^2(t) \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{4\tau_\varphi^2(\xi_k)}{\pi^2 k^2} + \sum_{k=1}^{N} \tau_\varphi^2(\xi_k)\delta_k^2(t) \right)^{\zeta/2},$$

$$\delta_f(t) = f(t,T) - f(t,0).$$

Доведення. Дане твердження випливає з попередньої теореми та теореми 10.9 ♢

10.2.3. Моделювання випадкових процесів за допомогою розкладу їх по базису Ерміта у $C(0,T)$

Нехай $X = \{X(t), t \in [0,T]\} \in Sub_\varphi(\Omega)$ - випадковий процес другого порядку, $EX(t) = 0$. Нехай коваріаційна функція процесу $B(t,s) = EX(t)\overline{X(s)}$ допускає зображення

$$B(t,s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t,\lambda)f(s,\lambda)d\lambda,$$

де $f(t,\lambda)$, $t \in [0,T]$, $\lambda \in R$ - сім'я функцій з $L_2(R)$. Згідно з теоремою 9.13, процес X може бути зображений у вигляді

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k a_k(t),$$

$$a_k(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t,\lambda)g_k(\lambda)d\lambda,$$

де ξ_k - φ-субгауссові незалежні некорельовані випадкові величини, такі, що $E\xi_k^2 = 1$, $g_k(\lambda)$ - функції Ерміта, задані у (9.9). В якості моделі такого процесу використаємо X_N, задане в означенні 9.4.

Теорема 10.20. *Нехай для випадкового процесу $X = \{X(t), t \in (0,T)\}$ з $Sub_\varphi(\Omega)$, $\varphi(t) = \frac{t^\zeta}{\zeta}$, $\zeta \geqslant 2$, $t > 1$ виконуеюься умови теореми 10.1, і цей процес може бути зображений у вигляді (9.6). Нехай для Δ_N цього процесу виконується умова* **(C1)**. *Модель $X_N(t)$ наближає процес $X(t)$ із заданими надійністю $1-\nu$ та точністю δ у просторі $C(0,T)$, коли*

$$\nu \leqslant 2\exp\left\{-\frac{(\zeta-1)\delta^{\frac{1}{\zeta-1}}(\delta-\gamma)^{\frac{\zeta}{\zeta-1}}}{\zeta(\gamma^\zeta(\delta-\gamma)+\beta^\zeta\gamma)^{\frac{1}{\zeta-1}}}\right\} 2\left(e\delta\right)^{1/æ},$$

причому

$$\delta > \frac{\gamma(v^{\zeta-1}+1)+\sqrt{\gamma^2(v^{\zeta-1}+1)^2+4v^{\zeta-1}(C^\zeta(T/2)^{æ\zeta}-\gamma^2)}}{2v^{\zeta-1}},$$

де $v = \max\{\beta,\gamma\}$,

$$\gamma^\zeta \leqslant \Bigg(K^2 \sup_{u\in[0,T]} \int\limits_{-\infty}^{\infty} Z_f^2(u,\lambda)d\lambda \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\tau_\varphi^2(\xi_k)}{k^2+3k+2} +$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\tau_{\varphi}^2(\xi_k)\sup_{u\in[0,T]}\delta_k^2(u)\Bigg)^{\zeta/2},$$

$$Z_f(t,\lambda)=\frac{\partial^2 f(t,\lambda)}{\partial\lambda^2}-\lambda\frac{\partial f(t,\lambda)}{\partial\lambda}+\frac{\lambda^2-2}{4}f(t,\lambda),$$

$$C=\sqrt{K^2\tilde{C}^2\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{\tau_{\varphi}^2(\xi_k)}{k^2+3k+2}+\sum_{k=1}^{N}\tau_{\varphi}^2(\xi_k)\hat{C}_k^2},$$

$$\tilde{C}=\int_{-\infty}^{\infty}(Z_f(\lambda))\,d\lambda,$$

$$\sup_{|t-s|<h}|f(t,u)-f(s,u)|\leqslant h^{æ}\tilde{f}(u),$$

коли $K\approx 1.086435$, $f(t,s)$ *двічі диференційовна по* s *та зростає по* s *не швидше, ніж* $\exp^{s^2/4}$, $Z_f(\lambda)$ *- інтегровна на* R.

Доведення. Розглянемо $\sigma(h)$ для даного випадку. Дійсно,

$$\sup_{|t-s|<h}\tau_{\varphi}(\Delta_N(t)-\Delta_N(s))=\sup_{|t-s|<h}\tau_{\varphi}\left(\sum_{k=1}^{N}\xi_k(\delta_k(t)-\delta_k(s))+\right.$$

$$\left.+\sum_{K=N+1}^{\infty}\xi_k(a_k(t)-a_k(s))\right)\leqslant h^{æ}\left(\sum_{k=1}^{N}\tau_{\varphi}^2(\xi_k)\hat{C}_k^2+\right.$$

$$\left.+K^2\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^2\tilde{f}(\lambda)}{\partial\lambda^2}-\lambda\frac{\partial\tilde{f}(\lambda)}{\partial\lambda}+\frac{\lambda^2-2}{4}\tilde{f}(\lambda)\right)^2 d\lambda\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{4\tau_{\varphi}^2(\xi_k)}{\pi^2k^2}\right)^{1/2}=$$

$$=Ch^{æ}=\sigma(h).$$

Остання нерівність використовує доведення теореми 9.16. Тепер необхідне твердження випливає з теорем 9.16 та 10.8.

