Ф. Е. Гече

Теорія ймовірностей і математична статистика

Частина 1

Теорія ймовірностей

Навчальний посібник у двох частинах

Ужгород 2018

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА КІБЕРНЕТИКИ І ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Рецензенти:

В. В. Маринець, д. ф. – м. н., проф. (ДВНЗ “УжНУ”)

П. В. Слюсарчук, к. ф. – м. н., проф. (ДВНЗ “УжНУ”)

Грече Ф. Е.

Теорія ймовірностей і математична статистика. Навч. метод. посібник. У 2 ч. – Ч. 1. Теорія ймовірностей. – Електронне видання, 2018. – 166 с.

У першій частині навчального посібника подаються основи теорії ймовірностей – науки, що вивчає закономірності масових подій. Матеріал поділено на 7 тем, у межах кожної з яких виклад побудовано за однією і тією самою методикою: усі теоретичні відомості ілюструються численними прикладами, що розкривають зміст усіх означень, тверджень і висновків, наприкінці наводяться запитання для контролю та самоконтролю, а також приклади для розв’язування.

Посібник розрахований на студентів нематематичних факультетів усіх форм навчання.

Рекомендовано до видання кафедрою кібернетики і прикладної математики.
(протокол №7 від 30.01.2018 р.)

ВСТУП

Теорія ймовірностей – математична наука, яка вивчає закономірності масових випадкових явищ. Під **масовими випадковими явищами** розуміють явища з невизначеними результатами, які відбуваються при багаторазовому відтворенні одного і того же випробування (спроби, експерименту). Наприклад, при підкиданні монети не можна передбачити яким боком вона впаде, результати зважувань одного і того ж тіла і т. д. Неоднозначність результату в наведених прикладах пояснюється тим, що при збереженні основних умов випробування не враховується зв'язок з багатьма другорядними факторами, які змінюються від спроби до спроби й вносять елементи невизначеності до їхніх результатів.

Теорія ймовірностей започаткована у XVII столітті в роботах П. Ферма (1601 – 1665), Б. Паскаля (1623 – 1662), Х. Гюйгенса (1629 – 1695), Я. Бернуллі (1654 – 1705), П. Лапласа (1749 – 1827) та К. Гаусса (1777 – 1855). Вона розвивалася спочатку як прикладна наука. Полем її застосування були в той час азартні ігри, страхування та демографія.

Подальший розвиток теорії ймовірностей показав її тісний зв'язок з фундаментальними і прикладними задачами, а саме: теорії похибок спостережень, теорії стрільби, загальної теорії зв’язку, теорії надійності, теорії масового обслуговування, статистики, автоматичного керування тощо.

Значний внесок у розвиток теорії ймовірностей зробили П. Л. Чебишев (1821 – 1894), А. А. Марков (1856 – 1922), А. М. Ляпунов (1857 – 1918), А. Н. Колмогоров (1903 – 1987), А. Я. Хінчин (1894 – 1959), Б. В. Гнеденко (1912 – 1995), В. С. Королюк, В. С. Михалевич (1930 – 1994), А. В. Скород, М. І. Ядренко (1932 – 2004) та інші.

Нині основні методи теорії ймовірностей широко використовуються при розв’язуванні різних фундаментальних і прикладних задач, коли необхідно врахувати дію випадкових факторів. Вони служать надійною теоретичною базою для математичної статистики.

Математична статистика – це розділ математики, який безпосередньо пов'язаний з теорією ймовірностей, у якому вивчаються методи обробки й аналізу експериментальних даних, отриманих у результаті спостережень над масовими випадковими явищами.

Методи математичної статистики можна розділити на два класи. До першого класу, як правило, відносять описові (дескриптивні) методи, які дозволяють описати реальні спостереження за допомогою таблиць, графіків, характеристик розсіювання й т. д. До другого класу – аналітичні методи, які дозволяють на підставі вибіркових спостережень зробити статистично значущі висновки про наявність закономірностей для всієї сукупності.

Математична статистика дає математично обґрунтований апарат для розв’язку задач керування й прогнозування за відсутності явних закономірностей (в умовах невизначеностей) у досліджуваних процесах.

Розділ 1. Випадкові події та їх ймовірності

1.1. Основні поняття та визначення теорії ймовірностей

На практиці часто зустрічаються такі ситуації, коли результат випробування (експерименту) неможливо передбачити. Наприклад, якщо підкинути монету, то вона має впасти або цифрою, або гербом догори, якщо підкинути гральний кубик, грані якого перенумеровані числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, то неможливо наперед передбачити, яке число буде на верхній грані кубика. Аналогічно, неможливо передбачити, чи не перегорить куплена нами електрична лампа після сто годин роботи, яке буде число виграшним на лотерейному білеті й т. д. У всіх цих випадках, результат експерименту залежить від багатьох факторів, певних випадків.

Подія називається випадковою по відношенню до деякого випробування (експерименту), якщо при здійсненні цього експерименту вона може настати, може і не настати.

Прикладом випадкової події може бути появлення „герба” при підкиданні монети, виграш по даному лотерейному білету, співпадіння дати народження у двох навмання вибраних людей певного міста.

Випадкові події позначаються великими буквами латинського алфавіту.

Наприклад, A – попадання у ціль, B – поява „герба”, C – поява бракованого виробу.

Серед випадкових подій відрізняють такі: вірогідні, неможливі, сумісні, несумісні, протилежні і рівні (рівноможливі).

Подія називається **вірогідною** у даному експерименті, якщо вона обов’язково настане в результаті його проведення.

Наприклад, якщо в урні лише червоні кульки, то подія „з урни взяли кульку червоного кольору” – вірогідна.

Подія називається **неможливою** у даному експерименті, якщо у даному експерименті вона не може настати.

Так, якщо в урні є лише зелені кульки, то подія „з урни взяли червону кульку” є неможливою.

Дві випадкові події називаються **сумісними** в даному експерименті, якщо поява однієї з них не виключає появи іншої в цьому ж експерименті.

Так, при підкиданні грального кубика, грані якого перенумеровані числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, випадкова подія A (на верхній грані кубика випало парне число) та випадкова подія B (на верхній грані кубика випало число, більше 3) є сумісними.

Дві випадкові події називаються **несумісними** в даному експерименті, якщо поява однієї з них виключає появу іншої в цьому ж експерименті.

Так, при підкиданні грального кубика, грані якого перенумеровані числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, випадкова подія A (на верхній грані кубика випало парне число) та випадкова подія B (на верхній грані кубика випало непарне число) – несумісні.

Дві випадкові події називаються **протилежними** в даному експерименті, якщо настання однієї з цих подій, означає, не настання іншої в цьому ж експерименті.

Наведемо приклади протилежних подій: попадання та промах при стрільбі, „герб” та „цифра” при підкиданні монети, чорна та біла кулька при виборі однієї кульки серед двох таких кульок.

Дві випадкові події A і B називаються **еквівалентними** у даному експерименті, якщо кожний раз, коли настає одна з них, настане і інша.

Наприклад, випадкова подія (не всі студенти даного курсу успішно склали іспит з теорії ймовірностей) і (хоча б один студент даного курсу отримав незадовільну оцінку на іспиті з теорії ймовірностей).

Слід відмітити, що в теорії ймовірностей розглядаються тільки масові випробування (експерименти), тобто такі випробування, які можуть бути проведені безліч разів (в одних і тих самих умовах). Отже, теорія ймовірностей вивчає закономірності масових випадкових подій.

1.2. Операції над випадковими подіями

Над випадковими подіями A і B, які пов’язані з одним і тим самим експериментом визначені операції: додавання, віднімання, множення і заперечення (протилежна подія).

Додавання. Сумою двох випадкових подій A та B називається така випадкова подія $C = A + B$ ($C = A \cup B$), яка внаслідок експерименту настає з настанням принаймні однієї з подій A або B.

Якщо настання події будемо позначати знаком „$+$”, а ненастання – знаком „$-$”, то сума двох подій визначається наступною таблицею:

Таблиця 1.1. Додавання двох випадкових подій.

A	B	$A + B$
$+$	$+$	$+$
$+$	$-$	$+$
$-$	$+$	$+$
$-$	$-$	$-$

Аналогічно визначається сума трьох випадкових подій, чотирьох і т. д.

Віднімання. Різницею двох випадкових подій A і B називається випадкова подія $C = A - B$ ($C = A \setminus B$), яка внаслідок експерименту настає з настанням події A і одночасним ненастанням подій B (Табл. 1.2).

Таблиця 1.2. Віднімання двох випадкових подій.

A	B	$A - B$
$+$	$+$	$-$
$+$	$-$	$+$
$-$	$+$	$-$
$-$	$-$	$-$

Множення. Добутком двох випадкових подій A і B називається випадкова подія $C = AB$ ($C = A \cap B$), яка внаслідок експерименту настає з одночасним настанням подій A та B (Табл. 1.3).

Таблиця 1.3. Добуток двох випадкових подій.

A	B	AB
$+$	$+$	$+$
$+$	$-$	$-$
$-$	$+$	$-$
$-$	$-$	$-$

Заперечення (протилежна подія). Протилежною подією випадкової події A називається випадкова подія $\overline{A}$, яка внаслідок експерименту настає з ненастанням події A і навпаки.

Таблиця 1.4. Протилежна випадкова подія.

A	$\overline{A}$
$+$	$-$
$-$	$+$

Якщо через Ω і $\emptyset$ відповідно позначити вірогідну і неможливу події відносно деякого експерименту, то основні властивості вищенаведених операцій можуть бути записані так:

I. **Комутативний закон**.

1. $A + B = B + A$
2. $AB = BA$

II. **Асоціативний закон**.

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$
2. $A(BC) = (AB)C$

III. **Дистрибутивний закон**.

1. $A(B + C) = AB + AC$
2. $A + (BC) = (A + B)(A + C)$

IV. Властивості $\emptyset$ і Ω.

1. $A + \emptyset = A$
2. $A\emptyset = \emptyset$
3. $\overline{\emptyset} = \Omega$
4. $\mathrm{A} + \Omega = \Omega$
5. $\mathrm{A}\Omega = A$
6. $\overline{\Omega} = \emptyset$
7. $A + \overline{A} = \Omega$
8. $A\overline{A} = \emptyset$

V. Закон іденпотентності.

1. $A + A = A$
2. $AA = A$

VI. Закон поглинання.

1. $A + AB = A$
2. $A(A + B) = A$

VII. Формули де Моргана.

1. $\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}$
2. $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$

VIII. Властивості доповнення, різниці і рівності.

1. $\overline{A} = \Omega \setminus A$
2. $\overline{\overline{A}} = A$
3. $\mathrm{A} \setminus B = A\overline{B}$
4. $(A = B) \Leftrightarrow (A\overline{B} + \overline{A}B = \emptyset)$, де символ „⇔” – знак еквівалентності.

Якщо розглянемо декілька випадкових подій відносно деякого експерименту A, B, C, D, ... і застосовуємо до них у будь-якому порядку операції додавання, множення, різниці, а також використовуємо перехід до протилежних випадкових подій, то можна побудувати різні комбінації випадкових подій, наприклад $AC + \overline{B}$, $\left(A\overline{C} + \overline{B}\right)D$, і різні формули: $\overline{(A + B)C} = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{C}$, $\overline{AC + B} = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{C}\,\overline{B}$ у множині випадкових подій.

Для встановлення випадків настання, чи ненастання комбінації випадкових подій, можна застосовувати Табл. 1.1 – Табл. 1.4. Наприклад, знайти випадки настання і ненастання комбінації $AB + \overline{C}$, де A, B і C випадкові події відносно деякого експерименту.

Таблиця 1.5. Випадки настання і ненастання випадкової події $AB + \overline{C}$

A	B	C	$\overline{C}$	$AB + \overline{C}$
$+$	$+$	$+$	$-$	$+$
$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
$+$	$-$	$+$	$-$	$-$
$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
$-$	$+$	$-$	$+$	$+$
$-$	$-$	$+$	$-$	$-$
$-$	$-$	$-$	$+$	$+$

За допомогою таблиць 1.1. – 1.4. можна перевірити рівність випадкових подій. Для цього побудуємо таблицю всіх випадків настання (ненастання) одної випадкової події, а потім таку ж таблицю для другої випадкової події і якщо випадки настання і ненастання цих випадкових подій співпадають, то вони рівні. Покажемо цей підхід на прикладі першої формули де Моргана: $\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}$.

Таблиця 1.6. Випадки настання і ненастання $\overline{A + B}$

A	B	$A + B$	$\overline{A + B}$
$+$	$+$	$+$	$-$
$+$	$-$	$+$	$-$
$-$	$+$	$+$	$-$
$-$	$-$	$-$	$+$

Таблиця 1.7. Випадки настання і ненастання $\overline{A}\,\overline{B}$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}\,\overline{B}$
$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$+$	$-$	$-$	$+$	$-$
$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
$-$	$-$	$+$	$+$	$+$

Як бачимо (Табл. 1.6., Табл. 1.7.) випадки настання і ненастання випадкових подій співпадають, тому вони рівні.

Для доведення рівностей двох випадкових подій можна використовувати основні властивості операцій над випадковими подіями. Наприклад, довести, що

$$(A+B)\left(A+\overline{B}\right)\left(\overline{A}+B\right)\left(\overline{A}+\overline{B}\right)=\emptyset.$$

Користуючись основними властивостями операцій над випадковими подіями, маємо

$$(A+B)\left(A+\overline{B}\right)\left(\overline{A}+B\right)\left(\overline{A}+\overline{B}\right)=\left(A+B\overline{B}\right)\left(\overline{A}+B\overline{B}\right)=B\overline{B}+A\overline{A}=\emptyset.$$

Розглянемо ще приклади на комбінації випадкових подій.

Приклад 1.1. Покупаються три лотерейні білети; подія A_1 означає виграш за першим білетом, A_2 – виграш за другим, A_3 – за третім. За допомогою цих подій утворюємо нову подію A:

$$A=A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3.$$

Згідно операціям додавання і множення, подія A настане в одному з трьох випадків: виграють 1-й і 2-й білети, виграють 1-й і 3-й, виграють 2-й і 3-й. Іншими словами випадкова подія A означає виграш не менше ніж по двом білетам.

Легко бачити, що випадкова подія

$$B=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$$

означає виграш по двом білетам.

Приклад 1.2. Електричний ланцюг між двома точками M і N складено за схемою, яку наведено на рис. 1.1. Розрив ланцюга (подія D) може відбутися внаслідок входу з ладу елементів a_1, a_2 – відповідні події A_1, A_2, елемента c – подія C та елементів b_1, b_2 – відповідні події B_1, B_2. Записати відповідні вирази для подій D і $\overline{D}$.

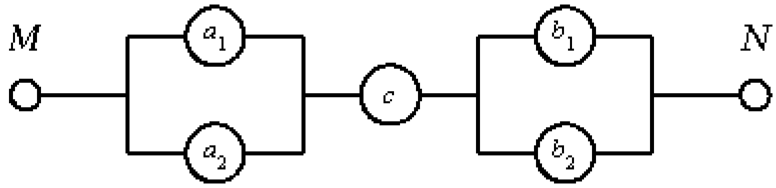


Рис. 1.1. Схема електричного ланцюга

Розірвання ланцюга відбувається в тому випадку, якщо вийдуть із ладу обидва елементи a_1і a_2 (подія A_1A_2), або елемент c (подія C), або обидва елементи b_1 і b_2 (подія B_1B_2), тому $D = A_1A_2 + C + B_1B_2$.

Ланцюг буде замкнений у тому випадку, якщо не вийде з ладу хоча б один з елементів a_1, a_2 (подія $\overline{A}_1 + \overline{A}_2$), елемент c (подія $\overline{C}$) і хоча б один з елементів b_1, b_2 (подія $\overline{B}_1 + \overline{B}_2$). Отже, $\overline{D} = (\overline{A}_1 + \overline{A}_2)\overline{C}(\overline{B}_1 + \overline{B}_2)$. Вираз для події $\overline{D}$ безпосередньо можна отримати з D за допомогою формул де Моргана і основних властивостей операцій над випадковими подіями. Дійсно,

$$\overline{D} = \overline{A_1A_2 + C + B_1B_2} = \overline{(A_1A_2 + C) + B_1B_2} =$$

$$= \overline{(A_1A_2 + C)}\;\overline{B_1B_2} = \overline{A_1A_2}\;\overline{C}\;\overline{B_1B_2} = (\overline{A}_1 + \overline{A}_2)\overline{C}(\overline{B}_1 + \overline{B}_2).$$

В цьому прикладі показали, як використовувати формули де Моргана до трьох випадкових подій. Аналогічно можна узагальнити ці формули для n $(n \geq 3)$ випадкових подій:

$$\overline{A_1 + A_2 + \cdots + A_n} = \overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n,$$

$$\overline{A_1A_2 \ldots A_n} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \cdots + \overline{A}_n.$$

Зауваження. Для наглядного зображення операцій над випадковими подіями, часто використовують діаграму Ейлера-Венна. У даному випадку кожна випадкова подія задається деякою фігурою (областю точок) на площині. При такому підході операції додавання відповідає **об'єднання** фігур, операції множення – **переріз** фігур, протилежній події $\overline{A}$ – доповнення до фігури A (рис. 1.2).

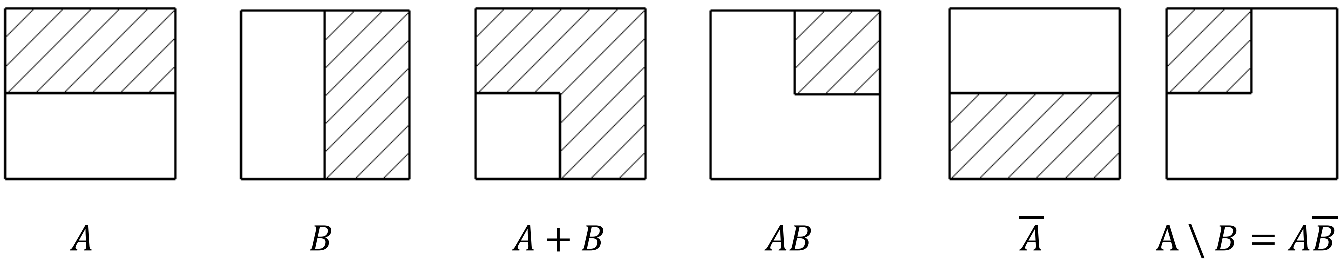


Рис. 1.2. Операції над випадковими подіями

Далі ми побачимо, що такий підхід є універсальним у певному розумінні.

Випадкові події A_1, A_2, …, A_n по відношенню до деякого експерименту утворюють **повну групу** подій, якщо їх сума є вірогідною подією, тобто $\Omega = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$.

1.3. Статистичне визначення ймовірності

Щоб дати це визначення, попередньо введемо поняття відносної частоти випадкової події. **Відносною частотою** появи випадкової події A називається відношення числа випробувань, у яких з'явилася ця подія, до числа всіх зроблених випробувань.

Позначимо через $W_n(A)$ відносну частоту події A, тоді за визначенням

$$W_n(A) = \frac{n(A)}{n}, \qquad (1.1)$$

де $n(A)$ – число випробувань, у яких з'явилася подія A, n – число всіх зроблених випробувань.

Очевидно, що формулу (1.1) можна використати тільки в тому випадку, коли випробування були проведені фактично.

Я. Бернуллі довів, що при необмеженому збільшенні числа випробувань ($n \to \infty$) відносна частота $W_n(A)$ виявляє властивість стійкості біля якоїсь постійної величини, що і беруть за ймовірність випадкової події A. Тому $W_n(A)$ при досить великій кількості випробувань (при великому натуральному числу n) називають статистичною (апостеріорною) ймовірністю.

У наведених експериментах Ж. Бюффона (1707 – 1788) і К. Пірсона (1857 – 1936) з визначення відносної частоти появлення „герба” при підкиданні монети були отримані результати, які наведені у Табл. 1.8.

Таблиця 1.8. Відносна частота за експериментальними даними.

Експериментатор	n	$n(A)$	$W_n(A) = n(A)/n$
Ж. Бюффон	4040	2048	0,5069
К. Пірсон	12000	6019	0,5016
К. Пірсон	24000	12012	0,5005

На основі даних Табл. 1.8 можна стверджувати, що відносна частота появлення „герба” групується навколо числа $1/_2$. Це число і є статистичною ймовірністю появлення „герба” у незалежних експериментах.

Виходячи з формули (1.1) маємо:

1. $0 \leq W_n(A) \leq 1$, де A – випадкова подія в серії n незалежних випробуваннях,
2. $W_n(\Omega) = 1$, де Ω – вірогідна подія,
3. $W_n(\emptyset) = 0$, де $\emptyset$ – неможлива подія.
4. Якщо під випадковими подіями A і B будемо розуміти скінченну множину точок на площині (кожна точка є результатом одного незалежного експерименту), то

$$W_n(A+B) = W_n(\mathrm{A}) + W_n(B). \tag{1.2}$$

Дійсно, якщо $n(A)$, $n(B)$ кількість точок, які відповідають несумісним випадковим подіям A і B, то $n(A+B) = n(A) + n(B)$ і

$$W_n(A+B) = \frac{n(A+B)}{n} = \frac{n(A)+n(B)}{n} = \frac{n(A)}{n} + \frac{n(B)}{n} = W_n(\mathrm{A}) + W_n(B).$$

5. Якщо A і B сумісні випадкові події відносно деякого експерименту ($A \cap B \neq \emptyset$) (під A і B, як і вище будемо розуміти скінченні множини точок на площині), то з урахуванням $AB = A \cap B$ маємо

$$W_n(A+B) = W_n(\mathrm{A}) + W_n(B) - W_n(AB).$$

З того, що $A \cap B \neq \emptyset$ безпосередньо випливає:

$$n(A+B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Тоді

$$W_n(A+B) = \frac{n(A+B)}{n} = \frac{n(A)+n(B)-n(A\cap B)}{n} = \frac{n(A)}{n} + \frac{n(B)}{n} - \frac{n(A\cap B)}{n} =$$

$$= W_n(\mathrm{A}) + W_n(B) - W_n(AB).$$

1.4. Простір елементарних випадкових подій

Для визначення поняття випадкових елементарних подій, розглянемо ряд прикладів, в яких під подіями будемо розуміти результати випробувань.

Приклад 1.3. Підкидаємо гральний кубик, зроблений з однорідного матеріалу, грані якого перенумеровані числами 1, 2, 3, 4, 5, 6.

При одному киданні кубика на його верхній грані може випасти будь-яке число очок від 1 до 6. Подію „при одному киданні випало i очок" позначимо через ω_i $(i = 1,2,\dots,6)$. Події ω_i вичерпують всі можливі результати заданого випробування і задовольняють наступні твердження:

- між собою вони несумісні;
- у кожному експерименті обов'язково настане одна і тільки одна з цих подій (утворюють повну групу незалежних подій);
- всі вони рівноможливі.

Випадкові події, які відносяться до одного й того ж експерименту і задовольняють вищенаведені три умови, називаються елементарними випадковими подіями. Зрозуміло, що жодну елементарну подію не можна записати у вигляді суми інших елементарних подій, тобто вони є нерозкладними.

Множину всіх елементарних випадкових множин $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6$ по відношення до даного експерименту називають простором елементарних випадкових подій і позначають $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$ (вони утворюють повну групу випадкових подій $\Omega = \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_6$). Довільну випадкову подію A $(A \subset \Omega)$ можна записати у вигляді суми деяких елементарних випадкових подій ω_{i_1}, $\omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_r}$, тобто $A = \omega_{i_1} + \ \omega_{i_2} + \cdots, +\omega_{i_r}$ $(i_1, i_2, \dots, i_r \in \{1,2,\dots,n\})$. Подія A називається складеною (розкладною) випадковою подією до даного експерименту. Очевидно, що $\omega_i \omega_j = \emptyset$ $(i \neq j)$.

Розглянемо складені випадкові події B і C. Нехай подія A полягає в тому, що при одному підкиданні кубика випало парне число очок, подія C – в тому, що випало число очок, кратне 3. Зрозуміло, що ці події є складеними, вони можуть бути розкладені на елементарні події: подія B настає тоді і тільки тоді, коли настає одна з елементарних подій $\omega_2, \omega_4, \omega_6$ $(B = \omega_2 + \omega_4 + \omega_6)$; так само настання події C еквівалентне настанню однієї з подій ω_3, ω_6 $(C = \omega_3 + \omega_6)$. Природно розглядати події A і B як відповідні множини елементарних подій: $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, $B = \{\omega_3, \omega_6\}$.

Приклад 1.4. Якщо двічі підкинути монету, то при кожному киданні вона може впасти догори „гербом” або „цифрою”, тому в цьому випадку є всього 4 результати випробування – елементарних подій: $\omega_1 = (\text{г}, \text{г})$, $\omega_2 = (\text{г}, \text{ц})$, $\omega_3 = (\text{ц}, \text{г})$, $\omega_4 = (\text{ц}, \text{ц})$ (г означає випадання герба, ц – цифри).

Розглянемо приклади складених подій: нехай подія A полягає в тому, що випало принаймні один „герб”, подія B – випало рівно одна „цифра”, тоді $A = \{\omega_1 = (\text{г}, \text{г}), \omega_2 = (\text{г}, \text{ц}), \omega_3 = (\text{ц}, \text{г})\}$, $B = \{\omega_2 = (\text{г}, \text{ц}), \omega_3 = (\text{ц}, \text{г})\}$.

1.5. Класичне означення ймовірності

Нехай $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ скінченний простір елементарних випадкових подій відносно певного експерименту.

Припустимо, що кожній елементарній події ω_i поставлено у відповідність деяке невід’ємне число $P(\omega_i) \geq 0$, таке що

$$P(\omega_1) + P(\omega_2) + \cdots + P(\omega_n) = 1.$$

Нехай $A = \left\{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\right\} \subset \Omega$ – довільна випадкова подія.

Ймовірністю $P(A)$ випадкової події A називається сума ймовірностей елементарних подій, тобто

$$P(A) = P\left(\omega_{i_1}\right) + P\left(\omega_{i_2}\right) + \cdots + P\left(\omega_{i_k}\right). \tag{1.3}$$

Нехай Ω розглянутий вище скінченний простір елементарних подій. Поставимо у відповідність кожній елементарній події $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ однакову ймовірність $P(\omega_i) = {}^1\!/_n$. У результаті одержимо простір з рівноймовірними елементарними подіями. У цьому просторі, якщо подія A є сумою k елементарних подій: $A = \omega_{i_1} + \omega_{i_2} + \cdots + \omega_{i_k}$, їх далі будемо називати сприятливими для A, то відповідно до рівності (1.3)

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{k \text{ разів}} = \frac{k}{n}\,, \tag{1.4}$$

де k – кількість елементарних подій, сприятливих для A, а n – кількість всіх можливих елементарних подій даного експерименту.

Визначення ймовірності за формулою (1.4) отримало назву класичного означення ймовірності. При виникненні теорії ймовірностей воно було в основі визначення ймовірності (звідки й термін „класичне”). Як випливає з означення, ймовірність випадкової події завжди безрозмірна величина.

Розгляд задач, пов’язаних з обчисленням ймовірності за класичним означенням, зручно проводити за наступною схемою:

а) з’ясувати, з чого складається випробування;

б) підібрати для цього випробування простір Ω так, щоб він складався тільки з рівноможливих елементарних подій;

в) знайти число всіх елементів простору елементарних випадкових подій Ω;

г) описати випадкову подію, ймовірність якої потрібно знайти;

д) указати, які елементарні події із числа рівноможливих є сприятливими для даної випадкової події, і підрахувати їх;

е) за формулою (1.4) обчислити шукану ймовірність.

Приклад 1.5. Підкидаються два гральні кубики. Знайти ймовірність наступних подій: $A = \{$число очок на обох кубиках збігаються$\}$, $B =\{$число очок на першому кубику більше, ніж на другому$\}$, $C =\{$сума очок парна$\}$, $D =\{$сума очок більше дев’яти$\}$, $E =\{$хоча б на одному кубику з’явиться число 6$\}$, $F =\{$добуток очок парний$\}$.

Кожен з кубиків може впасти шістьма різними способами. Тоді простір елементарних випадкових подій Ω запишеться так:

$$\begin{aligned}\Omega = \{&\omega_1 = (1,1), \omega_2 = (1,2), \dots, \omega_5 = (1,5), \omega_6 = (1,6),\\ &\omega_7 = (2,1), \omega_8 = (2,2), \dots, \omega_{11} = (2,5), \omega_{12} = (2,6),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\omega_{31} = (6,1), \omega_{32} = (6,2), \dots, \omega_{35} = (6,5), \omega_{36} = (6,6)\},\end{aligned}$$

де елемент (i, j) означає, що на першому кубику випало число i, а на другому число j, $n = 36$.

Очевидно, що для події A сприятливими будуть: (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6). Отже, $k = 6$ і $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Для події B сприятливими будуть: (2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5). Отже, $k = 15$ і $P(B) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

$C = \{$(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (4,6), (5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6)$\}$ і $P(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

$D = \{$(4,6), (5,5), (5,6), (6,2), (6,4), (6,5), (6,6)$\}$ і $P(D) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

$E = \{$(1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)$\}$ і $P(E) = \frac{11}{36}$.

$F = \{$(1,2), (1,4), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,2), (3,4), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)$\}$ і $P(F) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$.

1.6. Основні властивості ймовірності

Ймовірність випадкової події має наступні властивості:

1. Ймовірність вірогідної події Ω дорівнює одиниці.

Оскільки для Ω всі елементарні події є сприятливими, тобто $k = n$, тому $P(\Omega) = 1$.

2. Ймовірність неможливої події $\emptyset$ дорівнює нулю.

Оскільки для $\emptyset$ немає жодної сприятливої елементарної події, тобто $k = 0$ і $P(\emptyset) = 0$.

3. Ймовірність будь-якої випадкової події A задовольняє нерівність

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Будь-якій випадковій події A число елементарних подій дорівнює k, що задовольняє нерівність $0 \le k \le n$, тому $0 \le k/n \le 1$ і $0 \le P(A) \le 1$.

4. Якщо A і B несумісні випадкові події ($AB = \emptyset$), то

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (1.5)$$

Нехай $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\}$; $B = \{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \dots, \omega_{j_s}\}$ і $A \cap B = \emptyset$. Тоді $A + B = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}, \ \omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \dots, \omega_{j_s}\}$ і згідно (1.4) маємо

$$P(A + B) = \frac{k + s}{n} = \frac{k}{n} + \frac{s}{n} = P(A) + P(B).$$

Цю властивість можна узагальнити на будь-яке число попарно несумісних подій $A_1, A_2, \dots, A_m$, тобто

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_m) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_m). \qquad (1.6)$$

5. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці, тобто

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \qquad (1.7)$$

Протилежні події A і $\overline{A}$ несумісні і утворюють повну групу подій, тобто $A + \overline{A} = \Omega$. Тоді відповідно до властивостей 1 і 4, маємо

$$P(A + \overline{A}) = P(\Omega) = 1,$$

$$P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}).$$

Отже, $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

6. Для довільних випадкових подій A і B має місце рівність

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (1.8)$$

Дійсно, представимо суму випадкових подій $A + B$ у вигляді $A + B = B + A\overline{B}$ (Рис. 1.2). Випадкові події B і $A\overline{B}$ є несумісними. Тоді $P(B + A\overline{B}) = P(B) + P(A\overline{B})$ і

$$P(A + B) = P(B) + P(A\overline{B}). \qquad (1.9)$$

З іншого боку можна записати

$$A = A\Omega = A(B + \overline{B}) = AB + A\overline{B}. \qquad (1.10)$$

Випадкові події AB і $A\overline{B}$ несумісні, тому

$$P(AB + A\overline{B}) = P(AB) + P(A\overline{B}). \qquad (1.11)$$

Тоді з (1.10) і (1.11) маємо

$$P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}).$$

Звідси

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB). \qquad (1.12)$$

Підкладаємо отримане значення $P(A\overline{B})$ з (1.12) в (1.9), маємо

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Ймовірність від суми трьох довільних випадкових подій A, B, C знаходимо за формулою

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

Дійсно,

$$P(A+B+C)=P[(A+B)+C]=P(A+B)+P(C)-P[(AB)C]=$$
$$=P(A)+P(B)-P(AB)+P(C)-P(AC+BC)=$$
$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-\big(P(AC)+P(BC)-P(ACBC)\big)=$$
$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

У доведенні формули використали властивості операції над випадковими подіями: $ACBC=ABCC=ABC$.

Аналогічно можна знайти ймовірність від суми чотирьох, п'яти і т. д. довільних випадкових подій.

7. Для довільних випадкових подій A і B має місце рівність

$$P(A+B)=1-P\big(\overline{A}\,\overline{B}\big). \qquad (1.13)$$

Випадкові події $A+B$ і $\overline{A+B}$ є протилежними, тобто

$$(A+B)+\big(\overline{A+B}\big)=\Omega.$$

Тоді

$$P(A+B)+P\big(\overline{A+B}\big)=P(\Omega)=1. \qquad (1.14)$$

З останньої рівності, враховуючи формулу де Моргана $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$, маємо

$$P(A+B)+P\big(\overline{A}\,\overline{B}\big)=1.$$

Звідси,

$$P(A+B)=1-P\big(\overline{A}\,\overline{B}\big). \qquad (1.15)$$

Формулу (1.15) можна узагальнити для довільної скінченної кількості випадкових подій $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$P(A_1+A_2+\dots+A_n)=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\dots\,\overline{A_n}). \qquad (1.16)$$

Класичне означення ймовірності випадкових подій є гарною математичною моделлю при розв'язанні задач зі сфери азартних ігор, лотерей, організації вибіркового контролю і т. д. Це означення базується на тому, що число елементарних подій є скінченним. Однак, на практиці ж зустрічаються задачі, коли простір елементарних випадкових подій Ω містить нескінченно багато елементів. Застосувати класичне означення ймовірності у таких випадках неможна.

Часто неможливо подати елементарні події певного експерименту у вигляді рівноможливих і несумісних подій. Тому поруч із класичним означенням ймовірності використовують й інші, як вище було наведено – статистичні, окрім цього, геометричні та аксіоматичні.

1.7. Геометрична ймовірність

Для обчислення ймовірності появи події A в тому випадку, коли число елементарних подій нескінченно, часто використовують деякі поняття геометрії, якщо дозволяють обставини експерименту. У всіх цих випадках передбачається можливість проведення будь-якого числа випробувань, а поняттю рівноможливості приділяється головна роль.

Нехай Ω простір елементарних випадкових подій, що містить нескінченну кількість елементів, відносно деякого експерименту і A випадкова подія ($A \subset \Omega$) відносно цього ж експерименту.

Під геометричною ймовірністю $P(A)$ випадкової події A розуміють відношення

$$P(A) = \frac{\text{mes } A}{\text{mes } \Omega}, \tag{1.17}$$

де $\text{mes } A$ ($\text{mes } \Omega$) – міра множини A (простору Ω). Слово mes від французького слова mesure – міра. Міра визначається так:

- якщо результати даного експерименту можна задати на прямій (одновимірний випадок), то під мірою будемо розуміти довжину відрізка;

- якщо результати експерименту можна задати точками на площині (двовимірний випадок), то під мірою будемо розуміти площу;

- якщо для представлення результатів експерименту потрібні точки тривимірного простору (тривимірний випадок), то під мірою множини будемо розуміти об’єм.

Приклад 1.6. Задача про зустріч. Два студенти домовилися про зустріч у деякий проміжок часу, причому кожен з них приходить туди незалежно від другого у випадковий момент часу між 12 і 13 год. Той, хто приходить першим, чекає 20 хв. і, якщо другий за цей час не прийде, перший залишає місце зустрічі. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться.

Позначимо моменти приходу студентів відповідно через x і y. Тоді за простір елементарних випадкових подій Ω можна взяти квадрат у площині xOy:

$$\Omega = \{(x, y) \in xOy \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Згідно з умовою студенти зустрінуться тоді і тільки тоді, $|y - x| \leq 1/3$ (різниця між моментам приходу не перевищує 20 хв.). Це означає, що зустрічі (подія A) відповідають точки Ω, для яких виконується зазначена нерівність, тобто

$$A = \left\{(x, y) \in \Omega \mid |y - x| \leq \frac{1}{3}\right\}.$$

Враховуючи властивість нерівності $|z| \leq a \Leftrightarrow -a \leq z \leq a$ точки події A визначаються так:

$$\left(|y - x| \leq \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{3} \leq y - x \leq \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3} \leq y \leq x + \frac{1}{3}\right).$$

Їй відповідає область, заштрихована на рис. 1.3)

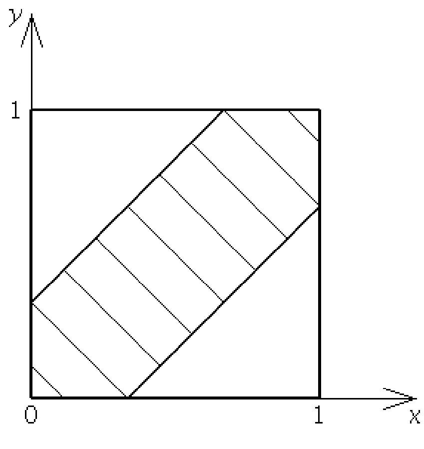


Рис. 1.3. Геометрична інтерпретація події A

Очевидно, що $\text{mes}\,\Omega = 1$ (кв.од.) і $\text{mes}\,A = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ (кв.од.). Тоді за означенням (1.17)

$$P(A) = \frac{5}{9}.$$

Приклад 1.7. Олівець довжиною l довільним чином розломлюють на три частини. Яка ймовірність того, що з цих частин можна побудувати трикутник.

Позначимо через x, y, і $l-(x+y)$ відповідні довжини відрізків. Тоді простір елементарних подій на площині xOy задається так:

$$\Omega = \{(x,y) \in xOy \mid 0 < x < l, 0 < y < l, 0 < x + y < l\}.$$

Точки Ω задають трикутник (Рис. 1.4), який заштрихований один раз.

