МАТЕРІАЛИ XXI НАУКОВОЇ КОНФ. УЖГОРОДОСЬК. УН-ТУ

серія фізична квітень 1967

Ю. М. Ломсадзе, С. С. Токар

ПРО МОЖЛИВІ АСИМПТОТИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ АМПЛІТУДАМИ РЕАКЦІЙ[1]

§ 1. Вступ

Останнім часом в аксіоматичному підході вдалось одержати ряд важливих фізичних наслідків на основі лише фізично обміркованих постулатів квантової теорії поля без будь-якого чисто математичного припущення про помірність зростання узагальнених функцій. Ми маємо на увазі теорему Померанчука та різні її узагальнення — асимптотичні (при $s \to \infty$ і фіксованому переданому імпульсі t) співвідношення між амплітудами довільних, бінарних і небінарних крос-реакцій [1—5]. Були встановлені також аналогічні асимптотичні співвідношення між усіма відповідними членами асимптотичних розкладів амплітуд цих реакцій [6].

Доведення всіх цих співвідношень вдалось поширити на довільні небінарні реакції завдяки техніці запроваджених Мейманом [2] асимптотичних амплітуд. Для доведення істотно, що ці останні при вельми загальних математичних припущеннях [2], які зводяться до відсутності осциляцій, асимптотично при $s \to \infty$ по дійсній осі та фіксованому фізичному t еквівалентні точним амплітудам в розумінні

$$\lim \left[T(s,\ t)/T_{\infty}(s,\ t)\right] = 1 \text{ при } s \to \infty. \qquad (1.\ 1)$$

Незважаючи на ліберальність цих математичних припущень, питання про справедливість умови (1. 1) набуває внаслідок вищесказаного фундаментального значення.

---

[1] Ця робота доповідалась також на Міжнародній нараді по нелокальних взаємодіях в Дубні в липні 1967 року.

З іншого боку, в роботі Грибова, Іоффе та Померанчука [7] була поставлена проблема виявлення характеру поведінки при $s \to \infty$ і фіксованому t «ефективної просторової області взаємодії», яку ми позначатимемо як σ. Ця проблема являє, безумовно, значний фізичний інтерес.

Нижче ми покажемо, по-перше, що проблема асимптотичної еквівалентності амплітуд в розумінні (1. 1) і питання про характер зміни σ при великих енергіях тісно пов'язані між собою.

По-друге, ми виявимо, що ідея Грибова, Іоффе і Померанчука [7] при деякому додатковому припущенні може бути використана для експериментальної перевірки виконуваності умови (1. 1).

По-третє, ми вкажемо, яким чином при тому ж припущенні асимптотичні рівності між модулями n-х асимптотичних амплітуд, одержаних в [6], можуть бути перевірені на експерименті відносно легко вже тепер.

По-четверте, ми дослідимо можливість одержання нового типу асимптотичних співвідношень між диференціальними перерізами як крос-реакцій (без обмеження на вигляд взаємодії), так і C-спряжених реакцій (для C-неінваріантних взаємодій) — рівностей цих перерізів при асимптотично великих s, t і u одночасно, причому при різних режимах s/t. Ці рівності будуть мати місце, якщо виконуються певні обмеження на характер поведінки σ в цій же асимптотичній області.

По-п'яте, ми дослідимо можливість установлення певних асимптотичних співвідношень між реакціями розсіяння та розпаду. При цьому йдеться про розсіяння, одна з початкових частинок в якому є частинка з масою спокою, що дорівнює нулеві, та розпад, який конструюється перекиданням цієї частинки з початкового в кінцевий стан. Ми покажемо, що сподівані співвідношення в асимптотичній області при s, t та $u \to \infty$ для розсіяння і при $s \to M^2$, $t \to \mu^2$ та $u \to m^2$ для розпаду повинні мати місце, якщо вірні певні обмеження на характер поведінки σ в цій асимптотичній області.

Зрештою, по-шосте, ми значно послабимо умови на границі області голоморфності функції, які достатні для застосовності до неї узагальненого принципу максимуму Фрагмена—Ліндельофа—Неванлінни, та покажемо за допомогою цієї модифікації принципу максимуму, що фізична вимога «спостережуваності» амплітуди розсіяння разом з іншими аксіомами квантової теорії поля забезпечує як можливість написання дисперсійних співвідношень, так і доведення всіх згаданих вище асимптотичних рівностей.

§ 2. Про можливість експериментальної перевірки асимптотичних рівностей для n-х асимптотичних амплітуд

У [6] були одержані асимптотичні рівності між модулями n-х асимптотичних амплітуд для прямої та перехресної реакцій. В окремому випадку $n=0$ цю рівність можна безпосередньо перевірити на експерименті. Для перевірки цих же рівностей при $n \neq 0$ треба в загальному випадку (див. примітку при коректурі в [6]) вивчити залежність амплітуд від $\Sigma = \mu^2_1 + \mu^2_2$ при фіксованому $\Delta = \mu^2_1 - \mu^2_2$, де μ_1 та μ_2 — маси розсіюваних частинок. Проте таке вивчення практично дуже важко здійснити.

Покажемо, яким чином, використовуючи ідею Грибова, Іоффе та Померанчука [7], при деякій додатковій умові ці асимптотичні рівності можна перевірити на експерименті відносно легко вже тепер.

Розглянемо пряму (I) і перехресну (II) реакції $\pi^+ n$-розсіяння, амплітуди яких $T^{\mathrm{I,\,II}}(\omega)$ у системі Брейта для різних мас μ_1 і μ_2 піонів за умови

$$\sigma_{\pi}^{\perp} = o(\omega) \tag{2. 1}$$

дозволяють асимптотичний розклад [6]

$$T^{\mathrm{I,\,II}}(\omega) \sim \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{\mathrm{I,\,II}}(\omega), \tag{2. 2}$$

де

$$T_n^{\mathrm{I,\,II}}(\omega) \sim \alpha^{2n} \int dx\, P_n\left(\frac{i\,\mathbf{ex}}{\omega},\ \omega^{-2}\right) \times$$

$$\times \exp\left\{-i\left[\omega(x_0 - \mathbf{ex}) + \frac{\mu_1{}^2 - \mu_2{}^2}{t}\mathbf{px}\right]\right\} G^{\mathrm{I,\,II}}(x; p, p'); \tag{2.3}$$

$$\alpha^2 = {}^1/_2\,(\mu_1^2 + \mu_2^2) - {}^t/_4 - (\mu_2^2 - \mu_1^2)^2/t.$$

Умова (2. 1), таким чином, забезпечує вихід амплітуд при $\omega \to \infty$ на режим, незалежний від Σ при фіксованому Δ.

Експерименти, запропоновані в [7] і основані на вивченні реакцій

$$\pi^{\pm} + n \to \pi^{\pm} + n + \gamma, \qquad \text{(III, IV)}$$

не дають, на жаль, можливості виявити, чи виходять амплітуди $T^{\mathrm{I,\,II}}(\omega)$ на цей режим без додаткового припущення. Але якщо, крім (2, 1), вимагати виконання умови

$$\sigma_n^{\mathrm{II}} \to 0 \text{ при } \omega \to \infty, \qquad (2.\ 4)$$

що усуває будь-яку залежність асимптотичних амплітуд $T^{\mathrm{I,\,II}}(\omega)$ від μ_1 і μ_2 при великих ω, то експерименти, запропоновані в [2], дадуть можливість виявити, чи виходять амплітуди $T^{\mathrm{I,\,II}}(\omega)$ на режим $T_0^{\mathrm{I,\,II}}(\omega)$, незалежний від μ_1 і μ_2. Таким чином, існує можливість перевірити на експерименті справедливість обмежень (2, 1) і (2, 4) одночасно.

Припустимо, що експерименти, запропоновані в [7] і легко здійсненні вже тепер, зафіксували справедливість цих обмежень. Тоді виникає можливість за допомогою більш детального експериментального вивчення реакцій (III, IV) перевірити асимптотичні співвідношення, одержані в [6].