Теорема 10.21. *Нехай для випадкового процесу* $X=\{X(t),t\in(0,T)\}$ *з* $Sub_{\varphi}(\Omega)$, $\varphi(t)=\frac{t^{\zeta}}{\zeta}$, $1<\zeta\leqslant 2$ *виконуєюься умови теореми 10.1, і цей процес може бути зображений у вигляді (9.6). Нехай для* Δ_N *цього процесу виконується умова* **(C1)**. *Модель* $X_N(t)$ *наближає процес* $X(t)$ *із заданими надійністю* $1-\nu$ *та точністю* δ *у просторі* $C(0,T)$, *коли*

$$\nu \leqslant 2\exp\left\{-\frac{(\zeta-1)\delta^{\frac{1}{\zeta-1}}(\delta-\gamma)^{\frac{\zeta}{\zeta-1}}}{\zeta(\gamma^{\zeta}(\delta-\gamma)+\beta^{\zeta}\gamma)^{\frac{1}{\zeta-1}}}\right\} 2\left(e\delta\right)^{1/æ},$$

де

$$\gamma^{\zeta} \leqslant K^{\zeta} \sup_{u\in[0,T]} \int_{-\infty}^{\infty} Z_f^{\zeta}(u,\lambda)d\lambda \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\tau_{\varphi}^{\zeta}(\xi_k)}{(k^2+3k+2)^{\zeta/2}} +$$

$$+\sum_{k=1}^{N} \tau_{\varphi}^{\zeta}(\xi_k) \sup_{u\in[0,T]} \delta_k^{\zeta}(u),$$

$$Z_f(t,\lambda) = \frac{\partial^2 f(t,\lambda)}{\partial\lambda^2} - \lambda\frac{\partial f(t,\lambda)}{\partial\lambda} + \frac{\lambda^2-2}{4} f(t,\lambda),$$

коли $K \approx 1.086435$, $f(t,s)$ *двічі диференційовна по* s *та зростає по* s *не швидше, ніж* $\exp\{s^2/4\}$, $Z_f(\lambda)$ *- інтегровна на* R.

Доведення. Дане твердження випливає з попередньої теореми та теореми 10.9. ♢

Висновки до розділу 10

У розділі 10 розглянуто випадкові процеси із просторів $Sub_{\varphi}(\Omega)$, які допускають розклад у ряд, елементи котрого не можуть бути знайдені у явному вигляді. Проведено оцінку побудови моделей таких процесів із заданими точністю та надійністю у просторах $C(T)$. Доведено теореми, які дозволяють оцінювати точність та надійність побудованої моделі у випадках, коли $\varphi(t) = |t|^{\gamma}/\gamma$, $1 < \gamma < 2$, та $\varphi(t) = |t|^{\gamma}/\gamma$, коли $|t| > 1$, та $\varphi(t) = |t|^2/\gamma$, $|t| < 1$, при $\gamma > 2$. Розроблені механізми застосовано для оцінки точності та надійності моделювання у $C(T)$ випадкових процесів за допомогою розкладу Карунена-Лоева у випадку, коли власні числа та власні вектори не можуть бути знайдені явно.

Література

1. *Абжанов Е. А.* Некоторые свойства случайных процессов в банаховых k_σ-пространствах / Е. А. Абжанов, Ю. В. Козаченко // Укр. матем. журнал. – 1985. – Т. 37, № 3. – С. 275-280.

2. *Абжанов Е. А.* Случайные процессы в банаховых k_σ-пространствах случайных величин / Е. А. Абжанов, Ю. В. Козаченко // Вероятностные методы иследования систем с бесконечным числом степеней свободы. – К.:Ин-т математики АН УССР, 1986. – С. 4-11.

3. *Анваров С. Р.* Численное моделирование пространственно-временной структуры поверхности морского волнения для решения оптических задач / С. Р. Анваров, С. М. Пригарин // Вычислительная математика и статистическое моделирование. – Новосибирск, 1994. – С. 17-29.

4. *Артемьев С. С.* Численные методы решения задачи Коши для систем обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений / С. С. Артемьев – Новосибирск: Изд. ВЦ СО РАН, 1993. – 156 с.

5. *Беляев Ю. К.* Локальные свойства выборочных функций стационарных случайных процессов / Ю. К. Беляев // Теория вероятн. и ее применен. – 1960. – Т. 5, № 1. – С. 128-131.

6. *Беляев Ю. К.* О числе выходов векторного случайного процесса за границу области / Ю. К. Беляев // Теория вероятн. и ее применен. – 1968. – Т. 13, № 2. – С. 333-337.

7. *Бондаренко І. В.* Про вибіркові властивості випадкових полів зі стійкими приростами / І. В. Бондаренко, О. В. Іванов // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1992. – Т. 47. – С. 11-15.

8. *Булдигін В. В.* Функціонали Бернштейна й експоненційні нерівності для розподілів сум випадкових величин / В. В. Булдигін, Ю. В. Козаченко // Математика сегодня. – 1994. – Вип. 9. – С. 55-79.

9. *Булдыгин В. В.* Субгауссовские процессы и сходимость случайных рядов в функциональных пространствах / В. В. Булдыгин // Укр. матем. журнал. – 1977. – Т. 29, № 4. – С. 443-454.

10. *Булдыгин В. В.* Сходимость случайных элементов в топологических пространствах / В. В. Булдыгин. – К.: Наукова думка, 1980. – 239 с.

11. *Булдыгин В. В.* О локальных свойствах реализаций некоторых случайных процессов и полей / В. В. Булдыгин, Ю. В. Козаченко // Теория вероятн. и матем. статист. – 1974. – Т. 10. – С. 39-47.

12. *Булдыгин В. В.* Экспоненциальные оценки распределения супремума одного класса случайных процессов / В. В. Булдыгин, Ю. В. Козаченко // Доклады АН Украины. Сер. Математика. – 1992. – №. 2. – С. 31-34.

13. *Булдыгин В. В.* Оценки для распределения супремума одного класса случайных процессов / В. В. Булдыгин, Ю. В. Козаченко // Укр. матем. журнал. – 1993. – Т. 45, № 5. – С. 596-608.

14. *Булдыгин В. В.* О субгауссовских случайных величинах / В. В. Булдыгин, Ю. В. Козаченко // Укр. матем. журнал. – 1980. – Т. 32, № 6. – С. 723-730.

15. *Булдыгин В. В.* Субгауссовские случайные векторы и процессы / В. В. Булдыгин, Ю. В. Козаченко // Теория вероятн. и матем. статист. – 1987. – Т. 36. – С. 10-22.