Для того, щоб з трьох частин олівця можна було побудувати трикутник (подія A), необхідно і достатньо, щоб сума двох частин була більша третьої частини, тобто

$$A\colon \begin{cases} x + l - (x+y) > y, \\ y + l - (x+y) > x, \\ x + y > l - (x+y). \end{cases}$$

Отже,

$$\begin{cases} y < l - y, \\ x < l - x, \\ l - (x+y) < (x+y). \end{cases}$$

З останньої системи нерівностей безпосередньо впливає, що

$$\mathrm{A} = \left\{(x,y) \in \Omega \mid 0 < x < \frac{l}{2}, 0 < y < \frac{l}{2}, x + y > \frac{l}{2}\right\}.$$

На рис. 1.4. множина А заштрихована у два рази

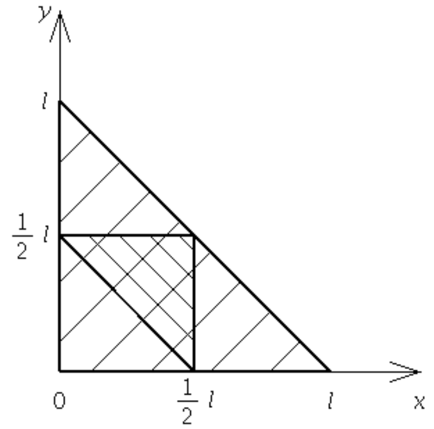


Рис. 1.4. Простір Ω і подія A.

Знаходимо міри (площа) Ω і A:

$$\operatorname{mes}\Omega = \frac{1}{2} l \cdot l = \frac{1}{2} l^2; \quad \operatorname{mes} A = \frac{1}{2}\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2} = \frac{l^2}{8}.$$

Тоді згідно (1.17) маємо

$$P(A) = \frac{l^2/8}{l^2/2} = \frac{l^2}{8}\cdot\frac{2}{l^2} = \frac{1}{4}.$$

1.8. Аксіоматичне визначення ймовірності

Теорію ймовірностей, як будь-яку іншу науку можна будувати **аксіоматичним методом**. Він полягає в тому, що на самому початку фіксуються первинні поняття даної теорії, які не підлягають визначенню. Основні властивості цих понять задаються у вигляді ряду аксіом. Після цього всі твердження теорії виводяться з аксіом строго логічним шляхом. Сучасна аксіоматика теорії ймовірностей була розроблена на початку 30-х років XX-го століття А.М. Колмогоровим (1903 – 1987).

1.8.1. Аксіоми подій. Нехай Ω – довільний простір елементарних подій. Система підмножин S простору Ω називається **алгеброю подій**, якщо виконуються наступні умови (аксіоми):

1) $A \in S,\ B \in S$, то $A + B \in S$, тобто якщо A і B події (елементи системи S називаються подіями), то їх сума також є подією;

2) $A \in S$, то $\overline{A} \in S$, тобто якщо A подія, то $\overline{A} = \Omega \setminus A$ також є подією.

З 1) випливає, якщо $A_1, A_2, \dots, A_n$ (n – скінченне число) – події, то їх сума $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ також є подією, тобто $A_1 + A_2 + \cdots + A_n \in S$.

Покажемо деякі наслідки аксіом 1) і 2).

Система *S* містить простір елементарних подій Ω. Дійсно, якщо $A \in S$, то за аксіомою 2) впливає, що $\overline{A} \in S$. Тоді за аксіомою 1) $\Omega = A + \overline{A} \in S$.

Система *S* містить добуток двох подій. Нехай $A \in S$ і $B \in S$. Тоді $A \in S$, $B \in S$ і $\overline{A} + \overline{B} \in S$. Використовуючи знову аксіому 2) маємо $AB = \overline{\overline{A} + \overline{B}} \in S$. Аналогічно можна показати, що для скінченого числа подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ із S, має місце $A_1 A_2 \dots A_n \in S$.

Система *S* містить різницю двох подій.

Нехай $A \in S$ і $B \in S$. Тоді $\overline{B} \in S$ і $A \setminus B = A\overline{B} \in S$.

1.8.2. Аксіоми ймовірностей. Наведемо аксіоми, які задають саме поняття ймовірності:

1) Кожній події $A \in S$ поставимо у відповідність невід’ємне число $P(A)$, яке називається ймовірністю події A;

2) Якщо події A і B несумісні події, то $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

3) $P(\Omega)=1$.

Аксіоми 1) – 3) є в основі теорії ймовірностей. Всі теорем теорії ймовірностей, включаючи найскладніші, виводяться з них формально-логічним шляхом.

Покажемо приклад такого виводу.

Застосувавши аксіоми 2) і 3) до рівності

$$A+\overline{A}=\Omega,$$

маємо:

$$P(A)+P\left(\overline{A}\right)=1,$$

Звідси, враховуючи, що $P(A)\geq 0$ і $P\left(\overline{A}\right)\geq 0$ випливає:

$$P(A)\leq 1,$$

де A – довільна подія. Цей факт не міститься в жодній із аксіом 1) – 3).

Сукупність трьох об’єктів $\{\Omega, S, P(A)\}$, у якій S – алгебра подій, а функція $P(A)$ задовольняє всі аксіоми теорії ймовірностей називається ймовірнісним простором (ймовірнісною схемою).

Теоретичні запитання до розділу 1

1. Що називається вірогідною, неможливою подією? Навести приклади.
2. Яка подія називається випадковою? Навести приклади.
3. Коли випадкові події A і B по відношенню до одного й того ж експерименту називаються несумісними? Навести приклади.
4. Що називається сумою, добутком і різницею випадкових подій A і B відносно одного й того ж експерименту? Навести приклади.
5. Що називається протилежною подією до випадкової події A? Навести приклади.
6. Що називається повною групою випадкових подій по відношенню до даного експерименту? Навести приклади.
7. Коли випадкові події $A_1, A_2, \dots, A_n$, відносно даного експерименту, називаються попарно несумісними? Навести приклади.
8. Яка подія називається елементарною, складеною випадковою подією? Навести приклади.
9. Що називається простором елементарних подій? Навести приклади.
10. Наведіть аксіоми подій.
11. Що таке алгебра подій?
12. Що називається відносною частотою випадкової події?
13. Що таке статистична ймовірність випадкової події?
14. Дати класичне означення ймовірності випадкової події. Навести приклади.
15. Що називається геометричною ймовірністю випадкової події? Навести приклади.
16. Аксіоми теорії ймовірності.
17. Відомо, що A_i $(i = 1,2, \dots, n)$ утворюють повну групу випадкових подій. Чому дорівнює $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n)$?
18. Нехай A і B несумісні випадкові події. Чому дорівнює $P(A + B)$?
19. Відомо, що A, B і C сумісні випадкові події. Чому дорівнює $P(A + B + C)$?
20. Чи є протилежні події несумісними? Навести приклади.

Приклади до розділу 1

1. Тричі кидають монету. Описати простір елементарних подій.
2. Стрілець двічі стріляє у мішень: A – влучення при першому пострілі, B – при другому. Описати простір елементарних подій. Записати подію, яка полягає в тому, що:

   а) стрілець влучив у мішень принаймні один раз (подія C);

   б) стрілець влучив у мішень рівно один раз (подія D);

   в) стрілець влучив у мішень рівно два раз (подія E);

   г) стрілець не влучив у мішень;

   д) довести рівності $\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$.
3. В урні лежать 4 кулі, занумеровані числами 1, 2, 3, 4. Навмання виймаються дві кулі. Описати простір елементарних подій. Записати елементарні події, сприятливі для подій:

   а) A – „вийняли дві кулі з парними номерами";

   б) B – „сума цифр на двох кулях не менша 5".
4. Нехай A, B, C – деякі випадкові події. Записати вираз для подій, які полягають у тому, що:

   а) настала тільки подія A;

   б) настали події A і B, але подія C не настала;

   в) настала принаймні одна з цих подій;

   г) не настала жодна з цих подій;

   д) настали всі три події;

   д) настало не більше двох подій.
5. Нехай A, B і C – довільні випадкові події відносно деякого експерименту. Чи справджується рівність $BC - A = B + B(C - A)$ в алгебрі випадкових подій, де A, B, C – довільні випадкові події одного й того ж експерименту?
6. Довести, що в алгебрі випадкових подій справджується рівність $B - AC = (B - C) + B\overline{A}$, де A, B, C – довільні випадкові події відносно деякого експерименту.

7. Довести, що для довільних випадкових подій A, B і C відносно одного й того ж експерименту має місце рівність $A - \overline{B + C} = AB + A(C + B)$.
8. Чи справджується рівність $\overline{A}(B + C) = (\overline{A} + \overline{B})(\overline{A(C + B)})$ в алгебрі випадкових подій, де A, B, C – довільні випадкові події відносно певного експерименту?
9. Довести, що для довільних випадкових подій A, B, C відносно одного й того ж експерименту має місце рівність $A(B + C) = \left(A - \overline{B}\right) + A(C + B)$.
10. Задано множну цілих чисел $\{1,2,3,\ldots,50\}$. Навмання з цієї множин беруть одне число. Яка ймовірність того, що

    а) воно виявиться кратним 3? (подія A);

    б) воно виявиться кратним 4? (подія B).
11. Є дві коробки. У першій коробці 1 біла куля, 3 чорних і 4 червоних. У другій коробці – 3 білих, 2 чорних і 3 червоних. З кожної коробки навмання виймають одну кулю. Знайти ймовірності наступних подій:

    а) знайти ймовірність того, що кулі одного кольору;

    б) знайти ймовірність того, що серед вийнятих куль є одна біла;

    в) знайти ймовірність того, що серед вийнятих куль є хоча б одна біла.
12. Задано множину цілих чисел $\{1,2,3,\ldots,40\}$. Навмання з цієї множин беруть одне число. Яка ймовірність того, що

    а) воно виявиться кратним 2? (подія A);

    б) воно виявиться кратним 7? (подія B);

    Знайти ймовірність наступних подій: $\overline{A + B}$, $A - B$, $B - A$, $\overline{AB}$.
13. Гральний кубик підкидають двічі. Знайти ймовірності наступних подій:

    а) у сумі випаде 7 очок (подія A);

    б) у сумі випаде не менше 10 очок (подія B);

    в) за два кидки випаде однакова кількість очок (подія C);

    г) за два кидки випаде різна кількість очок (подія D);

    д) знайти $P(A + B)$, $P(C + D)$, $P(CD)$, $P(\overline{C}D)$.

14. Стрілець A влучає в мішень з ймовірністю $p_1 = 0{,}7$, стрілець B – з ймовірністю $p_2 = 0{,}6$, а стрілець C – з ймовірністю $p_3 = 0{,}4$. Стрільці зробили залп по мішені. Знайти ймовірність наступних подій:

    а) в мішень є два влучення (подія A);

    б) в мішень є не більше одного влучення (подія B);

    в) в мішень нема жодного влучення (подія C);

    г) знайти $P(\overline{A})$, $P(\overline{C})$, $P(A\overline{B})$.

15. Ймовірність попадання в ціль з чотирьох рушниць така: $p_1 = 0{,}7$, $p_2 = 0{,}75$, $p_3 = 0{,}9$, $p_4 = 0{,}8$. Знайти ймовірність наступних подій:

    а) A – є рівно одне попадання;

    б) B – є рівно два попадання;

    в) C – є не менше двох попадань;

    г) D – є хоча б одне попадання.

16. Відомо, що $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}7$, $P(AB) = 0{,}5$. Знайти $P\left(A + \overline{B}\right)$.

17. Відомо, що $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}65$, $P(AB) = 0{,}4$. Знайти $P\left(\overline{AB}\right)$.

18. Точку $M(x, y)$ кидають в квадрат з вершинами $A(-1, -1)$, $B(-1{,}1)$, $C(1{,}1)$, $D(1, -1)$. Знайти ймовірність того, що квадратне рівняння $z^2 + 2xz + y = 0$ має дійсні корені.

19. Точку $M(x, y)$ кидають в прямокутну область з вершинами $A(0, -2)$, $B(0{,}2)$, $C(2{,}2)$, $D(2, -2)$. Знайти ймовірність того, що квадратне рівняння $z^2 + xz + y = 0$ не має дійсних коренів.

20. З відрізку $[-2; 2]$ навмання вибирають два числа x і y. Знайти ймовірність того, що $xy > 1$, і $x < y$.

21. З трикутнику з вершинами $A(-2{,}0)$, $B(0{,}2)$ і $C(2{,}0)$ навмання вибрали точку $M(x, y)$. Знайти ймовірність того, що $y \leq \sqrt{x}$.

22. З відрізку $[-1; 1]$ навмання вибрали два числа x і y. Знайти $P(A - B)$, якщо подія A полягає в тому, що $y + 1 > x^2$, а подія B у тому, що $x + y > 1$.

23. З відрізку $[-1; 1]$ навмання вибрали два числа x і y. Знайти ймовірність того, що $y \leq 1 - x^2$.

24. Стержень завдовжки l розламали на дві частини. Знайти ймовірність того, що довжина меншої частини не перевищуватиме $l/3$.
25. Ланцюг технічного пристрою між точками M і N складено за схемами, які зображені на рисунках 1.5. – 1.7. Різні елементи ланцюга працюють назалежно одне від одного з надійностями: $p_1 = 0{,}8$, $p_2 = 0{,}7$, $p_3 = 0{,}6$, $p_4 = 0{,}9$. Знайти надійність пристрою в цілому.

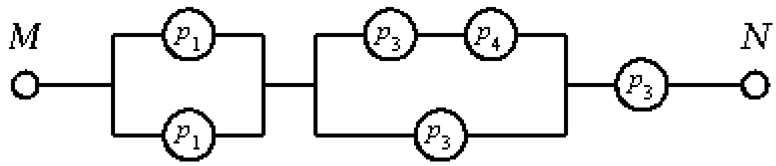


Рис. 1.5. Ланцюг технічного пристрою 1.

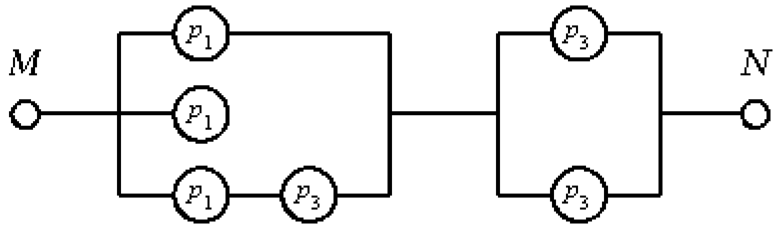


Рис. 1.6. Ланцюг технічного пристрою 2.

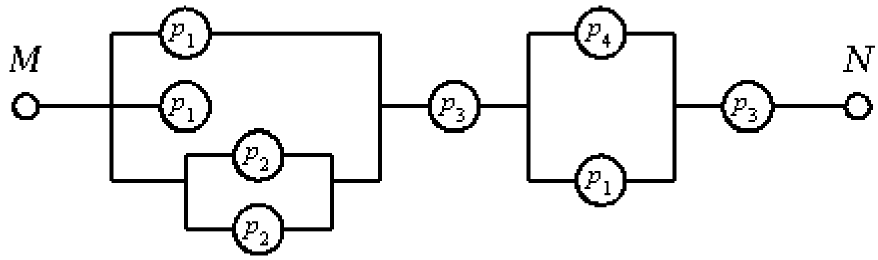


Рис. 1.7. Ланцюг технічного пристрою 3.

Розділ 2. Елементи комбінаторики

На практиці часто доводиться вибирати з деякої скінченної множин елементів їх підмножини, яким притаманна заздалегідь задана властивість, розташувати елементи однієї або декількох множин у зазначеному порядку й т. д. Оскільки в таких задачах мова йде про ті або інші комбінації елементів, то їх називають комбінаторними, а розділ математики, в якому вивчаються ці задачі, називається комбінаторикою. Комбінаторика не належить безпосередньо до теорії ймовірностей і математичної статистики, проте відіграє важливу роль при обчисленні ймовірностей різних подій, пов'язаних з експериментами, які мають скінченне число результатів. Наприклад, за класичним означенням ймовірність $P(A)$ випадкової події A, яка пов'язана з деяким експериментом, знаходиться за формулою

$$P(A) = \frac{k}{n},$$

де n – число всіх елементарних подій, а k – число елементарних подій, які сприятливі для A. Числа n і k у багатьох задачах знаходяться за допомогою методів комбінаторики.

Крім теорії ймовірностей, комбінаторика використовується в обчислювальній техніці, теорії автоматів, у деяких задачах економіки, біології й т. д.

2.1. Правила суми і добутку

Розв'язування багатьох комбінаторних задач базується на двох основних правилах, які відповідно називаються правилами суми і добутку.

1. Правило суми. Якщо множини $X_1, X_2, \dots, X_k$ попарно не перетинаються й містять відповідно $n_1, n_2, \dots, n_k$ елементів, то число елементів у їхньому об'єднанні X $(X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k)$ дорівнює $n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Приклад 2.1. У коробці знаходяться олівці: 7 червоних, 9 зелених і 10 синіх. Скільки існує способів витягнення з коробки одного червоного або зеленого олівця?

Розв'язання. Олівець червоного кольору можна дістати з коробки $n_1 = 7$ способами, а зеленого $n_2 = 9$ – способами. За правилом суми існує $n_1 + n_2 = 16$ способів дістати один червоний або зелений олівець.

2. Правило добутку. Нехай $X_1, X_2, \dots, X_k$ довільні скінченні множини (множини можуть перетинатися), які містять відповідно $n_1, n_2, \dots, n_k$ елементів. З елементів цих множин побудуємо упорядковану послідовність з k елементів наступним чином:

$$(x_1, x_2, \dots, x_k),$$

де $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_k \in X_k$.

Далі такі упорядковані послідовності будемо назвати рядками з довжиною k. Два рядки $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ і $(y_1, y_2, \dots, y_k)$ будемо вважати різними в тому і тільки тому випадку, якщо хоча б для одного номера $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $x_i \neq y_i$.

Правило добутку може бути сформульоване наступним чином: кількість різних рядків з довжиною k, які можуть бути побудовані з елементів множин $X_1, X_2, \dots, X_k$ дорівнює добутку $n_1 n_2 \dots n_k$.

Приклад 2.2. Скількома способами можна вибрати чотиризначне натуральне число, усі цифри якого різні?

Розв'язання. У десятковій системі числення десять цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. На першому місці може стояти будь-яка з дев'яти цифр (крім нуля), тобто $n_1 = 9$. На другому місці – будь-яка із тих, що залишилися, крім вбраної (тут можна використати й цифру – нуль), тобто $n_2 = 9$. Третю цифру можна вибрати $n_3 = 8$ способами, а четверту $n_4 = 7$ – способами. За правилом добутку, шукане число способів вибору чотиризначного числа з різним цифрами дорівнює $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 =$ $= 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$.

Приклад 2.3. Скільки можна скласти п'ятизначних натуральних чисел так, щоб будь-які дві сусідні цифр числа були різними?

Розв'язання. Будь-якому п'ятизначному натуральному числу можна поставити у відповідність рядок $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, де $x_1 \in \{1, 2, \dots, 9\}$, $x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Для вибору x_1 маємо дев'ять можливостей, для вибору x_2 також дев'ять, тому що $x_2 \neq x_1$, аналогічно для x_3 – дев'ять ($x_3 \neq x_2$) і т. д. Застосовуючи правило добутку, маємо, що кількість таких натуральних чисел дорівнює добутку: $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^5$.

Приклад 2.4. Скільки різних підмножин має множина $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$?

Розв'язання. Нехай X – довільна підмножина в A. Задаємо підмножину X за допомогою рядка $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ наступним чином: $x_1 = 1$, якщо a_1 входить в X і $x_1 = 0$, якщо $a_1 \notin X$; $x_2 = 1$, якщо $a_2 \in X$ і $x_2 = 0$, якщо $a_2 \notin X$ і т. д. В результаті кожній підмножині X ставиться у відповідність рядок довжиною n, що складається з 0 і 1. І навпаки, кожний рядок з довжиною n, що складається з 0 і 1 однозначно визначає підмножину X в A (наприклад, у випадку $n = 5$ рядок $(1, 0, 0, 1, 1)$ визначає підмножину $X = \{a_1, a_4, a_5\}$). За правилом добутку, кількість різних рядків з довжиною n, елементами якого є 0 і 1, дорівнює добутку n чисел 2: $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^n$. Отже, кількість різних підмножин множини A дорівнює 2^n.

2.2. Розміщення

1. Розміщення без повторень. Нехай $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. З різних елементів множини X утворюємо k-елементну упорядковану множину (рядок з довжиною k)

$$(x_1, x_2, \dots, x_k). \tag{2.1}$$

Рядок (2.1) називається розміщенням без повторень з n елементів по k ($k \le n$).

Наприклад, із трьох елементів x_1, x_2, x_3 можна утворити три розміщення без повторень по одному: $(x_1), (x_2), (x_3)$; по два – шість розміщень без повторень: $(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_3, x_2)$; по три – шість розміщень без повторень $(x_1, x_2, x_3), (x_1, x_3, x_2), (x_2, x_1, x_3), (x_2, x_3, x_1), (x_3, x_1, x_2), (x_3, x_2, x_1)$.

Основна задача при вивченні розміщень без повторень полягає в тому, щоб вивести формулу, за якою можна було б підрахувати кількість всіх розміщень без повторень з n елементів по k.

Позначимо кількість всіх розміщень без повторень з n елементів по k через A_n^k і покажемо, що

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1). \tag{2.2}$$

Для доведення формули (2.2) скористаємося правилом добутку. Щоб скласти будь-яке розміщення з n елементів по k, необхідно заповнити k місць (позицій) елементами розглянутої множини $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. На 1-му місці можна розмістити будь-який з n елементів множини X, тобто $n_1 = n$. На другому місці –

будь-який із $n-1$ елементів, крім вибраного, тобто $n_2 = n-1$. Міркуючи аналогічно, одержуємо, що 3-тє місце можна заповнити $n_3 = n-2$ способом і т. д. Останнє k -те місце можна заповнити $n_k = n-(k-1)$ способами. Усі k місць за правилом добутку можна заповнити $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k = n(n-1)\ldots(n-(k-1))$ способами. Отже,

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).$$

Приклад 2.5. Управління комерційного банку вибирає з 10 кандидатів трьох осіб на різні посади. Скільки різноманітних комбінацій з трьох людей можна скласти з 10 кандидатів?

Розв'язання. Оскільки групи з трьох осіб можуть відрізнятися й складом претендентів, і зайнятими ними вакансіями, тобто порядком, то для розв'язання задачі необхідно розрахувати число розміщень із 10 елементів по 3: $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 == 720$.

2. Перестановки. Нехай $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Розглянемо розміщення без повторень із n елементів по k у випадку, коли $k = n$. Отримані в даному випадку розміщення без повторень називаються перестановками. Число всіх перестановок із n елементів позначається через P_n. Тоді за означенням

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1.$$

Оскільки добуток перших n натуральних чисел називається „n факторіалом" і позначається $n!$, то з останньої рівності маємо

$$P_n = n! \tag{2.3}$$

Приклад 2.6. Скільки рядків з довжиною 3 можна побудувати з елементів множини $X = \{x_1, x_2, x_3\}$.

Розв'язання. Випишемо всі рядки з довжиною 3, які можуть бути побудовані з елементів множини X: (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_3, x_2), (x_2, x_1, x_3), (x_2, x_3, x_1), (x_3, x_1, x_2), (x_3, x_2, x_1).

Як бачимо, кількість перестановок з трьох елементів дорівнює 6, тобто $P_3 = 3!$

Приклад 2.7. Скількома способами можна переставити множину $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ так, щоб кожне парне число мало парний номер?

Розв'язання. Парні числа можна розставити на місцях з парними номерами (таких місць n) $n!$ факторіал способами, а непарні числа на непарних номерах можна розставити також $n!$ способами. Тому, за правилом добутку, загальне число перестановок зазначеного типу дорівнює $n! \cdot n! = (n!)^2$.

3. Розміщення з повтореннями. Нехай $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Довільний рядок з довжиною k, складений з елементів множини X, називається розміщенням з повтореннями з n елементів по k. Словосполучення „з повтореннями" підкреслює той факт, що у рядку $(x_1, x_2, \dots, x_k)$, де $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$, деякі елементи можуть повторюватися. Наприклад, рядок $(2, 1, 2, 1)$ є розміщенням з повтореннями з двох елементів $\{1,2\}$ по чотири.

Число всіх розміщень з повтореннями з n елементів по k залежить, очевидно, тільки від n і k (а не від природи елементів множини X). Позначимо це число $\bar{A}_n^k$. З правила добутку випливає, що

$$\bar{A}_n^k = \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{n-\text{разів}} = n^k. \tag{2.4}$$

Приклад 2.8. Скількома способами k пасажирів можна розмістити у n вагонах, якщо має значення тільки номер вагона, а місце, що займає пасажир є несуттєвим.

Розв'язання. Перенумеруємо всіх пасажирів, тобто домовимось, кого з них будемо вважати першим, кого другим і т. д. Нехай x_1 номер вагона, обраного першим пасажиром, x_2 – номер вагона другого пасажира і т. д. Рядок $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ повністю характеризує розподіл пасажирів у вагонах. Кожне з чисел $x_1, x_2, \dots, x_k$ може приймати будь-яке значення від 1 до n. Таким чином, число різних розподілів (розміщень) k пасажирів по n вагонах співпадає з числом різних рядків довжиною k, які можуть бути складені із елементів множини $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Тоді за правилом добутку число таких рядків дорівнює n^k.

2.3. Комбінації

1. Комбінації без повторень. Нехай $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – довільна множина з n елементів. Комбінацією без повторень з n елементів по k $(k \leq n)$ називають будь-яку k елементну множину, побудовану з різних елементів множини X. Число всіх комбінацій з n елементів по k позначається через C_n^k. Отже, комбінації без повторень, на відміну від розміщень без повторень, – це не упорядковані підмножини заданої множини.

Для будь-яких натуральних n і k ($k \leq n$) має місце формула

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}. \tag{2.5}$$

Дійсно, з довільної комбінації без повторень із n елементів по k можна побудувати $k!$ ($P_k = k!$) різних рядків довжиною k, тобто $A_n^k = k!\, C_n^k$ і рівність (2.5) доведена.

Далі комбінації без повторень будемо називати просто комбінаціями.

Приклад 2.9. На зборах присутні 30 осіб. Скількома способами можна обрати президію зборів у складі трьох осіб?

Розв'язання. Шуканим числом буде кількість всіх три елементних підмножин 30-и елементної множини, тобто

$$C_{30}^3 = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4060.$$

Зазначимо, що формулу (2.5) часто записують в іншому вигляді, а саме

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \tag{2.6}$$

Формулу (2.6) одержуємо з (2.5) шляхом помноження його чисельника і знаменника на $(n-k)!$. Формула (2.6) може бути записана і в тому випадку, коли $k = 0$, якщо вважати, що $0! = 1$.

Приклад 2.10. Дано натуральні числа від 1 до 30. Скількома способами можна вибрати з них три числа так, щоб їхня сума була парною?

Розв'язання. Сума трьох чисел буде парною, якщо всі доданки – парні числа або один доданок парний, а два інші – непарні. З 15 парних чисел три числа можна вибрати C_{15}^3 різними способам, оскільки порядок вибраних доданків несуттєвий. З 15 непарних чисел два числа можна вибрати C_{15}^2 різними способами й після кожного такого вибору по одному парному числу з 15 можна вибрати C_{15}^1 способами. За правилом добутку число вибірок, які містять два непарні числа й одне парне, дорівнює $C_{15}^2 \cdot C_{15}^1$. Нарешті, застосувавши правило суми, знаходимо загальне число вибірок:

$$C_{15}^3 + C_{15}^2 \cdot C_{15}^1 = \frac{15!}{3!\,12!} + \frac{15!}{2!\,13!} \cdot \frac{15!}{1!\,14!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{6} + \frac{15 \cdot 14 \cdot 15}{2} = 2030.$$

Основні властивості числа комбінацій C_n^k

1. Для всіх $k \in \{0,1,2,\dots,n\}$ має місце рівність

$$C_n^{n-k} = C_n^k. \tag{2.7}$$

Відповідно до формули (2.6), одержимо

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = C_n^k.$$

2. Для всіх $k \in \{0,1,2,\dots,n\}$ має місце рівність

$$(n+1)C_n^k = (k+1)C_{n+1}^{k+1}. \tag{2.8}$$

Відповідно до формули (2.6) маємо

$$(k+1)C_{n+1}^{k+1} = \frac{(k+1)(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{(k+1)(n+1)n!}{(k+1)k!\,(n-k)!} = \frac{(n+1)n!}{k!\,(n-k)!} = (n+1)C_n^k.$$

3. Має місце рівність

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n. \tag{2.9}$$

Ліва частина рівності показує кількість всіх підмножин множини $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ (C_n^i – кількість i-елементних підмножин множини A). Тоді як відомо (приклад 2.4.) кількість всіх різних підмножин множини A, дорівнює 2^n і рівність (2.9) доведена.

4. **Правило Паскаля.** Для довільного k $(1 \le k \le n)$ має місце рівність

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}. \tag{2.10}$$

Ця рівність безпосередньо випливає з формули (2.6). Дійсно,

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!\,k + (n-1)!\,(n-k)}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!\,(k+n-k)}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_n^k.$$

Формула (2.10) дозволяє обчислити значення C_n^k, якщо відомі C_{n-1}^k і C_{n-1}^{k-1}. Другими словами, за допомогою цієї формули можна послідовно знаходити C_n^k

(спочатку при $n = 1$, потім при $n = 2$, при $n = 3$ і т. д.). Результати обчислень зручно записати у вигляді наступної трикутної таблиці:

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}
$$

Побудована таблиця називається арифметичним трикутником Паскаля.

2.4. Перестановки з повтореннями

Нехай $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Як вище було показано, кількість рядків довжиною n (упорядкованих n-елементних множин), які будуються з різних елементів множини X, дорівнює $n!$. Виникає питання, скільки можна побудувати рядків довжиною n, якщо елементи в рядках можуть повторюватися. Цілком очевидно, якщо у рядку з довжиною n є однакові, то перестановки, які утворюються одна з одної переставленням однакових елементів, нічим не відрізняються, тому кількість різних перестановок буде менша ніж $n!$.

Перестановкою з повтореннями з k елементів називається будь-який рядок з довжиною k, побудований з елементів множини X, серед яких є однакові.

Перед тим, як вивести формулу для знаходження кількості перестановок з повтореннями вводимо поняття про склад рядка.

Нехай $X = \{a_1, a_2\}$. Рядки $(a_1, a_2, a_1, a_1, a_2)$ і $(a_1, a_1, a_2, a_2, a_1)$ різні, але мають один і той же „склад” – у кожен з них входять три букви a_1 і дві букви a_2. Уточнимо поняття складу рядка.

Нехай α – рядок довжиною k, який побудований з елементів множини $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Кожному номеру $i \in \{1,2, \dots, n\}$ поставимо у відповідність число k_i, що показує, скільки разів елемент a_i зустрічається у рядку α. Виписавши по порядку ці числа, одержуємо новий рядок $(k_1, k_2, \dots, k_n)$, який називається складом рядка α. Наприклад, якщо $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ і $\alpha = (a_1, a_1, a_3, a_4, a_3, a_1)$, то рядок має склад $(3,0,2,1)$.

Два рядки, які мають один і той же склад, можуть відрізнятися один від одного тільки порядком елементів. Такі рядки називають перестановками з повтореннями даного складу.

Розглянемо наступну комбінаторну задачу: знайти число перестановок з повтореннями, побудованих з елементів множини $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, які мають склад $(k_1, k_2, \dots, k_n)$.

На початку розв'яжемо цю задачу на наступному прикладі. Нехай необхідно знайти число перестановок з повтореннями, які мають склад $(3,2,2)$. Іншими словами, треба знайти кількість рядків довжини 7 із символів a_1, a_2, a_3.

Зобразимо рядок із 7 клітинок, які перенумеровані від 1 до 7

1	2	3	4	5	6	7

Впишемо у клітинки вказані символи a_1, a_2, a_3. Три клітинки для символу a_1 можна вибрати C_7^3 способами. Розглянемо один визначений вибір, скажемо

	a_1			a_1	a_1	
1	2	3	4	5	6	7

Позначимо цей вибір через r_1. Для вільних клітинок символ a_2 можна вибрати C_4^2 способам. Розглянемо один з варіантів такого рядка

a_2	a_1	a_2		a_1	a_1	
1	2	3	4	5	6	7

Позначимо його через r_2. У вільні клітинки останнього рядка символ a_3 можна вибрати C_2^2 способами. Позначимо цей вибір через r_3.

Таким чином, нам необхідно зробити три послідовних вибори r_1, r_2, r_3, що буде означати задання рядку (r_1, r_2, r_3). В цьому рядку елемент r_1 може бути вибраний C_7^3 способами. Якщо r_1 вибрано, то r_2 можна вибрати C_4^2 способами, і, якщо вибрані r_1, r_2, то r_3 можна вибрати C_2^2 способами. Згідно правила добутку, кількість всіх можливих рядків даного складу дорівнює $C_7^3 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2$. Якщо через $P_7(3,2,2)$ позначимо кількість рядків довжиною 7 зі складом $(3,2,2)$, то

$$P_7(3,2,2) = \frac{7!}{3!\,4!} \cdot \frac{4!}{2!\,2!} \cdot \frac{2!}{2!\,0!} = \frac{7!}{3!\,2!\,2!}.$$

Цілком аналогічно знаходиться кількість рядків довжиною $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ зі складом $(k_1, k_2, \dots, k_n)$. Отже, кількість перестановок з повтореннями, які можуть бути побудовані з елементів множини $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ і мають склад $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ знаходяться за формулою:

$$P_k(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{k!}{k_1!\, k_2! \cdots k_n!}, \qquad (2.11)$$

де $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$.

Приклад 2.11. Скільки різних „слів” (у тому числі беззмістовних) можна дістати, переставляючи букви в слові „математика”.

Розв’язання. Очевидно, що $k = 10$, $k_1 = 2$ – кількість букв „м”, $k_2 = 3$ – кількість букв „а”, $k_3 = 2$ – кількість букв „т”, $k_4 = 1$ – кількість букв „е”, $k_5 = 1$ – кількість букв „и” і $k_6 = 1$ – кількість букв „к”. Тоді згідно формули (2.11)

$$P_{10}(2,3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2!\,3!\,2!\,1!\,1!\,1!} = 151200.$$

Приклад 2.12. Скількома способами можна порівну роздати чотирьом гравцям 28 костей доміно?

Розв’язання. Очевидно, що шукані рядки мають склад $(7,7,7,7)$ і кількість способів визначається так:

$$P_{28}(7,7,7,7) = \frac{28!}{7!\,7!\,7!\,7!}.$$

2.5. Комбінації з повтореннями

Якщо з множини, яка складається з n елементів, вибирають k-елементні підмножини з повтореннями, які відрізняються між собою тільки складом елементів (хоча б одним), то їх називають комбінаціями з повтореннями з n елементів по k.

Наприклад, із трьох елементів a_1, a_2, a_3 по два можна утворити 6 комбінацій з повтореннями: $\{a_1, a_1\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \{a_3, a_3\}$.

Число всіх комбінацій з повтореннями позначається символом $\overline{C}_n^k$ й обчислюється за формулою

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k. \qquad (2.12)$$

Приклад 2.13. Скількома способами можна вибрати 3 з 12 букв: А, А, А, Т, Т, Т, Г, Г, Г, Ц, Ц, Ц?

Розв'язання. У розглянутому випадку $n = 4$ (маємо 4 різні букви А, Т, Г, Ц), а $k = 3$. Тому шукане число дорівнює $\overline{C}_4^3 = C_6^3 = 20$.

Приклад 2.14. У поштовому відділенні зв'язку продаються листівки 10 видів. Скількома способами можна купити: а) 12 листівок; б) 8 листівок; в) 8 різних листівок?

Розв'язання. У випадку а) $n = 10$ і $k = 12$, тому кількість листівок дорівнює числу $\overline{C}_{10}^{12} = C_{21}^{12}$. Аналогічно, у випадку б) маємо $\overline{C}_{10}^{8} = C_{17}^{8}$.

У випадку в) листівки мають бути різними, а це означає, що кількість різних листівок співпадає з кількістю комбінацій без повторень, тобто C_{10}^{8}.

Зауваження. При підрахунках, пов'язаних з факторіалами великих чисел, можна застосовувати асимптотичну формулу Стірлінга, відповідно до якої

$$n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}, \qquad (2.13)$$

де запис $a_n \approx b_n$ означає, що $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

2.6. Біном Ньютона

Для будь-якого натурального n має місце формула

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n, \quad (2.14)$$

яка називається формулою бінома Ньютона.

Доведення. Запишемо ліву частину формули (2.14) у вигляді добутку однакових співмножників:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{n-\text{разів}}.$$

Після розкриття дужок одержуємо суму різноманітних добутків, складених з n букв a або b. Серед доданків будуть зустрічатись подібні члени, які мають однакову кількість букв a й b. Число доданків, які містять, наприклад, рівно k разів букву b і $n - k$ разів букву a, дорівнює числу C_n^k. Виходить, сума всіх членів, які містять букву b множником рівно k разів, дорівнює $C_n^k a^{n-k} b^k$. Оскільки k може набувати значення $0,1,2,\dots,n-1,n$, то групуючи доданки з однаковими степенями a й b і зводячи подібні, одержуємо праву частину формули (2.14).

Числа $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$, що входять до формули (2.14), прийнято називати біномними (біноміальними) коефіцієнтами.

Приклад 2.15. Обчислити суму $S_n = C_n^0 + 2C_n^1 + \cdots + 2^n C_n^n$.

