МАТЕРІАЛИ XXI НАУКОВОЇ КОНФ. УЖГОРОДСЬК. УН-ТУ
серія фізична квітень 1967

Ю. М. Ломсадзе, Є. Е. Контрош, С. С. Токар

ДАЛЬШІ ОБМЕЖЕННЯ НА ВИСОКОЕНЕРГЕТИЧНУ ПОВЕДІНКУ АМПЛІТУДИ РОЗСІЯННЯ

1. Вступ

Одне з найбільш важливих досягнень аксіоматичного підходу за останні роки полягає в одержанні [1—10] певних обмежень на високоенергетичну поведінку амплітуди розсіянння, які випливають при дуже ліберальних припущеннях лише з найбільш загальних постулатів квантової теорії поля та не апелюють до будь-яких модельних уявлень або ж не зовсім обгрунтованих наближень. Вкажемо на ті результати, які нам будуть потрібні надалі.

Кілька років тому Фруассаром [1] при досить загальному, але до цього часу строго не доведеному припущенні про справедливість представлення Манделстама було одержане обмеження на амплітуду[1]

$$|f(s)| \leqslant O(s \ln^2 s). \tag{1}$$

Нещодавно Мартену [7] вдалося досить строго обгрунтувати це обмеження. Хурі і Кіношиті при деяких додаткових припущеннях вдалося посилити цей результат, застосовуючи, крім аналітичності та унітарності, крос-симетрію та дійсно-подібність. Зокрема, вони показали, що якщо амплітуда пружного розсіяння дійсно нейтральної скалярної частинки на іншій же скалярній частинці задовольняє обмеження (1) і якщо, крім того, починаючи з деякого s_0 при $s \to \infty$ по дійсній осі

---

[1] В цій статті ми не робимо різниці між s — енергією в *Ц*-системі і E — енергією в *Л*-системі, оскільки асимптотично при великих s, якими тільки ми й будемо цікавитись тут, вони збігаються.

$$|H(s)| \leqslant \operatorname{ctg}(\pi\alpha), \quad 0 < \alpha \leqslant {}^1/_2, \tag{2}$$

$$H(s) \equiv \operatorname{Im} f(s) / \operatorname{Re} f(s),$$

(випадок $\alpha \to {}^1/_2$ відповідає превалюванню $\operatorname{Re} f(s)$ над $\operatorname{Im} f(s)$), тоді фактично при фізичних $s \to \infty$

$$|f(s)| < O(s^{1-\alpha/2} \ln^2 s). \tag{3}$$

При цьому був використаний «локальний» спосіб запровадження допоміжної функції і була припущена у відповідності з вимогами теореми Меймана 1 відсутність, як будемо говорити, сильних осциляцій амплітуди при фізичних $s \to \infty$. Точний зміст цього терміна викладений в [4] і додатково буде пояснений в розд. 2.

Зовсім недавно Вернов [10], використовуючи «інтегральний» спосіб запровадження допоміжних функцій, за допомогою тієї ж теореми Меймана 1 ще більше посилив цей результат Хурі і Кіношити. Ним було показано, що при тих же припущеннях (1) і (2) (додаткове припущення $H(s) < 0$, що міститься в [10], фактично зайве), але без будь-якого обмеження на можливі її осциляції на деякій нескінченній послідовності фізичних точок s_i, які прямують у нескінченність,

$$|f(s_i)| < O(s_i^{1-2\alpha+\varepsilon}). \tag{4}$$

Якщо ж при достатньо великих фізичних s замість (2) амплітуда задовольняє вимогу

$$\operatorname{ctg}(\pi\beta) \leqslant H(s) \leqslant \operatorname{ctg}(\pi\alpha), \quad 0 < \beta \leqslant {}^1/_2, \tag{5}$$