16. *Булдыгин В. В.* Метрические характеристики случайных величин и процессов / В. В. Булдыгин, Ю. В. Козаченко. – К.: ТВиМС, 1998. – 289 с.

17. *Бусленко Н. П.* Моделирование сложных систем. / Н. П. Бусленко – М.: "Наука 1978. – 356 с.

18. *Быков В. В.* Цифровое моделирование в статистической радиотехнике / В. В. Быков – М.: Сов. радио, 1971. – 328 с.

19. *Василик О. І.* φ-субгауссові випадкові процеси / О. І. Василик, Ю. В. Козаченко, Р. Є. Ямненко. – К.: ВЦ “Київський Університет”, 2008. – 231 с.

20. *Вахания Н. Н.* Распределения в банаховых пространствах / Н. Н. Вахания, В. И. Тариеладзе, С. А. Чобанян. – К.: Наука, 1985. – 368 с.

21. *Вижва С. А.* Розробка методу математичного моделювання акустичних характеристик складнопобудованих порід-колекторів [Текст] : автореф. дис. канд. геол. наук: 04.00.05 / Вижва Сергій Андрійович; Київський ун-т ім. Тараса Шевченка. – К., 1996. – 21 с.

22. *Вижва З. О.* Математичні моделі в природознавстві. Розділ: Статистичне моделювання випадкових процесів та полів на площині у науках про Землю. Навчальний посібник з дисципліни "Математичні

моделі в природознавстві"для студентів механіко-математичного факультету // З.О. Вижва. – К.: ВГЛ “Обрій”, 2004, – 59с.

23. *Вижва З. О.* Математичні моделі в природознавстві. Розділ: Статистичне моделювання тривимірних випадкових полів у науках про Землю. Навчальний посібник з дисципліни "Математичні моделі в природознавстві"для студентів механіко-математичного факультету // З.О. Вижва. – К.: ВГЛ “Обрій”, 2004, – 46с.

24. *Вижва З. О.* Статистичне моделювання ізотропних випадкових полів на сфері/ З. О. Вижва, М. Й. Ядренко // Вісник Київського університету. Серія: Математика. Механіка. – 2000. – №5. – С.5-11.

25. *Войтишек А. В.* Дискретно-стохастические процедуры глобальной оценки интеграла, зависящего от параметра / А. В. Войтишек // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1996. – Т. 36, № 8. – С. 23-38.

26. *Войтишек А. В.* Исследование слабой сходимости моделей гауссовских случайных полей с заданным спектральным разложением корреляционной функции/ А. В. Войтишек // Моделирование на вычислительных системах. – Новосибирск, 1982. – С. 119-129.

27. *Войтишек А. В.* Моментные условия функциональной сходимости численной рандомизированной спектральной модели однороднiх гауссовских полей / А. В. Войтишек , С. М. Пригарин // Теория и приложение статистического моделирования. – Новосибирск, 1988. – С.41–46.

28. *Войтишек А. В.* О функциональной сходимости оценок и моделей в методе Монте-Карло / А. В. Войтишек, С. М. Пригарин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1992. – Т. 32, № 10. – С. 1641-1651.

29. *Войтишек А. В.* Рандомизированная численная спектральная модель стационарной случайной функции/ А. В. Войтишек // Математические имитационные модели систем. – Новосибирск, 1983. – С. 17-25.

30. *Дарійчук І. В.* Випадкові процеси з просторів Орліча / І. В. Дарійчук, Ю. В. Козаченко, М. М. Перестюк. – Чернівці: Видавництво “Золоті литаври”, 2011. – 212 с.

31. *Дергалин Н. Л.* О моделировании случайных полей / Н. Л. Дергалин, В. В. Романцев // Труды X Всесоюзного симпозиума, Секция 4. Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей. – Ленинград, 1978. – С.60-64.

32. *Джуліано А. Р.* Нерівності для норм субгауссових векторів та точність моделювання випадкових процессів / А. Р. Джуліано, Ю. В. Козаченко, А. М. Тегза // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2002. – Т. 66. – С. 58-66.

33. *Джуліано А. Р.* Точність моделювання у L_p Гауссових випадкових процесів / А. Р. Джуліано, Ю. В. Козаченко, А. М. Тегза // Вісник Київського університету, Сер. Фіз.–Матем. науки. – 2002. – Вип. 5 – С. 7-14

34. *Дмитровский В. А.* Оценка погрешности в многопараметрическом методе Монте-Карло / В. А. Дмитровский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1980. – Т. 20, № 3. – С. 774-778.

35. *Дмитровский В. А.* О распределении максимума и локальных свойствах реализаций предгауссовских полей / В. А. Дмитровский // Теория вероятн. и матем. статист. – 1981. – Т. 25. – С. 154-164.

36. *Дмитровский В. А.* Оценка погрешности метода зависимых испытаний / В. А. Дмитровский, Е. И. Островский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1978. – Т. 18, № 5. – С. 1312-1316.

37. *Ермаков С. В.* Условия непрерывности, экспоненциальные оценки и центральная предельная теорема для случайных полей / С. В. Ермаков, Е. И. Островский // Деп. в ВИНИТИ. – 1986. – № 3752-В.86.0. – С. 42.

38. *Ермаков С. М.* Метод Монте-Карло и смежные вопросы / С. М. Ермаков. – М.: Наука, 1975. – 163 с.

39. *Ермаков С. М.* Курс статистического моделирования / С. М. Ермаков, Г. А. Михайлов. – М.: Наука, 1976. – 319 с.

40. *Ермаков С. М.* Статистическое моделирование. Учебное пособие / С. М. Ермаков, Г. А. Михайлов. – М.:Наука, 1982. – 296с.

41. *Зелепугина И Н.* К вопросу о моделировании Гауссовских случайных процессов / И. Н. Зелепугина, Ю. В. Козаченко // Некоторые вопросы теории случайных процессов. – К., 1982. – С. 47-56.