Розв'язання. Відповідно до формули (2.14)

$$(x+2)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} 2 + C_n^2 x^{n-2} 2^2 + \cdots + C_n^k x^{n-k} 2^k + \cdots + C_n^n 2^n.$$

Поклавши в останню рівність $x = 1$, отримаємо

$$3^n = C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \cdots + 2^n C_n^n.$$

Узагальненням формули бінома Ньютона є формула

$$(a_1 + a_2 + \ \dots + \ a_m)^n = \sum \frac{n!}{k_1!\,k_2! \cdots k_m!} {a_1}^{k_1} {a_2}^{k_2} \dots {a_m}^{k_m}, \qquad (2.15)$$

яка називається поліноміальною формулою, де підсумовування відбувається за різноманітним набором цілих невід'ємних чисел $k_1, k_2, \dots, k_m$ таких, що $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$.

Частковим випадком формули (2.15) є формула

$$(a+b)^n = \sum \frac{n!}{k_1!\,k_2!} a^{k_1} b^{k_2} \qquad (\text{де } k = k_1 + k_2).$$

Приклад 2.16. Розкрити дужки у виразі $(a+b+c)^3$.

Розв'язання. Користуючись поліноміальною формулою (2.15), одержимо

$$(a+b+c)^3 = \sum \frac{3!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3},$$

де підсумування відбувається за всіма наборами невід'ємних цілих чисел k_1, k_2, k_3, для яких $k_1 + k_2 + k_3 = 3$. Випишемо всі такі набори: $(0;1;2)$, $(0;2;1)$, $(0;3;0)$, $(0;0;3)$, $(1;0;2)$, $(1;2;0)$, $(1;1;1)$, $(2;0;1)$, $(2;1;0)$, $(3;0;0)$.

Відповідно до цього маємо суму десяти доданків:

$$(a+b+c)^3 = \frac{3!}{0!\,1!\,2!} a^0 b c^2 + \frac{3!}{0!\,2!\,1!} a^0 b^2 c + \frac{3!}{0!\,3!\,0!} a^0 b^3 c^0 +$$

$$+ \frac{3!}{0!\,0!\,3!} a^0 b^0 c^3 + \frac{3!}{1!\,0!\,2!} a b^0 c^2 + \frac{3!}{1!\,2!\,0!} a b^2 c^0 + \frac{3!}{1!\,1!\,1!} abc +$$

$$+\frac{3!}{2!\,0!\,1!}a^2b^0c+\frac{3!}{2!\,1!\,0!}a^2bc^0+\frac{3!}{3!\,0!\,0!}a^3b^0c^0=$$
$$=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2c+3b^2a+3c^2a+3c^2b+6abc.$$

2.7. Застосування комбінаторики для підрахунку ймовірностей

Багато задач на підрахунок ймовірностей можна звести до схеми випадкового вибору. Розглянемо два основних варіанта цієї схеми: **вибір з поверненням** і **вибір без повернення**.

1. Вибір з поверненням. Нехай коробка містить n різних предметів $a_1, a_2, \dots, a_n$. З коробки навмання виймається один з предметів, регіструється, потім повертається назад у коробку. Якщо здійснити k таких виймань, то дістанемо деякий рядок довжиною k, що побудований з елементів множини $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.. Якщо рядок з довжиною k уявити як послідовність n клітинок в кожну з яких можна записати один з елементів множини X, то згідно правила добутку кількість таких рядків дорівнює n^k.

Вище наведена процедура має назву **випадкового вибору з поверненням**. Очевидно, що всі рядки є рівноймовірними. Іншими словами, ймовірність появи будь-якого рядка дорівнює $1/n^k$.

До схеми випадкового вибору з поверненням можна звести багато кількість випробувань. Наприклад, кидання монети можна розглядати як випадковий вибір одного елемента з множини $X = \{\text{герб}, \text{цифра}\}$.

Кидання двох гральних кубиків можна розглядати як випадковий вибір з поверненням двох елементів з множини $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

З'ясування днів народження k випадкових прохожих можна замінити випадковим вибором з поверненням k елементів з множини $X = \{1, 2, 3, \dots, 365\}$ і т. д.

2. Вибір без повернення. В цьому випадку вийманний предмет не кладеться назад у коробку і наступне виймання здійснюється з меншого числа предметів. Після k виймань дістанемо рядок довжиною k без повторень. Число таких рядків, як було показано у підрозділі 2.2., дорівнює

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

Випадковий характер вибору розуміється, як і вище, у такому розумінні, що всі рядки даної довжини рівноймовірні і дорівнюють $1/A_n^k$.

Приклад 2.17. Нехай з множини n предметів виймаються з поверненням k предметів. Знайти ймовірність того, що всі предмет, які складають рядок (вибірку), будуть різними (подія A).

Розв'язання. У даному випадку число всіх елементарних подій дорівнює n^k, сприятливих для події A, дорівнює A_n^k. Тоді

$$P(A) = \frac{A_n^k}{n^k}.$$

Зупинимося на одному частковому прикладі вище наведеної задачі – цей частковий випадок відомий як **задача о днях народження**.

У кінозалі зібралося k людей. Яка ймовірність того, що хоча б у двох зібравшихся дні народження співпадають (подія B)?

Як вже відмічалося, з'ясування днів народження у k випадково зібравшихся людей можна замінити випадковим рядком з поверненням k елементів з множини $X = \{1, 2, 3, \dots, 365\}$. Нам необхідно знайти ймовірність події B – співпадіння днів народження у яких-то двох зібравшихся. Подія $\overline{B}$, протилежна B, полягає в тому, що всі дні народження різні. Кількість сприятливих для $\overline{B}$ елементарних подій, дорівнює A_{365}^k . Тоді враховуючи рівність

$$P(B) + P(\overline{B}) = 1$$

маємо

$$P(B) = 1 - \frac{A_{365}^k}{365^k}. \qquad (2.16)$$

З рівності (2.16) бачимо, що $P(B)$ залежить від k – числа зібравшихся у залі людей. Підрахувавши $P(B)$ для різних значень k, отримаємо таблицю

k	5	10	22	23	30	60
$P(B)$	0,027	0,117	0,476	0,507	0,507	0,994

(обчислення проводилися з точністю до 10^{-3}). Дані таблиці показують: якщо у залі 23 людини, то ймовірність того, що хоча б у двох людей в залі співадають дні народження більша за 0,5.

Приклад 2.18. Монету кидають 10 разів. Яка ймовірність того, що цифра випаде рівно 3 рази?

Розв'язання. Десятикратне кидання монети можна розглядати як складання рядка довжиною 10 з повтореннями із елементів множини $X = \{\text{г}, \text{ц}\}$. Число всіх таких рядків дорівнює 2^{10}. Кількість рядків в яких елемент „ц" зустрічається 3 рази, дорівнює C_{10}^3. Отже, шукана ймовірність знаходиться за формулою

$$P = \frac{C_{10}^3}{2^{10}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!\, 2^{10}} = \frac{15}{128}.$$

Приклад 2.19. Гральний кубик кидають 10 разів. Яка ймовірність того, що грані 1, 2, 3, 4, 5, 6 випадуть відповідно 2, 3, 1, 1, 1, 2 рази (подія A).

Розв'язання. Число всіх рядків довжиною 10 з елементів множини $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ дорівнює 6^{10}. Сприятливими для події A будуть рядки, в яких елементи 1, 2, 3, 4, 5, 6 зустрічаються відповідно 2, 3, 1, 1, 1, 2 рази, тобто рядки, які мають склад (2, 3, 1, 1, 1, 2). Число таких рядків, очевидно, знаходиться за формулою (2.11):

$$P_{10}(2, 3, 1, 1, 1, 2) = \frac{10!}{2!\, 3!\, 1!\, 1!\, 1!\, 2!} = \frac{10!}{4 \cdot 6} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10.$$

Тоді

$$P(A) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{6^{10}} = \frac{700}{6^7}.$$

Приклад 2.20. В урні 5 чорних і 6 білих куль. Випадковим чином виймаємо 4 кулі. Знайти ймовірність того, що серед них є: а) 2 білі кулі; б) менше ніж 2 білі кулі; в) хоча б одна біла куля.

Розв'язання. Випробуванням буде випадкове вилучення чотирьох куль. Елементарними подіями будуть всі можливі комбінації по 4 із 11. Отже, їх число дорівнює

$$n = C_{11}^4 = \frac{11!}{4!\, 7!} = 330.$$

а) Нехай подія A_1 полягає в тому, що серед вийнятих куль 2 білі. За правилом добутку безпосередньо випливає, що кількість всіх подій k, сприятливих для A_1 дорівнює числу:

$$P(A_1) = \frac{k}{n} = \frac{150}{330} = \frac{5}{11}.$$

б) A_2 – серед вийнятих куль менше ніж 2 білі кулі. Ця подія складається з двох несумісних подій: B_1 – серед вийнятих куль тільки одна біла і 3 чорних куль, B_2 – серед вийнятих куль немає жодної білої, усі 4 кулі чорні, тобто $A_2 = B_1 + B_2$.

Оскільки події B_1 і B_2 несумісні, то

$$P(A_2) = P(B_1) + P(B_2).$$

Знайдемо ймовірність подій B_1, B_2 і A_2. Кількість подій сприятливих для B_1 дорівнює

$$k_1 = C_6^1 \cdot C_5^3 = 60,$$

а кількість подій сприятливих B_2 для знаходимо за формулою

$$k_2 = C_5^4 = 5.$$

Тоді

$$P(A_2) = \frac{60}{330} + \frac{5}{330} = \frac{65}{330} = \frac{13}{66}.$$

в) Нехай подія A_3 – серед вийнятих куль хоча б одна біла. Оскільки подія A_3 визначається словами „хоча б одна”, то простіше спочатку знайти ймовірність протилежної події $P(\overline{A}_3)$, а потім за формулою $P(A_3) = 1 - P(\overline{A}_3)$ обчислити ймовірність шуканої події. Подія $\overline{A}_3$ полягає в тому, що серед чотирьох вийнятих куль немає жодної білої. Тоді кількість k_3 сприятливих подій для $\overline{A}_3$ визначаємо так: $k_3 = C_5^4 = 5$. Отже,

$$P(A_3) = 1 - \frac{5}{330} = \frac{65}{66}.$$

Приклад 2.21. Числа 1, 2, 3, 4, 5 написані на п’яти однакових картках. Навмання послідовно по одній вибирають три картки й розкладають їх у рядок. Яка ймовірність того, що при цьому утвориться парне трицифрове число (подія A)?

Розв'язання. Кількість всіх трицифрових чисел n побудованих із різних цифр множини $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ визначається розміщення із п'яти елементів по 3, тобто $n = A_5^3$.

Трицифрове число побудоване із цифр 1, 2, 3, 4, 5 буде парним, якщо остання цифра буде 2 або 4. Розглянемо випадкові події B_1 і B_2, які відповідно полягають у наступному: B_1 – остання цифра 2; B_2 – остання цифра 4. Події B_1 і B_2 несумісні і $A = B_1 + B_2$.

Кількість елементарних подій сприятливих для події B_1 визначається числом A_4^2. Очевидно, що для B_1 кількість сприятливих подій також буде A_4^2. Тоді враховуючи, що події B_1 і B_2 несумісні маємо:

$$P(A) = P(B_1) + P(B_2) = \frac{A_4^2}{A_5^3} + \frac{A_4^2}{A_5^3} = \frac{2A_4^2}{A_5^3} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 3} = 0{,}4.$$

Теоретичні запитання до розділу 2

1. Сформулюйте комбінаторне правило суми.
2. Сформулюйте комбінаторне правило добутку.
3. Дайте поняття розміщень без повторень з n елементів по k.
4. Чому дорівнює число розміщень без повторень з n елементів по k?
5. Дайте поняття комбінацій без повторень з n елементів по k.
6. Чому дорівнює число комбінацій баз повторень з n елементів по k?
7. Дайте поняття перестановки без повторень.
8. Чому дорівнює число перестановок без повторень з n елементів?
9. В чому різниця розміщень від перестановок?
10. В чому різниця комбінацій від розміщень?
11. Сформулюйте основні властивості числа комбінацій.
12. Що таке арифметичний трикутник Паскаля? Випишіть перші 7 рядків цього трикутника.
13. Дайте поняття розміщень з повтореннями з n елементів по k.
14. Чому дорівнює число розміщень з повтореннями з n елементів по k?
15. Дайте поняття комбінації з повтореннями з n елементів по k.
16. Чому дорівнює число комбінацій з повтореннями з n елементів по k?
17. Дайте поняття перестановки з повтореннями.
18. Чому дорівнює число перестановок з повтореннями, що має структуру $(k_1, k_2, \dots, k_n)$?
19. Наведіть розкладання $(1+x)^n$ за формулою бінома Ньютона.
20. Наведіть розкладання $(a-b-c)^3$ за поліноміальною формулою.

Приклади до розділу 2

1. Скількома способами можна розсадити 6 учнів на 10 місцях?
2. Скількома способами можна зробити триколірний прапорець з горизонтальними смугами однакової ширини, якщо є тканина 6 різних кольорів? Розв’яжіть цю задачу за умови, що один з кольорів має бути червоним.
3. Скількома способами можна з 20 учнів класу обрати старосту, фізорга і редактора стінгазети?
4. Скількома способами можна присудити золоту, срібну і бронзову медалі на змаганнях, в яких беруть участь 15 чоловік?
5. Скількома способами можна скласти список з 7 учнів?
6. Скількома способами можна вибрати 4 фарби з 7 різних фарб?
7. На шкільному вечорі присутні 12 дівчат і 15 юнаків. Скількома способами можна вибрати з них 4 пар для танців?
8. Скількома способами можна групу з 15 учнів поділити на дві так, щоб в одній групі було 11 учнів, а в другій – 4 учні?
9. Скількома способами можна 15 шахістів поділити на три команди по 5 чоловік?
10. З 8 різних квіток треба скласти букет так, щоб в ньому було не менше двох квіток. Скількома способами можна скласти такий букет?
11. Автомобільний номер складається з двох букв та чотирьох цифр. Знайти кількість всіх можливих номерів, якщо використовуються перші 20 букв українського алфавіту.
12. Скільки шестизначних цілих чисел можна записати за допомогою цифр 5, 7, 8, 9?
13. Скільки цілих чисел, менших за мільйон, можна записати за допомогою цифр 7, 8, 9?
14. Скільки різних слів (у тому числі беззмістовних) можна утворити, переставляючи букви слова: а) „паралелограм”; б) „телефон”?

15. Скількома способами можна розділити 15 різних предметів між трьома особами так, щоб кожна особа одержала 5 різних предметів?
16. У поштовому відділенні зв'язку продаються листівки 8 видів. Скількома способами можна купити: а) 10 листівок; б) 6 листівок; в) 5 різних листівок?
17. Запишіть усі комбінації з повтореннями з трьох елементів a, b, c: 1) по два; 2) по три.
18. Монета підкидається 25 разів. Яка ймовірність того, що при цьому цифра з'явиться 3 або 13 разів?
19. У коробці міститься 3 червоних. 5 синіх і 7 зелених куль. Навмання з урни беруть три кулі. Яка ймовірність того, що вони виявляться одного кольору або всі три будуть мати різні кольори?
20. Дванадцять пасажирів навмання розміщуються у трьох вагонах. Обчислити ймовірність таких випадкових подій:
    1) A – у кожному вагоні виявиться по чотири пасажири;
    2) B – у першому вагоні виявиться 5 пасажирів, у другому – 4 і в третьому – 3 пасажири.
21. Маємо 8 лотерейних білетів. На кожен із них може випасти виграш з певною ймовірністю. Знайти ймовірність наступних подій: A – з 8 білетів виграють не більше як три; B – з 8 білетів виграють не менше як п'ять.
22. У коробці 4 червоних, 5 синіх і 6 зелених куль. Навмання з урни беруть три кулі. Яка ймовірність того, що серед вибраних куль буде хоча б одна червона?

Розділ 3. Умовні ймовірності та незалежні події

Одним із найважливіших понять теорії ймовірності є поняття незалежної події. У даному розділі буде розглядатися це поняття і деякі формули, за допомогою яких знаходяться ймовірності різних випадкових подій.

3.1. Умовна ймовірність

Нехай A і B довільні випадкові події, які пов’язані з одним і тим ж експериментом. На практиці часто виникає питання: наскільки пов’язані ці події і в якій мірі настання однієї з них впливає на можливість настання іншої.

Перед тим як дати означення умовної ймовірності випадкових подій наведемо деякі приклади.

Підкидається гральний кубик. Подія A – появлення парного числа на верхній грані кубика, подія B – появлення числа більшого за 3. Очевидно, було б невірно стверджувати, що появлення однієї з них гарантує появлення або неможливість появлення іншої. В той ж час між подіями A і B є певна залежність. Дійсно, якщо настала подія B (на верхній грані кубика появилося одне з чисел 4, 5, 6), то для події A будуть сприятливими два випадки 4 або 6 з трьох можливих. Тому ймовірність настання події A при умові, що настала подія B буде дорівнювати $2/3$. Якщо відсутня попередня інформація про настання випадкової події B, то ймовірність настання випадкової події A дорівнює $3/6$. Так як $2/3 > 3/6$, то потрібно визнати, що настання випадкової події B збільшує шанси настання події A.

Для характеристики залежності одних випадкових подій від інших вводиться поняття **умовної ймовірності**.

Означення 3.1. Нехай A і B – дві випадкові події по відношенню до деякого експерименту і $P(B) \neq 0$. Число $P(AB)/P(B)$ називається ймовірністю події A за умови, що настала подія B, або просто умовною ймовірністю випадкової події A.

Ймовірність випадкової події A за умови, що настала подія B позначається так $P(A/B)$. За означенням $P(A/B)$ визначається за формулою

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}\,. \tag{3.1}$$

Для того, щоб зрозуміти реальний зміст числа $P(A/B)$ розглянемо загальний випадок статистичного означення ймовірності. Для визначення ймовірності випадкової події A за умови, що настала подія B, можливими результатами експерименту треба вважати ті, при яких настає B, а сприятливими для події A результатами будуть ті результати експерименту, при яких настають обидві події A і B. Тому

$$P(A/B)=\frac{n(AB)}{n(B)}=\frac{n(AB)/n}{n(B)/n}=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Зрозуміло, що таке міркування має зміст тільки тоді, коли $P(B)\neq 0$.

Неважко побачити, що умовна ймовірність має всі властивості безумовної ймовірності. Так, $P(A/B)\geq 0$, $P(\Omega/A)=1$, $P(\emptyset/A)=0$, $P(A/A)=1$, $P((A+B)/C)=P(A/C)+P(B/C)$. Іноді буває корисною наступна рівність $P(\overline{A}/B)=1-P(A/B)$, яка випливає зі співвідношення

$$1=P(\Omega/B)=P((A+\overline{A})/B)=P(A/B)+P(\overline{A}/B).$$

З формули (3.1) безпосередньо випливає правило (теорема) для знаходження ймовірності добутку двох випадкових подій

$$P(AB)=P(B)\,P(A/B). \qquad (3.2)$$

Помінявши місцями A і B, і припускаючи, що $P(A)\neq 0$, дістанемо другий запис для знаходження $P(AB)$, а саме

$$P(AB)=P(A)\,P(B/A). \qquad (3.2)$$

На основі формул (3.2) і (3.3) маємо

$$P(B)\,P(A/B)=P(A)\,P(B/A). \qquad (3.4)$$

Зазначимо, що формули (3.2) і (3.3) мають місце і в тому випадку, коли відповідно $P(B)=0$ або $P(A)=0$. Дійсно, якщо $P(B)=0$ ($P(A)=0$), тоді $B=\emptyset$ ($A=\emptyset$) і $P(B/A)=0$, $P(BA)=0$ ($P(A/B)=0$, $P(AB)=0$).

Приклад 3.1. Для знищення цілі необхідно попасти в неї двічі. Ймовірність першого попадання 0,1 і не змінюється при промахах. Вона зростає у двічі після першого попадання. Яка ймовірність знищення цілі за перші два постріли?

Розв'язання. Нехай подія A – попадання в ціль при першому пострілі, а подія B – при другому, тобто $P(A) = 0{,}1$, а $P(B/A) = 0{,}1 \cdot 2 = 0{,}2$. Тоді

$$P(AB) = P(A)\,P(B/A) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02.$$

Приклад 3.2. З урни, яка містить 3 білих і 7 чорних куль, навмання послідовно і без повернення виймають дві кулі. Подія A – перша куля біла, B – друга куля біла, C – хоча б одна з вийнятих куль біла. Обчислити умовні ймовірності $P(B/A)$, $P(A/B)$ і $P(A/C)$.

Розв'язання. Знайдемо ймовірності випадкових подій A, B і умовну ймовірність $P(B/A)$. Маємо

$$P(A) = \frac{3}{10},\ \ P(B) = \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9} + \frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{27}{90} = \frac{3}{10},\ \ P(B/A) = \frac{2}{9}.$$

Використовуючи формулу (3.3), одержимо

$$P(AB) = P(A)\,P(B/A) = \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9} = \frac{1}{15}.$$

Тоді

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1/15}{3/10} = \frac{2}{9}.$$

Оскільки $C = A + B$, то

$$P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{15} = \frac{8}{15}.$$

Для обчислення ймовірності добутку AC зауважимо, що $AB \subset A$, тому $AC = A(A+B) = A + AB = A$. Звідки

$$P(AC) = P(A) = \frac{3}{10}$$

і за означенням умовної ймовірності

$$P(A/C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{P(A)}{P(C)} = \frac{3/10}{8/15} = \frac{9}{16}.$$

Приклад 3.3. Нехай A і B – випадкові події відносно деякого експерименту, причому $P(B) = 0{,}4$, $P(A/B) = 0{,}3$ і $P(A/\overline{B}) = 0{,}2$. Знайти $P(A)$, $P\left(\overline{A}\,\overline{B}\right)$, $P\left(\overline{A} + \overline{B}\right)$.

Розв'язання. За формулою (3.3) маємо

$$P(AB) = P(A)\,P(B/A) = 0{,}12,$$

$$P(A\overline{B}) = P(\overline{B})\,P(A/\overline{B}) = 0{,}12,$$

оскільки $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0{,}6$.

Випадкову подію A можна записати у вигляді двох несумісних подій AB і $A\overline{B}$, тобто $A = AB + A\overline{B}$. Тоді

$$P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}) = 0{,}24.$$

За формулою де Моргана маємо $\overline{A}\,\overline{B} = \overline{A + B}$. Отже,

$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A + B}) = 1 - P(A + B) = 1 - \big(P(A) + P(B) - P(AB)\big) =$$
$$= 1 - (0{,}24 + 0{,}4 - 0{,}12) = 0{,}48.$$

З тієї ж теореми $\overline{A} + \overline{B} = \overline{AB}$ і

$$P(\overline{A} + \overline{B}) = P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - 0{,}12 = 0{,}88.$$

За формулами (3.2) або (3.3) знаходимо ймовірність добутку двох випадкових подій. Ці формули можна узагальнити на добуток будь-якого числа подій наступним чином: ймовірність добутку декількох подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ дорівнює добутку ймовірності одного із цих подій на умовну ймовірність всіх інших, причому ймовірність кожної наступної події обчислюється в припущенні, що всі попередні події відбулися, тобто

$$P(A_1A_2A_3 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) \dots P(A_n/A_1A_2 \dots A_{n-1}). \quad (3.5)$$

У випадку, коли $n = 3$, остання формула запишеться так:

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2). \quad (3.6)$$

Приклад 3.4. В урні 30 куль, з них 5 – червоних, 10 – синіх, 14 – зелених і одна біла. З урни послідовно виймаємо кулі і назад їх не повертаємо. Яка ймовірність того, що перший раз вийняли червону кулю (подія A), у другий раз – синю (подія B) і третій раз – зелену (подія C).

Розв'язання. Ймовірність того, що спочатку буде вийнята червона куля, дорівнює $P(A) = 5/30 = 1/6$. Оскільки після виймання червоної кулі в урні залишилося 29 куль, то умовна ймовірність виймання синьої кулі дорівнює $P(B/A) = 10/29$. Ймовірність вийняти з урни зелену кулю після того, як були вийняті червона і синя кулі, дорівнює $P(C/AB) = 14/28 = 1/2$. Тоді за формулою (3.6) шукана ймовірність дорівнює

$$P(ABC) = P(A)\,P(B/A)\,P(C/AB) = \frac{1}{6}\cdot\frac{10}{29}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{174} \approx 0{,}028.$$

3.2. Незалежні події

Нехай A і B випадкові події, які пов'язані з одним і тим самим експериментом. У попередньому параграфі показали, що $P(A)$ і $P(A/B)$, взагалі кажучи, різні. Іншими словами, настання події B може змінити ймовірність настання події A. У зв'язку з цим вводиться наступне означення.

Означення 3.2. Кажуть, що подія A не залежить від B, якщо виконується наступна рівність

$$P(A/B) = P(A). \tag{3.6}$$

Отже, A не залежить від B, якщо настання події B не впливає на ймовірність настання події A.

Поняття незалежності подій – одне з центральних в теорії ймовірностей.

На основі рівності (3.2) можна стверджувати: якщо випадкова подія A не залежить від B, то має місце рівність

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{3.7}$$

Має місце наступне твердження: якщо виконується рівність (3.7), причому $P(B) \neq 0$, то A не залежить від B. Дійсно, з (3.7) випливає

$$P(A) = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

отже, $P(A) = P(A/B)$.

За означенням умовної ймовірності $P(A/B)$, припускається, що $P(B) \neq 0$. Однак в деяких випадках таке обмеження є не потрібним. У зв'язку з цим вводиться більш широке поняття незалежності, а саме: кажуть, що подія A не залежить від B, якщо виконується рівність (3.7). При такому означенні незалежності випадкової події A від B не має значення чи дорівнює $P(B) = 0$, або ні.

У подальшому будемо вважати, що випадкова подія A не залежить від B, якщо має місце рівність (3.7).

Зауважимо, що у випадку, коли $P(B)=0$, рівність (3.7) виконується автоматично. Дійсно, завжди має місце рівність: $P(B)=P(BA)+P(B\overline{A})$. Якщо $P(B)=0$, дістанемо, що сума двох невід ємних величин $P(BA)$ і $P(B\overline{A})$ дорівнює нулю, але це можливо тільки в тому випадку, коли $P(BA)=0$ і $P\left(B\overline{A}\right)=0$. Отже, якщо $P(B)=0$, то $P(BA)=0$ і звідси випливає рівність (3.7).

Так як $AB=BA$, то з рівності (3.7) безпосередньо маємо:

$$P(BA)=P(AB)=P(A)P(B)=P(B)P(A).$$

Це означає, що коли A не залежить від B, то і B не залежить від A. Іншими словами, відношення незалежності є симетричним. Тому далі будемо говорити просто про незалежність випадкових подій A і B.

Якщо випадкові події A і B незалежні, то незалежними є також пари подій $\overline{A}$ і B, A і $\overline{B}$, $\overline{A}$ і $\overline{B}$.

Доведемо, наприклад, незалежність подій A і $\overline{B}$. Справді, якщо A і B незалежні, то $P(AB)=P(A)P(B)$. Для подій A і $\overline{B}$ маємо

$$P(A)=P(\Omega A)=P\left(\left(B+\overline{B}\right)A\right)=P\left(AB+A\overline{B}\right)=P(AB)+P(A\overline{B}).$$

Тому $P\left(A\overline{B}\right)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)\left(1-P(B)\right)=P(A)P(\overline{B})$, тобто A і $\overline{B}$ незалежні події.

Незалежність подій $\overline{A}$ і $\overline{B}$ доводиться наступним чином:

$$P\left(\overline{A}\,\overline{B}\right)=P\left(\overline{A+B}\right)=1-P(A+B)=1-P\left(A+\overline{A}B\right)=1-P(A)-P\left(\overline{A}B\right)=$$

$$=1-P(A)-P\left(\overline{A}\right)P(B)=P\left(\overline{A}\right)-P\left(\overline{A}\right)P(B)=P\left(\overline{A}\right)\left(1-P(B)\right)=P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{B}\right),$$

тобто $\overline{A}$ і $\overline{B}$ незалежні події.

Події $A_1,A_2,\dots,A_n$ називаються **попарно незалежними**, якщо будь-яка пара їх незалежна, тобто $P\left(A_iA_j\right)=P(A_i)P(A_j)$, $i\neq j$.

Події $A_1,A_2,\dots,A_n$ називаються незалежними у сукупності, якщо при будь-якому виборі різних подій $A_{i_1},A_{i_2},\dots,A_{i_k}$ з даної сукупності виконується рівність

$$P\left(A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_k}\right)=P(A_{i_1})P\left(A_{i_2}\right)\dots P\left(A_{i_k}\right). \tag{3.8}$$

З незалежності подій у сукупності випливає їх попарна незалежність. Однак попарна незалежність подій не гарантує їхньої незалежності у сукупності. Пояснимо це на прикладі.

Підкидаються дві монети. Розглянемо наступні події:

A_1 – на першій монеті випав герб;

A_2 – на другій монеті випав герб;

A_3 – обидві монети випали на один бік.

Очевидно,

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$$

і

$$P(A_1A_2) = P(A_1A_3) = P(A_2A_3) = \frac{1}{4},$$

отже, події A_1, A_2, A_3 попарно незалежні, тобто

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2), \quad P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3), \quad P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3).$$

В той же час

$$P(A_1A_2A_3) = \frac{1}{4}, \ \text{ а } \ P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{8}.$$

Як бачимо, рівність (3.8) не виконується, а це свідчить про те, що події A_1, A_2, A_3 не будуть незалежними у сукупності.

Якщо $A_1, A_2, \dots, A_n$ незалежні події, то довільна подія з них є незалежною від будь-якої комбінації інших. Покажемо це для частинного випадку. Нехай A_1, A_2, A_3 незалежні події. Довести, що випадкові події $A_1, A_2 + A_3$, також будуть незалежними.

З незалежності випадкових подій A_1, A_2, A_3 маємо:

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3). \tag{3.9}$$

Треба показати, що

$$P(A_1(A_2+A_3)) = P(A_1)P(A_2+A_3). \tag{3.10}$$

Перетворимо ліву частину рівності

$$P(A_1(A_2+A_3)) = P(A_1A_2 + A_1A_3) = P(A_1A_2) + P(A_1A_3) - P(A_1A_2A_3) =$$
$$= P(A_1)P(A_2) + P(A_1)P(A_3) - P(A_1)P(A_2)P(A_3) =$$

$$= P(A_1)(P(A_2) + P(A_3) - P(A_2)P(A_3)) = P(A_1)P(A_2+A_3).$$

Отже, рівність (3.10) має місце, а це означає, що події A_1 і A_2+A_3 є незалежними.

Використовуючи цю властивість незалежних подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, легко показати, що події $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \dots, \overline{A}_n$ також будуть незалежними у сукупності.

Покажемо це твердження у випадку, коли $n = 3$. За припущенням події A_1, A_2, A_3 задовольняють рівність (3.9). Треба довести, що

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3). \tag{3.11}$$

Перетворимо ліву частину рівності (3.11):

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = P\left(\overline{A}_1\left(\overline{A_2+A_3}\right)\right) = P(\overline{A}_1)P\left(\overline{A_2+A_3}\right) = P(\overline{A}_1)\big(1 - P(A_2+A_3)\big) =$$

$$= P(\overline{A}_1)\big(1 - P(A_2) - P(A_3) + P(A_2A_3)\big) =$$

$$= P(\overline{A}_1)\big(1 - P(A_2) - P(A_3) + P(A_2)P(A_3)\big) =$$

$$= P(\overline{A}_1)(1 - P(A_2)(1 - P(A_3)) - P(A_3)) = P(\overline{A}_1)\big(1 - P(A_2)P(\overline{A}_3) - P(A_3)\big) =$$

$$= P(\overline{A}_1)\left(1 - P(A_3) - P(A_2)P(\overline{A}_3)\right) = P(\overline{A}_1)\left(P(\overline{A}_3) - P(A_2)P(\overline{A}_3)\right) =$$

$$= P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_3)\big(1 - P(A_2)\big) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3).$$

Отже, рівність (3.11) має місце, а це означає, що події $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ незалежні.

Розглянемо питання про те, як знайти ймовірність того, що настане хоча б одна з n незалежних подій, які можуть з'явитися в результаті деякого експерименту. Нехай $A_1, A_2, \dots, A_n$ – незалежні події, $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \dots, \overline{A}_n$ – протилежні їм події, також незалежні. Позначимо через A подію, що полягає в появі хоча б однієї з подій $A_1, A_2, \dots, A_n$. Оскільки події A і $\overline{A}_1\overline{A}_2 \dots \overline{A}_n$ протилежні, то $P\left(A + \overline{A}_1\overline{A}_2 \dots \overline{A}_n\right) = 1$, звідки $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2 \dots \overline{A}_n\right)$. Застосовуючи рівність

$$P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2 \dots \overline{A}_n\right) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2) \dots P(\overline{A}_n), \tag{3.12}$$

що має місце для незалежних подій, маємо

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2) \dots P(\overline{A}_n). \tag{3.13}$$

Якщо всі незалежні події $A_1, A_2, \dots, A_n$ мають ймовірність p $(q = p(\overline{A}_i) = 1 - p)$, то з рівності (3.13) випливає, що ймовірність появи хоча б однієї з них визначається формулою

$$P(A) = 1 - q^n. \tag{3.14}$$

Приклад 3.5. Ланцюг технічного пристрою між точками M і N складений за наступною схемою:

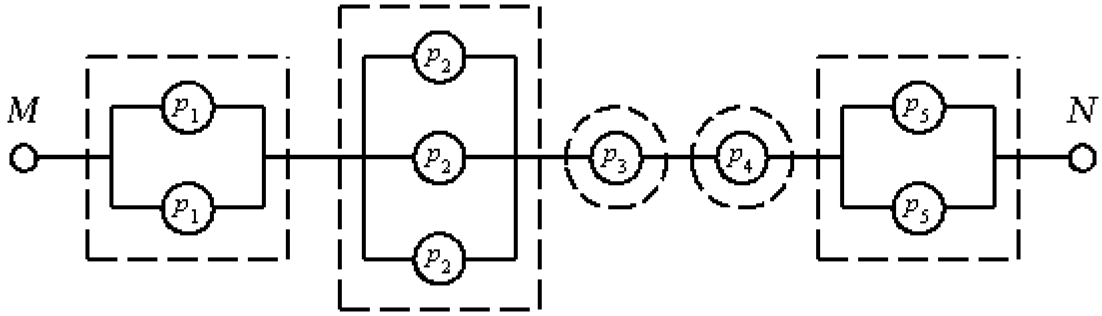


Рис. 3.1 . Схема пристрою

Різні елементи ланцюга працюють незалежно один від другого з надійностями: $p_1 = 0{,}8$; $p_2 = 0{,}7$; $p_3 = 0{,}6$; $p_4 = 0{,}9$; $p_5 = 0{,}8$. Знайти надійність в цілому.

Розв'язання. Запропоновану схему можна розглядати як результат послідовного з'єднання п'яти блоків, які на Рис. 3.1. обведені пунктирними лініями. Подія, яка полягає у справній роботі i-го блоку, позначимо A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, а справність схеми в цілому позначимо A. Тоді $A = A_1A_2A_3A_4A_5$,

$$P(A_1) = 1 - (1 - p_1)^2, \;\; P(A_2) = 1 - (1 - p_2)^3, \;\; P(A_5) = 1 - (1 - p_5)^2,$$

а надійність усієї схеми буде наступною:

$$P(A) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5) =$$
$$= (1 - (1 - p_1)^2)(1 - (1 - p_2)^3)p_3p_4(1 - (1 - p_5)^2) =$$
$$= (1 - (0{,}2)^2)(1 - (0{,}3)^3) \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}9 \cdot (1 - (0{,}2)^2) \approx 0{,}484.$$

Приклад 3.6. Нехай деякий технічний пристрій складається з n послідовно (рис. 3.2.) або паралельно (рис. 3.3.) з'єднаних елементів, які утворюють ланцюг з одним входом і одним виходом. Передбачається, що відмови елементів є незалежними у сукупності подіями. Вважається відомою надійність (тобто ймовірність безвідмовної роботи) p_i $(i = 1,2, \ldots, n)$ кожного елемента (відповідно $q_i = 1 - p_i$ – ймовірність його відмови). Відмова кожного з елементів призводить до переривання сигналу тієї гілки ланцюга, де знаходиться даний елемент. Знайти надійність кожної зі схем.

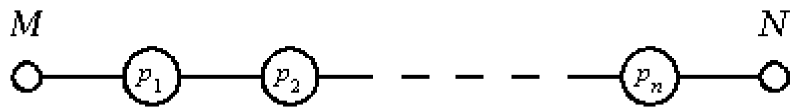


Рис. 3.2. Схема послідовно з’єднаних елементів

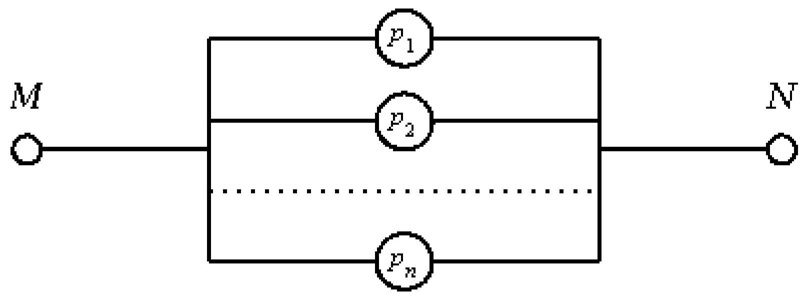


Рис. 3.3. Схема паралельно з’єднаних елементів

Розв’язання. Подію, що полягає у справній роботі i-го блоку, позначимо A_i, а справність схеми у цілому A.