Нехай виконані експериментальні умови, за яких внесок діаграм $M_{\mu}^{(2)}$ в амплітуди реакцій (III, IV) зникаюче малий. Якщо, крім того, вектор поляризації γ-кванта $\mathbf{\ddot{e}} \perp \mathbf{q}$, то амплітуди $M^{\mathrm{III,\,IV}}$ цих реакцій можна зобразити у вигляді (порівняй формулу (5) в [7])

$$M_{\mu} \simeq \pm \frac{q'_{\mu}}{q'k} M^{\mathrm{I,\,II}}(\mu_1^2 = \mu^2,\ \mu_2^2 = \mu^2 + 2q'k,\ \omega,\ t). \qquad (2.\ 5)$$

Звідси видно, що експериментальне вивчення реакцій (III) і (IV) дає можливість визначити залежність $T^{\mathrm{I,\,II}}(\omega)$ при великих ω від μ_2^2 при фіксованому μ_1^2, тобто залежність $T^{\mathrm{I,\,II}}(\omega)$ при великих ω від α^2. Апроксимація цієї експериментальної залежності поліномом $A + B\alpha^2 + C\alpha^4 + \ldots$ дає в свою чергу можливість відтворити експериментальний вигляд $T_n^{\mathrm{I,\,II}}(\omega)$ при великих ω і, отже, перевірити на експерименті рівності, одержані в [6].

§ 3. Можливі рівності диференціальних перерізів реакцій при асимптотично великих енергіях та переданих імпульсах

Ми покажемо, що сподівані рівності диференціальних перерізів можуть бути одержані, якщо, крім використання стандартних фізично обмірковуваних постулатів квантової теорії поля, накласти ще деякі обмеження на характер поведінки «ефективних просторових σ та часових σ^0 областей взаємодії частинок». Таким чином, при наявності впевненості, інспірованої, наприклад, іншого роду експериментами, в справедливості вищевказаних постулатів квантової теорії поля аж до досить великих s, t і u, які можна вважати асимптотичними, експериментальне підтвердження або спростування цих асимптотичних рівностей могло б дати певну інформацію про асимптотичний (при $s, t, u \to \infty$) характер поведінки σ та σ^0.

Асимптотична еквівалентність і поведінка «ефективної просторової області взаємодії». Розглянемо реакцію

$$\pi(q) + N(p) \to \pi'(q') + N'(p'), \tag{V}$$

де в дужках вказані 4-імпульси піонів з масами μ і m і нуклонів з однаковою масою M. В аксіоматиці Боголюбова—Медведєва—Поліванова [8] амплітуду цієї реакції в системі Брейта можна зобразити у вигляді

$$T^{\mathrm{V}}(\omega) = \int d^4x \exp\left[i\left(\omega x_0 - \lambda\,\mathbf{ex} - t^{-1}(m^2-\mu^2)\,\mathbf{px}\right)\right] \times \tag{3. 1}$$

$$\times \left\langle p', s' \right| \frac{\delta j'^{H}(x/_2)}{\delta\varphi(-x/_2)} \left| p, s \right\rangle,$$

де одиничний вектор $\mathbf{e} \perp \mathbf{p}$ та

$$\lambda^2 = \omega^2 - a(t), \tag{3. 2}$$

$$a(t) = {}^1/_2(\mu^2 + m^2) - {}^t/_4 - (m^2-\mu^2)^2 t^{-1}.$$

При $\omega \to \infty$ по дійсній осі і фіксованому фізичному t показник експоненти має вигляд

$$i\left[\omega(x_0 - \mathbf{ex}) - t^{-1}(m^2-\mu^2)\,\mathbf{px} + {}^1/_2 a(t)\,\omega^{-1}\mathbf{ex}\right]. \tag{3. 3}$$

Якщо тому при великих фізичних ω «ефективна просторова поперечна область взаємодії» поводить себе як

$$\sigma^{\perp} = o(\omega) \qquad \text{при } \omega \to \infty, \tag{3. 4}$$

останнім членом в (3. 3) при $\omega \rightarrow \infty$ можна знехтувати. Але в цьому випадку точна амплітуда $T^{\mathrm{v}}(\omega)$ саме і буде еквівалентна асимптотичній амплітуді $T^{\mathrm{v}}_{\infty}(\omega)$ в розумінні (1. 1). Ми бачимо, таким чином, що для того, щоб зрозуміти реальну ситуацію з асимптотичною еквівалентністю (1. 1), треба з'ясувати, чи зростає $\sigma^{\perp}$ при фізичних $\omega \rightarrow \infty$, якщо вона взагалі зростає, повільніше, ніж ω, чи ні.

Ми вже говорили, що подібна проблема обговорювалась також в [7]. Експерименти, запропоновані там, можна було б розглядати і з точки зору перевірки ними умови (1. 1). При цьому, однак, треба мати на увазі, що таким шляхом можна перевірити лише дві умови одночасно — умову (2. 1), яка забезпечує асимптотичну еквівалентність в розумінні (1. 1), і умову (2. 4), яка не має відношення до цієї асимптотичної еквівалентності.

Зауважимо, що з факту експериментального підтвердження або спростування асимптотичних співвідношень між диференціальними перерізами бінарних крос-реакцій не можна буде добути будь-якої інформації про характер поведінки $\sigma^{\perp}$ при $\omega \rightarrow \infty$, оскільки доведення цих співвідношень не вимагає обов'язкового введення асимптотичних амплітуд. Цей факт міг би бути лише наслідком порушення принаймні одного із стандартних фізично обміркованих постулатів квантової теорії поля. Що ж до асимптотичних співвідношень для небінарних крос-реакцій, то експериментальне підтвердження їх також не давало б ніякої інформації про поведінку $\sigma^{\perp}$ при фізичних $\omega \rightarrow \infty$, тому що не можна виключити можливість доведення їх в майбутньому, минаючи техніку асимптотичних амплітуд, на основі аналітичності точних амплітуд. Зрештою, експериментальне спростування цих співвідношень для небінарних реакцій означало б або порушення принаймні одного з стандартних постулатів квантової теорії поля, або невиконання умови (1. 1), тобто зростання $\sigma^{\perp}$ при фізичних $\omega \rightarrow \infty$ не повільніше, ніж ω.

Зауважимо, що все, про що йшлося до цього, стосувалось області асимптотично великих енергій s при фіксованому переданому імпульсі t. Тепер же ми перейдемо до обговорення аналогічних проблем, але вже при асимптотично великих усіх трьох манделстамівських змінних s, t і u.

Крос-реакції. Розглянемо реакцію

$$\bar{\pi}(q) + N'(p) \to \bar{\pi}'(q') + N(p'), \qquad \text{(VI)}$$

яка є крос-реакцією по відношенню до (V). Амплітуди реакцій (V) і (VI) зручно зобразити у вигляді

$$T^{\mathrm{V,\,VI}}(\omega) = (2\pi)^{-3}\,\bar{U}_{s'}(p')M^{\mathrm{V,\,VI}}\,U_s(p), \qquad (3.\ 5)$$

де

$$M^{\mathrm{V}} = \int d^4x d^4y d^4z e^{i(-px+q'y+p'z)}\,G(x, y, z); \qquad (3.\ 6)$$

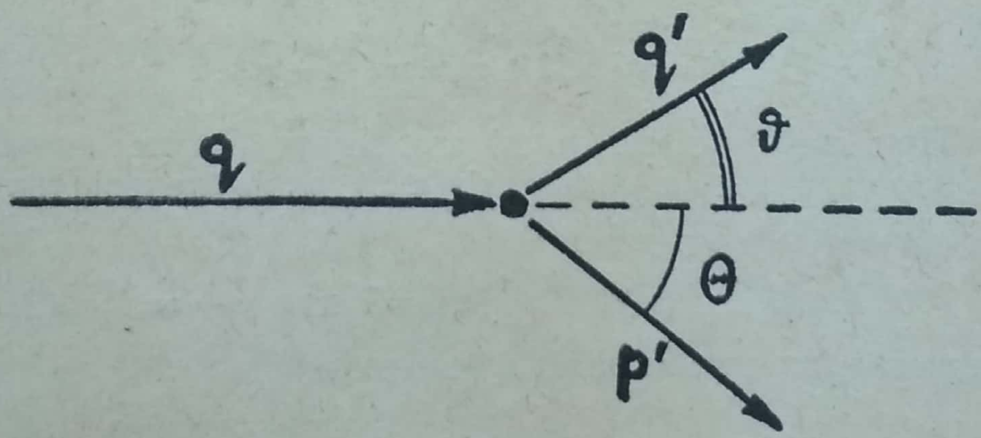
$$M^{\mathrm{VI}} = \int d^4x\, d^4y\, d^4z\, e^{i(-px+q'y+p'z)}\,G^*(z, y, x)$$

та

$$G(x, y, z) \equiv \langle 0|\,\frac{\delta^3 j_\pi(0)}{\delta N(x)\,\delta\pi'^H(y)\,\delta\bar{N}(t)}\,|0\rangle. \qquad (3.\ 7)$$

Тут $U_s(p)$ — амплітуда плоскохвильового розв'язку вільного рівняння Дірака з 4-імпульсом p і напрямком спіна s (див., наприклад, [9]).