42. *Зелепугина И. Н.* Об оценках точности моделирования случайных полей в пространствах L_p / И. Н. Зелепугина, Ю. В. Козаченко // Исследование операций и АСУ. – 1988. – №32. – С. 10-14.

43. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды / А. Зигмунд. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.

44. *Каменщикова О. Є.* Наближення випадкових процесів многочленами Бернштейна / О. Є. Каменщикова // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. – 2007. – Т. 2. – С. 112-117.

45. *Кантер Р. Р.* Численное моделирование морского ветрового волнения для исследования поля отраженного оптического излучения / Р. Р. Кантер, С. М. Пригарин. – Новосибирск, 1989. – 25с. – (Препринт АН СССР, Сиб. от-ние. ВЦ, 829).

46. *Каргин Б. А.* О численном моделировании оптических характеристик взволнованной поверхности моря / Б. А. Каргин, С. М. Пригарин // Методы стохастического моделирования. – Новосибирск, 1990. – С. 95-102.

47. *Каргин Б. А.* Имитация поверхности морского волнения и исследование ее оптических свойств методом Монте-Карло / Б. А. Каргин, С. М. Пригарин // Оптика атмосферы и океана. – 1992. – Т. 5, № 3. – С. 285-291.

48. *Канторович Л. В.* Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М.: Наука, 1984. – 752 с.

49. *Козаченко Ю. В.* Достатні умови неперервності з ймовірністю одиниця субгауссовських випадкових процесів / Ю. В. Козаченко // Доповіді АН УРСР. – 1968. – № 2. – С. 113-115.

50. *Козаченко Ю. В.* О равномерной сходимости стохастических интегралов в норме пространства Орлича / Ю. В. Козаченко // Теория вероятн. и матем. статист. – 1983. – Т. 29. – С. 52-64.

51. *Козаченко Ю. В.* О точности моделирования в $L_2(0,T)$ Гауссовских стационарных процессов. / Ю. В. Козаченко, Л. Ф. Козаченко // Вычислительная и прикладная математика. – 1991. – № 75. – С. 108-115.

52. *Козаченко Ю. В.* О точности моделирования в $L_2(0,T)$ Гауссовских случайных процессов. / Ю. В. Козаченко, Л. Ф. Козаченко // Вычислительная и прикладная математика. – 1992. – № 74. – С. 88-93.

53. *Козаченко Ю. В.* Случайные процессы в пространствах Орлича. i / Ю. В. Козаченко // Теория вероятн. и матем. статист. – 1984. – Т. 30. – С. 92-107.

54. *Козаченко Ю. В.* Случайные процессы в пространствах Орлича. ii / Ю. В. Козаченко // Теория вероятн. и матем. статист. – 1984. – Т. 31. – С. 44-50.

55. *Козаченко Ю. В.* Случайные процессы в пространствах Орлича. Свойство траектории, сходимость рядов и интегралов / Ю. В. Козаченко. Диссертация на соискание ученой степени докт. физ.-мат. наук: 01.01.05. – Киев, 1985. – 296 с.

56. *Козаченко Ю. В.* Лекції з вейвлет аналізу / Ю. В. Козаченко. – К.: ТВіМС, 2004. – 147 с.

57. *Козаченко Ю. В.* Апроксимація $SSub_{\varphi}(\Omega)$ випадкових процесів у просторі $L_p(T)$ / Ю. В. Козаченко, О. Є. Камєнщікова // Теорія Ймовірностей та Математична Статистика. – 2008. – Т. 79. – С. 73-78.

58. *Козаченко Ю. В.* Застосування теорії $\mathbf{Sub}_{\varphi}(\Omega)$ просторів випадкових величин до знаходження точності моделювання стаціонарних гауссових процесів / Ю. В. Козаченко, А. М. Тегза // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2002. – Вип. 67. – С. 71-78.

59. *Козаченко Ю. В.* Точність та надійність підрахунку інтегралів методом Монте-Карло / Ю. В. Козаченко, Ю. Ю. Млавець // Доповіді Національної академії наук України. – 2011. – № 8. – С. 18-20.

60. *Козаченко Ю. В.* Простори Банаха випадкових величин $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$ / Ю. В. Козаченко, Ю. Ю. Млавець // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2012. – Т. 86. – С. 92-107.

61. *Козаченко Ю. В.* Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских / Ю. В. Козаченко, Е. И. Островский // Теория вероятн. и матем. статист. – 1985. – Т. 32. – С. 42-53.

62. *Козаченко Ю. В.* Моделювання випадкових процесів / Ю. В. Козаченко, А. О. Пашко. – К.: “Київський Університет”, 1999. – 223 с.

63. *Козаченко Ю. В.* Точність моделювання випадкових процесів в просторах Орліча I. / Ю. В. Козаченко, А. О. Пашко // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1998. – Вип. 58. – С. 45–60.

64. *Козаченко Ю. В.* Точність моделювання випадкових процесів в просторах Орліча II. / Ю. В. Козаченко, А. О. Пашко // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1999. – Вип. 59. – С. 77–92.

65. *Козаченко Ю. В.* Про моделювання випадкових полів I. / Ю. В. Козаченко, А. О. Пашко // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1999. – Вип 61. – С. 61–74.

66. *Козаченко Ю. В.* Про моделювання випадкових полів II. / Ю. В. Козаченко, А. О. Пашко // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2000. – Вип 62. – С. 48–60.

67. *Козаченко Ю. В.* Про рівномірну збіжність вейвлет розкладів випадкових процесів із просторів Орліча випадкових величин. i / Ю. В. Козаченко, М. М. Перестюк // Український математичний журнал. – 2007. – Т. 59, № 12. – С. 1647-1660.

68. *Козаченко Ю. В.* Про рівномірну збіжність вейвлет розкладів випадкових процесів із просторів Орліча випадкових величин. ii / Ю. В. Козаченко, М. М. Перестюк // Український математичний журнал. – 2008. – Т. 60, № 6. – С. 759-775.