а) при послідовному з’єднанні елементів відмова будь-якого елемента спричиняє відмову всього пристрою. У цьому випадку подія A може бути записана у вигляді $A = A_1A_2 \dots A_n$. Через незалежність подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ маємо

$$P(A) = P(A_1A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n) = p_1p_2 \dots p_n.$$

б) при паралельному з’єднані елементів відмова пристрою відбувається тільки при відмові всіх елементів. У цьому випадку подія $\overline{A}$ може бути записана у вигляді $\overline{A} = \overline{A}_1\overline{A}_2 \dots \overline{A}_n$. Тоді на основі незалежності подій $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \dots, \overline{A}_n$ одержимо

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2 \dots \overline{A}_n) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2) \dots P(\overline{A}_n) = q_1q_2 \dots q_n.$$

Враховуючи рівність

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1,$$

маємо

$$P(A) = 1 - q_1q_2 \dots q_n. \tag{3.15}$$

Поставимо у зв’язку з останнім прикладом таке питання. Нехай всі блоки мають однакову надійність p $(q = 1 - p)$. Яке повинне бути число блоків n, щоб надійність схеми, отриманої шляхом паралельного з’єднання, перевищила 0,99? Для розв’язання цієї задачі використовуємо рівність (3.15). У даному випадку $q_1 = q_2 = \dots = q_n = q$ і $P(A) > 0{,}99$. Тоді

$$1 - q^n > 0{,}99\,,$$

або

$$(1 - p)^n < 0{,}01.$$

Звідси після логарифмування, дістанемо

$$n\lg(1 - p) < -2.$$

З останньої нерівності з урахування того, що $\lg(1 - p) < 0$ маємо

$$n > -2/\lg(1 - p).$$

Приклад 3.7. Ланцюг технічного пристрою між точками M і N складений за схемою, яка зображена на рис 3.3.

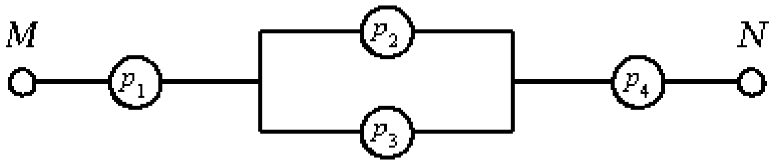


Рис. 3.3. Комбінована схема

Різні елементи ланцюга працюють незалежно одне від одного відповідно з надійностями p_i, $i \in \{1,2,3,4\}$.

Розв'язання. Подію, що полягає у справній роботі i-го блоку, позначимо A_i, а справність схеми в цілому позначимо A.

Запропоновану схему можна розглядати як результат послідовного з'єднання трьох блоків. Тому $A = A_1 B A_4$, де B означає справність другого блоку. Згідно з рівністю (3.15)

$$P(B) = 1 - q_2 q_3 = 1 - (1 - p_2)(1 - p_3).$$

Остаточно маємо:

$$P(A) = p_1\big(1 - (1 - p_2)(1 - p_3)\big)p_4.$$

На практиці правило добутку (множення) застосовують найчастіше разом із правилом додавання. При цьому подію A, ймовірність якої потрібно знайти, намагаються представити у вигляді суми декількох попарно несумісних доданків – варіантів події A: $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$, а кожний з варіантів у свою чергу, у вигляді добутку декількох незалежних подій. Тоді послідовне застосування правил додавання і множення дозволяє в більшості випадків знайти відповідь.

Приклад 3.8. Робітник обслуговує чотири верстати, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що протягом години увагу робітника потребуватиме 1-й верстат, дорівнює 0,1 ; 2-й – 0,2; 3-й – 0,15 і 4-й – 0,12. Яка ймовірність того, що протягом години:

а) жоден верстат не потребує уваги робітника;

б) усі верстати потребують уваги робітника;

в) який-небудь один верстат потребує уваги робітника;

г) хоча б один верстат потребує уваги робітника.

Розв'язання. Нехай подія A_i означає, що i-й верстат ($i \in \{1,2,3,4\}$) протягом години потребує уваги робітника. Тоді відповідно до умови, маємо:

$$P(A_1) = 0{,}1;\ \ P(A_2) = 0{,}2;\ \ P(A_3) = 0{,}15;\ \ P(A_4) = 0{,}12.$$

Відповідно до формули

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1,$$

знайдемо ймовірність протилежних подій:

$$P(\overline{A}_1) = 0{,}9;\ \ P(\overline{A}_2) = 0{,}8;\ \ P(\overline{A}_3) = 0{,}85;\ \ P(\overline{A}_4) = 0{,}88.$$

а) Подія B, яка полягає в тому, що жоден верстат не потребує уваги робітника протягом години, дорівнює добутку подій $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3, \overline{A}_4$, тобто $B = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4$. Отже, враховуючи, що ці події незалежні, за формулою (3.12) знаходимо

$$P(B) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(\overline{A}_4) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}88 \approx 0{,}539.$$

б) Нехай C – подія, яка полягає в тому, що всі чотири верстати потребують уваги робітника протягом години. Отже, $C = A_1A_2A_3A_4$ і тому, враховуючи незалежність подій A_1, A_2, A_3, A_4, за формулою (3.8) одержуємо

$$P(C) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}12 \approx 0{,}0036.$$

в) Нехай подія D означає, що протягом години тільки один який-небудь верстат потребує уваги робітника. Тоді, користуючись визначенням суми й добутку подій маємо:

$$D = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4.$$

Події, які утворюють наведену вище суму, несумісні, тому з урахуванням незалежності подій A_i і $\overline{A}_i$ ($i \in \{1,2,3,4\}$), знаходимо

$$P(D)=P\left(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\right)+P\left(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4\right)+P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4\right)+P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4\right)=$$
$$=P(A_1)P\left(\overline{A}_2\right)P\left(\overline{A}_3\right)P\left(\overline{A}_4\right)+P\left(\overline{A}_1\right)P(A_2)P\left(\overline{A}_3\right)P\left(\overline{A}_4\right)+$$
$$+P\left(\overline{A}_1\right)P\left(\overline{A}_2\right)P\left(A_3\right)P\left(\overline{A}_4\right)+P\left(\overline{A}_1\right)P\left(\overline{A}_2\right)P\left(\overline{A}_3\right)P(A_4)=$$
$$=0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}85\cdot 0{,}88+0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}85\cdot 0{,}88+0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}15\cdot 0{,}88+$$
$$+0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}85\cdot 0{,}12\approx 0{,}363.$$

г) Подія E – полягає в тому, що із чотирьох верстатів хоча б один потребує уваги робітника протягом години. Вона є протилежною події B. Тому

$$P(E)=1-P(B)\approx 1-0{,}539\approx 0{,}461.$$

3.3. Формула повної ймовірності

Одним з ефективних методів підрахунку ймовірностей є формула повної ймовірності.

Нехай випадкова подія A може настати за умови появи однієї з попарно несумісних подій $H_1, H_2, \dots, H_n$ ($H_iH_j=\emptyset$ для будь-яких $i\neq j$). Якщо події H_i ($i=1,2,\dots,n$) такі, що $P(H_i)>0$ і $A\subset H_1+H_2+\dots+H_n$, тоді ці події $H_1, H_2, \dots, H_n$ будемо називати гіпотезами по відношенню до події A.

Зауваження. Якщо випадкові події $H_1, H_2, \dots, H_n$, які пов'язані з даним експериментом такі, що $P(H_i)>0$ для кожного $i\in\{1,2,\dots,n\}$ і $\Omega=H_1+H_2+\dots+H_n$, то кажуть, що ці події утворюють **повну групу гіпотез**.

Очевидно, що подію A можемо записати у вигляді суми несумісних подій $AH_1, AH_2, \dots, AH_n$, тобто

$$A=AH_1+AH_2+\dots+AH_n. \quad (3.16)$$

Тоді, використовуючи формулу для знаходження ймовірностей від суми несумісних подій, а також формулу (3.2), маємо

$$P(A)=P(AH_1+AH_2+\dots+AH_n)=P(AH_1)+P(AH_2)+\dots+P(AH_n)=$$
$$=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+\dots+P(H_n)P(A/H_n).$$

Отже,

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+\dots+P(H_n)P(A/H_n). \quad (3.17)$$

Рівність (3.17) називається **формулою повної ймовірності**.

Розв'язуючи задачі на використання формули повної ймовірності треба:
1) з'ясувати, з чого складається випробування (експеримент);
2) подію, ймовірність якої знаходиться, треба позначити, наприклад, буквою A;
3) скласти множину попарно несумісних подій H_i $(i = 1,2, \dots, n)$ таких, що

$$A = AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n;$$

4) обчислити ймовірності $P(H_i)$, $P(A/H_i)$ $(i = 1,2, \dots, n)$;
5) за формулою (3.17) знайти $P(A)$.

Приклад 3.9. У деякій галузі 25% продукції виробляється 1-ю фабрикою, 35% продукції – 2-ю фабрикою і 40% – 3-ю фабрикою. На 1-й фабриці в брак йде 5% всієї виробленої нею продукції, на 2-й фабриці – 4% і на 3-й фабриці – 2%. Яка ймовірність того, що куплена покупцем одиниця продукції виявиться бракованою?

Розв'язання. Уведемо позначення для подій: A – куплений виріб виявиться бракованим; H_1, H_2, H_3 – події, які полягають в тому, що виріб зроблений відповідно 1-ю, 2-ю і 3-ю фабриками.

З умови задачі знаходимо ймовірності гіпотез і умовні ймовірності події A при даних гіпотезах:

$$P(H_1) = 0{,}25; \quad P(H_2) = 0{,}35; \quad P(H_3) = 0{,}4;$$

$$P(A/H_1) = 0{,}05; \quad P(A/H_2) = 0{,}04; \quad P(A/H_3) = 0{,}02.$$

За формулою (3.17) знаходимо ймовірність події A:

$$P(A) = 0{,}25 \cdot 0{,}05 + 0{,}35 \cdot 0{,}04 + 0{,}4 \cdot 0{,}02 = 0{,}0345.$$

Приклад 3.10. У ящику знаходиться 20 тенісних м'ячів, у тому числі 15 нових та 5, якими вже грали. Для гри навмання вибирають два м'ячі і після гри повертають їх назад. Потім для другої гри також навмання виймають ще два м'ячі. Яка ймовірність того, що друга гра буде проводитися новими м'ячами?

Розв'язання. Нехай подія A – друга гра проводиться новими м'ячами. При вийманні з ящика двох м'ячів, можливі наступні гіпотези: H_1 – з ящика вийнято два нові м'ячі, H_2 – з ящика вийнято один новий і один м'яч, яким вже грали, H_3 – з ящика вийнято м'ячі, якими вже грали. Знайдемо ймовірності гіпотез:

$$P(H_1) = \frac{C_{15}^2}{C_{20}^2} = \frac{105}{190} \approx 0{,}5526,$$

$$P(H_2) = \frac{C_{15}^1 \cdot C_5^1}{C_{20}^2} = \frac{75}{190} \approx 0{,}3947,$$

$$P(H_3) = \frac{C_5^2}{C_{20}^2} = \frac{10}{190} \approx 0{,}0526$$

і умовні ймовірності

$$P(A/H_1) = \frac{C_{13}^2}{C_{20}^2} = \frac{78}{190} \approx 0{,}4105,$$

$$P(A/H_2) = \frac{C_{14}^2}{C_{20}^2} = \frac{91}{190} \approx 0{,}4789,$$

$$P(A/H_3) = \frac{C_{15}^2}{C_{20}^2} = \frac{105}{190} \approx 0{,}5526.$$

Використовуючи формулу повної ймовірності (3.17), отримаємо

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) =$$
$$= 0{,}5526 \cdot 0{,}4105 + 0{,}3947 \cdot 0{,}4789 + 0{,}0526 \cdot 0{,}5526 \approx 0{,}445.$$

3.4. Формула Байєса

Формула Байєса знаходиться у тісному зв'язку з формулою повної ймовірності. Цю формулу використовують в тій ж ситуації як формулу Байєса, а саме: розглядається випадкова подія A, яка може настати тільки з однією із попарно несумісних подій $H_1, H_2, \dots, H_n$. Формула Байєса розв'язує наступну задачу.

Нехай проведено експеримент і в результаті цього експерименту настала випадкова подія A. Через $H_1, H_2, \dots, H_n$ позначимо повну групу гіпотез по відношенню до A. Поставимо задачу, як знайти умовні ймовірності:

$$P(A/H_1),\ P(A/H_2),\ \dots,\ P(A/H_n).$$

Цю задачу як раз і можна розв'язати формулою Байєса.

Формулу Байєса отримуємо на основі наступних простих міркувань.

Для події A і довільного елемента H_i із групи гіпотез $H_1, H_2, \dots, H_n$ (по відношенню до A) має місце рівність

$$AH_i = H_i A.$$

Отже,

$$P(AH_i) = P(H_i A) \quad (i = 1,2, \dots, n).$$

На основі формули (3.2) маємо

$$P(AH_i) = P(H_i)P(A/H_i),$$

і

$$P(H_iA) = P(A)P(H_i/A).$$

Тоді

$$P(H_i)P(A/H_i) = P(A)P(H_i/A).$$

Звідси

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}, \tag{3.18}$$

де $i = 1,2, \dots, n$.

За формулою повної ймовірності

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \cdots + P(H_n)P(A/H_n).$$

Враховуючи останню рівність, формулу (3.18) можна переписати так:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \cdots + P(H_n)P(A/H_n)}, \tag{3.19}$$

де $i = 1,2, \dots, n$.

Рівність (3.19) і задає формулу Байєса для різних гіпотез $H_i \in \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$.

Формулам Байєса можна дати таке тлумачення: нехай подія A може відбуватися в різних умовах, щодо характеру яких можна висловити n припущень (гіпотез) $H_1, H_2, \dots, H_n$. Ймовірності гіпотез $P(H_i)$ нам відомі. Ці ймовірності часто називають апріорними (від латинського a priori – до випробування). Відомі також умовні ймовірності $P(A/H_i)$ події A при різних гіпотезах. Здійснюється експеримент, в результаті якого може настати або не настати подія A. Якщо при цьому подія A настала, то ми можемо переоцінити ймовірність кожної з гіпотез, знайшовши за формулами Байєса нові значення ймовірностей гіпотез $P(H_i/A)$. Ці нові ймовірності називаються апостеріорними ймовірностями гіпотез (від латинського a posteriori – після випробування).

Приклад 3.11. До магазину надходять вироби з двох заводів, причому з першого заводу надходить у 3 рази більше виробів, ніж з другого. Перший завод випускає в середньому 0,5% бракованої продукції, другий – 0,2%. Куплений у магазині виріб виявився бракованим (подія A). Яка ймовірність того, що він був випущений першим заводом (подія H_1)?

Розв'язання. За формулою Байєса

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot 0{,}005}{\frac{3}{4} \cdot 0{,}005 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}002} = \frac{15}{17} \approx 0{,}8823.$$

Приклад 3.12. У групі із 14 стрільців є 4 відмінних, 10 хороших і 2 посередніх стрілка. При одному пострілі відмінний, хороший і посередній стрілки влучають у мішень з ймовірностями 0,98, 0,86 і 0,7 відповідно. Довільно обраний стрілець вистрілив двічі. У мішені одне влучення і один промах. Що ймовірніше, це був стрілець: відмінний, хороший або посередній?

Розв'язання. Позначимо через A подію, яка полягає в тому, що після двох пострілів є тільки одне влучення, подію A_i – влучення в мішень при i-ому пострілі ($i = 1,2,3$).

До спроби можливі наступні гіпотези:

H_1 – стріляв відмінний стрілець;

H_2 – стріляв хороший стрілець;

H_3 – стріляв посередній стрілець.

Використовуючи класичне означення ймовірності події знайдемо ймовірність гіпотез до спроби:

$$P(H_1) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}, \quad P(H_2) = \frac{5}{8}, \quad P(H_3) = \frac{1}{8}.$$

Умовні ймовірності події A при цих гіпотезах

$$P(A/H_1) = P\left(A_1\overline{A}_2/H_1\right) + P\left(\overline{A}_1A_2/H_1\right) =$$

$$= 0{,}98 \cdot 0{,}02 + 0{,}02 \cdot 0{,}98 = 2 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}02 = 0{,}0392;$$

$$P(A/H_2) = P\left(A_1\overline{A}_2/H_2\right) + P\left(\overline{A}_1A_2/H_2\right) =$$

$$= 0{,}86 \cdot 0{,}14 + 0{,}14 \cdot 0{,}86 = 2 \cdot 0{,}86 \cdot 0{,}14 = 0{,}2408;$$

$$P(A/H_3) = P\left(A_1\overline{A}_3/H_3\right) + P\left(\overline{A}_1A_3/H_3\right) =$$

$$= 0{,}7 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}42.$$

Умовні ймовірності гіпотез H_1, H_2, H_3 з урахуванням появи A обчислюємо за формулою (3.19) і

$$P(H_1/A) = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}0392}{0{,}25 \cdot 0{,}0392 + 0{,}625 \cdot 0{,}2408 + 0{,}125 \cdot 0{,}42} =$$

$$= \frac{0{,}0098}{0{,}0098 + 0{,}1505 + 0{,}0525} \approx 0{,}04605,$$

$$P(H_2/A) = \frac{0{,}1505}{0{,}2128} \approx 0{,}70725,$$

$$P(H_3/A) = \frac{0{,}0525}{0{,}2128} \approx 0{,}24671.$$

Таким чином, найбільш ймовірно, що стріляв хороший стрілець.

Теоретичні запитання до розділу 3

1. Які випадкові події називаються незалежними?
2. Наведіть приклади залежних і незалежних випадкових подій.
3. Означення умовної ймовірності.
4. У якому випадку $P(A/B) = 0$?
5. У якому випадку $P(A/B) = 1$?
6. Запишіть формулу множення ймовірностей для двох залежних випадкових подій A і B.
7. Запишіть формулу множення ймовірностей для трьох незалежних випадкових подій A, B і C.
8. Запишіть формулу множення ймовірностей для чотирьох залежних випадкових подій A, B, C і D.
9. Коли $P(A/B) = P(A), P(B/A) = P(B)$?
10. Запишіть формулу для обчислення появи випадкової події хоча б один раз при незалежних експериментах.
11. Довести незалежність подій $\overline{A}$ і B, якщо A і B незалежні.
12. Довести незалежність подій $\overline{A}$ і $\overline{B}$, якщо A і B незалежні.
13. Сформулюйте поняття попарно незалежних подій і подій незалежних у сукупності.
14. Гіпотези у формулі повної ймовірності та їх властивості.
15. Запишіть формулу повної ймовірності.
16. Коли використовується формула Байєса?
17. Для знаходження ймовірності $P(H_i/A)$ формула Байєса має вигляд …
18. Чому дорівнює $P(H_1 + H_2 + \cdots + H_n)$, де H_i є гіпотези у формулі повної ймовірності?
19. Чому дорівнює $P(H_1 + H_2 + H_3H_1)$, де H_i є гіпотези у формулі повної ймовірності?
20. Чому дорівнює $P\big(H_1(H_1 + H_2 + H_3)\big)$, де H_i є гіпотези у формулі повної ймовірності?

Приклади до розділу 3

1. В урні міститься 20 однакових куль, із них 10 білих і 10 чорних. З урни навмання беруть дві кулі по одній без повернення. З'ясувати, чи будуть залежними такі події: перша куля виявилася чорною і друга також.
2. З урни, де 8 білих і 12 червоних куль, вийняли дві кулі по одній. При цьому перша куля в урну повертається.
3. Задана множина цілих чисел $\Omega = \{1,2,3,\dots,20\}$. З цієї множини навмання беруть одне число. Яка ймовірність того, що це число виявиться кратним 3, якщо відомо, що воно є парним?
4. Відомі значення: $P\left(A\overline{B}\right) = 0{,}3$, $P\left(\overline{A}B\right) = 0{,}4$ і $P\left(\overline{A}\,\overline{B}\right) = 0{,}9$. З'ясувати, чи є залежними випадкові події A і B.
5. Нехай $P(B) > 0$ і виконується рівність $P(A/B) + P\left(\overline{A}\right) = 1$. Що можна сказати про події A і B (стосовно залежності, незалежності подій)?
6. Дано $P(A/B) = 0{,}7$, $P\left(A/\overline{B}\right) = 0{,}3$, $P(B/A) = 0{,}6$. Знайти $P(A)$.
7. У ящику міститься 20 однотипних деталей. Із них 12 стандартні, а решта – браковані. Деталі виймають по одній без повернення. Так було вийнято три деталі. Обчислити ймовірність наступних випадкових подій:

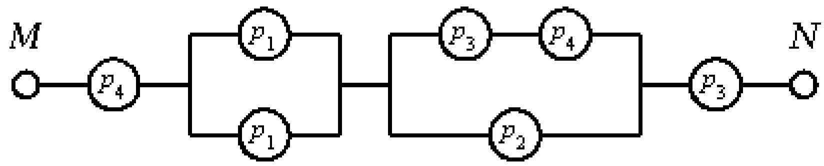
   1) A – три деталі виявляться стандартними;

   2) B – усі три деталі виявляться бракованими;

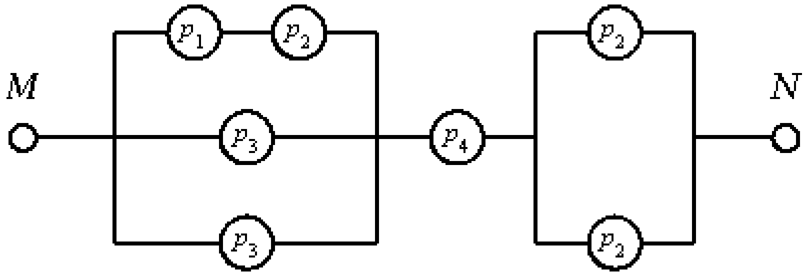
   3) C – дві стандартні й одна бракована;

   4) D – хоча б одна стандартна.
8. З множини чисел $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ навмання беруть одне число, а далі з решти – друге. Яка ймовірність того, що здобуте двоцифрове число буде парним?
9. Ланцюг технічного пристрою між точками M і N складено за схемою, яка зображена на нижченаведеному рисунку. Різні елементи ланцюга працюють незалежно один від одного з відповідними надійностями: $p_1 = 0{,}8$; $p_2 = 0{,}7$; $p_3 = 0{,}6$; $p_4 = 0{,}9$. Знайти надійність наступних пристроїв в цілому:

1)



2)



10. У трьох урнах лежать білі і чорні кулі. У першій урні – 3 білі і 1 чорна, у другій – 6 білих і 4 чорних, у третій – 9 білих і 1 чорна. З навмання взятої урни виймають одну кулю. Знайти ймовірність того, що вона біла.
11. Спеціалізована лікарня приймає в середньому 50% хворих, що мають захворювання H_1, 30% – що мають захворювання H_2 і 20% – H_3. Статистика свідчить, що ймовірність повного вилікування хвороби H_1 дорівнює 0,9, для хвороб H_2 і H_3 ці ймовірності дорівнюють відповідно 0,7 і 0,8. Яка ймовірність того, що хворий, виписаний з лікарні цілком здоровим (подія A), був хворий на хворобу H_1?
12. У двох урнах містяться відповідно 7 і 9 куль, з них білих куль 4 і 3. З першої урни переклали у другу урну одну кулю, колір якої невідомий. Після цього з другої урни беруть одну кулю. Яка ймовірність того, що ця куля біла?
13. З урни, яка містить 3 білих і 2 чорних кулі, перекладено дві кулі до урни, яка містить 4 білих і 4 чорних кулі. Яка ймовірність взяття білої кулі з другої урни після такого перекладання?
14. Готуючись до екзамену з теорії ймовірностей, студент з 25 екзаменаційних білетів вивчив лише 20. В якому випадку ймовірність витягти вивчений білет буде вищою:

а) коли він тягне білет першим;

б) коли він тягне білет другим.

15. Відомо, що 5% чоловіків і 0,25% всіх жінок дальтоніки. Навмання обрана особа – дальтонік. Яка ймовірність того, що це чоловік? (Вважається, що чоловіків і жінок однакова кількість).
16. Деталь може надійти для обробки на перший верстат з ймовірністю 0,2. На другий верстат – з ймовірністю 0,3 і на третій – з ймовірністю 0,5. При обробці деталі на першому верстаті ймовірність допустити брак дорівнює 0,01, на другому і третьому верстатах ця ймовірність відповідно дорівнює 0,05 і 0,08. Оброблені деталі вміщують в одну шухляду. Навмання взята звідти деталь виявилася бракованою. Яка ймовірність того, що її обробляв перший верстат?
17. Троє робітників виготовляють однотипні деталі. Причому за зміну перший робітник виготовив у 1,5 рази більше, ніж другий, а другий в 1,8 рази менше, ніж третій. У середньому брак становить для першого робітника 4%, для другого і третього 1% і 8%. Виготовлені деталі розміщують в одному ящику. Навмання взята одна деталь із ящика виявилася бракованою. Яка ймовірність того, що її виготовив другий робітник?
18. Деталі виробляють на трьох заводах. Об’єм продукції другого заводу у 3 рази перевищує об’єм продукції першого заводу, а об’єм продукції третього заводу у 2 рази перевищує об’єм продукції другого заводу. Доля браку на першому заводі 0,5%, на другому – 0,75%, а на третьому – 1,25%. Навмання взята деталь виявилася бракованою. Яка ймовірність того. Що вона випущена третім заводом?
19. В урні 4 кулі, які можуть бути білими, або чорними, або у будь-якій комбінації цих кольорів. До них докладають 2 білі кулі. Після цього з урни випадковим чином виймають 3 кулі. Знайти ймовірність того, що всі вийняті кулі білі.
20. В одній урні 5 білих і 6 чорних куль, а в другій – 4 білі і 8 чорних куль. З першої урни випадковим чином виймають 3 кулі і додають їх до другої урни. Після цього з другої урни також випадково виймають 4 кулі. Знайти ймовірність того, що всі кулі, вийняті з другої урни, білі.

Розділ 4. Послідовні незалежні випробування

При практичному застосуванні теорії ймовірностей часто розв'язуються задачі, пов'язані з багаторазово повторюваними випробуваннями (експериментами), у результаті кожного з яких може з'явитися або не з'явитися деяка подія A. При цьому становить інтерес не результат кожного окремого експерименту, а загальне число появ події A в результаті серії експериментів. Наприклад, якщо стрілець робить кілька пострілів по мішені, то нас, як правило, буде цікавити не результат кожного пострілу, а загальне число влучень. У подібних задачах потрібно визначити ймовірність будь-якого заданого числа появ події A в результаті серії експериментів. Такі задачі й будуть розглянуті в даному розділі.

Експерименти називаються **незалежними** відносно події A, якщо ймовірність події A в кожному експерименті не залежить від результатів інших експериментів. Наприклад, кілька підкидань монети або грального кубика, вибірковий контроль якості продукції являють собою незалежні експерименти. Незалежні експерименти можуть змінюватися в однакових або різних умовах. У першому випадку ймовірність настання події A у всіх експериментах співпадає. Така послідовність незалежних експериментів одержала назву **схеми Бернуллі**. У другому випадку ймовірність настання події A від експерименту до експерименту змінюється. Таку послідовність незалежних експериментів називають **поліноміальною схемою**.

4.1. Схема Бернуллі

Нехай відбуваються послідовні експерименти, при кожному з яких може настати і не настати певна подія A. Ймовірність настання події A у кожному експерименті позначимо через p, а ймовірність ненастання події $\overline{A}$ через q $(q = 1 - p)$.

Якщо проведено n незалежних експериментів, то результати цих експериментів можна задати рядком, що містить n позицій і в кожній позиції є символ A (якщо настала подія A) або $\overline{A}$ (якщо подія A не настала). Наприклад, нехай $n = 3$. Тоді всі можливі результати трьох незалежних експериментів можуть бути задані наступними рядками:

$$\begin{gathered}(A,A,A),\ (A,A,\overline{A}),\ (A,\overline{A},A),\ (\overline{A},A,A)\\ (A,\overline{A},\overline{A}),\ (\overline{A},A,\overline{A}),\ (\overline{A},\overline{A},A),\ (\overline{A},\overline{A},\overline{A}).\end{gathered} \tag{4.1}$$

Кожному рядку із (4.1) відповідає випадкова подія, що є добутком подій, які знаходяться у відповідних позиціях рядка. Наприклад,

$$(A,A,\overline{A}) \to AA\overline{A},\ (\overline{A},A,\overline{A}) \to \overline{A}A\overline{A}. \tag{4.2}$$

Враховуючи незалежність експериментів і (4.2), ймовірність появи рядків $(A,A,\overline{A})$, $(\overline{A},A,\overline{A})$ відповідно знаходимо так:

$$P(A,A,\overline{A}) = P(A)P(A)P(\overline{A}) = p \cdot p \cdot q = p^2q,$$

$$P(\overline{A},A,\overline{A}) = P(\overline{A})P(A)P(\overline{A}) = q \cdot p \cdot q = pq^2.$$

У загальному випадку, якщо провели n експериментів в одних і тих самих умовах, то очевидно, що ймовірність появи рядка, який містить k символів A і $n-k$ символів $\overline{A}$ визначається числом p^kq^{n-k}. Число k в серії n експериментів, в яких настає подія A, можна вибрати C_n^k способами. Отже, якщо через $P_n(k)$ позначити ймовірність того, що в n незалежних експериментах подія A настала k разів, то за аксіомою адитивності маємо

$$P_n(k) = C_n^kp^kq^{n-k}. \tag{4.3}$$

Набір чисел $P_n(k)$ $(k = 0,1,2,\dots,n)$ називають біномним розподілом, а саму формулу (4.3) біномною формулою, оскільки права частина цієї формули є загальним членом бінома Ньютона.

Зауважимо, що події, які відповідають всім можливим різним значенням k $(k = 0,1,2,\dots,n)$ попарно несумісні і при кожній серії з n послідовних незалежних експериментах одна з них обов'язково настає, тому

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = P(\Omega) = 1. \tag{4.4}$$

Формулу (4.4) можна дістати й безпосереднім обчисленням:

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^kp^kq^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1.$$

Біномний розподіл (4.3) дозволяє визначити не тільки ймовірність появи події A рівно k разів при n експериментах, але і ймовірність P_n $(k_1 \leq k \leq k_2)$ того, що число k появи події A настає не менше ніж k_1 разів і не більше ніж k_2 разів $(0 \leq k_1 \leq k_2 \leq n)$. Через несумісність подій, які відповідають числам $k_1, k_1 + 1, \dots$, $k_2 - 1, k_2$, маємо

$$P(k_1 \leq k \leq k_2) = P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + \dots + P_n(k_2 - 1) + P_n(k_2). \qquad (4.5)$$

Зокрема, ймовірність того, що в n незалежних експериментах подія A настане:

1) менше k_1 разів;

2) більше k_1 разів;

3) не менше k_1 разів;

4) не більше k_1 разів;

5) хоча б один раз;

знаходиться відповідно за формулами:

1) $P_n(0 \leq k < k_1) = P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k_1 - 1);$ (4.6)

2) $P_n(k_1 < k \leq n) = P_n(k_1 + 1) + P_n(k_1 + 2) + \dots + P_n(n);$ (4.7)

3) $P_n(k_1 \leq k \leq n) = P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + \dots + P_n(n);$ (4.8)

4) $P_n(0 \leq k \leq k_1) = P_n(0) + P_n(2) + \dots + P_n(k_1);$ (4.9)

5) $P_n(1 \leq k \leq n) = 1 - q^n.$ (4.10)

Визначимо мінімальне число m незалежних експериментів так, щоб з ймовірністю, не меншою ніж α $(0 < \alpha < 1)$ можна було стверджувати настання події A хоча б один раз, якщо ймовірність настання події A в одному експерименті дорівнює p. Використовуючи формулу (4.10), маємо нерівність

$$1 - q^n \geq \alpha$$

або

$$1 - (1 - p)^n \geq \alpha.$$

Розв’язуючи останню нерівність відносно n, отримаємо

$$n \geq \lg(1 - \alpha)/\lg(1 - p), \qquad (4.11)$$

тому, що $\lg(1 - p) < 0$.

З нерівності (4.11) випливає, що

$$m = [\lg(1-\alpha)/\lg(1-p)] + 1, \qquad (4.12)$$

де $[a]$ означає цілу частину дійсного числа a.

Приклад 4.1. Через канал зв'язку передається 5 повідомлень. Кожне з повідомлень незалежно від інших з ймовірністю p спотворюється перешкодами. Знайти ймовірності подій:

1) з 5 повідомлень 3 спотворені;

2) не менше 4 з 5 повідомлень передані без спотворень;

3) не більше двох переданих повідомлень спотворені;

4) усі повідомлення прийняті без спотворень;

5) не менше двох повідомлень спотворені;

6) спотворене хоча б одне повідомлення.

Розв'язання. Як модель використовуємо схему Бернуллі з $n = 5$:

1) оскільки ймовірність спотворення дорівнює p, а ймовірність передачі повідомлення без спотворення $q = 1 - p$, то за формулою Бернуллі (4.3) маємо

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = 10p^3 q^2;$$

2) шукана ймовірність без спотворення може бути знайдена за формулою (4.8), у якій p потрібно замінити на q:

$$P_5(4 \le k \le 5) = C_5^4 q^4 p + C_5^5 q^5 p^0 = 5q^4 p + q^5;$$

3) шукана ймовірність знаходиться за формулою (4.9):

$$P_5(0 \le k \le 2) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) = C_5^0 p^0 q^5 + C_5^1 p q^4 + C_5^2 p^2 q^3 =$$
$$= q^5 + 5pq^4 + 10p^3 q^2;$$

4) замінюючи у формулі (4.3) p на $q = 1 - p$, отримуємо

$$P_5(5) = C_5^5 p^5 q^0 = q^5;$$

5) шукана ймовірність визначається за формулою (4.8):

$$P_5(2 \le k \le 5) = C_5^2 p^2 q^3 + C_5^3 p^3 q^2 + C_5^4 p^4 q + C_5^5 p^5 q^0 =$$
$$= 10p^2 q^3 + 10p^3 q^2 + 5p^4 q + p^4;$$

6) застосовуючи формулу (4.3), отримаємо

$$P_5(1 \le k \le 5) = 1 - P_5(0) = 1 - C_5^0 p^0 q^5 = 1 - q^5.$$

4.2. Найімовірніше успіхів у схемі Бернуллі

Розглянемо серію n незалежних експериментів в кожному з яких може настати випадкова подія A з ймовірністю p і дослідимо ймовірність $P_n(k)$ як функцію від k $(k = 0,1,2, \dots, n)$. Знайдемо спочатку відношення двох послідовних значень цієї функції. Оскільки

$$P_n(k+1) = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!} p^{k+1} q^{n-k-1},$$

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} p^k q^{n-k},$$

то

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q}, \tag{4.13}$$

де $k = 0,1,2, \dots, n-1$.

Знайдемо, при яких k це відношення більше, дорівнює і менше одиниці:

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} > 1$$

при $(n-k)p > (k+1)q$, або $np - q > k$.

Отже,

$$P_n(k+1) > P_n(k) \quad \text{при} \quad k < np - q, \tag{4.14}$$

$$P_n(k+1) = P_n(k) \quad \text{при} \quad k = np - q, \tag{4.15}$$

$$P_n(k+1) < P_n(k) \quad \text{при} \quad k > np - q. \tag{4.16}$$

Як бачимо, величина $P_n(k)$ при зростанні k спочатку зростає до певного максимуму, а потім спадає. Знайдемо, при якому k досягається максимум. Можливі два випадки: 1) $np - q$ – неціле число. Тоді число $np - q + 1 = np + p$ також неціле і існує єдине ціле число k_0, що задовольняє умову

$$np - q < k_0 < np + p.$$

Покажемо, що $P_n(k)$ досягає найбільшого значення при $k = k_0$. Справді, оскільки $k_0 - 1 < np - q$, то згідно співвідношення (4.16) $P_n(k_0) > P_n(k_0 - 1)$, а оскільки $k_0 > np - q$, то із співвідношення (4.16) випливає $P_n(k_0 - 1) < P_n(k_0)$. Звідси $P_n(k_0) < P_n(k)$ для всіх $k \neq k_0$, тобто k_0 – найімовірніше число настання випадкової події A в серії n незалежних експериментів при умові, що ймовірність настання події A у кожному експерименті дорівнює p.

2) $np - q$ – ціле число. Покладемо $k_1 = np - q$, тоді $k_1 + 1 = np - q + 1 = np + p$. Згідно з співвідношенням (4.15) $P_n(k_1 + 1) = P_n(k_1)$. Оскільки $k_1 - 1 < np - q$, із співвідношення (4.14) дістанемо $P_n(k_1) > P_n(k_0 - 1)$, а оскільки $k_1 + 1 > np - q$, то згідно з (4.16) $P_n(k_1 + 2) < P_n(k_1 + 1)$. Таким чином, у цьому випадку є два найімовірніші значення: $k = k_1$ і $k = k_1 + 1$.

Отже, можна зробити такий висновок.

Найімовірніше число k_0 настання випадкової події A в серії n незалежних експериментів при умові, що ймовірність настання події A у кожному експерименті дорівнює p задовольняє нерівність

$$np - q \le k_0 \le np + p, \tag{4.17}$$

якщо $np - q$ неціле, то є одне таке значення k_0, якщо $np - q$ ціле, то таких значень два, а саме: $np - q$ і $np + p$.

Приклад 4.2. Відомо, що $1/45$ частина продукції, виготовленої заводом, не відповідає вимогам стандарту. Завод виготовив 4500 одиниць продукції. Знайти найімовірніше число виробів заводу, що задовольняють вимоги стандарту.

Розв'язання. Оскільки ймовірність виготовлення бракованого виробу $q = 1/45$, то ймовірність виробу, що задовольняє стандарт $p = 44/45$. За формулою (4.17) маємо

$$4500 \cdot \frac{44}{45} - \frac{1}{45} \le k_0 \le 4500 \cdot \frac{44}{45} + \frac{1}{45},$$

$$4400 - \frac{1}{45} \le k_0 \le 4400 + \frac{1}{45}.$$

З останньої нерівності випливає $k_0 = 4400$.