Виберемо L-систему для початкового нуклона і направимо імпульс $\mathbf{q}$ вздовж третьої осі (див. рис.). Як



параметри, що визначають реакції, виберемо: енергію початкового піона ω, «параметр розподілу» α, який задається співвідношенням

$$|\mathbf{q}'| = \alpha\,|\mathbf{p}'|, \quad \alpha > 0, \qquad (3.\ 8)$$

та азимути φ та Φ імпульсів $\mathbf{q}'$ та $\mathbf{p}'$ (амплітуди, звичайно, від азимутів не залежать).

Із законів збереження енергії — імпульсу випливає

$$\mathbf{p}'^2 = [(\omega+M)^2(1+\alpha^2)+(m^2-M^2)(1-\alpha^2)](1-\alpha^2)^{-2}-$$
$$-2(\omega+M)(1-\alpha^2)^{-2}\sqrt{\alpha^2(\omega+M)^2+(1-\alpha^2)(m^2-\alpha^2M^2)}, \quad (3.\ 9)$$

$$\cos\Theta = {}^1/_2[\omega^2-\mu^2+\mathbf{p}'^2(1-\alpha^2)](\omega^2-\mu^2)^{-1/2}|\mathbf{p}'|^{-1},$$
$$\sin\vartheta = \alpha^{-1}\sin\Theta, \quad \varphi=\Phi+\pi, \quad (3.\ 10)$$

причому можна покласти $\Phi=0$.

При великих ω показник експонент в (3. 7) має вигляд

$$-Mx_0+\alpha(1-\alpha)^{-1}(\omega+M)[1+O(\omega^{-1})]y_0+(\omega+M)(1+\alpha)^{-1}\times$$
$$\times[1+O(\omega^{-1})]z_0+\sqrt{2\alpha M\omega}(1+\alpha)^{-1}[1+O(\omega^{-1})](y_1-z_1)-$$
$$-(1+\alpha)^{-1}[\alpha\omega+(1-\alpha)M+O(\omega^{-1})]y_3- \quad (3.\ 11)$$
$$-(1+\alpha)^{-1}[\omega+(1-\alpha)M+O(\omega^{-1})]z_3.$$

Відповідно до цього ми вводимо асимптотичні амплітуди в дусі Меймана

$$M_\infty^{\mathrm{V}}(\omega)=\int d^4x d^4y d^4z\, e^{if(\omega,\alpha)}G(x,y,z), \quad (3.\ 12)$$
$$M_\infty^{\mathrm{VI}}(\omega)=\int d^4x\, d^4y\, d^4z\, e^{if(\omega,\alpha)}G^*(x,y,z),$$

де

$$f(\omega,\alpha)\equiv(1+\alpha)^{-1}\alpha\omega(y_0-y_3). \quad (3.\ 13)$$

При $\alpha\neq1$ асимптотичні амплітуди будуть асимптотично (при $\omega\to\infty$ по дійсній осі) еквівалентні точним амплітудам в розумінні

$$\lim[M^{\mathrm{V,\,VI}}(\omega)/M_\infty^{\mathrm{V,\,VI}}(\omega)]=1 \text{ при } \omega\to\infty \quad (3.\ 14)$$

за умови, що при великих фізичних ω

$$\sigma_N^0,\ \sigma_{\pi'}^0,\ \sigma_{\pi'}^{||}\to0, \quad (3.\ 15)$$
$$\sigma_{N'}^{\perp}-\sigma_{\pi'}^{\perp}=o(\omega^{-1/2}),\ \sigma_{N'}^0,\ \sigma_{N'}^{||}=o(\omega^{-1}).$$

Тут «ефективні часи σ^0 взаємодії» та «ефективні поздовжні $\sigma^{||}$ та поперечні $\sigma^{\perp}$ просторові області взаємодії» відповідних частинок визначені по відношенню до початкового піона $\pi(q)$.

У випадку ж $\alpha=1$ функція $f(\omega,\alpha)$ при $\omega\to\infty$ має асимптотику виду

$$-Mx_0+{}^1/_2(\omega+M)\,[1+O(\omega^{-1})]\,y_0+{}^1/_2(\omega+M)\,[1+O(\omega^{-1})]\times$$
$$\times z_0+{}^1/_2\sqrt{2M\omega}[1+O(\omega^{-1})](y_1-z_1)-{}^1/_2[\omega+O(\omega^{-1})](y_3+z_3), \tag{3. 16}$$

і асимптотична еквівалентність асимптотичних і точних амплітуд в цьому випадку матиме місце при більш ліберальних умовах

$$\sigma^0_N,\ \sigma^0_{\pi'}\to 0,\quad \sigma^{||}_{\pi'}=o(\omega), \tag{3. 17}$$
$$\sigma^{\perp}_{N'}-\sigma^{\perp}_{\pi'}=o(\omega^{-1/2}),\ \ \sigma^0_{N'},\ \ \sigma^{||}_{N'}=o(\omega^{-1}).$$

В силу принципу мікропричинності Боголюбова узагальнена функція $G\ (x,\ y,\ z)=0$ при $x,\ y,\ z\ \overline{\in}\ \overline{C}$, де $\overline{C}$ — верхня пола світлового конуса, причому тут нам достатньо врахувати цю рівність лише по змінній y. Якщо розуміти цю рівність або як спеціальний принцип «відсутності дальнодії» [2], або як більш ліберальну вимогу — III, основне формулювання принципу мікропричинності [3, 4], то асимптотична амплітуда $M^{\mathrm{V}}_{\infty}(\omega)$ буде голоморфна у верхній ω-півплощині і задовольнятиме там всі умови узагальненого принципу максимуму Фрагмена—Ліндельофа—Неванлінни [2]. Варто спеціально підкреслити, що тут ніде не припускається помірність зростання узагальненої функції $G(x,\ y,\ z)$.

Неважко далі переконатись в тому, що асимптотичні амплітуди задовольняють крос-співвідношення

$$M^{\mathrm{V}}_{\infty}(-\omega^*)=M^{\mathrm{VI}}_{\infty}{}^*(\omega), \tag{3. 18}$$

де ліва частина, звичайно, розуміється як аналітичне продовження. Все це дає можливість, використовуючи методику [2, 1], довести на основі узагальненого принципу максимуму Фрагмена—Ліндельофа—Неванлінни та асимптотичної еквівалентності (3. 14), асимптотичну рівність

$$|T^{\mathrm{V}}(\omega,\ s,\ s')|^2=|T^{\mathrm{VI}}(\omega,\ s,\ s')|^2\quad \text{при}\ \omega\to\infty \tag{3. 19}$$

і, отже, відповідну асимптотичну рівність диференціальних перерізів реакцій (V) і (VI).

***C*-спряжені реакції.** Розглянемо тепер реакцію

$$\pi(q)+N(p,\ s)\to K(q')+N'(p',\ s') \tag{VII}$$

та їй C-спряжену реакцію

$$\overline{\pi}(q)+\overline{N}(p,\ s)\to\overline{K}(q')+\overline{N}'(p',\ s'). \tag{VIII}$$

Амплітуди цих реакцій зображуються у вигляді

$$T^{\mathrm{VII}}(\omega, s, s') = (2\pi)^{-3}\, \overline{U}_{s'}^{(+)}(p')\, M^{\mathrm{VII}} U_s^{(+)}(p); \qquad (3.\ 20)$$

$$T^{\mathrm{VIII}}(\omega, s, s') = (2\pi)^{-3}\, \overline{U}_s^{(-)}(p)\, M^{\mathrm{VIII}} U_{s'}^{(-)}(p')$$

де

$$M^{\mathrm{VII}}(\omega) = \int d^4x d^4y d^4z e^{i(-px+q'y+p'z)}\, G(x, y, z); \qquad (3.\ 21)$$

$$M^{\mathrm{VIII}}(\omega) = \int d^4x\, dy\, d^4z e^{i(-px+q'y+p'z)}\, G^*(x, y, z)$$

та, в свою чергу,

$$G(x, y, z) \equiv \langle 0 | \frac{\delta^3 j_\pi(0)}{\delta N(x) \delta K^H(y) \delta \overline{N}(z)} | 0 \rangle. \qquad (3.\ 22)$$

Якби s-оператор був C-інваріантним, то тоді неважко було б одержати, що

$$|T^{\mathrm{VII}}(\omega, s, s')|^2 = |T^{\mathrm{VIII}}(\omega, s, s')|^2 \qquad (3.\ 23)$$

і, отже, рівні диференціальні перерізи цих реакцій для довільних параметрів реакцій (у тому числі при довільних ω). Оскільки, проте, слабка взаємодія, за участю якої лише й можуть відбуватись реакції (VII) і (VIII), C-неінваріантна, рівність (3. 23) неправильна. Але ми покажемо, що навіть для C-неінваріантних взаємодій рівність (3. 23) буде виконуватися в області асимптотично великих s, t і u одночасно (причому при довільному режимі s/t), якщо справедливі певні обмеження на характер асимптотичної поведінки σ^0 і σ. При цьому ці обмеження будуть більш ліберальні, ніж обмеження (3. 15) і (3. 17).