69. *Козаченко Ю. В.* Локальные свойства выборочных функций случайных полей. i / Ю. В. Козаченко, М. Й. Ядренко // Теория вероятн. и матем. статист. – 1976. – Т. 14. – С. 53-66.

70. *Козаченко Ю. В.* Локальные свойства выборочных функций случайных полей. ii / Ю. В. Козаченко, М. Й. Ядренко // Теория вероятн. и матем. статист. – 1976. – Т. 15. – С. 82-98.

71. *Козаченко Ю. В.* Випадкові процеси у просторах Соболєва-Орлича / Ю. В. Козаченко, Т. О. Яковенко // Український математичний журнал. – 2006. – Т. 58, № 10. – С. 1517-1537.

72. *Красносельский М. А.* Выпуклые функции и пространства Орлича / М. А. Красносельский, Я. В. Рутицкий. – М.: Физматгиз, 1958. – 271 с.

73. *Курбанмурадов О. А.* Статистическое моделирование диффузии примеси в случайных полях скоростей. Моделирование случайных полей / О. А. Курбанмурадов, К. К. Сабельфельд, Г. Чопанов. – Новосибирск, 1988. – 28 с. – (Препринт / АН СССР Сиб. отд-ние, ВЦ:775).

74. *Лифшиц М. А.* Гауссовские случайные функции / М. А. Лифшиц. – К.: ТВиМС, 1995. – 246 с.

75. *Лукач Е.* Характеристические функции / Е. Лукач. – М.: Наука, 1979. – 423 с.

76. *Михайлов Г. А.* О методе "повторения"для моделирования случайных векторов и процессов (рандомизация корреляционных матриц) / Г. А. Михайлов // Теория вероятностей и ее применение. – 1974. – Т. 19, № 4. – С. 873-878.

77. *Михайлов Г. А.* О численном моделировании диффузии примеси в стохастических полях скоростей / Г. А. Михайлов, К. К. Сабельфельд // Изв. АН СССР, Сер. ФАО. – 1980. – Т. 16, № 3. – С. 229-235.

78. *Михайлов Г. А.* Моделирование случайных процессов и полей на основе точечных потоков Пальма / Г. А. Михайлов // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 262, № 3. – С. 531-535.

79. *Михайлов Г. А.* Приближенные модели случайных процессов и полей / Г. А. Михайлов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1983. – Т. 23, № 3. – С. 558-566.

80. *Михайлов Г. А.* Численное построение случайного поля с заданной спектральной плотностью / Г. А. Михайлов // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 238, № 4. – С. 793-795.

81. *Млавець Ю. Ю.* Про розподіл супремумів приростів випадкових процесів з просторів $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$ / Ю. Ю. Млавець // Науковий вісник Ужгород. ун-ту. Серія матем. і інформ. – 2012. – Вип. 23, № 1. – С. 79-88.

82. *Млавець Ю. Ю.* $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$ простори випадкових величин з експоненціальною функцією ψ / Ю. Ю. Млавець // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2012. – Вип. 2 – С. 19-22.

83. *Млавець Ю. Ю.* Зв'язок просторів Орліча випадкових величин з просторами $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$ / Ю. Ю. Млавець // Науковий вісник Ужгород. ун-ту. Серія матем. і інформ. – 2014. – Вип. 25, № 1. – С. 77-84.

84. *Млавець Ю. Ю.* Умови рівномірної збіжності випадкових функціональних рядів із просторів $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$ / Ю. Ю. Млавець // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. – 2014. – № 1. – С. 97-103.

85. *Млавець Ю. Ю.* Умова "H" для просторів Орліча експоненціального типу / Ю. Ю. Млавець // Науковий вісник Ужгород. ун-ту. Серія матем. і інформ. – 2014. – Вип. 26, № 2. – С. 118-122.

86. *Островский Е. И.* Обобщение нормы Булдыгина-Козаченко и центральная предельная теорема в банаховых пространствах / Е. И. Островский // Теория вероятн. и ее применен. – 1982. – Т. 27, № 3. – С. 618-623.

87. *Островский Е. И.* Экспоненциальные оценки распределения максимума негауссовского случайного поля / Е. И. Островский // Теория вероятн. и ее применен. – 1990. – Т. 35, № 3. – С. 482-493.

88. *Островский Е. И.* Сходимость канонического разложения для нормальных полей / Е. И. Островский // Мат. заметки. – 1973. – Т.14, №4. – С. 565-572.

89. *Пашко А. О.* Оцінка точності моделювання в рівномірній метриці Гауссових ізотропних випадкових полів на сфері. / А. О. Пашко // Теорія ймовірностей та матем. статист. – 2000. – Вип. 60. – С. 149–157.

90. *Пашко А. О.* Оцінка точності моделювання субгауссових випадкових полів в рівномірній метриці / А. О. Пашко // Доповіді Національної академії наук України. – 2001. – № 2. – С. 30-36.

91. *Пашко А. О.* Равномерная сходимость субгауссовых интегралов / А. О. Пашко // Теория вероятн. и ее применен. – 1998. – Т. 43, № 4. – С. 650-655.

92. *Пашко А. О.* Точність моделювання субгауссових випадкових процесів / А. О. Пашко // Вісник Київського університету. Серія: Математика. Механіка. – 2001. – № 6. – С. 42-47.

93. *Питербарг В. И.* Большие уклонения случайных процессов, близких к гауссовским / В. И. Питербарг // Теория вероятн. и ее применен. – 1982. – Т. 27, № 3. – С. 474-491.

94. *Пригарин С. М.* Исследование одного класса численных моделей случайных полей / С. М. Пригарин. // Теория и приложение статист. моделирования. – Новосибирск, 1991. – С. 29–32.

95. *Пригарин С. М.* Некоторые задачи численного моделирования случайных процессов и полей / С. М. Пригарин // Теория и приложение статист. моделирования. – Новосибирск, 1991. – С. 29-32.