4.3. Поліноміальна схема

Розглянемо один з можливих узагальнень схеми Бернуллі. Нехай здійснюється n незалежних експериментів, кожний з яких має m ($m > 2$) попарно несумісних й єдино можливих наслідків $A_1, A_2, \ldots, A_m$ (тобто в результаті будь-якого експерименту якийсь один A_j ($j \in \{1, 2, \ldots, m\}$) обов'язково настане) з відповідними ймовірностями $p_1, p_2, \dots, p_m$, однаковими у всіх експериментах, і такими, що $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$. У цих припущеннях для довільно заданих цілих невід'ємних чисел $k_1, k_2, \dots, k_m$ $(k_1 + k_2 + \dots + k_m = n)$ позначимо через $P_n(k_1, k_2, \dots, k_m)$ ймовірність того, що в n послідовних експериментах подія A_1 настане k_1 разів, подія A_2 – k_2 разів, …, подія A_m – k_m разів. Тоді має місце формула

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \dots k_m!}\, p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}, \qquad (4.18)$$

яка є узагальненням формули Бернуллі (4.3) на випадок, коли $m = 2$, $p_1 = p$, $p_2 = 1 - p = q$.

Ймовірності $P_n(k_1, k_2, \dots, k_m)$ називаються поліноміальними, оскільки вираз, який знаходиться в правій частині формули (4.18), являє собою загальний член розкладання $(p_1 + p_2 + \dots + p_m)^n$ за поліноміальною формулою (2.15).

Вивчення формули (4.18) аналогічне вивченню формули Бернуллі.

Нехай подія B полягає в тому, що у n незалежних експериментах подія A_1 настане k_1 разів, подія A_2 – k_2 разів, …, подія A_m – k_m разів. Тоді $P(B) = P_n(k_1, k_2, \dots, k_m)$. Кожен варіант реалізації події B можна інтерпретувати як рядок довжини n, який складений із символів $A_1, A_2, \dots, A_m$, у якому A_1 повторюється k_1 разів, A_2 – k_2 разів, …, A_m – k_m разів. Відповідно до формули множення ймовірностей незалежних подій, ймовірність кожного варіанта події B, дорівнює $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$. Оскільки число можливих комбінацій кожного варіанта події B дорівнює числу перестановок з повтореннями складу $(k_1, k_2, \dots, k_m)$, визначеному за формулою (2.11), то використовуючи властивість додавання ймовірностей несумісних подій, отримаємо формулу (4.18).

Приклад 4.3. Мішень складається з 3-х попарно неперетинаючих зон. При одному пострілі у мішень ймовірність влучення в першу зону для даного стрільця дорівнює 0,5. Для другої і третьої зон ця ймовірність дорівнює 0,3 та 0,2. Стрілок зробив 6 пострілів у мішень. Знайти ймовірність того, що при цьому виявиться 3 влучення в першу зону, 2 влучення в другу й 1 влучення в третю зону.

Розв'язання. У цьому прикладі $n = 6$, $k_1 = 3$, $k_2 = 2$, $k_3 = 1$, $p_1 = 0{,}5$, $p_2 = 0{,}3$ і $p_3 = 0{,}2$. Підкладаючи ці дані у формулу (4.18), отримаємо шукану ймовірність:

$$P_6(3{,}2{,}1) = \frac{6!}{3!\,2!\,1!}(0{,}5)^3 \cdot (0{,}3)^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}135.$$

4.4. Граничні теореми у схемі Бернуллі

У додатках часто виникає необхідність в обчисленні ймовірностей $P_n(k)$ при великих значення n і k. У цьому випадку обчислення за формулою (4.3) стають важкими, оскільки призводять до громіздких обчислень. Наприклад, за формулою (4.3), при $n = 320$, $k = 285$, $p = 0{,}86$, $q = 0{,}11$

$$P_{320}(285) = \frac{320!}{285!\,35!}(0{,}89)^{285} \cdot (0{,}11)^{35},$$

одержати більш-менш точний результат практично неможливо. Ще більші труднощі виникають й у тому випадку, коли доводиться підсумувати ймовірності $P_n(k)$, наприклад, знайти значення виразу

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k), \tag{4.19}$$

де $k_2 > k_1$.

На практиці, для знаходження значень $P_n(k)$ та суми вигляду (4.19), використовують асимптотичні (наближені) формули Муавра-Лапласа, а також формули Пуассона.

4.4.1. Локальна теорема Муавра-Лапласа

У цьому підрозділі розглянемо одну граничну теорему, яка дає змогу наближено обчислити біномні ймовірності $P_n(k)$ при великому числі експериментів. Вперше цю теорему довів Муавр у 1730 р. для окремого випадку схеми Бернуллі при . Пізніше Лаплас узагальнив її на випадок довільного , відмінного від 0 і 1.

Теорема 4.1. (локальна теорема Муавра-Лапласа). Якщо при n незалежних експериментах подія A у кожному експерименті відбувається з постійною ймовірністю p, що не занадто близька до 0 й 1 ($0 < p < 1$), то при великому значенні n ймовірність $P_n(k)$ того, що подія A настане k разів, наближено дорівнює

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad (4.20)$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функція Гаусса, яка протабулирована й наведена у Додатку 1.

Властивості функції Гаусса

1) $\varphi(x)$ визначена на всій осі OX,

2) $\varphi(x) > 0 \ \forall x \in R$,

3) $\varphi(x)$ є функцією парною, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$,

4) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \varphi(x) = 0$,

5) $\varphi'(x) = -x \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \varphi'(0) = 0, \varphi'(x) > 0,$ якщо $x < 0$ і $\varphi'(x) < 0,$ якщо $x > 0$.

Отже, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ − максимум функції Гаусса,

6) $\varphi''(x) = (x^2 - 1) \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \varphi''(x) = 0,$ якщо $x = \pm 1$.

Таким чином, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ будуть точками перегину. При цьому

$$\varphi''(x) > 0, \text{якщо } x < -1; \ \varphi''(x) < 0, \text{якщо} -1 < x < 1; \ \varphi''(x) > 0, \text{якщо } x > 1.$$

Для функції Гаусса $\varphi(x)$ складена таблиця (дод. 1), у якій наведені її значення тільки для $x > 0$, оскільки $\varphi(x)$ – парна. Вона є монотонно спадною для $x > 0$, причому при $x \to \infty$, $\varphi(x) \to 0$. Практично можна вважати, що вже при $x > 4$, $\varphi(x) \approx 0$. Обчислення $P_n(k)$ за формулою (4.20) дає незначну похибку при $npq > 10$.

Приклад 4.4. Знайти ймовірність того, що подія A настане рівно 40 разів у 10000 експериментів, якщо ймовірність появи події A в кожному експерименті дорівнює 0,005.

Розв'язання. За умовою $n = 10000$, $k = 40$, $p = 0{,}005$, $q = 0{,}995$. За формулою (4.20) маємо

$$P_{10000}(40) \approx \frac{1}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}} \varphi(x) = \frac{1}{7{,}0534} \varphi(x).$$

Обчислимо обумовлене даними прикладу значення x за наступною формулою

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{40 - 10000 \cdot 0{,}005}{7{,}0534} \approx -1{,}4178.$$

За таблицею (дод. 1) знаходимо $\varphi(-1{,}42) = \varphi(1{,}42) \approx 0{,}1456$. Шукана ймовірність

$$P_{10000}(40) \approx \frac{0{,}1456}{7{,}0534} \approx 0{,}0206.$$

4.4.2. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

При розв'язуванні практичних задач часто виникає необхідність обчислювати суми виду $\sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k)$. Безпосереднє обчислення таких сум, навіть при застосуванні локальної теореми Муавра-Лапласа, дуже громіздке. Крім того, при додаванні великої кількості наближених значень $P_n(k)$ можуть утворюватися значні похибки. Такі суми доцільно обчислювати за допомогою граничної теореми, відомої під назвою інтегральної теореми Муавра-Лапласа.

Теорема 4.2. (інтегральна теорема Муавра-Лапласа). Якщо при n незалежних експериментах подія A у кожному експерименті відбувається з постійною ймовірністю p, що не занадто близька до 0 й 1 ($0 < p < 1$), то при досить великому n ймовірність $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ того, що подія A з'явиться у експериментах від k_1 до k_2 разів, наближено дорівнює

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad (4.21)$$

де

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt. \qquad (4.22)$$

Функція $\Phi(x)$ називається **функцією Лапласа**, яка протабулирована й наведена у Додатку 2.

Властивості функції Лапласа

1) $\Phi(x)$ визначена на всій осі OX,

2) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, отже, $\Phi(x)$ є непарною функцією,

3) $\Phi(0) = 0$,

4) $\Phi(\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0{,}5,$ оскільки $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$ є інтегралом Пуассона,

5) $\Phi(-\infty) = -\,\Phi(\infty) = -0{,}5$, як непарна функція,

6) $\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} > 0,$ отже, $\Phi(x)$ є функцією неспадною,

7) $\Phi''(x) = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} > 0,$ отже, $\Phi''(0) = 0,$ якщо $x < 0,$ то $\Phi''(x) > 0,$ а якщо $x > 0,$ то $\Phi''(x) < 0$. Таким чином, $x = 0$ є точкою перегину.

Для функції $\Phi(x)$ складена таблиця (дод. 1), у якій наведені її значення для $x > 0$, оскільки $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Практично можна вважати, що вже при $x > 4$, $\Phi(x) \approx 0{,}5$. Оцінка похибки при використанні формули (4.21) показує, що вона забезпечує достатню точність уже при значеннях $npq > 10$.

Приклад 4.5. Знайти ймовірність того, що подія A настане не більше 70 разів у 10000 експериментах, якщо ймовірність появи події A в кожному експерименті дорівнює 0,005.

Розв'язання. За умовою $n = 10000$, $k_1 = 0$, $k_2 = 70$, $p = 0{,}005$, $q = 0{,}995$. Оскільки $npq = 49{,}75 > 10$, то скористаємося формулою (4.21). Спочатку обчислимо границі інтегрування:

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 50}{7{,}0534} \approx -7{,}0888; \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 50}{7{,}0534} \approx 2{,}8355.$$

Тоді, використовуючи таблицю для знаходження значення функції $\Phi(x)$ (дод. 2), шукана ймовірність

$$P_{10000}(0 \le k \le 7) \approx \Phi(2{,}84) - \Phi(-7{,}09) = \Phi(2{,}84) + \Phi(7{,}09) \approx$$
$$\approx 0{,}4977 + 0{,}5 \approx 0{,}9977,$$

тобто дану подію можна вважати практично достовірною.

4.4.3. Гранична теорема Пуассона

Точність наближених формул Муавра-Лапласа зменшується при наближенні одного з чисел p або q (p – ймовірність настання випадкової події A у кожному із незалежних експериментів). Отже, у випадку, коли p або q малі числа, треба проводити додаткові дослідження для знаходження величини $P_n(k)$. Для однозначності будемо вважати, що p є малою величиною.

Шукану оцінку для $P_n(k)$ у даному випадку дає гранична теорема Пуассона.

Вираз для $P_n(k)$:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \tag{4.23}$$

можна розглядати формально як функцію від трьох змінних: n, p і q. Припустимо, що k фіксоване, а n і p міняються. Більше того, нехай $n \to \infty$, а $p \to 0$, при умові, що величина $\lambda = np$ є сталою ($\lambda = const$).

Якщо у формулі (4.23) перейти до границі, при $n \to \infty$, то отримаємо результат, який наведений у наступній теоремі.

Теорема 4.3. (гранична теорема Пуассона). Якщо при n незалежних експериментах подія A у кожному експерименті відбувається з постійною ймовірністю p, близькою до нуля, то при досить великому n ймовірність $P_n(k)$ того, що подія A настане k разів, наближено знаходиться за формулою

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \tag{4.24}$$

де $\lambda = np$ і $k = 0,1,2, \dots n$.

Вираз (4.24) називається **асимптотичною формулою** або **розподілом Пуассона**. Через малість p формулу (4.24) називають також законом розподілу рідких явищ.

Зауважимо, що значення $\lambda^k e^{-\lambda}/k!$ як функція двох змінних λ і k наведено у таблиці (дод. 2).

Зазначимо, що формула (4.24) правдива також стосовно числа невдач, але тільки в тому випадку, коли мале $\lambda' = nq$.

Якщо n достатньо велике, а ймовірність p мала настільки, що число np не велике ($npq < 10$), то для знаходження $P_n(k)$ доцільно використовувати формулу (4.24).

При наведених вище припущеннях і малому числі доданків у сумі можна використовувати формулу

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx e^{-\lambda} \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{\lambda^k}{k!}\,. \tag{4.25}$$

Точність формул (4.24) і (4.25) характеризується наступними нерівностями

$$\left| P_n(k) - \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right| < np^2, \tag{4.26}$$

$$\left| \sum_{k\in M} P_n(k) - e^{-\lambda} \sum_{k\in M} \frac{\lambda^k}{k!} \right| < np^2, \tag{4.27}$$

де M довільна підмножина множини $\{0,1,2,\ldots\}$.

Приклад 4.6. На факультеті навчається 500 студентів. Яка ймовірність того, що 1 вересня є днем народження одночасно для k студентів даного факультету? Обчислити зазначену ймовірність для $k = 0,1,2,3$.

Розв'язання. Оскільки $n = 500$ велике, а ймовірність $p = 1/365$ мала, скористаємося формулою (4.24).

Знаходимо $\lambda = np = 1{,}36986$. Тому за формулою (4.24)

$$P_{500}(0) = e^{-\lambda} \approx 0{,}25414.$$

Інші ймовірності знаходимо рекурентно

$$P_{500}(1) = \lambda\, e^{-\lambda}/1! = \lambda P_{500}(0) \approx 0{,}34814,$$

$$P_{500}(2) = \lambda^2\, e^{-\lambda}/2! = \lambda P_{500}(1)/2 \approx 0{,}23845,$$

$$P_{500}(3) = \lambda^3\, e^{-\lambda}/3! = \lambda P_{500}(2)/3 \approx 0{,}10888.$$

Дослідимо тепер поведінку $P_n(k)$ як функцію від k. Оскільки

$$\frac{P_n(k)}{P_n(k-1)} = \frac{\lambda}{k},$$

то $P_n(k) > P_n(k-1)$ при $k < \lambda$, $P_n(k) = P_n(k-1)$ при $k = \lambda$ і $P_n(k) < P_n(k-1)$ при $k > \lambda$. Звідси випливає (розділ 4.2), що коли λ – ціле число, то найбільшого значення $P_n(k)$ досягає при $k_0 = \lambda$ і . Якщо λ – неціле, то при $k_0 = [\lambda]$ ($[\lambda]$ – ціла частина λ). При зростанні k від 0 до k_0, величина $P_n(k)$ зростає, при подальшому збільшенні k – спадає.

4.5. Оцінка ймовірності події через частоту

Нехай у n незалежних експериментах подія A у кожному експерименті відбувається з постійною ймовірністю p. Поставимо задачу знайти ймовірність $P_n\left(\left|\frac{k}{n}-p\right| \leq \varepsilon\right)$ того, що відхилення відносної частоти $\frac{k}{n}$ події A від ймовірності p за модулем не перевищує заданого числа $\varepsilon > 0$.

Задача полягає у знаходженні ймовірності

$$P_n\left(\left|\frac{k}{n}-p\right| \leq \varepsilon\right) = P_n\left(-\varepsilon \leq \frac{k}{n}-p \leq \varepsilon\right) = P_n\left(p-\varepsilon \leq \frac{k}{n} \leq p+\varepsilon\right) =$$
$$= P_n(np-n\varepsilon \leq k \leq np+n\varepsilon).$$

Ймовірність $P_n(np-n\varepsilon \leq k \leq np+n\varepsilon)$ знаходимо за формулою (4.21). У даному випадку $k_1 = np-n\varepsilon$ і $k_2 = np+n\varepsilon$. Тоді

$$P_n(np-n\varepsilon \leq k \leq np+n\varepsilon) = \Phi\left(\frac{np+n\varepsilon-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{np-n\varepsilon-np}{\sqrt{npq}}\right) =$$
$$= \Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{-n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) + \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Отже,

$$P_n\left(\left|\frac{k}{n}-p\right| \leq \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (4.28)$$

Якщо в останній формулі у лівій і правій частині перейти до границі при $n \to \infty$ і врахувати властивість функції $\Phi(x)$, а саме $\Phi(\infty) = 0{,}5$, то отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} P_n\left(\left|\frac{k}{n}-p\right| \leq \varepsilon\right) = 1. \qquad (4.29)$$

Формула (4.29) виражає теорему Бернуллі, яку можна сформулювати так: якщо в кожному з n незалежних експериментів випадкова подія A настає з однією і тією самою ймовірністю p, то при достатньому великому числі експериментів n з ймовірністю, як завгодно близькою до 1, частота цієї події буде відрізнятися від її ймовірності p менше від як завгодно малого наперед заданого числа $\varepsilon > 0$.

Зазначимо, що теорема Бернуллі дає математичне підтвердження нашої інтуїтивної впевненості в тому, що при великому числі експериментів повинна виконуватися наближена рівність $k/n \approx p$.

Розглянемо деякі приклади про практичне застосування формули (4.28).

Приклад 4.7. Ймовірність того, що деталь нестандартна, дорівнює 0,1. Скільки деталей потрібно відібрати, щоб з ймовірністю 0,9544 можна було стверджувати, що відносна частота появи нестандартних деталей відхиляється від постійної ймовірності $p = 0{,}1$, за абсолютним значення не більше ніж на 0,03.

Розв'язання. За умовою $p = 0{,}1$, $q = 0{,}9$, $\varepsilon = 0{,}03$,

$$P_n\left(\left|\frac{k}{n} - 0{,}1\right| \le 0{,}03\right) = 0{,}9544.$$

Скориставшись формулою (4.28), можна записати

$$P_n\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \le 0{,}03\right) = 0{,}9544 = 2\Phi\left(0{,}03\sqrt{\frac{n}{0{,}1 \cdot 0{,}9}}\right),$$

тобто

$$\Phi\left(0{,}1\sqrt{n}\right) = 0{,}4772.$$

За таблицею (дод. 1) знаходимо, що

$$\Phi(2) = 0{,}4772$$

З останніх двох рівностей випливає

$$0{,}1\sqrt{n} = 2.$$

Звідси маємо, що $n = 400$.

Приклад 4.8. Ймовірність того, що деталь нестандартна, дорівнює 0,02. Серед випадково відібраних 3600 деталей знайти максимальне відхилення k/n появи нестандартної деталі від ймовірності 0,02, якщо ймовірність такого відхилення дорівнює 0,95.

Розв'язання. За умовою $p = 0{,}02$, $q = 0{,}98$,

$$P_n\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 0{,}95.$$

Використовуючи формулу (4.28), можна записати

$$P_n\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=0{,}95=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{3600}{0{,}02\cdot 0{,}98}}\right),$$

тобто

$$\Phi\left(\varepsilon\frac{60}{0{,}14}\right)=0{,}475.$$

За таблицею (дод. 1) знаходимо, що $\Phi(1{,}96)=0{,}475$,

$$\varepsilon\frac{60}{0{,}14}=1{,}96 \quad \text{і} \quad \varepsilon\approx 0{,}0046.$$

Теоретичні запитання до розділу 4

1. Які експерименти називаються експериментами за схемою Бернуллі?
2. За якої умови формула Бернуллі застосовується для обчислення ймовірностей?
3. Що називають найімовірнішим числом k_0 появи подій при повторних експериментах і наведіть правило його обчислення.
4. Довести, що $np - q \leq k_0 \leq np + q$.
5. Запишіть формулу біномного розподілу.
6. Чим відрізняється послідовність незалежних експериментів за схемою Бернуллі від поліноміальної схеми?
7. Запишіть формулу для обчислення $P_n(k_1, k_2, \dots, k_m)$.
8. Сформулюйте локальну теорему Муавра-Лапласа.
9. Дайте означення функції Гаусса і наведіть її основні властивості.
10. Сформулюйте інтегральну теорему Муавра-Лапласа.
11. Дайте означення функції Лапласа і наведіть її основні властивості.
12. При яких умовах використовується теорема Пуассона?
13. Чому закон Пуассона називають законом рідких явищ?
14. Запишіть формулу розподілу Пуассона.
15. Чому дорівнює ймовірність $P_n\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right)$?
16. Чому дорівнює $\lim_{x\to-\infty} \Phi(x)$?
17. Чому дорівнює $\lim_{x\to\infty} \Phi(x)$?
18. Чому дорівнює $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$?
19. Чому дорівнює $\lim_{x\to\pm\infty} \Phi(x)$?
20. Чому дорівнює $\Phi(0)$ і $\varphi(0)$?

Приклади до розділу 4

1. Гральний кубик підкидають 8 разів. Знайти ймовірність того, що чотири очки випадуть:

   1) три рази;

   2) не менше трьох разів.

2. Монету підкидають п’ять разів. Знайти ймовірність того, що цифра випаде:

   1) один раз;

   2) п’ять разів.

3. Вироби містять 5% браку. Знайти ймовірність того, що серед п’яти виробів:

   1) не буде жодного бракованого;

   2) будуть два бракованих.

4. Що більш ймовірно: виграти у рівносильного партнера

   1) три партії з чотирьох чи п’ять з восьми;

   2) не менше трьох партій з чотирьох чи не менше п’яти з восьми?

5. Гральний кубик послідовно підкинули 10 разів. Знайти ймовірність того, що кількість очок, кратна трьом випаде:

   1) три рази;

   2) не менше трьох разів;

   3) не більше трьох разів.

6. Дві лампи включено в електричне коло послідовно. Знайти ймовірність того, що при підвищенні напруги вище номінальної відбудеться розрив кола, якщо ймовірність того, що при цих умовах лампа перегорить, для обох ламп однакова і дорівнює 0,4.

7. Ймовірність настання події у кожному з 18 незалежних експериментів дорівнює 0,2. Знайти ймовірність настання цієї події принаймні двічі.

8. Гра полягає у накидуванні кілець на кілок. Гравець одержує 6 кілець і кидає їх до першого попадання. Знайти ймовірність того, що принаймні одне кільце залишиться невикористаним, якщо ймовірність попадання при кожному киданні дорівнює 0,1.

9. Ймовірність влучення в „десятку” при одному пострілі дорівнює $p = 0{,}2$. Скільки треба зробити незалежних пострілів, щоб з ймовірністю, не меншою 0,9 влучити в „десятку” принаймні один раз?
10. Ймовірність відмови кожного приладу при випробуванні дорівнює 0,2. Скільки таких приладів треба випробувати, щоб з ймовірністю не меншою 0,9, дістати не менше трьох відмов?
11. В коло вписано правильний трикутник. Знайти ймовірність того, що з пяти навмання кинутих в круг точок

    1) жодна не попадає всередину зазначеного трикутника;

    2) дві точки попадають всередину зазначеного трикутника.
12. Урна містить 9 білих і одну чорну кулю. Знайти ймовірність того, що при 10 вийманнях з поверненням буде витягнута принаймні одна чорна куля. Скільки разів треба виймати по одній кулі з повернення, щоб ймовірність появи б однієї чорної кулі була не менша 0,9?
13. Три лампи включено в електричне коло послідовно. Знайти ймовірність того, що при підвищенні напруги вище номінальної відбудеться розрив кола, якщо ймовірність того, що при цих умовах перша лампа перегорить з ймовірністю $p_1 = 0{,}5$, друга з ймовірністю $p_2 = 0{,}3$, а третя – з ймовірністю $p_3 = 0{,}2$.
14. Для кожного абонента ймовірність подзвонити на комутатор протягом однієї години дорівнює 0,01. Комутатор обслуговує 300 абонентів. Знайти ймовірність того, що протягом однієї години подзвонять:

    1) 4 абонента;

    2) не більше 4 абонентів;

    3) не менше 3 абонентів.
15. Завод виготовляє однотипні телевізори, з яких 85% вищої якості. Із партії виготовлених заводом телевізорів навмання вибирають сім. Яка ймовірність того, що серед цих телевізорів вищої якості буде:

    1) чотири;

    2) не менше чотирьох.

16. У партії однотипних деталей стандартні становлять 82%. Навмання з партії беруть 400 деталей. Яка ймовірність того, що серед них стандартних буде:
    1) 335 деталей;
    2) від 300 до 335 деталей.

    Знайти найімовірніше число появи стандартних деталей k_0 і обчислити відповідну ймовірність.
17. Ймовірність виходу із ладу виробу під час його випробування на надійність дорівнює 0,05. Яка ймовірність того, що під час випробування 900 виробів із ладу вийдуть:
    1) 30 виробів;
    2) не більше як 30 виробів.
18. Завод відправив на базу 9000 доброякісних виробів. Ймовірність пошкодження кожного виробу під час транспортування на базу становить 0,0001. Знайти ймовірність того, що серед 9000 виробів при транспортуванні буде пошкоджено:
    1) 3 вироби;
    2) не більше як 3.
19. Ймовірність виготовити на заводі виріб найвищої якості дорівнює 0,85. Навмання беруть 700 виробів. Визначити межі, в яких перебуватиме відносна частота появи виробів найвищої якості з ймовірністю 0,999.
20. Ймовірність появи випадкової події в кожній зі 100незалежних спроб є величиною сталою і дорівнює 0,3. З якою ймовірністю можна стверджувати, що відносна частота появи випадкової події при цих спробах міститься в межах $[0,2; 0,4]$?

Розділ 5. Випадкові величини і закони їх розподілу

В попередніх розділах у багатьох прикладах результатами експериментів були числа. Наприклад, при підкиданні грального кубика випадало те чи інше число, при перевірці партії готових виробів виявилося те чи інше число одиниць браку. Слід відмітити, що така ситуація є типовою для теорії ймовірностей. Появлення цих чисел в результаті експериментів носить випадковий характер, тобто при повторенні експериментів ці числа міняються непередбачуваним чином.

5.1. Поняття випадкової величини. Закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини

Величину, що у результаті експерименту набуває одного й тільки одного можливого значення, при цьому заздалегідь невідомо, якого саме, називають **випадковою**. Наведемо приклади випадкових величин:

1) число бракованих виробів у випадково відібраній партії з 20 виробів (можливі значення 0, 1, 2, …, 20) ;

2) число пострілів до першого влучення в ціль (можливі значення 1, 2, …, n, …);

3) час безвідмовної роботи будь-якого пристрою (можливі значення розташовуються на деякому інтервалі $0 < t < T$);

4) підкидається гральний кубик, грані якого занумеровані числами 1, 2, 3, 4, 5, 6; x – появлення числа на верхній грані кубика;

5) купується n лотерейних білетів; x – число виграшних білетів.

Випадкові величини як правило позначають великими літерами латинського алфавіту $X, Y, Z, ...$, а їх можливі значення – відповідними малими літерами $x, y, z, ...$. Наприклад, якщо випадкова величина X має п'ять можливих значень, то вони будуть позначені так: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Повернемося до прикладів, наведених вище. У прикладах 1, 4, 5 випадкові величини набувають скінченну множину окремих ізольованих значень, а в прикладі 2 – нескінченну, але зчисленну (зліченну) множину (зчисленна (злічення) множина – нескінченна множина, елементи якої можна занумерувати натуральними числами: $x_1, x_2, \dots, x_n, ...$).

У прикладі 3 випадкова величина заповнює весь інтервал $(0, T)$, точки якого не можна занумерувати натуральними числами, натуральних чисел просто не вистачає. Такі випадкові величини називаються неперервними.

Означення дискретної випадкової величини. Випадкова величина X називається дискретною, якщо значення, які вона може набувати, утворюють тільки скінченну або зліченну множину.

Для того, щоб задати таку випадкову величину, досить для кожного з цих можливих значень випадкової величини X задати ймовірність набування цього значення

$$p_i = P(X = x_i) \quad (i = 1, 2, \dots) \tag{5.1}$$

Якщо дискретна випадкова величина X приймає значення зі скінченної множини $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, то події $X = x_1;\ X = x_2;\ \dots, X = x_n$ утворюють повну групу несумісних подій, тому

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \tag{5.2}$$

Якщо ж випадкова величина приймає значення з нескінченної, але зліченної множини, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ збігається і його сума дорівнює 1.

Визначивши всі можливі значення випадкової величини і правило, за яким кожній події $X = x_i$ $(i = 1, 2, \dots, n, \dots)$ ставиться у відповідність ймовірність, можна одержати уявлення про випадкову величину.

Будь-яке правило, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини й їхніми ймовірностями, називається **законом** (**рядом**) розподілу випадкової величини.

Дискретну випадкову величину можна задати таблично, аналітично (у вигляді формули) і графічно.

При табличному способі задання закону розподілу перший рядок таблиці містить можливі значення випадкової величини у порядку зростання, а другий – відповідні ймовірності (табл. 5.1)

Таблиця 5.1

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
P	p_1	p_2	p_3	…	p_n

Ця таблиця називається **таблицею розподілу** ймовірностей дискретної випадкової величини X або **рядом розподілу** дискретної випадкової величини.

Приклад 5.1. Двічі кидають гральний кубик. Випадкова величина X – сума очок при обох киданнях. Скласти для неї ряд розподілу.

Розв'язання. Можливі значення випадкової величини X: 2, 3, …, 12. Простір елементарних подій $\Omega = \{\omega_1 = (1{,}1), \omega_2 = (1{,}2), \dots, \omega_{36} = (6{,}6)\}$ містить 36 елементів. Ймовірності подій $p(X = 2), p(X = 3), \dots, p(X = 12)$ легко підрахувати за класичним означення ймовірності. Наприклад, $p(X = 3) = 2/36$, так як з тридцяти шести можливих результатів експерименту події сприятливі тільки 2, а саме $(1{,}2)$ і $(2{,}1)$. Очевидно, що таблиця розподілу випадкової величини X має вигляд:

Таблиця 5.2

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

При аналітичному способі задання закону розподілу ймовірності відповідних подій $P(X = x_i) = p_i$ задаємо формулою.

Приклад 5.2. Нехай здійснюється n незалежних експериментів, у кожному з яких ймовірність настання події A постійна й дорівнює p (отже, ймовірність ненастання події A $q = 1 - p$). Розглядається випадкова величина X – число настання події A в n експериментах. Скласти для неї ряд розподілу.

Розв'язання. Можливі значення випадкової величини $X\colon 0, 1, 2, \dots, n$. Ймовірність події $X = k$ позначимо так: $P(X = k) = P_n(k)$. Тоді за формулою Бернуллі

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{5.3}$$

де $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Формула (5.3) є аналітичним виразом шуканого закону розподілу. Відповідна таблиця розподілу виглядає так:

Таблиця 5.3

X	0	1	2	...	$n-1$	n
P	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$P_n(2)$	...	$P_n(n-1)$	$P_n(n)$

Ряд розподілу, що характеризується таблицею 5.3 називається біномним. Така назва пов'язана з уже відомим фактом: числа $P_n(0), P_n(1), \dots, P_n(n)$ є членами бінома Ньютона $(p+q)^n$.

Приклад 5.3. Нехай здійснюється n незалежних експериментів, у кожному з яких ймовірність появи події A дорівнює p, причому передбачається, що n велике, а p мале. Розглядається випадкова величина X – число настання події A в n незалежних експериментах, коли n велике число ($n \to \infty$). Скласти для неї ряд розподілу.

Розв'язання. Можливими значеннями випадкової величини X є числа: $0, 1, 2, \dots, n, \dots$ У випадку, коли n велике і p мале, то для знаходження ймовірності $P(X = k) = P_n(k)$ використовуємо формулу Пуассона:

$$p_k = P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \tag{5.4}$$

де $\lambda = np$ – фіксоване додатне число. Формула (5.4) виражає закон розподілу Пуассона масових (n велике) і рідких (p мале) подій. Відповідна таблиця розподілу має вигляд:

Таблиця 5.4

X	0	1	...	n	...
P	p_0	p_1	...	p_n	...

Легко перевірити, що для написаної таблиці виконана обов'язкова умова – сума ймовірностей дорівнює 1. Дійсно,

$$p_0 + p_1 + p_2 + \cdots = e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \cdots\right) = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

Приклад 5.4. Нехай проводиться n незалежних експериментів, у кожному з яких ймовірність появи події A дорівнює p. Експерименти здійснюються, як тільки з'явиться подія A. Розглядається випадкова величина X – число експериментів, які потрібно провести до першої появи події A. Скласти для неї таблицю розподілу.

Розв'язання. Можливими значеннями X є натуральні числа: 1, 2, 3, … (теоретично вони нічим не обмежені). Подія $(X = n)$ (n – довільне натуральне число більше за 1) означає, що у перших $n - 1$ експериментах подія A не настала, а в n-му експерименті настала. Тоді ймовірність події $P(X = n)$ знаходимо так:

$$P(X = n) = \underbrace{(1 - p)(1 - p) \dots (1 - p)}_{n-1 \text{ разів}} \cdot p = q^{n-1}p,$$

де $q = 1 - p$.

Поклавши в останню формулу $n = 1, 2, 3, \dots$, отримаємо геометричну прогресію з першим членом p і знаменником q $(0 < q < 1)$:

$$p;\ \ pq;\ \ pq^2;\ \dots;\ \ pq^{n-1};\ \dots \qquad (5.5)$$

З цієї причини розподіл (5.5) називають **геометричним** розподілом. Відповідна таблиця розподілу має вигляд:

Таблиця 5.5

X	1	2	3	…	n	…
P	p	pq	pq^2	…	pq^{n-1}	…

Не важко перевірити, що ряд, побудований з елементів (5.6) збігається, і його сума дорівнює 1. Дійсно,

$$p + pq + pq^2 + \dots + pq^{n-1} + \dots = p(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots) =$$

$$= p \cdot \frac{1}{1 - q} = p \cdot \frac{1}{p} = 1.$$

Приклад 5.5. Нехай у партії з n виробів k стандартних $(k < n)$. З партії випадково відбирають m виробів. Побудувати таблицю розподілу числа стандартних деталей серед відібраних.

Розв'язання. Нехай випадкова величина X – число стандартних деталей серед m відібраних. Можливими значеннями випадкової величини X є натуральні числа: $1, 2, \dots, m$. Розглянемо випадкову подію A, яка полягає в тому, що з m вибраних s

виявляється стандартними. Вибір m виробів з n можна здійснити C_n^m способами. З вибраних m виробів за умовою задачі s повинні бути стандартними, які можна вибрати C_k^s способами. Після вибору s стандартних виробів залишиться $m-s$ бракованих, що знаходяться серед $n-k$ виробів. Але із $n-k$ бракованих виробів вибрати $m-s$ бракованих можна C_{n-k}^{m-s} способами. За основним принципом комбінаторики число елементарних подій, які сприяють вибору s стандартних виробів з m вибраних і $m-s$ бракованих виробів із $n-k$ бракованих, дорівнює $C_k^s \cdot C_{n-k}^{m-s}$. Тоді

$$P(A) = P(X = s) = \frac{C_k^s \cdot C_{n-k}^{m-s}}{C_n^m}, \tag{5.6}$$

де s – число стандартних виробів серед відібраних.

Формула (5.6) для $0 \leq s \leq \min\{m, k\}$, $m - s \leq n - k$ є аналітичним виразом закону **гіпергеометричного** розподілу. Відповідна таблиця розподілу має вигляд:

Таблиця 5.6

X	1	2	3	…	s
P_X	$P(X=1)$	$P(X=2)$	$P(X=3)$	…	$P(X=s)$

Ряд розподілу дискретної випадкової величини X: $x_1, x_2, \dots, x_n$ може бути зображений графічно, для цього у прямокутній системі координат будують точки $(x_i; p_i)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, а потім з'єднують їх відрізками прямих. Отриману ламану називають **полігоном** або **багатокутником** ймовірностей.

Нехай $n = 5$ і полігон задається за допомогою рис. 5.1

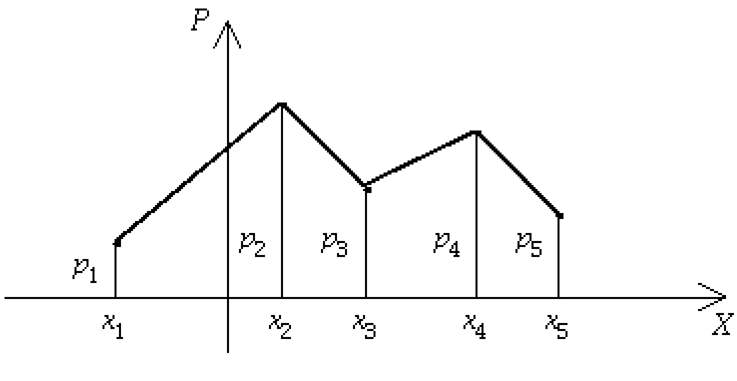


Рис. 5.1. Полігон дискретної випадкової величини X

Зазначимо, що значення випадкової величини, ймовірність якої найбільша, називають **модою** ($\operatorname{mod} X = x_2$).

5.2. Математичні операції над дискретними випадковими величинами

Над дискретними випадковими величинами визначені такі математичні операції: 1) множення на число; 2) піднесення до степені; 3) додавання; 4) віднімання; 5) множення; 6) ділення.

Перед тим як визначити ці операції над дискретними випадковими величинами спочатку введемо поняття незалежності випадкових величин.

Дві дискретні випадкові величини X і Y, які набувають можливих значень відповідно x_i $(i = 1, 2, \dots, m)$ і y_j $(j = 1, 2, \dots, n)$, називаються **незалежними**, якщо незалежна кожна пара випадкових подій $(X = x_i)$ і $\left(Y = y_j\right)$ при будь-яких $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ і $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Нехай задана випадкова величина X із таблицею розподілу 5.7

Таблиця 5.7

X	x_1	x_2	...	x_m
P	p_{x_1}	p_{x_2}	...	p_{x_m}

1. Добутком постійної C на дискретну випадкову величину X називається дискретна випадкова величина CX, що набуває значення Cx_i з тими ж ймовірностями p_i $(i = 1, 2, \dots, m)$.