Дійсно, використовуючи запроваджену кінематику і враховуючи вираз (3. 11), введемо для реакцій (VII) і (VIII) асимптотичні амплітуди

$$M_\infty^{\mathrm{VII}}(\omega) = \int d^4x d^4y d^4z\, e^{ig(\omega, \alpha)}\, G(x, y, z); \qquad (3.\ 24)$$

$$M_\infty^{\mathrm{VIII}}(\omega) = \int d^4x\, d^4y\, d^4z\, e^{ig(\omega, \alpha)}\, G^*(x, y, z),$$

де (порівняй (3. 13))

$$g(\omega, \alpha) \equiv (1+\alpha)^{-1} \omega [\alpha(y_0 - y_3) + z_0 - z_3]. \qquad (3.\ 25)$$

Асимптотичні $M_\infty^{\mathrm{VII,\,VIII}}(\omega)$ та точні $M^{\mathrm{VII,\,VIII}}(\omega)$ амплітуди будуть асимптотично (при $\omega \to \infty$ по дійсній осі) еквівалентні

$$\lim [M^{\mathrm{VII,\,VIII}}(\omega) / M_\infty^{\mathrm{VII,\,VIII}}(\omega)] = 1 \text{ при } \omega \to \infty \qquad (3.26)$$

за умов: для $\alpha \neq 1$

$$\overset{0}{\sigma}_N,\ \overset{0}{\sigma}_K,\ \overset{0}{\sigma}_{N'},\ \overset{||}{\sigma}_{N'},\ \overset{||}{\sigma}_K \to 0; \qquad (3.\ 27)$$
$$\overset{\perp}{\sigma}_{N'} - \overset{\perp}{\sigma}_K = o(\omega^{-1/2})$$

та для $\alpha = 1$

$$\overset{0}{\sigma}_N,\ \overset{0}{\sigma}_K,\ \overset{0}{\sigma}_{N'} \to 0; \quad \overset{||}{\sigma}_K + \overset{||}{\sigma}_{N'} = o\,(\omega); \qquad (3.\ 28)$$
$$\overset{\perp}{\sigma}_{N'} - \overset{\perp}{\sigma}_K = o(\omega^{-1/2}).$$

Тут «ефективні просторово-часові області взаємодії» визначені по відношенню до початкового піона. Звернемо увагу на те, що обмеження (3. 27) і (3. 28) для C-спряжених реакцій більш ліберальні, ніж обмеження (3. 15) і (3. 17) для крос-реакцій.

Враховуємо: 1) умову $G(z,\ y,\ z) = 0$ при $x,\ y,\ z \in \overline{C},$ яку розуміємо як основне формулювання [3, 4] принципу мікропричинності Боголюбова, причому тут нам буде потрібна ця рівність вже по двох змінних y і x; 2) крос-симетрію

$$M_{\infty}^{\mathrm{VII}}(-\omega^*) = M_{\infty}^{\mathrm{VIII}*}(\omega), \qquad (3.\ 29)$$

що випливає безпосередньо з (3. 24); 3) зв'язок між $U_s^{(+)}(p)$ і $U_s^{(-)}(p)$ (порівняй [9])

$$U_s^{(+)}(p) = (2p_0)^{-1}\Theta(p_0)\Psi(p,\ s),$$
$$U_s^{(-)}(p) = (2p_0)^{-1}\Theta(p_0)\Psi(-p,\ s), \qquad (3.\ 30)$$

$$(\hat{p} + M)\,\Psi\,(p,\ s) = 0, \quad (s\sqrt{p_0^2 - M^2} + i\,\vec{\sigma}\,\vec{p})\Psi(p,\ s) = 0,$$

яка означає, що $2p_0U_s^{(-)}(p)$ є аналітичне продовження $2p_0U_s^{(+)}\ (p)$ з додатних p_0 на від'ємні, і, зрештою, 4) поліноміальну обмеженість амплітуди при $\omega \to \infty$ по дійсній осі. Із цього на основі узагальненого принципу максимуму Фрагмена—Ліндельофа—Неванлінни випливає, як і для реакцій (V) та (VI), сподівана асимптотична рівність

$$|\,T^{\mathrm{VII}}(\omega,\ s,\ s')\,|^2 = |\,T^{\mathrm{VIII}}(\omega,\ s,\ s')\,|^2 \text{ при } \omega \to \infty \qquad (3.\ 31)$$

та, отже, відповідна асимптотична рівність диференціальних перерізів реакцій (VII) та (VIII).

Обговорення результатів. З'ясуємо тепер зміст прямування $\omega \to \infty$ при фіксованому α у термінах інваріантних мандельстамівських змінних. Знаходимо, що при

$$s = (p+q)^2 \sim 2M\omega, \quad t = (p-p')^2 \sim -2M(1+\alpha)^{-1}\omega$$

$$u = (p-q')^2 \sim -2M\alpha(1+\alpha)^{-1}\omega. \qquad (3.\ 32)$$

Таким чином, співвідношення (3. 19) і (3. 31) одержані в асимптотичній області при одночасному прямуванні в нескінченність усіх трьох інваріантних мандельстамівських змінних. У цьому полягає принципова відміна цих співвідношень від співвідношень [1, 2], одержаних раніше. Варіюючи параметр α, ми тим самим можемо регулювати режим $s/t = -(1+\alpha)$.

Інша істотна відміна співвідношень (3. 19) та (3. 31) від одержаних в [1, 2] полягає в тому, що точні амплітуди навіть для бінарних реакцій напевно не мають крос-симетрії (3. 18) і (3. 29) і для одержання співвідношень (3. 19) і (3. 31) техніка асимптотичних амплітуд обов'язкова навіть для бінарних реакцій. Підкреслимо, що навіть припущення про справедливість мандельстамівських дисперсійних співвідношень недостатньо для одержання рівностей типу (3. 18) і (3. 29) для точних амплітуд. Припущення аналітичності $T(s, t)$ по двох змінних у добутку площин з розрізами та полюсами на просвіті дає можливість застосувати узагальнений принцип максимуму Фрагмена—Ліндельофа—Неванлінни до функції $T(s, -(1+\alpha)^{-1}s)$ і довести, що

$$\lim_{s\to\infty} \left[|T(s, -(1+\alpha)^{-1}s)| / |T(-s, (1+\alpha)^{-1}s)| \right] = 1. \qquad (3.\ 33)$$

Але ця аналітична рівність не настільки цікава, оскільки амплітуда в знаменнику береться при нефізичних $t>0$.

Саме тому експериментальне підтвердження співвідношень (3. 19) або (3. 31) свідчило б не лише на користь справедливості фундаментальних постулатів квантової теорії поля і, зокрема, основного формулювання принципу мікропричинності [3, 4], але й на користь здійсненності обмежень (3. 15), (3. 17) або (3. 27), (3. 28) на «ефективні просторові та часові області взаємодії частинок». З іншого боку, експериментальне спростування співвідношень (3. 19) або (3. 31) за умови, що існує впевненість у справедливості при великих s, t і u, які можна вважати асимптотичними, фундаментальних постулатів квантової теорії поля, значило б явне невиконання принаймні одного з обмежень (3. 15), (3. 17) або (3. 27), (3. 28) на σ та σ^0. Така впевненість могла б бути, наприклад, інспірована перевіркою асимптотичних співвідношень для бінарних реакцій (V) і (VI) при $s \to \infty$ і фіксованих, але дуже великих t.