96. *Пригарин С. М.* О слабой сходимости приближенных моделей гауссовских случайных полей/ С. М. Пригарин // Теория и приложения статист. моделирования. – Новосибирск, 1988. – С. 31-39.

97. *Пригарин С. М.* Слабая сходимость вероятностных мер в пространствах непрерывно дифференциируемых функций / С. М. Пригарин // Сиб. матема. журнал. – 1993. – Т 34, № 1. – С. 140–144.

98. *Пригарин С. М.* Спектральные модели векторных однородных полей / С. М. Пригарин. – Новосибирск, 1992. – 36С. (Препринт / АН СССР, Сиб. отд-ние ВЦ: 945).

99. *Продайвода Г. Т.* Математичне моделювання геофізичних параметрів / Г.Т. Продайвода, С.А. Вижва К.: ВЦ “Київський університет”, 1999. – 112 с.

100. *Продайвода Г. Т.* Математичне моделювання тектонофацій метаморфічних порід епізони Кривбасу / Г. Т. Продайвода, С. А. Вижва, Д. А. Безродний, І. М. Безродна // Геоінформатика. – 2009. – № 3. – С. 68-73.

101. *Рахімов Г.* Статистичне моделювання однорідного та ізотропного поля на площині/ Г. Рахімов, М. Й. Ядренко // Теорія Ймовірн. та Матем. Стат. – 1993. – Вип. 49. – С. 245-251.

102. *Розора І. В.* Точність та надійність моделювання випадкових процесів з $Sub_{\varphi}(\Omega)$ / І. В. Розора // Теорія Ймовірн. та Матем. Стат. – 2004. – Вип. 71. – С. 93-105.

103. *Скороход А. В.* Замечание о гауссовских мерах в банаховых пространствах / А. В. Скороход // Теория вероятн. и ее применен. – 1970. – Т. 15, № 3. – С. 519-520.

104. *Скороход А. В.* Теорема о непрерывности случайной функции на компакте в гильбертовом пространстве / А. В. Скороход // Теория вероятн. и ее применен. – 1973. – Т. 18, № 4. – С. 809-811.

105. *Товстик Т. М.* Моделирование однородного гауссовского поля / Т. М. Товстик // Труды X Всесоюзного симпозиума. Секция 4. Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей. – Ленинград, 1978. – С. 75-77

106. *Трикоми Ф. Дж.* Интегральные Уравнения / Ф. Дж. Трикоми. – М.: Иностранная Литература, 1960.

107. *Тройников В. С.* Численное моделирование случайных процессов и полей на основе точечных потоков Пальма в задачах переноса излучения в облачной среде / В. С. Тройников // Изв. АН СССР, Сер. ФАЙО. – 1984. – Т. 20, № 4. – С. 274–279.

108. *де Ферье Ж. Кампе* Функции математической физики / Ж. Кампе де Ферье, Р. Кемпбелл, Г. Петьо, Т. Фогель. – М.: “Государственное издательство физико-математической литературы”, 1963. – 102 с.

109. *Фролов А. С.* О вычислении методом Монте-Карло определенных интегралов, зависящих от параметра / А. С. Фролов, Н. Н. Ченцова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1962. – Т. 2, № 4. – С. 714-717.

110. *Хамитов Г. П.* Имитация случайных процессов / Г. П. Хамитов – Иркутск: Изд. Иркутского ун-та, 1983. – 183 с.

111. *Шалыгин А. С.* Прикладные методы статистического моделирования / А. С. Шалыгин, Ю. И. Палагин. – Л.:Машиностроение, 1986. – 320 с.

112. *Ядренко М. И.* О непрерывности выборочных функций гауссовского случайного поля на гильбертовом пространстве / М. И. Ядренко // Докл. АН УССР. – 1968. – С. 734-737.

113. *Ядренко М. И.* Спектральная теория случайных полей / М. И. Ядренко. – К.: "Вища школа", 1980. – 270 с.

114. *Ядренко М. Й.* Локальні властивості вибіркових функцій випадкових полів / М. Й. Ядренко // Вісн. Київ. унів-ту. Сер. мат. та мех. – 1967. – № 9. – С. 103-112.

115. *Adler R. J.* An introduction to continuity, extrema and related topics for general Gaussian processes / R. J. Adler. – Hayward, 1990. – (Institute of Mathematical Statistics. Lecture Notes – Monograph Series Vol. 12).

116. *Albin J. M. P.* On extremal theory for stationary processes / J. M. P. Albin // Ann. Probab. – 1990. – Vol. 15. – Pp. 92-128.

117. *Albin J. M. P.* On extremal theory for self-similar processes / J. M. P. Albin // Ann. Probab. – 1998. – Vol. 26. – Pp. 723-793.

118. *Bagro S. V.* Some probabilistic inequalities and the central limit theorem in function spaces / S. V. Bagro // Theory of Probability and Math. Statist. – 1992. – Vol. 44. – Pp. 7-13.

119. *Belyaev Y. K.* Continuity and Holder's conditions for sample functions of stationary Gaussian processes / Y. K. Belyaev // Proc. Fourth Berkeley Symp. on Math. and Probability. – 1961. – Vol. 2. – Pp. 23-33.

120. *Berman S. M.* Excursions of stationary Gaussian processes above high moving barriers / S. M. Berman // The Annals of Probability. – 1973. – Vol. 1, no. 3. – Pp. 133-184.

121. *Borell C.* Tail probabilities in Gaussian space. Vector space measures. Appl. I / C. Borell // Lect. Notes Math. – 1978. – No. 644. – Pp. 73-82. (Proc. Conf. Dublin 1977).

122. *Buldygin V. V.* Asymptotic behaviour of linearly transformed sums of random variables / V. V. Buldygin, S. A. Solntsev. – Dordrecht: Kluwer Academic Press, 1997. – 516 p.

123. *Chui C. K.* An introduction to wavelets / C. K. Chui. – New York: Academic Press, 1992. – 266 p.

124. *Cramer H.* Stationary and related stochastic processes. Sample function properties and their applications / H. Cramer, M. R. Leadbetter. – New York–London–Sydney: Wiley, 1967. – 348 p.