Таблиця 5.8

CX	Cx_1	Cx_2	...	Cx_m
P	p_{x_1}	p_{x_2}	...	p_{x_m}

2. $\boldsymbol{k}$-им степенем дискретної випадкової величини X, називається дискретна випадкова величина X^k, що набуває значення x_i^k з тими ж ймовірностями p_i $(i = 1, 2, \dots, m)$.

Таблиця 5.9

X^k	x_1^k	x_2^k	...	x_m^k
P	p_{x_1}	p_{x_2}	...	p_{x_m}

Приклад 5.6. Дано випадкову величину:

Таблиця 5.10

X	-1	0	1
P	0,5	0,3	0,2

Знайти закон розподілу випадкових величин: а) $Y = 5X$; б) $Z = X^2$.

Розв'язання. Використовуючи наведені вище визначення, отримаємо такі закони розподілу:

а)

Таблиця 5.11

Y	-5	0	5
P	0,5	0,3	0,2

б) $P(Z = 1) = P(X^2 = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}7$

Таблиця 5.12

Z	0	1
P	0,3	0,7

Нехай дискретна випадкова величина X задається таблицею розподілу 5.7, а дискретна випадкова величина Y наступною таблицею розподілу

Таблиця 5.13

Y	y_1	y_2	...	y_n
P_Y	p_{y_1}	p_{y_2}	...	p_{y_n}

Розглянемо спочатку операції додавання, віднімання, добутку і частку двох незалежних випадкових величин, тобто коли має місце рівність

$$P\Big((X = x_i)(Y = y_j)\Big) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j). \tag{5.7}$$

3. Сумою двох незалежних дискретних випадкових величин X і Y називається дискретна випадкова величина $X + Y$, яка набуває всіх можливих значень вигляду $x_i + y_j$ $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n)$, а ймовірності можливих значень $X + Y$ дорівнюють добуткам ймовірностей доданків, тобто

$$P(X+Y=x_i+y_j)=P\left((X=x_i)(Y=y_j)\right)=p_{x_i}p_{y_j}. \qquad (5.8)$$

Якщо деякі x_i+y_j виявляться рівними між собою, то, аналогічно до попереднього (приклад б), ймовірність таких можливих значень дорівнює сумі відповідних ймовірностей. Інакше, якщо у верхньому рядку таблиці, після математичної операції, з'являються однакові числа, то відповідні стовпці поєднуються в один, приписавши їм сумарну ймовірність.

Приклад 5.7. Нехай X і Y незалежні дискретні випадкові величини, які задаються наступними таблицями розподілу:

Таблиця 5.14

X	-1	0	1
P_X	0,2	0,5	0,3

Таблиця 5.15

Y	0	1
P_Y	0,4	0,6

Знаходимо $X+Y$:

$$\underbrace{-1+0=-1,-1+1=0}_{X=-1};\ \underbrace{0+0=0,0+1=1}_{X=0};\underbrace{1+0=1,1+1=2}_{X=1}.$$

За формулою (5.7) обчислимо відповідні ймовірності:

$$P(X+Y=-1)=P\left((X=-1)(Y=0)\right)=0{,}2\cdot 0{,}4=0{,}08,$$

$$P(X+Y=0)=P\left((X=-1)(Y=1)\right)+P((X=0)(Y=0))=$$

$$=0{,}2\cdot 0{,}6+0{,}5\cdot 0{,}4=0{,}12+0{,}2=0{,}32,$$

$$P(X+Y=1)=P\left((X=0)(Y=1)\right)+P((X=1)(Y=0))=$$

$$=0{,}5\cdot 0{,}6+0{,}3\cdot 0{,}4=0{,}3+0{,}12=0{,}42,$$

$$P(X+Y=2)=P\left((X=1)(Y=1)\right)=0{,}3\cdot 0{,}6=0{,}18.$$

Побудуємо таблицю розподілу випадкової величини $X+Y$:

Таблиця 5.16

$X+Y$	-1	0	1	2
P_{X+Y}	0,08	0,32	0,42	0,18

4. Різницею двох незалежних дискретних випадкових величин X і Y називається дискретна випадкова величина $X-Y$, яка набуває всіх можливих значень вигляду $x_i - y_j$ $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n)$ і ймовірності відповідних значень $X - Y$ знаходять аналогічно як для суми $X + Y$.

Приклад 5.7. Нехай незалежні дискретні випадкові величини X і Y задаються відповідно таблицями 5.14 і 5.15.

Тоді $X - Y$:

$$\underbrace{-1 - 0 = -1, -1 - 1 = -2}_{X=-1};\ \underbrace{0 - 0 = 0, 0 - 1 = -1}_{X=0};\underbrace{1 - 0 = 1, 1 - 1 = 0}_{X=1}.$$

За формулою (5.7) знаходимо відповідні ймовірності:

$$P(X - Y = -2) = P\big((X = -1)(Y = 1)\big) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12,$$

$$P(X - Y = -1) = P\big((X = -1)(Y = 0)\big) + P((X = 0)(Y = 1)) =$$

$$= 0{,}2 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}08 + 0{,}3 = 0{,}38,$$

$$P(X - Y = 0) = P\big((X = 0)(Y = 0)\big) + P((X = 1)(Y = 1)) =$$

$$= 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}2 + 0{,}18 = 0{,}38,$$

$$P(X - Y = 1) = P\big((X = 1)(Y = 0)\big) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12.$$

Таблиця розподілу дискретної випадкової величини має вигляд $X - Y$:

Таблиця 5.17

$X - Y$	-2	-1	0	1
P_{X-Y}	0,12	0,38	0,38	0,12

5. Добутком двох незалежних дискретних випадкових величин X і Y називається дискретна випадкова величина $X \cdot Y$, яка набуває всіх можливих значень вигляду $x_i \cdot y_j$ $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n)$ і ймовірності відповідних значень $X \cdot Y$ знаходять аналогічно як у попередніх випадках для $X + Y$ або $X - Y$.

Приклад 5.8. Нехай незалежні випадкові величини X і Y задаються відповідно таблицями 5.14 і 5.15.

Тоді $X \cdot Y$: $\underbrace{(-1) \cdot 0 = 0, (-1) \cdot 1 = -1}_{X=-1};\ \underbrace{0 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 0}_{X=0};\underbrace{1 \cdot 0 = 0, 1 \cdot 1 = 1}_{X=1}.$

З урахуванням (5.7) маємо:

$$P(X \cdot Y = -1) = P\big((X = -1)(Y = 1)\big) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12,$$

$$P(X \cdot Y = 0) = P\big((X = -1)(Y = 0)\big) + P\big((X = 0)(Y = 0)\big) + P\big((X = 0)(Y = 1)\big) +$$

$$+P\big((X=1)(Y=0)\big)=0{,}2\cdot 0{,}4+0{,}5\cdot 0{,}4+0{,}5\cdot 0{,}6+0{,}3\cdot 0{,}4=$$

$$=0{,}8+0{,}2+0{,}3+0{,}12=0{,}7,$$

$$P(X\cdot Y=1)=P\big((X=1)(Y=1)\big)=0{,}3\cdot 0{,}6=0{,}18.$$

Тоді

Таблиця 5.18

$X\cdot Y$	-1	0	1
$P_{X\cdot Y}$	0,12	0,7	0,18

Аналогічно визначається частка $X\,/\,Y$ двох незалежних дискретних випадкових величин, за умови, щоб усі значення Y були відмінними від нуля.

Зауваження. Якщо X і Y залежні дискретні випадкові величини, то множини можливих значень випадкових величин $X+Y$, $X-Y$, $X\cdot Y$, $X\,/\,Y$ ($y_j\neq 0$; $j=1,2,\dots,n$) знаходяться аналогічно як у випадку незалежних дискретних випадкових величин, а ймовірності $P\left((X=x_i)(Y=y_j)\right)$ знаходяться за формулою

$$P\left((X=x_i)(Y=y_j)\right)=P(X=x_i)\,P\left((Y=y_j)\,/\,(X=x_i)\right), \qquad (5.9)$$

де $P\left((Y=y_j)\,/\,(X=x_i)\right)$ – умовна ймовірність події $(Y=y_j)$ при умові, що $(X=x_i)$.

Розглянемо приклад на математичні операції залежних дискретних випадкових величин.

Приклад 5.9. Нехай X дискретна випадкова величина, яка задається таблицею розподілу

Таблиця 5.19

X	0	$\frac{\pi}{2}$	π
P_X	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Тоді випадкова величина $Y=\sin X$ має ряд розподілу

Таблиця 5.20

Y	0	1
P_Y	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Знайти ряд розподілу випадкової величини $X \cdot Y$.

Випишемо всі можливі значення $X \cdot Y$:

$$\underbrace{0 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 0}_{X=-1};\ \underbrace{\frac{\pi}{2} \cdot 0 = 0, \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2}}_{X=\frac{\pi}{2}};\ \underbrace{\pi \cdot 0 = 0, \pi \cdot 1 = \pi}_{X=\pi}.$$

Використовуючи формулу (5.9) знаходимо ймовірності відповідних подій $(X = x_i)\big(Y = y_j\big)$ $(i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2)$:

$$P(X \cdot Y = 0) = P\big((X = 0)(Y = 0)\big) + P\big((X = 0)(Y = 1)\big) +$$

$$+P\left(\left(X = \frac{\pi}{2}\right)(Y = 0)\right) + P\big((X = \pi)(Y = 0)\big) =$$

$$= P(X = 0)\ P\big((Y = 0)\ /\ (X = 0)\big) + P(X = 0)\ P\big((Y = 1)\ /\ (X = 0)\big) +$$

$$+P\left(X = \frac{\pi}{2}\right)\ P\left((Y = 0)\ /\ \left(X = \frac{\pi}{2}\right)\right) + P(X = \pi)\ P\big((Y = 0)\ /\ (X = \pi)\big) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9},$$

$$P\left(X \cdot Y = \frac{\pi}{2}\right) = P\left(\left(X = \frac{\pi}{2}\right)(Y = 1)\right) = P\left(X = \frac{\pi}{2}\right)\ P\left((Y = 1)\ /\ \left(X = \frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9},$$

$$P(X \cdot Y = \pi) = P\big((X = \pi)(Y = 1)\big) = P(X = \pi)\ P\big((Y = 1)\ /\ (X = \pi)\big) = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0.$$

Отже, таблиця розподілу випадкової величини має вигляд:

Таблиця 5.21

$X \cdot Y$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$P_{X \cdot Y}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{1}{9}$	0

5.3. Функція розподілу випадкової величини і її властивості

Як відомо дискретна випадкова величина приймає значення із скінченної або зчисленої (зліченої) множини, тому її можна задати таблицею розподілу у першому рядку якої розташовані її можливі значення в порядку зростання, а у другому – відповідні ймовірності. Такий спосіб задання випадкових величин не є універсальним, оскільки не можна застосовувати для задання неперервних випадкових величин, тому що не можливо перелічити у вигляді таблиці всі значення випадкової величини і їхні ймовірності. Крім того, як буде показано далі, кожне окреме значення неперервної випадкової величини має нульову ймовірність. Однак, незважаючи на це, знаходження її можливих значень у різних інтервалах має різні та відмінні від нуля ймовірності.

Для кількісної характеристики поведінки неперервної випадкової величини зручно використати не ймовірність події $X = x_i$ (як це має місце для дискретних випадкових величин), а ймовірність події $(X < x)$, де x – деяке дійсне число. Якщо довільно змінювати x, то ймовірність виконання нерівності $X < x$, тобто $P(X < x)$ також буде змінюватися. Отже, $P(X < x)$ є функцією аргументу x, яку позначимо $F(x)$.

Функцією розподілу випадкової величини X називається функція $F(x)$, яка дорівнює ймовірності того, що випадкова величина X набуває значення, меншого ніж x ($\forall x \in R$), тобто

$$F(x) = P(X < x). \tag{5.10}$$

Функцію $F(x)$ іноді називають інтегральною функцією розподілу або інтегральним законом розподілу.

З геометричної точки зору рівність (5.10) можна тлумачити так: $F(x)$ є ймовірність того, що випадкова величина X (випадкова точка на осі OX) у результаті експерименту потрапить лівіше точки x

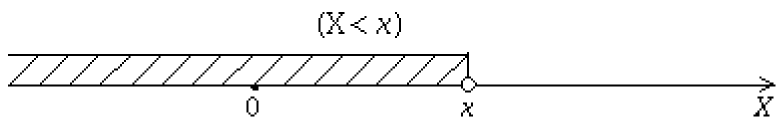


Рис. 5.2. Функція розподілу випадкової величини X

Покажемо, що коли відома функція $F(x)$, то можна знайти ймовірність довільної події вигляду $(x_1 \leq X < x_2)$.

Розглянемо очевидну рівність подій (рис. 5.3):

$$(X < x_2) = (X < x_1) + (x_1 \leq X < x_2). \quad (5.11)$$

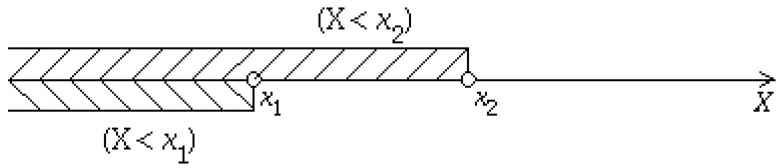


Рис. 5.3. Рівність подій

Очевидно, що події $(X < x_1)$ і $(x_1 \leq X < x_2)$ є несумісними. Тоді за формулою додавання ймовірностей несумісних випадкових подій та з (5.11) маємо

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leq X < x_2). \quad (5.12)$$

На основі означення функції розподілу $F(x)$ і рівності (5.12) можна стверджувати:

$$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \leq X < x_2).$$

Звідси випливає, що

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \quad (5.13)$$

З означення функції розподілу $F(x)$ та з (5.13) можна отримати наступні властивості $F(x)$:

1. Значення $F(x)$ належить відрізку $[0, 1]$, тобто

$$\forall x \in R \quad 0 \leq F(x) \leq 1.$$

Твердження випливає з формули (5.10), оскільки ймовірність довільної випадкової події належить проміжку $[0, 1]$.

2. $F(x)$ – неспадна функція, тобто

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad F(x_1) \leq F(x_2).$$

Нехай $x_1 < x_2$. Враховуючи рівність (5.13) і той факт, що ймовірність будь-якої випадкової події є число невід’ємне, маємо: $F(x_2) - F(x_1) \geq 0$ або $F(x_2) \geq F(x_1)$.

3. Якщо дискретна випадкова величина X набуває можливого значення x_i з ймовірністю $P(X = x_i) = p_i$, то її функція розподілу $F(x)$ має в точці x_i розрив зі

стрибком $p_i = F(x_i + 0) - F(x_i - 0)$. У точці x_i функція $F(x)$ неперервна зліва, тобто $F(x_i - 0) = F(x_i)$.

Дійсно, подію $(X \leq x_i)$ можна записати у вигляді суми двох несумісних подій:

$$(X \leq x_i) = (X < x_i) + (X = x_i).$$

Тоді за формулою додавання ймовірностей несумісних подій маємо

$$P(X \leq x_i) = P(X < x_i) + P(X = x_i) = F(x_i) + p_i.$$

Оскільки

$$F(x_i + 0) = P(X < x_i + 0) = \lim_{\varepsilon \to 0} P(X < x_i + \varepsilon) = P(X \leq x_i),$$

то перейшовши до границі в попередній рівності, отримаємо

$$F(x_i + 0) = F(x_i) + p_i.$$

Звідси, з урахуванням того, що функція розподілу $F(x)$ є неперервною зліва $(F(x_i) = F(x_i - 0))$, маємо

$$p_i = F(x_i + 0) - F(x_i - 0).$$

Розглянемо графік функції розподілу $F(x)$ дискретної випадкової величини, яка задається наступною таблицею розподілу

Таблиця 5.22

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
P_X	p_1	p_2	p_3	…	p_n

де $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ і $p_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Поступово знаходимо значення функції $F(x)$ у точках $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Якщо $X \leq x_1$, то $F(x_1) = P(X < x_1) = 0$, оскільки X не набуває значень менших x_1.

Якщо $x_1 < X \leq x_2$, то $F(x_2) = P(X < x_2) = P(X = x_1) = p_1$.

Якщо $x_2 < X \leq x_3$, то $F(x_3) = P(X = x_1) + P(X = x_2) = p_1 + p_2$.

Якщо $x_{n-1} < X \leq x_n$, то $F(x_n) = P(X < x_n) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_{n-1}) = p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}$.

Нарешті, якщо $X > x_n$, то $F(x_n) = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

Отже, графік функції розподілу дискретної випадкової величини, що задається табл. 5.22 має наступний вигляд

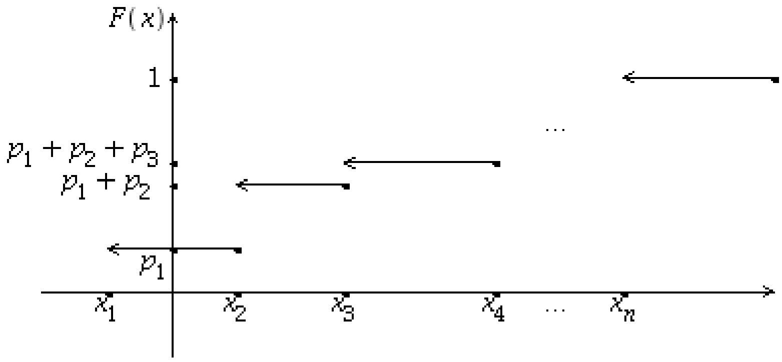


Рис. 5.4. Функція розподілу $F(x)$ дискретної випадкової величини X

Як бачимо, функція розподілу $F(x)$ дискретної випадкової величини X кусково-стала, має стрибки p_i в точках розриву x_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ і неперервна зліва.

Якщо $F(x)$ функція розподілу, то

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \;\; F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1. \tag{5.14}$$

Якщо $x \to -\infty$, то подія $(X < -\infty)$ неможлива і $P(X < -\infty) = 0$.

Якщо $x \to \infty$, то подія $(X < \infty)$ – достовірна і $P(X < \infty) = 1$.

Ймовірність потрапляння випадкової величини X у проміжок $[a, b)$ дорівнює приросту $F(x)$ на цьому проміжку:

$$P(a \leq X < b) = F(a) - F(b). \tag{5.15}$$

Ця рівність випливає безпосередньо зі співвідношення (5.13), якщо покласти $x_1 = a$ і $x_2 = b$.

Якщо X – неперервна випадкова величина, то ймовірність будь-якого конкретного значення $x = a$ дорівнює нулю, тобто $P(X = a) = 0$.

Нехай у формулі (5.15) $b \to a$. Тоді у границі, замість ймовірності потрапляння в інтервал, отримає ймовірність того, що величина X набуває окремо взятого значення $X = a$:

$$P(X = a) = \lim_{b \to a} P(a \leq X < b) = \lim_{b \to a} (F(b) - F(a)). \tag{5.16}$$

Значення цієї границі залежить від того, чи неперервна функція $F(x)$ в точці $x = a$ або ж має розрив. Якщо в точці $x = a$ функція $F(x)$ має розрив, то границя (5.16) дорівнює значенню стрибка функції $F(x)$ у точці a. Якщо функція $F(x)$ в точці a неперервна, то границя (5.16) дорівнює нулю, тобто

$$P(X = a) = 0. \tag{5.17}$$

Випадкова величина X називається **неперервною**, якщо неперервна її функція розподілу $F(x)$.

Якщо X неперервна випадкова величина, то на основі (5.15), (5.17) і правила додавання ймовірностей несумісних випадкових подій маємо:

$$P(a < X < b) = P(a < X \le b) = P(a < X < b) + P(X = b) =$$
$$= P(a \le X < b) = P(a < X < b) + P(X = a) = P(a \le X \le b) =$$
$$= P(a < X < b) + P(X = a) + P(X = b) = F(b) - F(a).$$

5.4. Щільність розподілу ймовірностей

Задання неперервної випадкової величини за допомогою функції розподілу не є єдиним. Її також можна задати, використовуючи іншу функцію, яку називають щільністю розподілу ймовірностей.

Нехай маємо неперервну випадкову величину X з функцією розподілу $F(x)$, відносно якої будемо припускати, що вона неперервна й диференційована в досліджуваному інтервалі. Розглянемо ймовірність потрапляння неперервної випадкової величини X в інтервал $(x, x + \Delta x)$ довжини Δx. Відповідно до формули

$$P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x), \tag{5.18}$$

тобто дорівнює приросту функції $F(x)$ на цьому інтервалі. Розглянемо відношення цієї ймовірності до довжини інтервалу Δx, тобто середню ймовірність, яка припадає на одиницю довжини розглянутого інтервалу, і перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$. Тоді

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = p(x).$$

Щільністю розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X або **диференціальною функцією розподілу** називають функцію $p(x)$, яка дорівнює похідній її функції розподілу:

$$p(x) = F'(x). \tag{5.19}$$

На противагу функції розподілу, щільність розподілу ймовірностей не є універсальною, вона існує тільки для неперервних випадкових величин.

Графік $p(x)$ називається **кривою розподілу** (рис. 5.5)

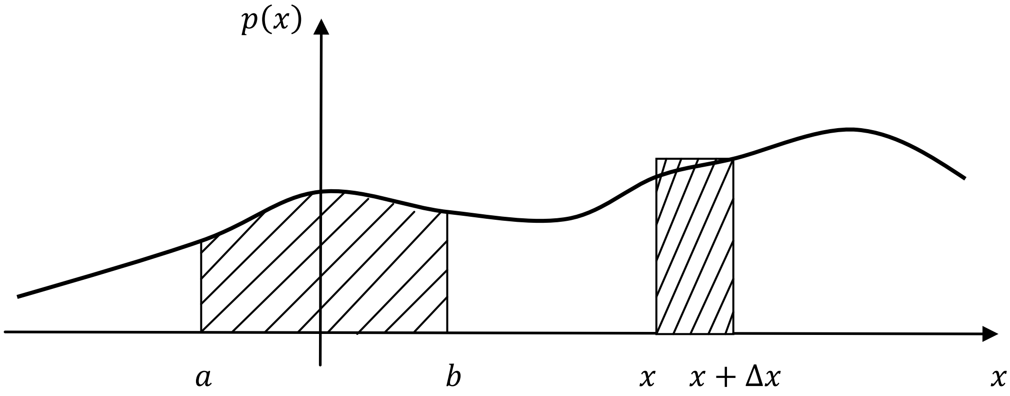


Рис. 5.5. Графік функції щільності $p(x)$

З математичного аналізу відомо, що приріст функції $F(x+\Delta x)-F(x)$ наближено дорівнює диференціалу функції $dF(x)$, тобто

$$F(x+\Delta x)-F(x) \approx dF(x)=F'(x)dx.$$

Оскільки $F'(x)=p(x)$ і $dx=\Delta x$, то

$$F(x+\Delta x)-F(x) \approx p(x)\Delta x. \qquad (5.20)$$

Величина $p(x)\Delta x$ називається **елементом ймовірності** і геометрично виражає собою площу елементарного прямокутника, що опирається на відрізок Δx (рис. 5.3).

Основні властивості щільності розподілу

Нехай X – довільна неперервна випадкова величина, а $p(x)$ – її щільність розподілу ймовірностей.

1. Функція $p(x) \geq 0, \forall x \in R$.

Оскільки функція $F(x)$ є неспадною, то її похідна є невід'ємною, тобто $F'(x)=p(x) \geq 0$.

2. Ймовірність потрапляння неперервної випадкової величини в інтервал (a, b) визначається формулою

$$P(a<X<b)=\int_a^b p(x)dx. \qquad (5.21)$$

Дійсно, згідно (5.18), формули Ньютона-Лейбніца і (5.19) маємо

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a)=\int_a^b F'(x)dx=\int_a^b p(x)dx.$$

Геометрично це означає, що ймовірність $P(a < X < b)$ дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої зверху графіком функції щільності $p(x)$, який спирається на інтервал (a, b) (рис. 5.5).

3. Якщо $p(x)$ щільність розподілу випадкової величини X, то її функція розподілу $F(x)$ визначається так:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt. \tag{5.22}$$

4. Якщо $p(x)$ щільність розподілу випадкової величини X, то має місце рівність

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1. \tag{5.23}$$

Зауваження. Слід зазначити, що коли неперервна випадкова величина набуває значення тільки в деякому інтервалі (a, b), то

$$\int_{a}^{b} p(x)dx = 1. \tag{5.24}$$

5.5. Закон рівномірного розподілу на відрізку

Кажуть, що випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку $[a, b]$, якщо її щільність розподілу $p(x)$ задається так:

$$p(x) = \begin{cases} C, & \text{якщо } x \in [a, b], \\ 0, & \text{якщо } x \notin [a, b]. \end{cases} \tag{5.25}$$

Значення сталої C визначається за умовою

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1. \tag{5.26}$$

Враховуючи (5.25) і адитивну властивість інтегралу, рівність (5.26) запишеться так:

$$C\int_{a}^{b} dx = 1.$$

Звідси $C(b-a)=1$ і $C=1/(b-a)$. Тобто щільність ймовірностей рівномірно розподіленої випадкової величини на відрізку $[a,b]$ має вигляд:

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & \text{якщо } x\in[a,b],\\ 0, & \text{якщо } x\notin[a,b].\end{cases} \tag{5.27}$$

Числа a і b називаються параметрами розподілу, так як вони однозначно визначають рівномірний розподіл.

Графік функції $p(x)$ зображено на рис. 5.6.

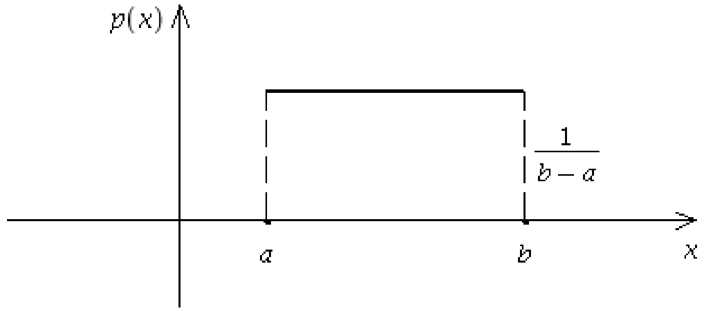


Рис. 5.6. Графік функції $p(x)$

Знайдемо **функцію розподілу** $F(x)$ за заданою щільністю розподілу ймовірностей (5.27). За формулою (5.22) маємо

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt=\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dt=\frac{t}{b-a}\bigg|_{a}^{x}=\frac{x-a}{b-a}.$$

Якщо $x<a$, то $F(x)=0$ і $F(x)=1$, якщо $x>b$. Отже,

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{якщо } a\le x\le b,\\ 1, & \text{якщо } x>b.\end{cases} \tag{5.28}$$

Графік функції $F(x)$ зображено на рис. 5.7

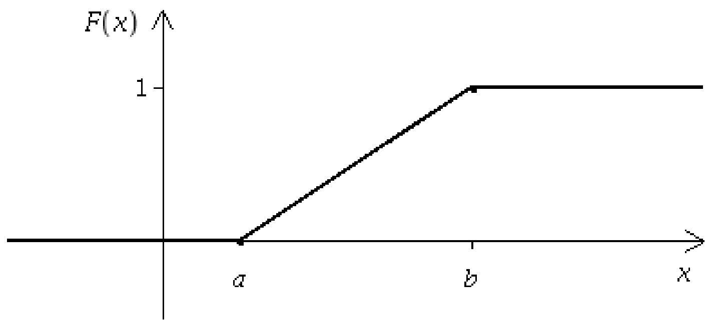


Рис. 5.7. Графік функції $F(x)$

5.6. Показниковий (експоненціальний) закон розподілу

Неперервна випадкова величина X має **показниковий (експоненціальний) закон розподілу** з параметром λ, якщо її щільність ймовірностей має вигляд:

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x \geq 0, \\ 0, & \text{якщо } x < 0. \end{cases} \tag{5.29}$$

Цей закон зустрічається в багатьох задачах теорії масового обслуговування. Так, наприклад, величина проміжку часу між появами двох послідовних рідких подій підпорядковується найчастіше показниковому розподілу. Переконаємося в тому, що функція (5.29) задовольняє умову (5.23):

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = -\lim_{x\to\infty} e^{-\lambda x} + e^0 = 0 + 1 = 1.$$

Знайдемо функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X, якщо щільність ймовірностей $p(x)$ визначається за формулою (5.29). Із рівності (5.22) випливає

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \lambda \int_{0}^{x} e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t}\Big|_0^{x} = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Таким чином

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases} \tag{5.30}$$

Графіки функцій $p(x)$ і $F(x)$ зображено на рис. 5.8, а) і б) відповідно

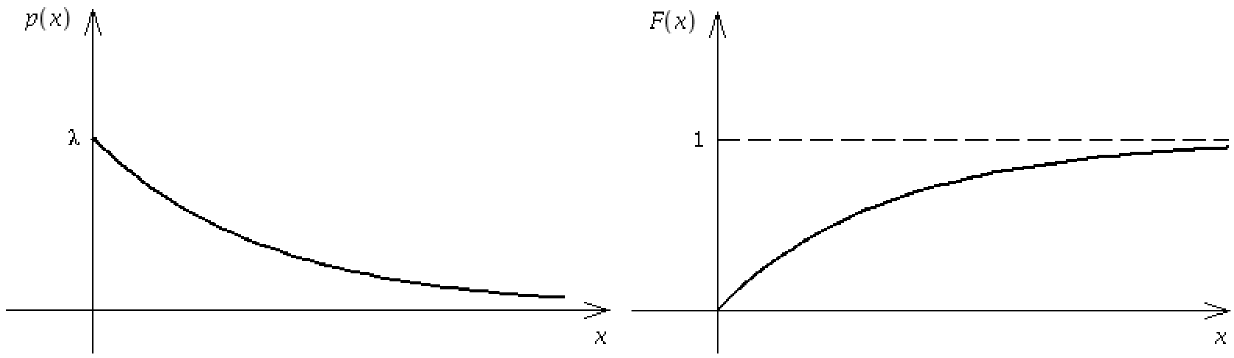


Рис. 5.8. Графіки функцій $p(x)$ і $F(x)$

Знайдемо ймовірність попадання в інтервал (a, b) розглянутої випадкової величини X, заданої функцією розподілу (5.30):

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = 1 - e^{-\lambda b} - \left(1 - e^{-\lambda a}\right) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

5.7. Закон нормального розподілу на прямій

Закон нормального розподілу на прямій, або **нормальний закон** більше всього зустрічається на практиці.

Кажуть, що неперервна випадкова величина X підпорядкована **нормальному закону розподілу**, якщо вона має щільність ймовірності наступного вигляду:

$$p(x) = Ae^{-\frac{\lambda}{(x-a)^2}}, \tag{5.31}$$

де A, λ і a – сталі і $A > 0$, $\lambda > 0$.

З (5.23) випливає

$$A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{(x-a)^2}} dx = 1.$$

Якщо в останньому інтегралі зробити заміну $\sqrt{\lambda}(x-a) = t$, то дістанемо

$$\frac{A}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = 1.$$

Оскільки інтеграл від функції e^{-t^2} по всій осі дорівнює $\sqrt{\pi}$, то маємо

$$A\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} = 1. \tag{5.32}$$

Поклавши,

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} \quad (\sigma > 0)$$

(тобто вводимо замість λ інший параметр σ), тоді з (5.23) безпосередньо випливає

$$A = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

Остаточно маємо:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{5.33}$$

Рівність (5.33) задає стандартну форму запису щільності ймовірності нормально розподіленої випадкової величини. Параметри a і σ у формулі (5.33) будуть визначені пізніше.

Розглянемо наступну задачу. Нехай випадкова величина X розподілена за нормальним законом з щільністю (5.33). Знайти ймовірність попадання випадкової величини X у довільний відрізок $[\alpha, \beta]$. Маємо:

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} p(x)dx.$$

Останню рівність з урахуванням (5.33) можна переписати так:

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Якщо ввести заміну $(x-a)/\sigma = t$, то дістанемо

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа, тобто

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Отже, має місце формула

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \tag{5.34}$$

Якщо замість проміжку $[\alpha, \beta]$ розглянемо проміжок $[\alpha - 3\sigma, \beta + 3\sigma]$, то з (5.34) маємо:

$$P(\alpha - 3\sigma \leq X \leq \alpha + 3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) = 0{,}997.$$

З останньої рівності випливає, що подія $\alpha - 3\sigma \leq X \leq \beta + 3\sigma$ практично є вірогідною. Це означає, що всі значення неперервної випадкової величини X практично потрапляють у проміжок $[\alpha - 3\sigma, \alpha + 3\sigma]$. Цей факт носить назву „правило трьох сигм”.

Теоретичні запитання до розділу 5

1. Означення випадкової величини.
2. Означення дискретної і неперервної випадкової величини.
3. Що називають біномним законом розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини? Наведіть приклад.
4. Що називають пуассонівським законом розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини? Наведіть приклад.
5. Що називають геометричним законом розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини? Наведіть приклад.
6. Що називають гіпергеометричним законом розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини? Наведіть приклад.
7. Які дискретні випадкові величини називають незалежними?
8. Означення суми двох дискретних незалежних випадкових величин.
9. Означення різниці двох дискретних незалежних випадкових величин.
10. Означення добутку двох дискретних незалежних випадкових величин.
11. Означення частки двох дискретних незалежних випадкових величин.
12. Які дискретні випадкові величини називаються залежними?
13. Як визначаються математичні операції додавання, віднімання, множення та ділення для дискретних залежних випадкових величин?
14. Що називають функцією розподілу випадкової величини?
15. Наведіть основні властивості функцій розподілу.
16. Довести, що $F(x_2) \geq F(x_1)$, якщо $x_2 \geq x_1$.
17. Чому дорівнює значення функції розподілу $F(x)$ при фіксованому значенні $x = x_0$?
18. Чому дорівнює $P(a < X < b)$ через функції розподілу?
19. Означення щільності ймовірностей неперервної випадкової величини X.
20. Основні властивості щільності ймовірностей неперервної випадкової величини.
21. Що називають рівномірним законом розподілу ймовірностей і який аналітичний і графічний вигляд мають його $p(x)$ і $F(x)$?

22. Що називають показниковим (експоненціальним) законом розподілу ймовірностей і який аналітичний і графічний вигляд мають його $p(x)$ і $F(x)$?
23. Наведіть формулу для знаходження ймовірності потрапляння неперервної випадкової величини, розподіленої за показниковим законом, у заданий інтервал.
24. Що називають нормальним законом розподілу ймовірностей і який аналітичний вигляд мають його $p(x)$ і $F(x)$?
25. Вивести формулу для знаходження $P(a < X < b)$, якщо випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами „ a” і „ σ”.
26. Сформулюйте правило трьох сигм.

Приклади до розділу 5

1. За заданим законом розподілу дискретної випадкової величини X маємо:

X	-2	-1	0	2	5	6
P_X	a	$\frac{1}{6}a$	$\frac{1}{3}a$	a	$\frac{1}{6}a$	$\frac{1}{3}a$

Знайти a. Обчислити $P(X<2)$; $P(-1<X\le 5)$; $P(X>0)$. Побудувати графік функції розподілу ймовірностей $F(x)$.

2. За заданою функцією розподілу ймовірностей

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x\le -2,\\ \frac{1}{3}, & \text{якщо } -2<x\le -1,\\ \frac{7}{18}, & \text{якщо } -1<x\le 0,\\ \frac{1}{2}, & \text{якщо } 0<x\le 2,\\ \frac{5}{6}, & \text{якщо } 2<x\le 5,\\ \frac{16}{18}, & \text{якщо } 5<x\le 6,\\ 1, & \text{якщо } x>6. \end{cases}$$

Обчислити: $P(-2<X\le 0)$; $P(X<5)$; $P(X\ge 2)$.

3. Троє студентів складають іспит з теорії ймовірностей та математичної статистики. Ймовірність того, що перший студент складе іспит, становить 0,9, для другого та третього студентів ця ймовірність дорівнює відповідно 0,85 і 0,8. Побудувати таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X – числа студентів, які складуть іспит з теорії ймовірностей та математичної статистики, побудувати $F(x)$ і накреслити її графік.

4. Ймовірність того, що футболіст реалізує одинадцятиметровий штрафний удар дорівнює 0,9. Футболіст виконав три такі удари. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X – числа реалізованих штрафних.

5. Двічі підкидають монету. Знайти закон розподілу випадкової величини X – число випадань герба. Знайти функцію розподілу і побудувати її графік.

6. Послідовно проводять незалежні експерименти, при кожному з яких ймовірність успіху дорівнює p. Експерименти проводяться до першого успіху. Позначимо через X число випробувань, здійснених до першого успіху. Побудувати таблицю розподілу випадкової величини X.
7. Випадкова величина X розподілена за геометричним законом розподілу з параметром p. Знайти $P(X < 2)$ і $P(X \geq 3)$.
8. Стрілець на змаганнях має 4 патрони і стріляє в ціль до першого влучення. Ймовірність влучення при одному пострілі 0,7. Нехай X – число промахів. Побудувати таблицю розподілів випадкової величини X. Обчислити $P(X \leq 3)$, $P(2 < X \leq 4)$. Знайти функцію розподілів та побудувати її графік.
9. У лотереї розіграються мотоцикл, велосипед і годинник. Усього є 100 лотерейних білетів. Навмання покупець придбав один з них. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – поява виграшного білета.
10. У першій коробці міститься 5 стандартних і 2 браковані деталі, у другій – 3 стандартні і одна бракована. Навмання з першої коробки беруть 3 деталі, а з другої – 2. Побудувати таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X – появи числа стандартних деталей серед п'яти навмання взятих і побудувати $F(x)$.
11. Дискретні незалежні випадкові величини задані наступними таблицями розподілу:

X	-2	2
P_X	0,3	0,7

Y	-1	0	1
P_Y	0,2	0,5	0,3

Знайти таблицю розподілу наступних випадкових величин: X^3, Y^2, $X+Y$, $X-Y$, $X \cdot Y$, $Y \,/\, X^2$.