Зауважимо, зрештою, що застосування узагальненого принципу максимуму Фрагмена—Ліндельофа—Неванлінни вимагає поліноміальної обмеженості амплітуди при фізичних (дійсних) t, тобто вимагається поліноміальна обмеженість при прямуванні всіх трьох мандельстамівських змінних у нескінченність у фізичній області. Вкажемо, що тепер фактично строго може бути встановлена (див. обговорення цього питання в [1]) поліноміальна обмеженість бінарної амплітуди при фізичному $s \to \infty$ та фіксованому t. Звідси внаслідок оптичної теореми, як зауважив у приватній бесіді В. І. Фущич, випливає поліноміальна обмеженість амплітуди довільної небінарної реакції при фізичному $s \to \infty$ та фіксованому фізичному t.

Щодо припущення про поліноміальну обмеженість амплітуди при фізичних s, t і u одночасно, то нещодавно воно було також фізично повністю обгрунтоване в роботі [10]. Було показано, що якщо амплітуда $T(s, t)$ при t, що належить малому еліпсу Лемана, задовольняє обмеження $T(s, t) < B \exp(s^N)$, то вона поліноміально обмежена не лише при фізичних $s \to \infty$ і фіксованих фізичних t, але й при фізичних s, t і $u \to \infty$ одночасно в довільному режимі $s/t = -(1+\alpha)$. Цей результат значною мірою обгрунтовує застосовність узагальненого принципу максимуму Фрагмена—Ліндельофа—Неванлінни до випадку, який цікавив нас у даній статті.

Звичайно, використовуючи ту ж саму методику, легко одержати аналогічні асимптотичні (при фізичних s, t і $u \to \infty$) рівності диференціальних перерізів для довільних, бінарних і небінарних, перехресних і C-спряжених реакцій. Зокрема, поклавши в усіх виразах $\mu = 0$ та $\pi(q) \to A_\mu(q)$, ми негайно одержимо відповідну асимптотичну рівність диференціальних перерізів для перехресних реакцій фотонародження піонів на нуклонах.

Вкажемо на закінчення, що одержані нами в цій статті результати не можна розглядати як будь-яке доведення асимпотичних рівностей (3. 19) або (3. 31), оскільки ми не маємо в своєму розпорядженні міркувань, які б забезпечували виконання обмежень (3. 15), (3. 17) або (3. 27), (3. 28) на σ^0 і σ. Ці результати треба розуміти як твердження, що якщо правильне обмеження (3. 15), (3. 17) або (3. 27), (3. 28), то правильні й асимптотичні рівності відповідно (3. 19) або (3. 31). Цінність такого твердження полягає в тому, що експериментальне підтвердження або спростування асимптотичних рівностей (3. 19) або (3. 31) в силу наших результатів може дати певну інформацію про асимптотичну поведінку σ і σ^0 при s, t, $u\to\infty$ одночасно в довільному режимі s/t. Варто спеціально підкреслити, що на цей час ми не маємо про це взагалі будь-якої інформації.

§ 4. Про експерименти по виявленню асимптотичної поведінки «ефективної просторово-часової області взаємодії частинок» в розсіянні та розпаді

Вище були запропоновані експерименти по вивченню реакцій розсіяння, які можуть дати певну інформацію про поведінку «ефективних просторових σ та часових σ^0 областей взаємодії частинок» при асимптотично великих енергіях і переданих імпульсах. Тепер буде запропонований принципово інший спосіб одержання експериметальної інформації про асимптотичну поведінку σ та σ^0 — спосіб, який грунтується на вивченні співвідношення між розсіянням та відповідним розпадом.

Розглянемо як приклад дві реакції — розсіяння та розпад

$$\Xi^-(p)+\gamma(\kappa)\to\Lambda(q_1)+\pi^-(q_2); \qquad (\mathrm{IX})$$

$$\Xi^-(p)\to\gamma(\kappa)+\Lambda(q'_1)+\pi^-(q'_2), \qquad (\mathrm{X})$$

де в дужках вказані 4-імпульси Ξ-гіперона з масою M, фотона (з поляризацією ν), Λ-гіперона з масою m та піона з масою μ. В аксіоматиці Боголюбова—Медведева—Поліванова амплітуди цих реакцій зображуються у вигляді

$$T^{IX}(\omega) = 1/(2\pi)^3 \int d^4x d^4y d z e^{i(-px+q_1y+q_2z)} \times$$
$$\times G(x, y, z; p, q_1), \qquad (4.1)$$

$$T^{X}(\omega) = 1/(2\pi)^3 \int d^4x d^4y d^4z e^{i(-px+q_1'y+q_2'z)} \times$$
$$\times G(x, y, z; p, q_1'), \qquad (4.2)$$

де

$$G(x, y, z; p, q_1) \equiv \overline{U}_{s_1}(q_1) < 0 \,|\, \frac{\delta^3 j\upsilon(0)}{\delta\Xi(x)\delta\overline{\Psi}(y)\delta\varphi(z)} \,|\, 0 > U_s(p). \qquad (4.3)$$

Будемо працювати в тій же спеціальній кінематиці з «параметром розподілу» α: $|\mathbf{q}_2| = \alpha|\mathbf{q}_1|$, $|\mathbf{q}_2'| = \alpha|\mathbf{q}_1'|$, тоді при $\omega \equiv p_0 \to \infty$

$$q_{10} \sim (\omega+\varepsilon)(1+\alpha)^{-1} + O(\omega^{-1}),$$
$$q_{10}' \sim (\omega-\varepsilon)(1+\alpha)^{-1} + O(\omega^{-1}), \qquad (4.4)$$

$$\cos\vartheta_1 \sim \frac{2\omega^2 - 4\omega\varepsilon\alpha - (M^2-\varepsilon^2)(1+\alpha)^{-1}F(\varepsilon,\alpha) + O(\omega^{-1})}{2\omega^2 - (M^2+4\varepsilon^2) + (1-\alpha)^{-2}F(\varepsilon,\alpha) + O(\omega^{-1})},$$

$$\cos\vartheta_1' \sim \frac{2\omega^2 + 4\omega\varepsilon\alpha - (M^2-\varepsilon^2)(1+\alpha) + (1+\alpha)^{-1}F(\varepsilon,\alpha) + O(\omega^{-1})}{2\omega^2 + 4\varepsilon\omega - M^2 + (1-\alpha)^{-2}F(\varepsilon,\alpha) + O(\omega^{-1})},$$

де $\varepsilon \equiv k_0$ та

$$F(\varepsilon, \alpha) \equiv \varepsilon^2(1+\alpha^2) - (1-\alpha^2)(1-\alpha)(m^2+\mu^2/\alpha). \qquad (4.5)$$

Нехай $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, де

$$\alpha_{1,2} = {}^1/_2\, m^{-2}\left[(M^2-m^2-\mu^2) \mp \sqrt{(M^2-m^2-\mu^2)^2 - 4m^2(\mu^2+\varepsilon^2)}\right], \qquad (4.6)$$

і нехай ε достатньо мале, так що

$$M^2 > (m^2+\mu^2) + 2m\sqrt{\mu^2+\varepsilon^2} \qquad (4.7)$$

(якщо $\varepsilon \leqslant 1$ *Мев*, то $\alpha_1 \simeq 0{,}06$ та $\alpha_2 \simeq 0{,}3$). Тоді енергію ω можна прямувати в нескінченність без виходу з фізичної області не тільки розсіяння, а й розпаду.