125. *Daubechies I.* Ten lecture on wavelets / I. Daubechies. – Philadelphia: Soc. Industrial and Appl. Math., 1992. – 324 p. – (Добеши И. Десять лекций по вейвлетам: перевод с англ. – М.; Ижевск: RXD, 2001. – 463 с.).

126. *Delporte J.* Fonctions aléatoires presque sûrement continues sur un intervalle fermé / J. Delporte // Annales de l'I H. P. – 1964. – Vol. 1, no. 2. – Pp. 111-215.

127. *Dudley R. M.* Gaussian processes on several parameters / R. M. Dudley // Ann. Math. Statist. – 1965. – Vol. 36, no. 3. – Pp. 771-788.

128. *Dudley R. M.* Sample functions of the Gaussian processes / R. M. Dudley // The Annals of Probability. – 1973. – Vol. 1, no. 1. – Pp. 3-68.

129. *Erdélyi Arthur* Higher transcendental functions, Vol. II. // Arthur Erdélyi, Wilhelm Magnus, Fritz Oberhettinger, Francesco G. Tricomi. – New-York: McGraw-Hill, 1953. – 396 p.

130. *Fernique X.* Intégrabilite des vecteurs gaussiens / X. Fernique // C. R. Acad. Sci. – 1970. – Vol. 270, no. 7. – Pp. 1698-1699.

131. *Fernique X.* Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes / X. Fernique // Lecture Notes in Mathematics. – 1975. – Vol. 480. – Pp. 1-96.

132. *Fernique X.* Régularité de fonctions aléatoires non gaussiennes / X. Fernique // Lecture Notes in Mathematics. – 1983. – Vol. 976. – Pp. 1-74.

133. *Fukuda R.* Exponential integrability of sub-Gaussian vectors / R. Fukuda // Probab. Theory Related Fields. – 1990. – Vol. 85, no. 4. – Pp. 505-521.

134. *Giuliani Antonini R.* Spaces of φ-subgaussian random variables / R. Giuliani Antonini, Yu. V Kozachenko, T Nikitina. // Rediconti Accademia Nazionale dell Scienze detta dei XL, Memorie di Matimatica e Applicazioni. – 2003. – No. 121. – Pp. 95 - 124.

135. *Jain N. C.* Integrability of infinite sums of independent vector-valued random variables / N. C. Jain, M. B. Marcus // Trans. Amer. Math. Soc. – 1975. – Vol. 212, no. 1. – Pp. 1-36.

136. *Jain N. C.* Continuity of sub-Gaussian processes / N. C. Jain, M. B. Marcus // Adv. Probab. – 1978. – Vol. 4. – Pp. 81-196.

137. *Kahane J. P.* Propriétés locales des fonctions à series de Fouries aléatories / J. P. Kahane // Studia Math. – 1960. – Vol. 19, no. 1. – Pp. 1-25.

138. *Kahane J. P.* Some random series of functions / J. P. Kahane // Heath Mathematical Monographs. – Lexington, Mass: D.C. Heath and Company, 1968. – 184 p.

139. *Kamenschykova O.* Approximation of random processes in the space $L_2(T)$ / O. Kamenschykova // Theory of Stochastic Processes. – 2007. – Vol. 13, no. 29. – Pp. 64-68.

140. *Kôno N.* Sample path properties of stochastic processes / N. Kôno // J. Math. Kyoto Univ. – 1980. – Vol. 20, no. 2. – Pp. 295-313.

141. *Kozachenko Y. V.* Probability of large deviations of sums of random processes from Orlicz space / Yu. V. Kozachenko, Yu. Yu. Mlavets // Monte Carlo Methods Appl. – 2011. – Vol. 17. – Pp. 155-168.

142. *Kozachenko Y. V.* Stochastic processes from $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ spaces / Yu. V. Kozachenko, Yu. Yu. Mlavets // Contemporary Mathematics and Statistics. – 2014. – Vol. 2, no. 1. – Pp. 55-75.

143. *Kozachenko Y. V.* On expansion of random process in series / Yu. V. Kozachenko, I. V. Rozora , Ye. V. Turchyn // Random Operators and Stochastic Equations. – 2007. – Vol. 15, no 1. – Pp. 15–35.

144. *Kozachenko Y. V.* Upper estimate of overrunning by $sub_\varphi(\omega)$ random process the level specified by continuous function / Yu. V. Kozachenko, O. Vasylyk, R. Yamnenko // Random Oper. and Stochastic Equations. – 2003. – Vol. 11, no. 1. – Pp. 1-20.

145. *Kurbanmuradov O.* Exponential bounds for the probability deviations of sums of random fields / O. Kurbanmuradov, K. Sabelfeld // Monte Carlo Methods Appl. – 2006. – Vol. 12, no. 3-4. – Pp. 211-229.

146. *Kurbanmuradov O.* Numerical statistical model of classical incompressible isotropic turbulence / O. Kurbanmuradov, K. Sabelfeld // Soviet journal of numerical analysis and mathematical modelling. – 1990. – Vol.5, No.3 – P. 251–263.

147. *Landau H. J.* On the supremum of Gaussian processes / H. J. Landau, L. A. Shepp // Sankhya. – 1970. – Vol. 32, no. 4. – Pp. 369-378.

148. *Leadbetter M. R.* Extremes and related properties of random sequences and processes / M. R. Leadbetter, G. Lindgren, H. Rootzen. – Berlin: Springer, 1983. – 336 p.

149. *Ledoux M.* A note on large deviations for Wiener chaos / M. Ledoux // Lecture Notes in Mathematics. – 1990. – Vol. 1426. – Pp. 1-14. – (Seminaire de probebilities XXIV 1988/89).

150. *Ledoux M.* Probability in Banach space / M. Ledoux, M. Talagrand. – Berlin-New York: Springer-Verlag, 1991. – 480 p.

151. *Lindgren G.* Extreme values of stationary normal processes / G. Lindgren // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. – 1971. – No. 17. – Pp. 39-47.