12. Дискретні залежні випадкові величини X і задані наступними таблицями розподілу:

X	0	$\frac{\pi}{2}$	π
P_X	0,2	0,4	0,4

Y	-1	0	1
P_Y	0,4	0,4	0,2

Знайти ряди розподілу наступних випадкових величин: $X + Y$, $X - Y$, $X \cdot Y$.

13. Які з поданих нижче функцій є функціями розподілу:

а) $F(x) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} x$;

б) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 0; \\ \dfrac{x}{1+x}, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$

в) $F(x) = e^{-e^{-x}}$;

г) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 0; \\ 1 - \dfrac{1 - e^{-x}}{x}, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$

14. Випадкова величина X рівномірно розподілена: а) на відрізку $[-1; 1]$; б) на відрізку $[-1; 3]$. Знайти в обох випадках функції розподілу $Y = |X|$.

15. Щільність розподілу випадкової величини X дорівнює

$$p(x) = \begin{cases} a \cos x, & \text{якщо } -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{якщо } |x| > \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

а) визначити сталу a, б) знайти функцію розподілу $F(x)$ та побудувати графіки функцій $p(x)$ та $F(x)$, в) обчислити $P(0 \leq x \leq \pi/4)$.

16. Щільність розподілу випадкової величини X дорівнює

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 0, \\ ax, & \text{якщо } 0 < x \leq 2, \\ 0, & \text{якщо } x > 2, \end{cases}$$

а) знайти сталу a, б) знайти функцію розподілу $F(x)$ і побудувати графіки функцій $F(x)$ та $F(x)$.

17. Щільність розподілу випадкової величини X дорівнює

$$p(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{якщо } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{якщо } x \leq 0 \text{ і } x > 1, \end{cases}$$

а) знайти функцію розподілу та побудувати її графік;

б) обчислити ймовірність $P(-1 < X < 0{,}5)$.

18. Задано функцію розподілу ймовірностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0, \\ \sin 2x, & \text{якщо } 0 < x \le \dfrac{\pi}{4}, \\ 1, & \text{якщо } x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Знайти $p(x)$. Побудувати графіки $F(x)$ і $p(x)$.

19. Дано функцію розподілу ймовірностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le -2, \\ \dfrac{\sqrt{2x+1}}{3}, & \text{якщо } -\dfrac{1}{2} < x \le 4, \\ 1, & \text{якщо } x > 4. \end{cases}$$

Знайти $p(x)$. Побудувати графіки функцій $F(x)$ і $p(x)$.

20. Дано функцію розподілу ймовірностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le -3, \\ \dfrac{(x+3)^2}{16}, & \text{якщо } -3 < x \le -1, \\ 1 - \dfrac{(x-5)^2}{48}, & \text{якщо } -1 < x \le 5, \\ 1, & \text{якщо } x > 5. \end{cases}$$

Знайти $p(x)$. Побудувати графіки функцій $F(x)$ і $p(x)$.

21. За заданими функціями

$$\text{а) } p(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0, \\ 5\sqrt{x}, & \text{якщо } 0 < x \le 1, \\ 0, & \text{якщо } x > 1, \end{cases}$$

$$\text{б) } p(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le \dfrac{\pi}{4}, \\ \cos 2x, & \text{якщо } \dfrac{\pi}{4} < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{якщо } x > \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

$$\text{в) } p(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0, \\ x^2, & \text{якщо } 0 < x \le 2, \\ 0, & \text{якщо } x > 2, \end{cases}$$

$$\text{г) } p(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0, \\ \dfrac{5}{3}\sqrt{x^3}, & \text{якщо } 0 < x \le 1, \\ 0, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

22.Дано щільність ймовірності

$$p(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 1,\\ 2a\ln x, & \text{якщо } 1<x\le e,\\ 0, & \text{якщо } x>e.\end{cases}$$

Знайти a і $F(x)$. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$.

23. Дано щільність ймовірності

$$p(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0,\\ a\cos\dfrac{x}{2}, & \text{якщо } 0<x\le \pi,\\ 0, & \text{якщо } x>\pi.\end{cases}$$

Знайти a і $F(x)$. Побудувати графіки функцій $p(x)$ і $F(x)$. Обчислити $P(0<X\le \pi/4)$.

24. Щільність розподілу випадкової величини X зображена на рис. 5.9.

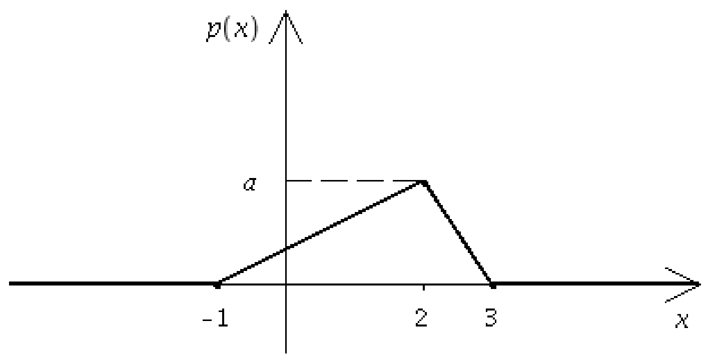


Рис. 5.9. Щільність розподілу $p(x)$

Записати вирази $p(x)$, $F(x)$ і побудувати графік функції $F(x)$.

25. Щільність розподілу випадкової величини X зображена на рис. 5.10.

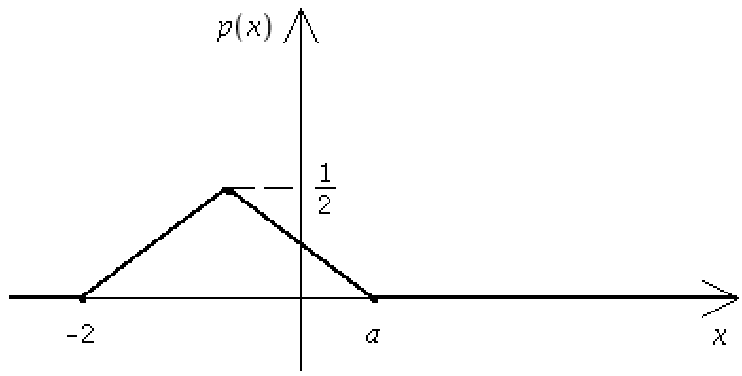


Рис. 5.10. Щільність розподілу $p(x)$

Записати вирази $p(x)$, $F(x)$ і побудувати графік функції $F(x)$.

Розділ 6. Числові характеристики випадкових величин

З попереднього розділу випливає, що найбільш повну інформацію про характер і поведінку випадкової величини дає її функція розподілу (або закон розподілу, записаний в якій-небудь іншій формі). Проте при розв'язуванні багатьох задач теорії ймовірностей буває достатньо знати лише кілька чисел, які певною мірою характеризують випадкову величину. Такі числа називають **числовими характеристиками** випадкової величини. Найважливішими з числових характеристик є математичне сподівання (або середнє значення) і дисперсія, до вивчення яких ми переходимо.

6.1. Математичне сподівання випадкової величини

Серед числових характеристик випадкової величини треба насамперед відмітити ті, які вказують деяке середнє, орієнтоване значення, навколо якого групуються інші її можливі значення. З характеристик положення в теорії ймовірностей одну з найважливіших роль відіграє математичне сподівання, яке іноді називають центром розподілу або середнім значенням випадкової величини.

6.1.1. Математичне сподівання дискретної випадкової величини

Нехай X дискретна випадкова величина, яка приймає значення із скінченої множини $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ і має наступний ряд розподілу

Таблиця 6.1

X	x_1	x_2	...	x_n
P_X	p_1	p_2	...	p_n

Математичним **сподіванням** або **середнім значенням** дискретної випадкової величини X називається число

$$M(X) = m_x = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i, \tag{6.1}$$

де $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$.

З рівності (6.1) безпосередньо випливає: якщо дискретна випадкова величина X приймає значення із скінченої множини, то математичне сподівання $M(X)$ завжди існує.

З'ясуємо ймовірнісний зміст математичного сподівання $M(X)$ дискретної випадкової величини, яка задається формулою (6.1). Нехай у результаті n випробувань (експериментів) дискретна випадкова величина X значення x_1 здійснилася m_1 разів, значення x_2 – m_2 разів, …, значення x_k – m_k разів, причому $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$. Оскільки сума прийнятих значень дорівнює $x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_k m_k$, то середнє арифметичне $X_{\text{ср}}$ усіх її значень визначається за формулою

$$X_{\text{ср}} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_k m_k}{n} = x_1 \frac{m_1}{n} + x_2 \frac{m_2}{n} + \cdots + x_k \frac{m_1}{n} =$$
$$= x_1 W_1 + x_2 W_2 + \cdots + x_k W_k, \qquad (6.2)$$

де $W_i = \dfrac{m_i}{n}$ – відносна частота значень x_i $(i = 1,2, \dots, k)$.

Приклад 6.1. Знайти математичне сподівання дискретної випадкової величини X, закон розподілу якої задається наступною таблицею

X	-2	-1	0	1	2
P_X	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

Розв'язання.

$$M(X) = (-2) \cdot 0{,}2 + (-1) \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}1.$$

Розглянемо випадок, коли дискретна випадкова величина X приймає значення із нескінченої, але зліченої множини. В даному випадку закон розподілу дискретної випадкової величини задається наступною таблицею:

Таблиця 6.2

X	x_1	x_2	x_3	…
P_X	p_1	p_2	p_3	…

Математичним сподіванням $M(X)$ дискретної випадкової величини X, закон розподілу якої задається таблицею 6.2, називається число

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \cdots \qquad (6.2)$$

Якщо дискретна випадкова величина X задається таблицею 6.2, то математичне сподівання існує тільки в тому випадку, коли збігається ряд $\sum_{i=1}^{n} |x_i| p_i$, де $|x_i|$ – модуль числа x_i ($i = 1,2,3, \ldots$).

Приклад 6.2. Послідовно проводяться експерименти, в кожному з яких ймовірність настання випадкової події A дорівнює p. Експерименти проводяться до першого появлення події A. Випадкова величина X – число проведених експериментів. Знайти $M(X)$.

Розв'язання. Дискретна випадкова величина X розподілена за **геометричним** законом і задається наступною таблицею розподілу:

X	1	2	3	…	n	…
P	p	pq	pq^2	…	pq^{n-1}	…

де $q = 1 - p$.

За формулою (6.2) знаходимо $M(X)$:

$$M(X) = 1 \cdot p + 2 \cdot pq + 3 \cdot pq^2 + \cdots + n \cdot pq^{n-1} + \cdots =$$

$$= p(1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1} + \cdots). \qquad (6.3)$$

Ряд записаний у дужках, можна отримати диференціюванням наступної суми $q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + \cdots$. Дійсно

$$(q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + \cdots)' = 1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1} + \cdots. \qquad (6.4)$$

За формулою суми нескінченно спадної геометричної прогресії маємо

$$q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{q}{1-q}.$$

Тоді

$$(q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + \cdots)' = \left(\frac{q}{1-q}\right)' =$$

$$= \frac{q'(1-q) - (1-q)'q}{(1-q)^2} = \frac{1 - q + q}{(1-q)^2} = \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2}.$$

З останньої рівності з урахуванням (6.3) і (6.4) маємо:

$$M(X) = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Приклад 6.3. Знайти математичне сподівання дискретної випадкової величини X, яка розподілена за законом Пуассона.

Розв'язання. Закон Пуассона задається наступною таблицею розподілу

X	0	1	2	3	...
P_X	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda}$	...

$$p_k = P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \tag{5.4}$$

Звідки маємо:

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda.$$

Для дискретних випадкових величин розглянемо наступну задачу.

Задача. Нехай дискретна випадкова величина X задана таблицею розподілу

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P_X	p_1	p_2	...	p_n	...

Знайти математичне сподівання випадкової величини $Y = \varphi(x)$, де $\varphi(x)$ – деяка функція.

Можливими значеннями випадкової величини Y будуть числа

$$y_1 = \varphi(x_1),\quad y_2 = \varphi(x_2),\qquad \dots,\quad y_n = \varphi(x_n),\qquad \dots$$

Через $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$ позначимо такі значення випадкової величини X при яких $\varphi(x_{i_1}) = \varphi(x_{i_2}) = \cdots = \varphi(x_{i_r}) = C$. Тоді ймовірність $p(Y = C)$ знаходиться за формулою

$$p(Y = C) = p_{i_1} + p_{i_2} + \cdots + p_{i_r}. \tag{6.5}$$

Припустимо на початку, що всі числа $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ різні. Тоді $p(y = y_i) = p_i$, так що

$$M(Y) = y_1p_1 + y_2p_2 + \cdots + y_np_n + \cdots. \tag{6.6}$$

Ця формула для $M(Y)$ буде мати місце і в тому випадку, коли серед $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ є рівні значення. Дійсно, нехай, наприклад, y_1 і y_2 рівні і дорівнюють числу C, а всі інші y_i відрізняються від C. Тоді за (6.5) $p(Y = C) = p_1 + p_2$. При підрахунку $M(Y)$ суму $y_1 p_1 + y_2 p_2$ можна замінити виразом $C(p_1 + p_2)$ і рівність (6.6) зберігається.

Отже, для знаходження $M(\varphi(x))$ маємо формулу (6.6) або, що теж саме, формулу

$$M(\varphi(x)) = \varphi(x_1)p_1 + \varphi(x_2)p_2 + \cdots + \varphi(x_n)p_n + \cdots. \tag{6.7}$$

6.1.2. Математичне сподівання неперервної випадкової величини

Нехай X – неперервна випадкова величина і $p(x)$ її щільність розподілу.

Якщо збігається інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| p(x) dx, \tag{6.8}$$

тоді існує математичне сподівання $M(X)$ і має місце формула

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx. \tag{6.9}$$

Іншими словами, якщо інтеграл (6.9) збігається абсолютно, то математичне сподівання величини X існує і дорівнює цьому інтегралу.

Якщо замість випадкової величини X розглянемо величину $Y = \varphi(x)$, де φ функція, яка задовольняє умову: для будь-якого проміжку ω (відрізку, інтервалу, півінтервалу) множина $\varphi^{-1}(\omega)$ ($\varphi^{-1}(\omega)$ – множина всіх таких значень x_i, що $\varphi(x_i) \in \omega$) є об'єднанням скінченного або зліченого числа попарно неперетинающихся проміжків. Тоді має місце наступне твердження.

Нехай X – неперервна випадкова величина, яка має щільність розподілу $p(x)$. Якщо збігається інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| p(x) dx, \tag{6.10}$$

тоді існує $M(\varphi(x))$ і має місце формула

$$M(\varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)p(x)dx. \qquad (6.11)$$

Очевидно, що формула (6.11) є інтегральним аналогом формули (6.7).

Приклад 6.4. Щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X задається так:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 0 \text{ або } x > 4; \\ 3x, & \text{якщо } 0 < x \leq 4. \end{cases}$$

Знайти $M(X)$.

Розв'язання. Відповідно до формули (6.9) маємо

$$M(X) = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0dx + \int_{0}^{4} x \cdot 3xdx + \int_{4}^{\infty} x \cdot 0dx = 3\int_{0}^{4} x^2dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_0^4 = 64.$$

Приклад 6.5. Знайти математичне сподівання випадкової величини X, рівномірно розподіленої на відрізку $[a, b]$.

Розв'язання. Оскільки щільність розподілу для величини X дорівнює

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{якщо } x \in [a, b], \\ 0, & \text{якщо } x \notin [a, b], \end{cases}$$

то за формулою (6.9) дістаємо

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a}dx = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Отже, математичне сподівання випадкової величини, рівномірно розподіленої на відрізку $[a, b]$, є серединою цього відрізка.

Приклад 6.6. Знайти математичне сподівання випадкової величини, розподіленої за нормальним законом зі щільністю

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Розв'язання. За формулою (6.9) маємо

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

В останньому інтегралі зробимо заміну змінної: $(x-a)/\sigma = t$. Дістанемо

$$M(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t + a) e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Перший з двох інтегралів у правій частині дорівнює нулю, так як функція $te^{-\frac{t^2}{2}}$ є непарною, а другий інтеграл підстановкою $t = u\sqrt{2}$ зводиться до

$$\sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{2\pi}.$$

В результаті дістаємо:

$$M(X) = a. \tag{6.12}$$

Цим самим з'ясували теоретико-ймовірнісний зміст параметра a, що входить у щільність розподілу нормально розподіленої випадкової величини X.

Зміст другого параметру σ буде встановлено пізніше.

6.2. Властивості математичного сподівання

1. Математичне сподівання постійної величини C дорівнює цій постійній, тобто $M(C) = C$.

Постійну C можна розглядати як випадкову величину X, яка може набувати тільки одне значення C з ймовірністю $p = 1$. Тому $M(X) = C \cdot 1 = C$.

2. Постійний множник C можна виносити за знак математичного сподівання, тобто $M(CX) = CM(X)$.

Використовуючи рівність (6.1), маємо

$$M(CX) = \sum_{i=1}^{n} C x_i p_i = C \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = CM(X).$$

3. Математичне сподівання суми (різниці) двох випадкових величин X і Y дорівнює сумі (різниці) їх математичних сподівань, тобто

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y). \tag{6.13}$$

Відповідно до визначення суми й різниці випадкових величин, $X \pm Y$ є випадкова величина, яка приймає значення $x_i \pm y_i$ $(i = 1,2, \dots, m; j = 1,2, \dots, n)$ з ймовірностями $p_{x_i} p_{y_j}$. Тому

$$M(X \pm Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_i \pm y_i)\, p_{x_i} p_{y_j} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i\, p_{x_i} p_{y_j} \pm \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_j\, p_{x_i} p_{y_j} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} x_i p_{x_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} p_{y_j}\right) \pm \left(\sum_{j=1}^{n} y_j p_{y_j}\right)\left(\sum_{i=1}^{m} p_{x_i}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i p_{x_i} \pm \sum_{j=1}^{n} y_j p_{y_j} = M(X) \pm M(Y),$$

тому що

$$\sum_{i=1}^{m} p_{x_i} = 1 \quad \text{і} \quad \sum_{j=1}^{n} p_{y_j} = 1.$$

Доведена властивість легко поширюється на довільне скінченне число доданків, тобто

$$M(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n). \tag{6.14}$$

4. Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин X і Y дорівнює добутку їх математичних сподівань, тобто

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y). \tag{6.15}$$

Відповідно до визначення добутку дискретних випадкових величин, $X \cdot Y$ є випадкова величина, яка приймає значення $x_i y_i$ $(i = 1,2, \dots, m; j = 1,2, \dots, n)$ з ймовірностями $p_{x_i} p_{y_j}$. Тому

$$M(X \pm Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_i\, p_{x_i} p_{y_j} = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i p_{x_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j p_{y_j}\right) = M(X) \cdot M(Y).$$

Цю властивість легко поширити на будь-яке скінченне число незалежних випадкових величин, тобто

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \dots \cdot M(X_n). \tag{6.16}$$

Розглянуті властивості, доведені для дискретних випадкових величин, залишаються правильними й для неперервних випадкових величин.

Підкреслимо, що математичне сподівання випадкових величин завжди має таку ж розмірність, як і значення випадкової величини, оскільки їхні ймовірності безрозмірні.

6.3. Мода і медіана. Квантилі

Крім числової характеристики випадкової величини X – математичного сподівання, на практиці ще застосовують й інші характеристики, зокрема моду і медіану.

Для дискретної випадкової величини X **модою** $Mo(X)$ називають таке її можливе значення, яке має найбільшу властивість. Наприклад, якщо дискретна випадкова величина X задається наступною таблицею розподілу,

X	-1	0	1	2
P_X	0,1	0,2	0,5	0,2

то $Mo(X) = 1$.

Для неперервної випадкової величини X **модою** $Mo(X)$ називають таке її можливе значення, якому відповідає найбільше значення щільності розподілу.

Геометрично моду інтерпретують як абсцису точки глобального максимуму кривої розподілу (рис. 6.1)

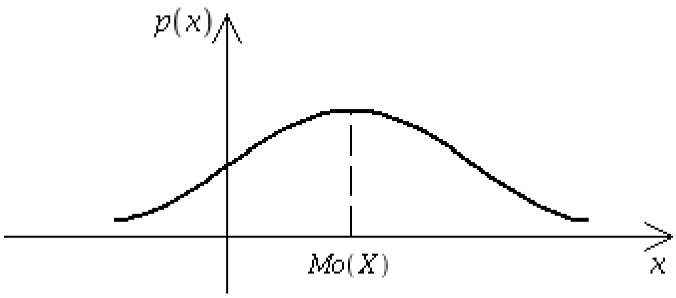


Рис. 6.1. Графік щільності $p(x)$

Розподіл з однією модою називають одномодальним (рис. 6.1).

Якщо ймовірність або щільність ймовірностей досягає максимуму в декількох точках, то такий розподіл називається **полімодальним**. Існують і такі розподіли, які не мають моди. Їх називають **антимодальними**.

У загальному випадку $Mo(X)$ і $M(X)$ випадкової величини X не збігаються. Однак, коли розподіл є симетричним і модальним (тобто має моду) та існує математичне сподівання, то воно збігається з модою і центром симетрії розподілу.

Часто застосовують ще одну числову характеристику випадкової величини, яка називається медіаною, і яка зазвичай використовується тільки для неперервної випадкової величини, хоча формально можна її визначити і для дискретної випадкової величини.

Медіаною $Me(X)$ неперервної випадкової величини X називається таке її значення, для якого виконується рівність:

$$P\big(X < Me(X)\big) = P\big(X > Me(X)\big). \tag{6.17}$$

Рівність (6.17), використовуючи властивості функції розподілу $F(X)$, перетворюємо так:

$$F\big(Me(X)\big) - F(-\infty) = F(+\infty) - F\big(Me(X)\big),$$

$$F\big(Me(X)\big) = 1 - F\big(Me(X)\big),$$

$$2F\big(Me(X)\big) = 1,$$

$$F\big(Me(X)\big) = 0{,}5. \tag{6.18}$$

З геометричної точки зору медіана – це абсциса точки, для якої площа фігури, яка обмежена кривою розподілу і віссю абсцис, ділиться навпіл.

У випадку симетричного модального розподілу $Me(X)$ збігається з $M(X)$ і $Mo(X)$.

Поряд із зазначеними вище числовими характеристика випадкової величини, ще часто використовують поняття квантилі.

Квантилем порядку $\boldsymbol{p}$ розподілу неперервної випадкової величини X називається дійсне число x_p, що задовольняє умову

$$P\big(X < x_p\big) = p,$$

або

$$F\big(x_p\big) = p. \tag{6.19}$$

Якщо $p = 0{,}5$, то $Me(X)$ є квантилем порядку 0,5.

Квантилі є одними з основних статистичних характеристик, які використовуються у математичній статистиці.

Приклад 6.7. Знайти моду, медіану, математичне сподівання, квантиль $x_{0,3}$ неперервної випадкової величини X, якщо її щільність розподілу задається так:

$$p(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{якщо } x \in [0; 1], \\ 0, & \text{якщо } x \notin [0; 1], \end{cases} \tag{6.20}$$

Розв'язання. Крива розподілу зображена на рис. 6.2

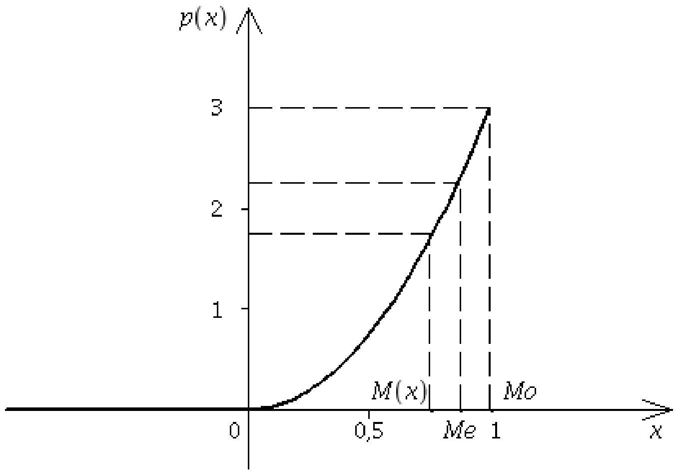


Рис. 6.2. Графік функції $p(x)$

З рисунку бачимо, що щільність розподілу ймовірностей $p(x)$ максимальне значення приймає у точці $x = 1$, тобто $Mo(X) = 1$.

Медіану $Me(X) = a$ знайдемо з рівняння (6.18):

$$\int_{-\infty}^{a} p(x)dx = 0,5.$$

Останню рівність з урахування (6.20) перепишемо так:

$$\int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{a} 3x^2 dx = 0,5.$$

Звідси,

$$x^3|_0^a = 0,5,$$

$$a^3 = 0,5,$$

$$Me(X) = a = \sqrt[3]{0,5} \approx 0,79.$$

Математичне сподівання $M(X)$ обчислимо за формулою (6.9):

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} x \cdot 3x^2dx + \int_{1}^{\infty} 0dx = \frac{3}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

Взаємне розташування точок $M(X)$, $Me(X)$ і $Me(X)$ у порядку зростання абсцис наведено на рис. 6.2.

Знайдемо функцію розподілу $F(X)$, випадкової величини X, якщо її щільність розподілу ймовірностей задається рівністю (6.20)

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} 3t^2dt = t^3|_0^x = x^3.$$

Квантиль $x_{0,3}$ знаходимо з рівняння (6.19),

$$x_{0,3}^3 = 0{,}3.$$

Отже, $x_{0,3} = \sqrt[3]{0{,}3} \approx 0{,}67$.

6.4. Дисперсія і середнє квадратичне відхилення

На практиці зустрічаються випадкові величини, які мають однакові математичні сподівання, проте набувають значення, що різко різняться між собою. Наприклад, нехай X і Y дискретні випадкові величини, які відповідно задаються наступними таблицями розподілу:

X	-1	2
P_X	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Y	-500	500
P_Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Математичні сподівання цих випадкових величин співпадають і дорівнюють нулю:

$$M(X) = (-1) \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = 0,$$

$$M(Y) = (-500) \cdot \frac{1}{2} + 500 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Однак, характер розподілу величин X і Y суттєво відрізняються. В той час як величини X приймає значення, що „мало” відрізняється від її математичного сподівання, значення величини Y значно віддалені від $M(Y)$.

Аналогічних прикладів можна навести багато. Наприклад, у двох групах деякого факультету середній бал студентів з предмету „Теорія ймовірностей і математична статистика” можуть збігатися, а бали студентів у цих групах можуть суттєво відрізнятися. Аналогічно, у двох підприємствах можуть збігатися середні зарплати робочих, але зарплати робочих можуть суттєво відрізнятися.

Наведемо ще один приклад. Нехай маємо два різні пристрої для вимірювання однієї й тої ж фізичної величини. Практично результат вимірювання ніколи не співпадає точно зі значенням вимірюваної величини: кожне вимірювання має свою випадкову похибку. Позначимо похибку вимірювання на першому пристрої через X, а на другому через Y Очевидно, X і Y – випадкові величини. Припускаючи, що обидва пристрої працюють без системної похибки, маємо: $M(X) = 0$ і $M(Y) = 0$. Однак, цей факт не означає, що ці пристрої мають однакову точність. Один з пристроїв може бути більш точним, буде мати менше розсіювання в околі математичного сподівання, порівняно з другим пристроєм.

Розглянуті приклади переконали нас в необхідності введення ще одної числової характеристики випадкової величини X – для вимірювання степені **розсіювання** значень X, навколо її математичного сподівання.

На перший погляд може показатися, що в якості характеристики розсіювання значень випадкової величини X навколо її математичного сподівання $m_X = M(X)$ доцільно брати різницю $X - m_X$. Відмітимо, що випадкову величину $X - m_X$ − називають **відхиленням** випадкової величини X від її математичного сподівання і позначають $\dot{X}$, тобто

$$\dot{X} = X - m_X. \tag{6.21}$$

Величину $\dot{X}$ називають **центрованою** випадковою величиною.

З наступної рівності

$$M(\dot{X}) = M(X - m_X) = M(X) - m_X = m_X - m_X = 0$$

випливає, що за міру розсіювання не можна брати $\dot{X} = X - m_X$, тому що для будь-якої випадкової величини X, $M(\dot{X}) = 0$.

Унаслідок цього доцільно замінити відхилення їхніми абсолютними значеннями або їхніми квадратами (частіше останніми).

Дисперсією $D(X)$ випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання, тобто

$$D(X) = M(X - M(X))^2. \quad (6.22)$$

З визначення випливає, що дисперсія будь-якої випадкової величини X невід'ємна, тобто

$$D(X) \geq 0.$$

Якщо X – дискретна випадкова величина, яка задається таблицею розподілу

X	x_1	x_2	...	x_n
P_X	p_1	p_2	...	p_n

то за означенням математичного сподівання для випадкової величини $(X - m_X)^2$ маємо

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_X)^2\, p_i. \quad (6.23)$$

Для неперервної випадкової величини X з функцією щільності $p(x)$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (X - m_X)^2 p(x)dx, \quad (6.24)$$

якщо цей інтеграл існує.

Узявши до уваги визначення дисперсії та властивості математичного сподівання, маємо

$$D(X) = M(X - m_X)^2 = M(X^2 - 2Xm_X + m_X^2) =$$

$$= M(X^2) - 2m_X M(X) + M(m_X^2) = M(X^2) - 2m_X^2 + m_X^2 = M(X^2) - m_X^2.$$

Якщо ввести позначення $m_{X^2} = M(X^2)$, то

$$D(X) = m_{X^2} - m_X^2. \quad (6.25)$$

Виходячи з формули (6.25), можна записати більш зручні формули для обчислення дисперсії дискретних і неперервних випадкових величин:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, p_i - m_X^2, \tag{6.26}$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx - m_X^2. \tag{6.27}$$

Оскільки дисперсія має розмірність квадрата випадкової величини, то для наочної характеристики розсіювання зручніше користуватися величиною, розмірність якої збігається з розмірністю випадкової величини. Для цього з дисперсії добувають квадратний корінь. Отримана величина називається **середнім квадратичним відхиленням** випадкової величини X і позначається $\sigma(X)$ або σ_X. Отже,

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \quad \text{або} \quad \sigma_X = \sqrt{D(X)}. \tag{6.28}$$

Приклад 6.8. Знайти дисперсію дискретної випадкової величини X, яка задана наступним законом розподілу ймовірностей

X	-2	-1	0	1	2
P_X	0,1	0,2	0,4	0,1	0,2

Розв'язання. Обчислимо математичне сподівання m_X:

$$m_X = (-2) \cdot 0{,}1 + (-1) \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}1.$$

Побудуємо таблицю розподілу випадкової величини X^2:

X^2	0	1	4
P_{X^2}	0,4	0,3	0,3

Тоді

$$m_{X^2} = 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}3 = 1{,}5.$$

За формулою (6.25), маємо

$$D(X) = 1{,}5 - (0{,}1)^2 = 1{,}49.$$

Приклад 6.9. Знайти дисперсію неперервної випадкової величини X, щільність розподілу якої

$$p(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{якщо } x \in [0;1], \\ 0, & \text{якщо } x \notin [0;1]. \end{cases}$$

Розв'язання. Спочатку знаходимо m_X:

$$m_X = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = 3\int_0^1 x^3 dx = \frac{3}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{3}{4},$$

а потім

$$m_{X^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx = 3\int_0^1 x^4 dx = \frac{3}{5}x^5\Big|_0^1 = \frac{3}{5}.$$

Тоді з формули (6.25) випливає

$$D(X) = m_{X^2} - m_X^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}.$$

Приклад 6.10. Нехай X рівномірно розподілена неперервна випадкова величина на відрізку $[a;b]$. Знайти $D(X)$.

Розв'язання. Щільність розподілу рівномірно розподіленої випадкової величини на відрізку $[a;b]$, має вигляд

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{якщо } x \in [a,b], \\ 0, & \text{якщо } x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Знаходимо m_X і m_{X^2}:

$$m_X = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2},$$

$$m_{X^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} =$$

$$= \frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

Тоді за формулою (6.25), маємо

$$D(X) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

Приклад 6.11. Знайти дисперсію випадкової величини X, яка розподілена за нормальним законом з щільністю

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (6.29)$$

Розв'язання. Математичне сподівання випадкової величини X дорівнює (див. приклад 6.6). Знаходимо дисперсію $D(X)$ за формулою (6.24)

$$D(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Зробимо заміну $(x-a)/\sigma = t$. Тоді

$$D(X) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad (6.30)$$

Відомо, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}. \qquad (6.31)$$

З рівності (6.30) і (6.31) безпосередньо випливає

$$D(X) = \sigma^2.$$

Тим самим з'ясували зміст параметру σ, що входить у щільність розподілу неперервної випадкової величини X.

Отже, σ є середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

6.5. Властивості дисперсії

1. Дисперсія постійної величини C дорівнює нулю, тобто

$$D(C) = 0. \qquad (6.32)$$

Дійсно, як відомо $M(C) = C$, тоді

$$D(C) = M(C - M(C))^2 = M(C - C)^2 = M(0) = 0.$$

2. Постійний множник C можна виносити за знак дисперсії, попередньо піднісши його до квадрата, тобто

$$D(CX) = C^2 D(X). \qquad (6.33)$$

За означенням дисперсії і властивістю математичного сподівання, маємо

$$D(CX) = M(CX - M(CX))^2 = M(CX - CM(X))^2 = C^2 M(X - M(X))^2 = C^2 D(X).$$

3. Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин X і Y дорівнює сумі їх дисперсій, тобто

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y). \tag{6.34}$$

Оскільки X і Y незалежні випадкові величини, то $M(XY)=M(X)M(Y)$. З урахуванням цієї рівності знаходимо дисперсію $D(X+Y)$ за формулою (6.25):

$$D(X+Y)=M(X+Y)^2-M^2(X+Y)=M(X^2+2XY+Y^2)-(M(X)+M(Y))^2=$$
$$=M(X^2)+2M(XY)+M(Y^2)-M^2(X)-2M(X)M(Y)-M^2(Y)=$$
$$=M(X^2)-M^2(X)+M(Y^2)-M^2(Y)=D(X)+D(Y).$$

4. Дисперсія від різниці двох незалежних випадкових величин X і Y дорівнює сумі їх дисперсій, тобто

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y). \tag{6.35}$$

Рівність (6.35) безпосередньо випливає з властивостей 2 і 3. Дійсно,

$$D(X-Y)=D(X+(-1)Y)=D(X)+D((-1)Y)=$$
$$=D(X)+(-1)^2D(Y)=D(X)+D(Y).$$

Доведені властивості 3 і 4 мають місце на будь-яке скінченне число попарно незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \dots, X_n$

$$D(X_1+X_2+\dots+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+\dots+D(X_n).$$

Зокрема, якщо випадкові величини $X_1, X_2, \dots, X_n$ попарно незалежні і мають однакову дисперсію $D(X_i)=\sigma^2$ $(i=1,2,\dots,n)$, то дисперсія їх середнього арифметичного дорівнює

$$D\left(\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}\right)=\frac{D(X_1)+D(X_2)+\dots+D(X_n)}{n^2}=\frac{n\sigma^2}{n^2}=\frac{\sigma^2}{n}.$$

Звідси випливає, що

$$\sigma\left(\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}\right)=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{6.36}$$

Остання формула відіграє велику роль при обробці результатів вимірювань.

Природньо виникає питання, чому дорівнює дисперсія суми двох залежних випадкових величин?

Нехай X і Y залежні випадкові величини. В даному випадку $M(X\cdot Y)\neq M(X)\cdot M(Y)$.

Розглянемо випадкову величину Z, що є сумою випадкових величин X і Y, тобто

$$Z = X + Y. \tag{6.37}$$

За властивістю математичного сподівання маємо

$$m_Z = m_X + m_Y. \tag{6.38}$$

Віднявши з рівності (6.37) рівність (6.38) дістанемо

$$\dot{Z} = \dot{X} + \dot{Y}. \tag{6.39}$$

де $\dot{Z}, \dot{X}, \dot{Y}$ – відповідно центровані значення випадкових величин $Z, X, Y, .$

З урахуванням рівності (6.39) знайдемо дисперсію величини $X + Y$:

$$D(X+Y) = D(Z) = M\left(\dot{Z^2}\right) = M\left(\dot{Z^2} + 2\dot{X}\dot{Y} + \dot{Y^2}\right) = M\left(\dot{X^2}\right) + M\left(\dot{Y^2}\right) + 2M\left(\dot{X}\dot{Y}\right).$$

Отже,

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2M\left(\dot{X}\dot{Y}\right). \tag{6.40}$$

Число $M\left(\dot{X}\dot{Y}\right)$ має особливе значення для характеристики взаємозв’язку між випадковими величинами X та Y. Його називають **коваріацією** випадкових величин X і Y, або **кореляційним моментом** і позначають $cov\,(X, Y)$. Таким чином за визначенням

$$cov\,(X, Y) = M\left(\dot{X}\dot{Y}\right). \tag{6.41}$$

Формула (6.40) після введення поняття коваріації може бути записана так:

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2cov\,(X, Y). \tag{6.42}$$

До основної властивості $cov\,(X, Y)$ можна віднести наступне: якщо величини X та Y незалежні, то $cov\,(X, Y) = 0$.

Однак, якщо $cov\,(X, Y) = 0$, то звідси не випливає, що випадкові величини X і Y є незалежними.

Слід відмітити, що коли $cov\,(X, Y) \neq 0$, то випадкові величини X і Y не можуть бути незалежними. Отже, нерівність $cov\,(X, Y) \neq 0$ свідчить про те, що між випадковими величинами X і Y є певний взаємозв’язок.