Припустимо далі, що при $\omega \to \infty$

$$\sigma_\Lambda^0,\ \sigma_\Lambda^{||},\ \sigma_\pi^0,\ \sigma_\pi^{||} \to 0,$$
$$\sigma_\Lambda^\perp - \sigma_\pi^\perp = o(\omega^{-1/2}). \qquad (4.8)$$

Це забезпечує вихід амплітуд $T^{IX,X}(\omega)$ при $\omega \to \infty$ на режим

$$T^{IX,X}(\omega) = 1/(2\pi)^3 \int d^4x d^4y d^4z\, G(x, y, z; p, q_1) \times \qquad (4.9)$$

$$\times \exp \{ i [\omega (x_0 - x_3) + \omega (1+\alpha)^{-1} (y_0 - y_3) + \alpha\omega (1+\alpha)^{-1} (z_0 - z_3)] \}$$

і, отже, асимптотичну рівність модулей амплітуд

$$\lim (| T^{\mathrm{IX}} (\omega) | / | T^{\mathrm{X}} (\omega) |) = 1 \text{ при } \omega \to \infty \qquad (4.\ 10)$$

та асимптотичну рівність поляризацій кінцевих Λ-гіперонів

$$\lim \vec{\xi}_{\Lambda}^{\,\mathrm{IX}} (\omega) = \lim \vec{\xi}_{\Lambda}^{\,\mathrm{X}} (\omega) \text{ при } \omega \to \infty. \qquad (4.\ 11)$$

Для розсіяння (IX) при $\omega \to \infty$

$$s = (\kappa + p)^2 \sim 4\varepsilon\omega, \quad t = (\kappa - q_2)^2 \sim 4\alpha\varepsilon (1+\alpha)^{-1} \omega, \qquad (4.\ 12)$$
$$u = (\kappa - q_1)^2 \sim 4\varepsilon (1+\alpha)^{-1} \omega,$$

в той час як для розпаду (X)

$$s' = (\kappa - p)^2 \sim M^2, \quad t' = (\kappa + q'_2)^2 \sim \mu^2, \qquad (4.\ 13)$$
$$u' = (\kappa + q'_1)^2 \sim m^2.$$

Таким чином, рівності (4. 10) та (4. 11) одержані в асимптотичній області, коли всі інваріантні манделстамівські змінні для розсіяння прямують у нескінченність, а для розпаду — до певних констант. Аналогічно можна було б розглянути й інші реакції розсіяння — розпаду при обов'язковій умові, що розпад повинен одержуватись з розсіяння перекиданням частинки з нульовою масою спокою з початкового стану в кінцевий.

Якщо експеримент зафіксує справедливість асимптотичних рівностей (4. 10) та (4. 11), то це буде свідчити на користь виконання обмежень (4. 8) на σ та σ^0. Експериментальне ж спростування цих рівностей з неминучістю значило б невиконання принаймні одного з обмежень (4. 8).

§ 5. Модифікація узагальненого принципу максимуму Фрагмена—Ліндельофа—Неванлінни та його застосування до фізики високих енергій

Суть проблеми. Отже, в рамках аксіоматичного підходу в теорії елементарних частинок вдається одержати цілий ряд передбачень щодо поведінки амплітуд різних реакцій як при $s \to \infty$ і фіксованому t, так і при s, t і $u \to \infty$ одночасно.

Математичну основу доведення всіх цих передбачень становив узагальнений принцип максимуму Фрагмена—Ліндельофа [11, 12], застосований або до всієї s-площини з розрізами вздовж дійсної осі, або лише до верхньої s-півплощини, або, зрештою, до верхньої s-півплощини з довільно вирізаною конечною частиною. При цьому, однак, припускалось, що амплітуда $T(s)$ (або n-а асимптотична амплітуда [6], яка в окремому випадку $n=0$ збігається з асимптотичною амплітудою $T_\infty(s)$ Меймана [1]) голоморфна не лише у відповідних областях, але й в усіх конечних точках її границі. Саме в цьому випадку були доведені теореми Фрагмена—Ліндельофа [11, 12], що застосовуються при доведенні вищевказаних результатів.

Разом з тим, на основі фізично обміркованих постулатів квантової теорії поля, і зокрема принципу локальності Меймана [2] або формулювання Ломсадзе—Кривського [3, 4] принципу мікропричинності Боголюбова, може бути встановлена аналітичність $T(s)$ (або $T_n(s)$) лише у відповідних областях, але не на їх границях. Нагадаємо, що амплітуду для фізичних s слід розуміти як відповідне граничне значення аналітичної функції при $\operatorname{Im} s \to 0$. Це граничне значення може взагалі не існувати як звичайна функція, а бути лише деякою узагальненою функцією, якщо не робити додаткового дуже обмежувального припущення (див. обговорення цього питання в [4]) про належність експонент e^{ikx} з дійсними k до простору основних функцій. Тому виникає дуже важлива проблема повного зняття (або принаймні послаблення) цих обмежень на поведінку амплітуди на дійсній осі, при яких були одержані всі вищевказані результати.

Нижче ми, по-перше, сформулюємо ряд теорем, які майже тривіально модифікують узагальнений принцип максимуму в формулюваннях Фрагмена—Ліндельофа [13] для аналітичних функцій $f(z)$ і Неванлінни [14] для гармонічних функцій $u(z)$. За допомогою цих теорем вимога аналітичності амплітуди вздовж дійсної осі може бути істотно послаблена. По-друге, ми чітко сформулюємо фізичну вимогу, згідно з якою повинна існувати можливість конструювання з амплітуди всіх безпосередньо спостережуваних на експерименті величин. В результаті ми покажемо, що всі вказані вище передбачення аксіоматичного підходу можуть бути одержані без будь-яких додаткових обмежень на поведінку амплітуди вздовж дійсної осі.

Модифікація узагальненого принципу максимуму Фрагмена—Ліндельофа—Неванлінни. Підкреслимо, що ми не будемо прагнути максимальної загальності теорем у тих пунктах, що не являють інтересу для фізичних застосувань. Перш за все нам буде потрібний такий

Модифікований принцип максимуму модуля. Нехай $f(z)$ голоморфна всередині області G, яка обмежена простою жордановою кривою Γ, і для довільної граничної точки ξ, за винятком, можливо, множини $\alpha \subset \Gamma$ точок ξ_α гармонічної (абсолютної або відносної) міри нуль, вірна нерівність

$$|f(z)| < M + \varepsilon \tag{5. 1}$$

для довільного $\varepsilon > 0$ та для довільної точки $z \in G$, достатньо близької до ξ. Нехай, далі, $f(z)$ обмежена в G поблизу кожної точки ξ_α, за винятком, можливо, точок ξ_E виняткової множини $E \subset \alpha$.

Виняткову множину E граничних точок ξ_E ми визначимо як множину, що задовольняє вимогу: існує функція $\omega(z)$, аналітична в G, яка має однозначний модуль, не має в G нулів, обмежена вимогою $|\omega(z)| \leqslant 1$ для всіх $z \in G$, крім, може бути, околів точок ξ_α, в яких вона повинна бути просто обмеженою, має ту властивість, що які б не були $\sigma > 0$ і $\varepsilon > 0$, нерівність

$$|\omega^\sigma(z)\, f(z)| < M + \varepsilon \tag{5. 2}$$

виконується в усіх внутрішніх точках G, достатньо близьких до довільної точки ξ_E.

Тоді $|f(z)| \leqslant M$ для довільного $z \in G$.

Доведення цієї теореми може бути виконане комбінуванням міркувань, що наводяться при доведенні узагальненого принципу максимуму у формулюванні Неванлінни [4] і узагальненого принципу максимуму у формулюванні Фрагмена і Ліндельофа [13] (див. також [15]). Зауважимо, що теорема залишається в силі, якщо нерівність (5. 1) виконується лише на сімействі кривих, які лежать в G, з кінцями на Γ, і які стягуються до ξ. Зауважимо також (порівняй [11], зауваження на стор. 76]), що якщо існує зчисленна множина виняткових множин E_ν і для кожної з них своя функція $\omega_\nu(z)$, то функція $\omega(z)$, що відповідає сумі множин E_ν, може бути визначена як $\omega(z)=\prod_\nu \omega_\nu(z)$.

В окремому випадку, коли $f(z)$ неперервна для всіх $\xi \in \alpha$, нерівність (5. 1) заміняється умовою

$$\overline{\lim}\,|f(\xi)|=M, \quad \xi \bar{\in} \alpha. \qquad (5.\ 3)$$

Позначимо, далі, через T однозв'язну область, що йде в нескінченність і обмежена двома напівпрямими Γ' і Γ'', які утворюють кут π/α з вершиною в початку. Точки, що належать Γ', позначатимемо через ξ', точки, що належать Γ'',—ζ''. Нехай ξ'_α і ξ''_α — точки деяких нуль-множин α' і α''. Розглянемо функцію $f(z)$, голоморфну всередині T, непереревну для всіх $\xi' \bar{\in} \alpha'$ і всіх $\xi'' \bar{\in} \alpha''$ і обмежену в T поблизу кожної з точок ξ'_α і ξ''_α, за винятком, можливо, точок ξ'_E та ξ''_E виняткових множин. Припустимо, що поблизу $z=\infty$ функція рівномірно в T обмежена довільною експонентою порядку α

$$|f(z)|=o\left(e^{\varepsilon|z|^\alpha}\right). \qquad (5.\ 4)$$

Тоді вірна така

Модифікована теорема Ліндельофа. Якщо $f(\xi')\to\alpha$ при $\zeta'\to\infty$ вздовж довільної послідовності точок Γ' (обминаючи точки нуль-множин α') та $f(\xi)\to\alpha$ при аналогічному прямуванні $\xi''\to\infty$, то $f(z)\to a$ рівномірно в T.