152. *Mallat S. G.* A wavelet tour of signal processing / S. G. Mallat. – San Diego: Academic Press, 1998. – 637 p.

153. *Marcus M. B.* Continuity in l^p of certain Ornstein-Uhlenbeck processes / M. B. Marcus // Probability in Banach space 7, Proc. 7th Int. Conf., Oberwolfach/FRG. – Oberwolfach, 1988. – Pp. 139-145.

154. *Marcus M. B.* Random Fourier series with applications to harmonic analysis / M. B. Marcus, G. Pisier. – Prinston: Prinston University Press, 1981. – 152 p. – (Annals of Mathematics Studies Vol. 101).

155. *Matsak I. K.* Some inequalities for sums of independent random variables in Banach spaces / I. K. Matsak, A. N. Plichko // Theory of Probability and Math. Statist. – 1988. – Vol. 38. – Pp. 81-88.

156. *Metropolis N.* The Monte Carlo method / N. Metropolis, S. Ulam // Journal of the American Statistical Association. – 1949. – Vol. 44, no. 247. – Pp. 335-341.

157. *Meyer Y.* Ondelettes et Opérateurs / Y. Meyer. – Paris: "Hermann", 1990. – Vol. I, II.

158. *Nanopoulos C.* Regularite et proprietes limites des fonctions aleatoires / C. Nanopoulos, P. Nobelis // Semin. Probab. XII, Univ. Strasbourg 1976/77. – Lect. Notes Math. – 1978. – Vol. 649. – Pp. 567-690.

159. *Ogorodnikov V. A.* Numerical Modeling of Random Processes and Fields: Algorithms and Applications/ V. A. Ogorodnikov, S. M. Prigarin – Utrecht: VSP, 1996. – 240 p.

160. *Pearson K.* On lines and planes of closest fit to systems of points in space / K. Pearson // Philosophical Magazine. – 1901 – № 2. – P. 559-572.

161. *Pickands J. III.* Upcrossing probabilities for stationary Gaussian processes / J. III Pickands // Trans. Am. Math. Soc. – 1969. – Vol. 145. – Pp. 51-73.

162. *Pisier G.* Conditions d'entropie assurant la continuite de certains processus et applications ? l'analyse harmonique / G. Pisier // Semin. Anal. Fonct. – 1979-1980. – Vol. 13-14. – Pp. 43.

163. *Pisier G.* Some applications of the metric entropy condition to harmonic analysis / G. Pisier // Lect. Notes Math. – 1983. – Vol. 995. – Pp. 123-154.

164. *Piterbarg V. I.* Asymptotic methods in the theory of Gaussian processes and fields / V. I. Piterbarg. – Providence: AMS, 1996. – 205 p. – (Transl. of Math. Monographs, Vol. 148).

165. *Rao M. M.* Theory of Orlicz spaces / M. M. Rao, Z. D. Ren. – New York – Basel – Hong Kong: Marsel Dekker, 1991. – 445 p.

166. *Rao M. M.* Applications of Orlicz spaces / M. M. Rao, Z. D. Ren. – New York – Basel: Marsel Dekker, 2001. – 464 p.

167. *Ripley B. D.* Stochastic simulation / B. D. Ripley. – New York: Wiley, 1987. – 237 p.

168. *Slutsky E.* Alcuno proposizioni sulla teoria delle funzioni aleatorie / E. Slutsky // Giorn. Inst. Italiano degli Attuari. – 1937. – Vol. 8. – Pp. 193-199.

169. *Sun T. C.* On simultaion of Gaussian Stationary Process / T. C. Sun, Chaika Milton // Journal of Time Series Analysis. – 1997. – Vol. 18, № 1. – P. 79–93.

170. *Talagrand M.* Regularity of Gaussian processes / M. Talagrand // Acta Math. – 1987. – No. 159. – Pp. 99-149.

171. *Vyzhva Z. O.* About approximation of 3-D random fields and statistical simulation / Z. O. Vyzhva // Random operators and Stochastic Equations. – 2003. – Vol. 11, № 3. – P. 255-266.

172. *Weber M.* Analyse infinitesimale de fonctions aleatorie / M. Weber // Ecole d'Ete de Probabilites de St-Flour, 1981, Lecture Notes in Mathematics. – Berlin – Heidelberg: Springer Verlag, 1983. – Vol. 976. – Pp. 381-465.

173. *Yakovenko T.* Condition under which processes belong to Orlicz spaces in case of noncompact parametric set / T.O. Yakovenko // Theory of Stochastic Processes. – 2004. – Vol. 10, no. 26, issue 1-2. – Pp. 178-183.

174. *Yurinsky V.* Sums and Gaussian vectors / V. Yurinsky. // Lecture Notes in Mathematics – Berlin: Springer, 1995. – 315 p. – (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1617).

Предметний покажчик

Наукове видання

КОЗАЧЕНКО Юрій Васильович
МЛАВЕЦЬ Юрій Юрійович
МОКЛЯЧУК Олександр Михайлович

Квазібанахові простори випадкових величин

Монографія

Друкується за авторською редакцією
Коректура авторська

Підписано до друку 15.06.2015. Формат 60x84/16.
Друк офсет. Папір офсет. № 1. Гарнітура Antiqua, Textbook.
Ум.-друк. арк. 7,09. Облік.-вид. арк. 5,64.
Тираж 300 прим. Зам. № 285.

Всеукраїнське державне видавництво "Карпати".
Директор – Віктор Браславець.
88000, м. Ужгород, пл. Жупанатська, 17.
Тел./факс: (03122) 3-23-66, тел.: (0312) 61-26-93
e-mail: vidkarpaty@mail.ru

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції:
Серія ДК 512 від 27.06.2001 р.,
видане Державним комітетом інформаційної політики, телебачення та радіомовлення України.

Віддруковано у ТОВ "Спектраль"
88000, м. Ужгород, вул. Гагаріна, 36.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції:
Серія ЗТ № 14 від 09.07.2001 р.