6.6. Нормовані випадкові величини

Випадкова величина називається **нормованою**, якщо її математичне сподівання дорівнює нулю, а дисперсія – одиниці, тобто

$$M(Y) = 0, \quad D(Y) = 1.$$

Від довільної випадкової величини X можна перейти до нормованої випадкової величини Y за допомогою лінійного перетворення:

$$Y = \frac{X - a}{\sigma},$$

де a – математичне сподівання, а σ – середнє квадратичне відхилення X.

Нормованість випадкової величини Y перевіряється дуже просто:

$$M(Y) = M\left(\frac{X - a}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} M(\dot{X}) = 0,$$

$$D(Y) = D\left(\frac{X - m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} D(X - m) = \frac{1}{\sigma^2} D(X) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sigma^2 = 1.$$

З останніх рівностей та з (6.29) випливає, що щільність розподілу нормованої нормально розподіленої випадкової величини, має вигляд:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Теоретичні запитання до розділу 6

1. Що називається математичним сподіванням дискретної випадкової величини?
2. Чи завжди існує математичне сподівання неперервної випадкової величини?
3. Чому дорівнює $M(C)$, де C – стала величина?
4. Чому дорівнює $M(AX+B)$, де A і B сталі величини?
5. Що називається центрованою випадковою величиною?
6. Чому дорівнює математичне сподівання центрованої випадкової величини?
7. Що називають дисперсією випадкової величини?
8. Чому дорівнює $D(C)$, де C – стала величина?
9. Чому дорівнює $D(CX)$, де C – стала величина?
10. Чому дорівнює $D(AX+B)$, де A і B – сталі величини?
11. Що називається середнім квадратичним відхиленням випадкової величини?
12. При яких значеннях сталої C виконуються співвідношення: $D(XC)=D(C)$; $D(CX)>D(X)$; $D(CX)<D(X)$?
13. Для яких випадкових величин X і Y має місце рівність $D(X+Y)=$ $=D(X)+D(Y)$?
14. Доведіть, що $D(X-Y)=D(X+Y)$для незалежних випадкових величин X і Y.
15. Що називається коваріацією випадкових величин X та Y?
16. Чому дорівнює $cov\,(X,Y)$, якщо випадкові величини X і Y незалежні?
17. Чи будуть випадкові величини X і Y незалежними, якщо $cov\,(X,Y)=0$?
18. Що можна сказати про випадкові величини X і Y, якщо $cov\,(X,Y)\neq 0$?
19. Що називають модою (Mo) дискретної випадкової величини X?
20. Що називають модою (Mo) неперервної випадкової величини X?
21. Який розподіл ймовірностей називається називається одномодальним, поліноміальним?
22. Який розподіл ймовірностей називається антимодальним?
23. Що називається медіаною (Me) випадкової величини X?
24. Чому дорівнює $F(Me)$?
25. Що називається квантилем порядку p?

Приклади до розділу 6

1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

X	1	2	3
P_X	0,5	0,3	0,2

Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

2. Задано функцію розподілу ймовірностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leq -5; \\ 0{,}2, & \text{якщо} -5 < x \leq 1; \\ 0{,}4, & \text{якщо} \quad 1 < x \leq 5; \\ 0{,}8, & \text{якщо} \quad 5 < x \leq 7; \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 7. \end{cases}$$

Обчислити $M(X)$, $\sigma(X)$ і знайти Mo..

3. Знайти математичне сподівання і дисперсію числа очок при одному киданні грального кубика.
4. Підкидають два гральні кубики. Нехай X – сума очок на двох кубиках. Знайти $M(X)$, $D(X)$ і $\sigma(X)$.
5. Випадкова величина X має розподіл

X	-1	0	1
P_X	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $Y = |X|$.

6. Два стрільці зробили по одному пострілу по тій самій мішені. Ймовірність влучення для першого стрільця дорівнює 0,8, для другого – 0,9. Нехай X – загальне число влучень у мішень. Знайти розподіл випадкової величини X, а також $M(X)$, $D(X)$ і $\sigma(X)$.
7. З урни, яка містить 5 білих і 10 чорних куль, виймають по одній кулі з поверненням до першої появи білої кулі. Знайти математичне сподівання і дисперсію числа вийнятих куль.
8. Чотири прилади перевіряють на надійність. Кожний наступний прилад підлягає перевірці тільки в тому випадку, коли перед цим неперевірений

прилад виявиться надійним. Ймовірність того, що прилад витримає перевірку на надійність, дорівнює 0,8 для кожного із них. Обчислити $M(X)$, $\sigma(X)$ дискретної випадкової величини X – числа приладів, що пройшли перевірку. Знайти Mo.

9. Серед шести однотипних телевізорів є лише один справний. Щоб на нього потрапити, навмання беруть один із них і після відповідної перевірки відкладають окремо його від інших. Перевірка триває до появи справного телевізора. Визначити математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X – кількості перевірених телевізорів. Знайти Mo.
10. Відомі значення: $M(X) = 1$, $D(X) = 3$. Знайти $M(2-3X)$, $D(2-3X)$.
11. Знайти $M(X^2)$, якщо $D(X) = 3$, $M(X) = 1$.
12. За заданим ймовірнісним полігоном (рис. 6.3) обчислити $M(2-5X)$, $D(2-5X)$ і Mo.

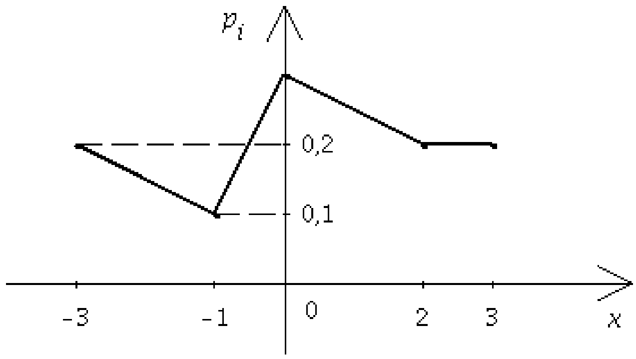


Рис. 6.3. Полігон розподілу дискретної випадкової величини X

13. Випадкова величина X розподілена рівномірно на деякому відрізку, причому $M(X) = 4$ і $D(X) = 3$. Знайти щільність розподілу X.
14. Випадкова величина X має щільність розподілу

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < -\dfrac{\pi}{2}; \\ 0{,}5\cos x, & \text{якщо } -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{якщо } x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайти медіану (Me), моду (Mo), математичне сподівання ($M(X)$) і дисперсію ($D(x)$).

15. Випадкова величина X має показниковий розподіл з параметром λ, тобто має щільність

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

Знайти $M(X)$, $D(X)$ і $\sigma(X)$.

16. За заданою щільністю ймовірностей

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq -1; \\ \frac{1}{4}(x+2), & \text{якщо } -1 < x \leq 1; \\ 0, & \text{якщо } x > 3; \end{cases}$$

знайти $M(X)$, $\sigma(X)$ і Me.

17. Задано функцію розподілу випадкової величини X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 0; \\ a(1-\cos x), & \text{якщо } 0 < x < \pi; \\ 0, & \text{якщо } x > \pi. \end{cases}$$

Знайти $M(X)$, $\sigma(X)$, Me, Mo.

18. Закон розподілу ймовірностей зображено на рис. 6.4

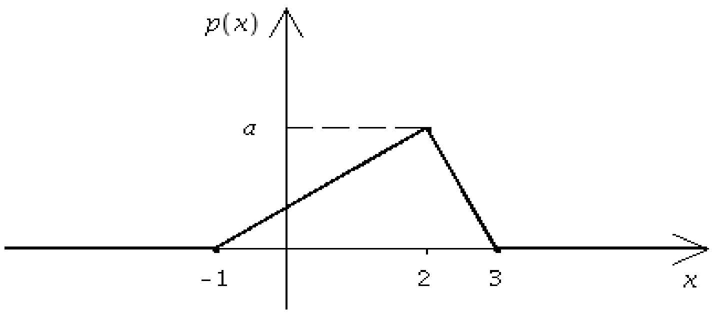


Рис. 6.4. Графік щільності $p(x)$

Знайти $\sigma(X)$, Me і Mo.

19. Закон розподілу ймовірностей зображено на рис. 6.5

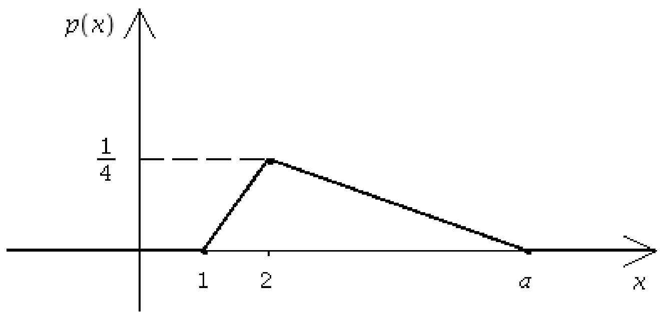


Рис.6.5. Графік щільності $p(x)$

Знайти $M(X)$, $D(X)$, Me і Mo.

20. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X, що має щільність розподілу

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ 1 - |x - 1|, & \text{якщо } 0 \le x \le 2; \\ 0, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

Розділ 7. Закон великих чисел і центральна гранична теорема

Теорія ймовірностей, як відомо, вивчає закономірності масових випадкових явищ. Наявність цих закономірностей пов'язана саме із масовістю явищ, тобто з великим числом експериментів, що породжують у своїй сукупності випадкову величину, яка підпорядковується цілком визначеному закону. Слід зазначити, що при вивченні результатів експериментів над реальними масовими випадковими явищами має місце закономірність, яка називається властивістю стійкості, яка полягає в тому, що конкретні особливості кожного окремого випадкового явища майже не впливають на середній результат масових випадкових явищ. Саме ця стійкість середніх і становить фізичну сутність **закону великих чисел**. В основі цього закону є: при дуже великій кількості випадкових явищ середній їхній результат практично перестає бути випадковим і може бути передбачений з великим ступенем визначеності

Можливості таких передбачень у серії масових випадкових явищ ще більше розширюються завдяки наявності іншої групи граничних теорем, відомих за назвою **центральної граничної теореми**, що стосується вже не граничних значень випадкових величин, а граничних законів розподілу. Відповідно до цієї теореми, досить велика сума порівняно малих випадкових величин поводиться наближено як нормальна випадкова величина.

7.1. Закон великих чисел

Під законом великих чисел в теорії ймовірностей у вузькому значенні розуміють ряд математичних теорем, у кожній з яких для тих або інших умов встановлюється факт наближення середніх характеристик великої кількості експериментів до деяких відповідних сталих.

7.1.1. Нерівність Чебишева

Як відомо, за заданим законом розподілу випадкової величини можуть бути визначені її числові характеристики $m_X = M(X)$ і $D_X = D(X)$.З іншого боку, значення числових характеристик у деякому значенні характеризують закон розподілу. Метою розглянутих далі двох нерівностей і є оцінка закону розподілу за заданими числовими характеристиками.

Нерівність 1. Якщо випадкова величина X набуває тільки невід'ємні значення ($X \geq 0$) і має математичне сподівання m_X, то $\forall \varepsilon > 0$ виконуєхться нерівність

$$P(X > \varepsilon) \leq \frac{m_X}{\varepsilon}. \tag{7.1}$$

Оскільки події $(X > \varepsilon)$ і $(X \leq \varepsilon)$ протилежні, то замінюючи $P(X > \varepsilon)$ виразом $1 - P(X \leq \varepsilon)$, одержимо інший вигляд нерівності (7.1):

$$P(X \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{m_X}{\varepsilon}. \tag{7.2}$$

Нерівність 2. Якщо X – довільна випадкова величина, що має математичне сподівання m_X і дисперсію D_X, то $\forall \varepsilon > 0$ виконується нерівність

$$P(|X - m_X| > \varepsilon) \leq \frac{D_X}{\varepsilon^2}. \tag{7.3}$$

З урахуванням того, що події $|X - m_X| > \varepsilon$ і $|X - m_X| \leq \varepsilon$ протилежні події, нерівність (7.3) можна переписати так:

$$P(|X - m_X| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{D_X}{\varepsilon^2}. \tag{7.4}$$

Нерівність Чебишова у вигляді (7.3) встановлює верхню границю, а у вигляді (7.4) – нижню границю ймовірності розглянутої події.

Нерівність (7.4) підкреслює доречність вибору дисперсії D_X як міри розсіювання значень випадкової величини X від математичного сподівання m_X. Дійсно, як випливає із цієї нерівності, чим менша дисперсія D_X, тим при меншому значенні ε можна з тією ж оцінкою ймовірності стверджувати, що значення випадкової величини X будуть концентруватися ближче до m_X.

Припустивши в нерівності (7.4) $\varepsilon = 3\sigma_X = 3\sqrt{D_X}$, одержимо

$$P(|X - m_X| \leq \sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9},$$

тобто ймовірність того, що довільна випадкова величина відхиляється від свого математичного сподівання не більше ніж на потроєне середнє квадратичне відхилення не менша 8/9. Насправді для переважної більшості випадкових величин, що зустрічаються на практиці, ця ймовірність значно ближча до одиниці, ніж до 8/9. Зокрема, для нормально розподілених випадкових величин з математичним сподіванням m і зі середнім квадратичним відхиленням σ (закон $M(m,\sigma^2)$), як ми бачили, ця ймовірність дорівнює 0,9973.

Зазвичай, якщо закон розподілу випадкової величини X невідомий, але визначені параметри m_X і σ_X, то вважають, що діапазон практично можливих значень випадкової величини є інтервал $(m_X - 3\sigma_X, m_X + 3\sigma_X)$.

Приклад 7.1. При виготовленні партії деталей розміром $l = 10$ мм існує допуск $\Delta l = \pm 0{,}1$ мм. Оцінити ймовірність того, що випадково взята деталь – бракована, якщо $\sigma_X^2 = 0{,}0025$.

Розв'язання. Нехай X – розміри деталі. За умовою $m_X = 10$, $\varepsilon = 0{,}1$, $D_X = 0{,}0025$. Потрібно оцінити ймовірність $P(|X - 10| > 0{,}1)$. За нерівністю (7.3) маємо:

$$P(|X - 10| > 0{,}1) \leq \frac{0{,}0025}{0{,}01} = 0{,}25$$

Отже, шукана ймовірність не перевищує 0,25.

Запишемо нерівність Чебишева у вигляді (7.3) і (7.4) для випадкової величини X, що має біномний закон розподілу з математичним сподіванням $m_X = np$ і дисперсією $D_X = npq$:

$$P(|X - np| > \varepsilon) \leq \frac{npq}{\varepsilon^2}, \tag{7.5}$$

$$P(|X - np| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{npq}{\varepsilon^2}. \tag{7.6}$$

Приклад 7.2. У технологічному процесі в середньому 85% виробів мають допуск ±0,5%. Яке число виробів з партії 100000 шт. з ймовірністю 0,98 можна планувати з допуском ±5%?

Розв'язання. Нехай X – випадкова величина, що виражає число виробів, які мають допуск ±5%, серед 100000 виробів. Дана випадкова величина розподілена за біномним законом, для якої $p = 0{,}85$ і $q = 0{,}15$.

Знайдемо числові характеристики випадкової величини X

$$m_X = M(X) = np = 100000 \cdot 0{,}85 = 85000,$$

$$D_X = D(X) = npq = 100000 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}15 = 12750.$$

Для визначення відхилення виробів даної партії від математичного сподівання застосовуємо нерівність (7.6):

$$P(|X - 85000| \le 1) \ge 1 - \frac{12750}{\varepsilon^2}$$

Число повинне бути вибране так, щоб виконувалась умова

$$1 - \frac{12750}{\varepsilon^2} \le 0{,}98.$$

Розв’язуючи цю нерівність

$$\frac{12750}{\varepsilon^2} \ge 0{,}02,$$

$$\varepsilon^2 \le \frac{12750}{0{,}02} = 63750.$$

Звідси $\varepsilon \le 798$.

Отже, число виробів даної партії, які мають допуск ±5%, з ймовірністю 0,98 можна планувати таким, що дорівнює 85000±798.

7.1.2. Поняття збіжності послідовності випадкових величин за ймовірністю

Нерівність Чебишева виявляється особливо корисною при розгляді послідовності випадкових величин, дисперсії яких наближається до нуля. Нехай задана послідовність випадкових величин X_n: $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ із математичними сподіваннями $m_{X_n} = M(X_n)$ і дисперсіями $D_{X_n} = D(X_n)$, причому

$$\lim_{n\to\infty} D(X_n) = 0. \qquad (7.7)$$

Застосовуючи до X_n нерівність Чебишева (7.3), одержимо:

$$P\left(\left|X_n - m_{X_n}\right| > \varepsilon\right) \le \frac{D_{X_n}}{\varepsilon^2}. \qquad (7.8)$$

Права частина цієї нерівності, як випливає з (7.7) наближається до нуля при $n \to \infty$, а ліва частина – невід’ємна. Тому з нерівності (7.8) випливає, що ймовірність $P\left(\left|X_n - m_{X_n}\right| > \varepsilon\right)$ наближається до нуля при $n \to \infty$, тобто $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|X_n - m_{X_n}\right| > \varepsilon\right) = 0. \qquad (7.9)$$

Оскільки події $\left|X_n - m_{X_n}\right| > \varepsilon$ і $\left|X_n - m_{X_n}\right| \le \varepsilon$ протилежні, то останню рівність можна переписати так:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|X_n - m_{X_n}\right| \le \varepsilon\right) = 1. \qquad (7.10)$$

Рівності (7.9), (7.10) визначають поняття збіжності за ймовірністю.

Послідовність випадкових величин $\{X_n\}$ називається збіжною за ймовірністю до випадкової величини X, якщо $\forall\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0 \ \text{ або } \ \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \le \varepsilon) = 1. \qquad (7.11)$$

7.1.3. Різні форми закона великих чисел

Теорема 7.1. (Чебишева). Нехай $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ послідовність попарно незалежних випадкових величин, дисперсії яких обмежені, тобто $D(X_n) \le C$, $\forall n > N$ – множина натуральних чисел, $C = const$. Тоді виконується нерівність

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2} \qquad (7.12)$$

або

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| > \varepsilon\right) \le \frac{C}{n\varepsilon^2}. \qquad (7.13)$$

Іншими словами, при $n \to \infty$, середня арифметична випадкових величин $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ збігається за ймовірністю до середніх арифметичних їхніх математичних сподівань, тобто

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| \le \varepsilon\right) = 1 \qquad (7.14)$$

або

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| > \varepsilon\right) = 0. \qquad (7.15)$$

Приклад 7.3. До складу надійшла партія з n електролампочок. Оцінити ймовірність того, що відхилення середньої тривалості горіння 100 лампочок з вибраної кількості від середньої тривалості горіння лампочки з усієї партії не перевищить 6 год., якщо середнє квадратичне відхилення тривалості її горіння не перевищує 8 год.

Розв'язання. Нехай випадкова величина X_i – час горіння i-ї лампочки. Тоді, відповідно до умови задачі, середнє квадратичне відхилення $\sigma_X \geq 8$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Отже, відповідно до нерівності (7.12), при $\varepsilon = 6$ і $n = 100$ знайдемо

$$P\left(\left|\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| \leq 6\right) \geq 1 - \frac{64}{100 \cdot 36} \approx 0{,}982.$$

Таким чином, ймовірність шуканої події не менша 0,982.

Важливе значення для подальшого аналізу має окремий випадок теореми Чебишева.

Теорема 7.2. (Хінчина). При необмеженому збільшенні числа n попарно незалежних випадкових величин X_i $(i = 1, 2, \dots, n, \dots)$, що мають рівні математичні сподівання $M(X_i) = m_X$ й рівномірно обмежені дисперсії $D(X_i) \leq C$ для $i = 1, 2, \dots, n, \dots$ їх середнє арифметичне наближається за ймовірністю до числа m_X, тобто

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m_X\right| \leq \varepsilon\right) = 1. \tag{7.16}$$

Приклад 7.4. Скільки разів потрібно вимірювати величину з істинним значенням m_X, щоб з ймовірністю не менше 0,95 гарантувати відхилення середньої арифметичної цих вимірювань від істинного значення величини m_X, не більше, ніж на 2, якщо середнє квадратичне відхилення вимірювань не перевищує 10?

Розв'язання. Нехай X_i – результат i-го вимірювання величини $(i = 1, 2, \dots, n)$, а $M(X_i) = m_X$ – істинне значення при кожному i. Необхідно знайти n, при якому

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m_X\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(\overline{X})}{n\varepsilon^2},$$

де $\varepsilon = 2$, $D(\overline{X}) = 100$.

Звідси

$$1 - \frac{D(\overline{X})}{n\varepsilon^2} = 0{,}95$$

і

$$n = \frac{D(\overline{X})}{\varepsilon^2(1-0{,}95)} = \frac{100}{4\cdot 0{,}05} = 500.$$

Таким чином, вимірювати потрібно не менше 500 разів.

У статистичному визначенні ймовірності події використовувалася властивість стійкості відносної частоти настання цієї події при збільшенні числа випробувань (експериментів). Теоретичне обґрунтування цієї властивості дає теорема Бернуллі, що є наслідком теореми Чебишева.

Теорема 7.3. (Бернуллі). Відносна частота появи події A при n незалежних випробувань за схемою Бернуллі збігається за ймовірністю при $n\to\infty$ з ймовірністю p появи події в одному випробуванні, тобто

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right| > \varepsilon\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right| \le \varepsilon\right) = 1, \qquad (7.17)$$

де k – число появ події A при n випробуваннях.

Приклад 7.5. Ймовірність виготовлення нестандартної деталі дорівнює 0,04. Яке найменше число деталей варто відібрати, щоб з ймовірністю 0,88 можна було стверджувати, що частка нестандартних деталей серед них буде відрізнятися від ймовірності виготовлення нестандартної деталі за абсолютною величиною не більше ніж на 0,02?

Розв'язання. Нехай $\frac{k}{n}$ – частота нестандартних деталей. Відповідно до нерівності

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}, \qquad (7.18)$$

одержимо:

$$1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 0{,}88.$$

Звідси

$$1 - \frac{0{,}04\cdot 0{,}96}{n\cdot 0{,}02^2} = 0{,}88.$$

і

$$n = \frac{0{,}04 \cdot 0{,}96}{0{,}02^2 \cdot 0{,}12} = 800.$$

Таким чином, серед відібраних 800 деталей частота нестандартної деталі відрізняється від ймовірності виготовлення стандартної деталі за абсолютною величиною не більше ніж на 0,02.

Теорема 7.3 стверджує стійкість частоти при постійних умовах випробування. Але при умовах випробування, які змінюються, аналогічна стійкість також існує. Теорема, що встановлює властивість стійкості частот при змінних умовах випробування, яка є узагальненням теореми Бернуллі, називається теоремою Пуассона.

Теорема 7.4. (Пуассона). Якщо в серії n незалежних експериментів ймовірність появи A в i-му експерименті дорівнює p_i $(i = \overline{1,n})$, то при збільшенні n частота k/n події A збігається за ймовірністю до середнього арифметичного ймовірностей p_i, тобто

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{k}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| \le \varepsilon\right) = 1, \tag{7.16}$$

де ε – будь-яке додатне число.

Приклад 7.6. На трьох автоматичних верстатах виготовляють однотипні вироби. Відомо, що продуктивність 1-го верстата в 2 рази вища, ніж 2-го й в 1,5 рази вища, ніж 3-го. Ймовірність виготовлення виробу вищої якості для 1-го верстата дорівнює 0,94, 2-го – 0,95 й 3-го – 0,98. За зміну на цих верстатах виготовлено 6500 виробів. Знайти границі, у яких повинна перебувати частота виготовлення виробу вищої якості, якщо це необхідно гарантувати з ймовірністю 0,9.

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що виготовлений виріб – вищої категорії. Тоді частота появи k/n події A є випадковою величиною.

За нерівністю Чебишева маємо:

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i\, q_i}{n^2\varepsilon^2}, \tag{7.20}$$

де $q_i = 1 - p_i$.

Враховуючи різну продуктивність верстатів, з умови прикладу складемо рівняння $t + t/2 + 2/3\,t = 1 \Rightarrow t = 6/13$, після чого знайдемо кількість працюючих верстатів 1-го типу, тобто їх $6500 \cdot 6/13 = 3000$.

Знайдемо середню ймовірність p настання події A для 6500 виробів, виготовлених на 3-х верстатах за зміну.

$$\overline{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3} p_i = \frac{1}{6500}(0{,}94 \cdot 3000 + 0{,}95 \cdot 1500 + 0{,}98 \cdot 2000) = 0{,}954.$$

Користуючись нерівністю (7.20) одержуємо:

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - 0{,}954\right| \le \varepsilon\right) \ge$$

$$\ge 1 - \frac{0{,}94 \cdot 0{,}06 \cdot 3000 + 0{,}95 \cdot 0{,}05 \cdot 1500 + 0{,}98 \cdot 0{,}02 \cdot 2000}{6500^2\varepsilon^2} = 0{,}9.$$

Звідси

$$\frac{279{,}65}{6500^2\varepsilon^2} = 0{,}1$$

і $\varepsilon \approx 0{,}008$.

Таким чином

$$\left|\frac{k}{n} - 0{,}954\right| \le 0{,}008.$$

З останньої нерівності випливає

$$0{,}954 - 0{,}008 \le \frac{k}{n} \le 0{,}954 + 0{,}008,$$

$$0{,}946 \le \frac{k}{n} \le 0{,}962.$$

Таким чином, з ймовірністю не менше 0,9, можна стверджувати, що частота виготовлення виробів вищої якості знаходиться в інтервалі $(0{,}946; 0{,}962)$.

7.2. Центральна гранична теорема

До цього часу ми говорили про стійкість сум вигляду

$$S_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

Оскільки S_n сама є випадковою величиною, то не слід забувати, що вона має деякий закон розподілу. Виявляється, що при досить загальних умовах закон розподілу S_n близький до нормального закону розподілу і цей чудовий факт становить зміст іншої групи теорем, поєднаних загальною назвою „центральна гранична теорема”. Різні форми центральної граничної теореми різняться між собою умовами, що покладаються на суму розглянутих випадкових величин.

Оскільки величина S_n відрізняється лише постійним множником від суми $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, то в загальних рисах зміст центральної граничної теореми може бути сформульований наступним чином: розподіл суми великого числа незалежних випадкових величин при досить загальних умовах наближений до нормального розподілу. Цим і пояснюється особлива роль нормального розподілу, оскільки суми великої кількості випадкових доданків часто виникають у самій теорії ймовірностей так як й у її численних застосуваннях.

Щоб перейти до точного формулювання центральної граничної теореми, поставимо наступні два питання:

- який точний зміст міститься у твердженні, що закон розподілу суми $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ є близьким до нормального закону?
- при яких умовах має місце ця близькість?

Перед тим, як дати відповідь на ці питання, розглянемо не просто велике число, а нескінчену послідовність випадкових величин:

$$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$$

Складемо „частинку” суми:

$$v_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \tag{7.21}$$

де $n = 1,2, \dots$.

Від кожної з випадкових величин v_n перейдемо до „нормованої” випадкової величини

$$v_n' = \frac{v_n - M(v_n)}{\sqrt{D(v_n)}},$$

математичне сподівання якої дорівнює 0, а дисперсія 1. Відповідь на перше з поставлених питань зараз можна сформулювати у вигляді наступної рівності

$$\lim_{n\to\infty} P(a \leq v_n' \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx, \qquad (7.22)$$

де $a < b$.

Рівність (7.22) означає, що закон розподілу випадкової величини v_n' із збільшенням n наближається до нормального закону розподілу з математичним сподіванням 0 і дисперсією 1.

З того факту, що зв'язок між випадковими величинами v_n' і v_n лінійний

$$v_n' = \frac{1}{\sqrt{D(v_n)}}v_n - \frac{M(v_n)}{\sqrt{D(v_n)}}$$

і v_n' має наближено нормальний закон розподілу безпосередньо випливає, що v_n розподіллено наближено нормально.

Для того, щоб дати відповідь на друге питання з рівності () віднімемо наступну рівність

$$M(v_n) = M(X_1) + M(X_2) + \cdots + M(X_n).$$

Отже,

$$\dot{v}_n = \dot{X}_1 + \dot{X}_2 + \cdots + \dot{X}_n,$$

де $\dot{v}_n$, $\dot{X}_i$ – центровані випадкові величини ($\dot{v}_n$, $\dot{X}_i$ – відхилення випадкових величин v_n і X_i від їх математичних сподівань). Загальний зміст умов, які накладаються на випадкові величини $X_1, X_2, \ldots$ полягає в тому, що окремі відхилення $\dot{X}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ повинні бути рівномірно малі по відношенню до сумарних відхилень $\dot{v}_n$.

Точне формулювання умов, при яких має місце рівність (7.22) дав відомий вчений А.М. Ляпунов. Вона полягає в наступному.

Нехай для кожної випадкової величини X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ числа

$$d_i = M(\dot{X}_i^2), \quad k_i = M\left(\left|\dot{X}_i\right|^3\right)$$

скінченні.

Якщо при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

то кажуть, що послідовність $X_1, X_2, \ldots$ задовольняє умову Ляпунова.

Найпростіший частинний випадок, коли виконується умова Ляпунова, – це випадок, коли всі випадкові величини $X_1, X_2, \ldots$ мають один і той ж закон розподілу. Тоді, розуміється, $d_1 = d_2 = \cdots = d$ і $k_1 = k_2 = \cdots = k$, отже,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{nk}{(nd)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k}{d^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0,$$

при $n \to \infty$.

Зараз ми готові сформулювати **центральну граничну теорему у формі А.М. Ляпунова**.

Теорема. Якщо послідовність $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ незалежних випадкових величин задовольняє умову Ляпунова, то має місце рівність (7.22).

Теоретичні запитання до розділу 7

1. Сформулюйте нерівність Чебишева.
2. Дайте поняття збіжності послідовності випадкових величин за ймовірністю.
3. Сформулюйте теорему Чебишева.
4. Сформулюйте теорему Хінчина і її практичне застосування.
5. Сформулюйте теорему Бернуллі.
6. Сформулюйте теорему Пуассона.
7. У чому полягає центральна гранична теорема Ляпунова?

Приклади до розділу 7

1. При виготовленні партії деталей розміром $l = 10$ мм існує допуск $\Delta l = \pm 0{,}1$ мм. Оцінити ймовірність того, що випадково взята деталь – бракована, якщо $\sigma_X^2 = 0{,}0025$.
2. У технологічному процесі в середньому 85% виробів мають допуск ±0,5%. Яке число виробів з партії 100000 шт. з ймовірністю 0,98 можна планувати з допуском ±5%?
3. До складу надійшла партія з n електролампочок. Оцінити ймовірність того, що відхилення середньої тривалості горіння 100 лампочок з вибраної кількості від середньої тривалості горіння лампочки з усієї партії не перевищить 6 год., якщо середнє квадратичне відхилення тривалості її горіння не перевищує 8 год.
4. Скільки разів потрібно вимірювати величину з істинним значенням m_X, щоб з ймовірністю не менше 0,95 гарантувати відхилення середньої арифметичної цих вимірювань від істинного значення величини m_X, не більше, ніж на 2, якщо середнє квадратичне відхилення вимірювань не перевищує 10?
5. Ймовірність виготовлення нестандартної деталі дорівнює 0,04. Яке найменше число деталей варто відібрати, щоб з ймовірністю 0,88 можна було стверджувати, що частка нестандартних деталей серед них буде відрізнятися від ймовірності виготовлення нестандартної деталі за абсолютною величиною не більше ніж на 0,02?
6. На трьох автоматичних верстатах виготовляють однотипні вироби. Відомо, що продуктивність 1-го верстата в 2 рази вища, ніж 2-го й в 1,5 рази вища, ніж 3-го. Ймовірність виготовлення виробу вищої якості для 1-го верстата дорівнює 0,94, 2-го – 0,95 й 3-го – 0,98. За зміну на цих верстатах виготовлено 6500 виробів. Знайти границі, у яких повинна перебувати частота виготовлення виробу вищої якості, якщо це необхідно гарантувати з ймовірністю 0,9.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Таблиця значень функції Гаусса $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3698
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0395	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0353	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001

Додаток 2

Таблиця значень функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,00000	0,50	0,19146	1,00	0,34134	1,50	0,43319	2,00	0,47725
0,01	0,00399	0,51	0,19497	1,01	0,34375	1,51	0,43448	2,02	0,47831
0,02	0,00798	0,52	0,19847	1,02	0,34614	1,52	0,43574	2,04	0,47932
0,03	0,01197	0,53	0,20194	1,03	0,34849	1,53	0,43699	2,06	0,48030
0,04	0,01595	0,54	0,20540	1,04	0,35083	1,54	0,43822	2,08	0,48124
0,05	0,01994	0,55	0,20884	1,05	0,35314	1,55	0,43943	2,10	0,48214
0,06	0,02392	0,56	0,21226	1,06	0,35543	1,56	0,44062	2,12	0,48300
0,07	0,02790	0,57	0,21566	1,07	0,35769	1,57	0,44179	2,14	0,48382
0,08	0,03188	0,58	0,21904	1,08	0,35993	1,58	0,44295	2,16	0,48461
0,09	0,03586	0,59	0,22240	1,09	0,36214	1,59	0,44408	2,18	0,48537
0,10	0,03983	0,60	0,22575	1,10	0,36433	1,60	0,44520	2,20	0,48610
0,11	0,04380	0,61	0,22907	1,11	0,36650	1,61	0,44630	2,22	0,48679
0,12	0,04776	0,62	0,23237	1,12	0,36864	1,62	0,44738	2,24	0,48745
0,13	0,05172	0,63	0,23565	1,13	0,37076	1,63	0,44845	2,26	0,48809
0,14	0,05567	0,64	0,23891	1,14	0,37286	1,64	0,44950	2,28	0,48870
0,15	0,05962	0,65	0,24215	1,15	0,37493	1,65	0,45053	2,30	0,48928
0,16	0,06356	0,66	0,24537	1,16	0,37698	1,66	0,45154	2,32	0,48983
0,17	0,06749	0,67	0,24857	1,17	0,37900	1,67	0,45254	2,34	0,49036
0,18	0,07142	0,68	0,25175	1,18	0,38100	1,68	0,45352	2,36	0,49086
0,19	0,07535	0,69	0,25490	1,19	0,38298	1,69	0,45449	2,38	0,49134
0,20	0,07926	0,70	0,25804	1,20	0,38493	1,70	0,45543	2,40	0,49180
0,21	0,08317	0,71	0,26115	1,21	0,38686	1,71	0,45637	2,42	0,49224
0,22	0,08706	0,72	0,26424	1,22	0,38877	1,72	0,45728	2,44	0,49266
0,23	0,09095	0,73	0,26730	1,23	0,39065	1,73	0,45818	2,46	0,49305
0,24	0,09483	0,74	0,27035	1,24	0,39251	1,74	0,45907	2,48	0,49343
0,25	0,09871	0,75	0,27337	1,25	0,39435	1,75	0,45994	2,50	0,49379
0,26	0,10257	0,76	0,27637	1,26	0,39617	1,76	0,46080	2,52	0,49413
0,27	0,10642	0,77	0,27935	1,27	0,39796	1,77	0,46164	2,54	0,49446
0,28	0,11026	0,78	0,28230	1,28	0,39973	1,78	0,46246	2,56	0,49477
0,29	0,11409	0,79	0,28524	1,29	0,40147	1,79	0,46327	2,58	0,49506
0,30	0,11791	0,80	0,28814	1,30	0,40320	1,80	0,46407	2,60	0,49534
0,31	0,12172	0,81	0,29103	1,31	0,40490	1,81	0,46485	2,62	0,49560
0,32	0,12552	0,82	0,29389	1,32	0,40658	1,82	0,46562	2,64	0,49585
0,33	0,12930	0,83	0,29673	1,33	0,40824	1,83	0,46638	2,66	0,49609
0,34	0,13307	0,84	0,29955	1,34	0,40988	1,84	0,46712	2,68	0,49632
0,35	0,13683	0,85	0,30234	1,35	0,41149	1,85	0,46784	2,70	0,49653

Закінчення дод. 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,36	0,14058	0,86	0,30511	1,36	0,41309	1,86	0,46856	2,72	0,49674
0,37	0,14431	0,87	0,30785	1,37	0,41466	1,87	0,46926	2,74	0,49693
0,38	0,14803	0,88	0,31057	1,38	0,41621	1,88	0,46995	2,76	0,49711
0,39	0,15173	0,89	0,31327	1,39	0,41774	1,89	0,47062	2,78	0,49728
0,40	0,15542	0,90	0,31594	1,40	0,41924	1,90	0,47128	2,80	0,49744
0,41	0,15910	0,91	0,31859	1,41	0,42073	1,91	0,47193	2,82	0,49760
0,42	0,16276	0,92	0,32121	1,42	0,42220	1,92	0,47257	2,84	0,49774
0,43	0,16640	0,93	0,32381	1,43	0,42364	1,93	0,47320	2,86	0,49788
0,44	0,17003	0,94	0,32639	1,44	0,42507	1,94	0,47381	2,88	0,49801
0,45	0,17364	0,95	0,32894	1,45	0,42647	1,95	0,47441	2,90	0,49813
0,46	0,17724	0,96	0,33147	1,46	0,42785	1,96	0,47500	2,92	0,49825
0,47	0,18082	0,97	0,33398	1,47	0,42922	1,97	0,47558	2,94	0,49836
0,48	0,18439	0,98	0,33646	1,48	0,43056	1,98	0,47615	2,96	0,49846
0,49	0,18793	0,99	0,33891	1,49	0,43189	1,99	0,47670	2,98	0,49856
								3,00	0,49865
								3,20	0,49931
								3,40	0,49966
								3,60	0,49984
								3,80	0,49993
								4,00	0,49997
								4,50	0,50000
								5,00	0,50000

ЗМІСТ