Доведення цієї теореми може бути виконане тим же способом, що і доведення теореми Ліндельофа (див. [11], теорема 8), але з використанням вищенаведеного модифікованого принципу максимуму модуля Фрагмена—Ліндельофа—Неванлінни. На основі цього за тих же умов на (z) може бути доведений

Модифікований узагальнений принцип максимуму Фрагмена—Ліндельофа—Неванлінни. Якщо $f(\xi'')\to\alpha$ при $\xi'\to\infty$ вздовж довільної послідовності точок Γ' (обминаючи точки нуль-множин α') і $f(\xi'')\to b$ при аналогічному прямуванні $\xi''\to\infty$, то $a=b$ і $f(z)\to a$ рівномірно в T.

Доведення цієї основної теореми може бути зроблене так само, як і доведення узагальненого принципу максимуму Фрагмена—Ліндельофа (див. [12], розд. 5. 64), але з використанням вищенаведеного модифікованого принципу максимуму модуля Фрагмена—Ліндельофа—Неванлінни.

Застосування до фізики високих енергій. Застосування сформульованих вище теорем до амплітуди $T(s)$ (або $T_n(s)$) здійснюється методами, розробленими в [2, 1]. Тоді з поліноміальної обмеженості амплітуди поблизу точок, які лежать на розрізах вздовж дійсної осі, і обмеженості її довільною лінійною експонентою в комплексній нескінченності буде випливати її поліноміальна обмеженість в комплексній нескінченності і, отже, можливість написання дисперсійних співвідношень.

При цьому апріорі не вимагається будь-якого існування граничних значень $T(s)$ на розрізах. Але оскільки амплітуда $T(s)$ внаслідок вищесказаного є поліноміально обмеженою в усій комплексній площині (крім полюсів у кінцевій її частині), ми маємо можливість використати відому теорему Фату [15]. Це без великих зусиль приведе нас до висновку, що граничне значення $T(s)$ на розрізах буде існувати (як звичайна функція) для всіх s, крім точок нуль-множин, а це в свою чергу дає можливість застосувати модифікований узагальнений принцип максимуму модуля Фрагмена—Ліндельофа—Неванлінни до амплітуди $T(s)$ (або до n-х асимптотичних амплітуд $T_n(s)$) для доведення різних асимптотичних рівностей для амплітуд перехресних процесів при $s \to \infty$ і фіксованому t. Аналогічно можна використати вищенаведені теореми для одержання різних рівностей при s, t і $u \to \infty$ одночасно. Таким чином, лишається дати фізичне обгрунтування поліноміальній обмеженості $T(s)$ поблизу точок $\xi \in \bar{E}$, які лежать на розрізі вздовж дійсної осі.

Щоб це зробити, слід взяти до уваги ту фізичну обставину, що повинна існувати можливість конструювання «усередненої» амплітуди $T(s, \Delta s)$ для довільного будь-якого малого інтервалу Δs, який охоплює довільну фізичну точку s (тобто довільну точку s, що належить верхньому берегу правого розрізу). Більше того, за зрозумілими фізичними міркуваннями повинно існувати таке число $M > 0$, що

$$|T(s, \Delta s)| < M, \tag{5. 5}$$

яке б мале не було Δs.

Рецепт конструювання «усередненої» амплітуди $T(s, \Delta s)$ може бути сформульований у вигляді

$$T(s, \Delta s) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int ds'\, T(s' + i\varepsilon) f_\Omega(s'), \qquad (5.6)$$

де $f_\Omega(s)$— звичайна невід'ємна функція основного простору, зосереджена на відрізку $\Omega(s-{}^{\Delta s}/_2, s+{}^{\Delta s}/_2)$, що охоплює фізичну точку s. Вона задовольняє умову нормування

$$\int ds\, f_\Omega(s) = 1. \qquad (5.7)$$

Якщо ми хочемо, щоб «усереднена» амплітуда була нескінченно диференційовна, ми повинні накласти вимогу такої нескінченної диференційовності на функції $f_\Omega(s)$. Це означає, що $f_\Omega(s) \in D_s$.

Неважко переконатися в тому, що все вищесказане саме і забезпечує поліноміальну обмеженість амплітуди $T(s)$ в комплексній площині поблизу фізичних точок. А це, як ми вже говорили, забезпечує в свою чергу можливість застосування до амплітуди $T(s)$ (або ж до $T_n(s)$) наведених вище теорем для доведення дисперсійних співвідношень і теорем типу теореми Померанчука і одержання асимптотичних співвідношень типу вказаних в § 3 і 4.

Звичайно, «усереднена» амплітуда $T(s, \Delta s)$, що визначена формулою (5. 6), може виявитись, взагалі кажучи, лише формально, але не фактично усередненою по відрізку Ω. Нехай $T(s)$ має такий максимально загальний вигляд (порівняй формулу (3) в [3, 4]):

$$T(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int d\sigma_\nu(s') \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \delta^{(\nu)}(s-s'). \qquad (5.8)$$

Тоді у відповідності до ідей робіт [2—4] для усунення вищевказаної можливої «містифікації» на узагальнену функцію $T(s)$ потрібно ще накласти такі обмеження, щоб (порівняй основне формулювання принципу мікропричинності в [1, 4])

$$\int_\Omega ds\, T(s) e^{iks} \neq \int_\Gamma dU_T(s) e^{iks}, \qquad (5.9)$$

де припускається, що e^{iks} належить простору основних функцій і площа Γ не може бути неперервно стягнутою до відрізка Ω. В силу довільної малості відрізка

Ω це обмеження, очевидно, зводиться до вимоги локальності Меймана [2].

Варто спеціально підкреслити, що останнє твердження можна одержати й іншим шляхом. Дійсно, дві природні умови: 1) довільна малість Δs та 2) нескінченна диференційовність $T(s, \Delta s)$ по s неминуче приводять до вимоги, щоб $T(s)$ була визначена на основних функціях $f_\Omega(s)$, серед яких для довільної фізичної точки s повинні знаходитися функції, що мають особливість в цій точці. А ця вимога, в свою чергу, як неважко показати, необхідно веде до того, що $T(s)$ повинна задовольняти принцип локальності Меймана.

На закінчення зробимо два істотних зауваження. По-перше, при фізичних $t \neq 0$ фізична область реакції в строгому значенні слова не охоплює всього верхнього берега правого розрізу s-площини. З цієї причини вищевказаним способом може бути строго доведена можливість написання одновимірних дисперсійних співвідношень лише для розсіяння вперед. В загальному ж випадку можливість написання дисперсійних співвідношень вимагає виконання умови (5. 5) не лише для фізичних s в строгому розумінні слова, але й для всіх s на верхньому березі правого розрізу. Щодо доведення різних асимптотичних співвідношень, то ця тонкість тут зовсім неістотна, оскільки для одержання цих результатів достатньо застосувати наведені вище теореми до верхньої s-півплощини з вирізаною конечною частиною.

Друге зауваження стосується формулювання Ломсадзе—Кривського [3, 4] принципу мікропричинності Боголюбова і вимогою локалізовності поля. Ми хочемо вказати, що вимоги цього формулювання, на відміну від вимог принципу локальності Меймана [2], аж ніяк не виключають апріорі випадок нелокалізовних полів. Нехай узагальнена функція задана формулою (8) роботи [3] або (12) роботи [4], тобто виглядає як «зосереджена» в точці τ_0. І нехай коефіцієнти $C_\nu(\tau_0)$ такі, що дозволяють інтегральне представлення

$$C_\nu(\tau_0) = \int_{\tau'}^{\tau''} d\sigma(\xi)\, \xi^\nu, \qquad (5.\ 10)$$

в якому міра $d\sigma(\xi)$ «розмазана» по всьому відрізку $[\tau', \tau'']$. Така узагальнена функція буде напевно визначена на достатньо широкій множині основних функцій, носії яких зосереджені на скільки завгодно малих відрізках. Зокрема, вона напевно буде визначена на множині функцій

$$f_k(\tau) = \begin{cases} e^{ik\tau}, & \text{якщо } \tau_0 - \varepsilon \leqslant \tau \leqslant \tau_0 + \varepsilon, \\ 0 & \text{поза } [\tau_0 - \varepsilon,\ \tau_0 + \varepsilon]. \end{cases} \qquad (5.\ 11)$$

У відповідності із звичайним розумінням таку узагальнену функцію слід було б назвати локалізовною (в точці τ_0).

Разом з тим

$$(T(\tau), e^{ik\tau}) = e^{ik\tau_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{C_\nu(\tau_0)}{\nu!} (ik)^\nu = \int_{\tau' + \tau_0}^{\tau'' + \tau_0} d\,\sigma(\xi - \tau_0)^{ik\xi}. \qquad (5.\ 12)$$

Це означає, що фактично узагальнена функція $T(\tau)$ локалізовна в нефіктивному розумінні цього слова лише на відрізку, саме на $[\tau' + \tau_0,\ \tau'' + \tau_0]$, але не в точці. Незважаючи на це, якщо цей відрізок лежить на правій τ-півосі $[0, \infty]$, $T(\tau)$ буде мікропричинною [3, 4]. Всі ці міркування без великих зусиль можна перенести, по-перше, на узагальнену функцію $T(\tau)$ більш загального вигляду, яка визначається формулою (3) робіт [3, 4], і, по-друге, на чотиривимірний випадок. Саме в такому розумінні нелокалізовності (незалежно від того, порушується при цьому мікропричинність чи ні) ми вбачаємо серйозну надію на побудову майбутньої послідовної теорії нелокалізовних полів.

Таким чином, навіть нелокалізовна у вищевказаному розумінні слова узагальнена функція $T(x)$ при умові, що її «розмазаність» не виходить за верхню полу світлового конуса, буде задовольняти принцип мікропричинності в формулюванні [3, 4]. Звідси, в свою чергу, при досить загальних припущеннях випливає, що амплітуда задовольняє всі умови модифікованого узагальненого принципу максимуму Фрагмена—Ліндельофа—Неванлінни.

Це значить, що і в цьому випадку залишаються справедливими дисперсійні співвідношення, теореми типу теореми Померанчука (включаючи і посилення цих теорем, що одержано в [6]) і вказані в § 3 і 4 асимптотичні співвідношення між амплітудами різного типу реакцій. Але це означає також, що амплітуда $T(\kappa)$ (а разом з нею і $T(x)$) повертається знову в простір узагальнених функцій помірного зростання і, отже, неодмінно локалізовна.

Виникає тому питання: чи можна зберегти нелокалізовність без порушення мікропричинності? Навіть якщо не виходити за клас узагальнених функцій $T(x)$, визначених за формулою (3) в [3, 4], можна вказати дві такі можливості.

По-перше, можна розширити розуміння мікропричинності, що дається в [3, 4], якщо допустити можливість виходу «сигналу» $e^{ik\tau}$ в нескінченність вздовж правої τ-півосі. Розширене формулювання буде мати вигляд

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, T(\tau)e^{ik\tau} = \int_{0}^{\infty} d\tau\, T(\tau)e^{ik\tau} \neq \int_{\Gamma''} dU_T(\tau)e^{ik\tau}, \tag{5. 13}$$

де рівність означає зосередженість всіх $d\sigma_\nu(\tau)$ лише на правій осі $[0, \infty]$ і площа Γ'' не може бути неперервно стягнутою до цієї півосі. Це розширене розуміння мікропричинності здається дуже природним. Разом з тим залишається поки неясним, чи гарантує воно звичайні аналітичні властивості амплітуди і обмеженість її довільною лінійною експонентою в комплексній нескінченності і, отже, чи гарантує воно повернення амплітуди в простір узагальнених функцій помірного зростання в припущенні про поліноміальну обмеженість її на дійсній осі.

По-друге, хоч поліноміальна обмеженість $T(\kappa)$ на дійсній осі і випливає з досить ліберальних умов [1], на цей час не можна повністю виключити можливість неполіноміального зростання її на дійсній осі. В цьому випадку $T(\kappa)$ може і не зводитись до узагальнених функцій помірного зростання навіть при виконанні попереднього формулювання [3, 4] принципу мікропричинності. Тут також зберігається можливість нелокалізовності при додержанні мікропричинності.

Обидві ці можливості, звичайно, порушать дисперсійні співвідношення в звичайній формі. Питання ж про те, як при цьому будуть модифіковані теореми типу теореми Померанчука, досить делікатне, і ми не будемо тут його торкатися. Щодо тих асимптотичних рівностей, на можливість яких було вказано в § 3 і 4, то їх підтвердження могло б дати безпосередню інформацію про локалізовність відповідних узагальнених функцій в нефіктивному розумінні цього слова.

Уявимо собі, що експеримент зафіксував справедливість асимптотичних рівностей (3. 19) у кінетиці з $\alpha \neq 1$. Цей факт свідчив би про виконання обмеження (3. 15) на σ. З цього в свою чергу випливало б, що узагальнена функція $G(x, y, z)$ є локалізовною, причому саме в нефіктивному розумінні цього слова, по змінних x_0, y_0, z_0, $z_{1,2} - y_{1,2}$, y_3, z_3. Зрозуміло, цим способом може бути досягнена впевненість в локалізовності, з якою буде поставлений відповідний експеримент. Аналогічна інформація може бути добута і з експериментального підтвердження інших можливих асимптотичних рівностей, які наведені в § 3 і 4.

Автори глибоко вдячні проф. А. А. Гольдбергу за цінні зауваження, що стосуються узагальненого принципу максимуму Фрагмена—Ліндельофа—Неванлінни, проф. В. Я. Файнбергу за плідне обговорення всіх розглянутих тут проблем і Й. М. Шубі та О. І. Лендьєлу за важливі зауваження. Автори глибоко вдячні за цінні дискусії проф. Н. Н. Мейману, який звернув їх увагу на можливість іншої модифікації узагальненого принципу максимуму, що викладена ним на одній з математичних конференцій у 1963 р. [16].

ЛІТЕРАТУРА

1. А. А. Логунов, Нгуен Ван Хьєу, И. Т. Тодоров, УФН, **88**, вып. 1, 1966; А. А. Логунов, Рапортерский доклад на XII Международной конференции по физике высоких энергий в Дубне, 1964 (Труды конф., 1, стр. 238); Н. Н. Мейман, Выступление, там же, стр. 247.

2. Н. Н. Мейман, ЖЭТФ, **43**, 2277, 1962; **46**, 1039, 1502, 1964; **47**, 1966, 1964.

3. Ю. Ломсадзе, І. Кривський, Укр. фізичн. ж., **11**, № 7, 721, 1966; ДАН СССР, **173**, № 2, 312, 1967.

4. Ю. М. Ломсадзе, в сб. «Физика высоких энергий и теория элементарных частиц», стр. 791. К., 1966.

5. L. Van Hove, Phys. Lett, **5**, 262, 1963.

6. Ю. Ломсадзе, С. Токарь, ЖЭТФ, **52**, вып. 6, 1529, 1967.

7. В. Н. Грибов, Б. Л. Иоффе, И. Я. Померанчук, Ядерная физика, **2**, вып. 4, 1965.

8. Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев, М. К. Поливанов, Вопросы теории дисперсионных соотношений, М., 1958.

9. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, § 7, 12, М., 1967.
10. И. Шуба, Ю. Ломсадзе, А. Лендьел, цей збірник, стор. 52.
11. Н. Н. Мейман, Труды Математического института им. В. А. Стеклова, XXIV, гл. II, 75—79, М.—Л., 1949.
12. Е. Титчмарш, Теория функций, гл. V, разд. 5. 6, М.—Л., 1951.
13. E. Phragmen et E. Lindelöf, Acta Math., **31**, 381, 1908.
14. Р. Неванлинна, Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941.
15. К. Носиро, Предельные множества, гл. II и гл. I, § 2, ИЛ, М., 1963.
16. Н. Н. Мейман, Усп. мат. наук, **18**, вып. 4, 208, 1963.