то результат (4) ще більш посилюється

$$|f(s_i)| < O(s_i^{-1+2\beta+\varepsilon}). \tag{6}$$

Звичайно, якщо користуватися «локальним» способом [4] запровадження допоміжних функцій, але застосувати ітераційну процедуру Вернова [9], тоді за допомогою теореми Меймана 1 можна довести справедливість (4) або, відповідно, (6) для всіх достатньо великих фізичних s. Однак при цьому необхідно виключити можливість сильних осциляцій амплітуди $f(s)$ при фізичних $s \to \infty$. Таким чином, «інтегральний» спосіб запровадження допоміжних функцій має ту перевагу, що не вимагає припущень про відсутність будь-яких осциляцій амплітуди, проте результати, які одержуються цим способом, є в значній мірі менш обмежуючі і, основне, їх важко перевірити на експерименті. «Локальний» же спосіб запровадження допоміжних функцій має той недолік, що вимагає певних припущень відносно можливих осциляцій амплітуди при фізичних $s \to \infty$, проте результати, які одержуються цим способом, накладають значно більш сильні обмеження на амплітуду і відносно легко можуть бути перевірені на експерименті.

Далі Хурі і Кіношита [4] у тому ж припущенні про відсутність сильних осциляцій амплітуди показали, що якщо α у (2) зникає, але при достатньо великих фізичних s

$$|\mathrm{H}(s)| \leqslant O(\ln^{1-\delta} s), \tag{7}$$

де $\delta > 0$ може бути як завгодно мале, то

$$|f(s)| \leqslant O(s \ln^{-M} s), \tag{8}$$

де $M > 0$ як завгодно велике.

Оскільки існують серйозні підстави вважати [11, 12], що загальні принципи квантової теорії поля (і навіть представлення Манделстама) не накладають будь-яких обмежень на можливі осциляції амплітуди, істотно з'ясувати, чи не можна одержати ті ж верхні границі (4), (6), (8) для всіх достатньо великих фізичних s, але при значно більш ліберальних припущеннях відносно можливих осциляцій амплітуди. Нижче буде показано, що ця мета досяжна, причому при доведенні (4) для всіх достатньо великих фізичних s нам не знадобиться умова $\mathrm{H}(s) < 0$. Крім того, ми одержимо ряд інших обмежень на високоенергетичну поведінку амплітуди розсіяння і підтвердимо проблему фізичного обгрунтування вихідних припущень.

У розд. 2 ми доведемо модифіковану теорему Меймана 1 та за її допомогою встановимо верхні границі (4) або (6) для всіх достатньо великих фізичних s в припущенні (2) або, відповідно, (5) при дуже ліберальній умові про відсутність, як будемо говорити, патологічно сильних осциляцій амплітуди. У розд. 3 ми наведемо теорему Меймана 3 (теореми Меймана 1 і 2 наведені у [4]) і за її допомогою встановимо додаткові обмеження, що становлять шість наслідків теореми III, на високоенергетичну поведінку $\mathrm{Re} f(s)$ і $\mathrm{Im} f(s)$ для всіх достатньо великих фізичних s при дуже слабкому припущенні відносно можливих осциляцій амплітуди. Звідси, зокрема, буде випливати верхня границя (8) у припущенні (7) при значно більш ліберальній вимозі на можливі осциляції амплітуди порівняно з вимогою відсутності сильних її осциляцій.

Нарешті, у розд. 4 ми вкажемо, яким чином вихідні припущення про загальні аналітичні властивості амплітуди $f(s)$, що достатні для одержання всіх вищенаведених результатів, можуть бути настільки послаблені, щоб їх можна було фізично обгрунтувати.

2. Обмеження на амплітуду

Щоб лібералізувати звичайне вихідне припущення [4] про відсутність сильних осциляцій амплітуди при фізичних $s \to \infty$, ми перш за все дещо модифікуємо теорему Меймана 1.

Модифікована теорема Меймана 1. Нехай

а) функція $g(s)$ голоморфна у верхній s-півплощині, можливо, з деякою вирізаною скінченною частиною, неперервна у цій області і на її границі (тобто на достатньо віддаленій частині дійсної осі), обмежена в цій області довільною лінійною експонентою[2] і $g(s) \to 0$ при $s \to \pm\infty$ вздовж дійсної осі,

б) функція $g(s)$ задовольняє крос-симетрію у формі

$$g^*(-s^*) = g(s), \tag{9}$$

в) починаючи з деякого достатньо великого s_0,

$$|\eta(s)| \equiv |\operatorname{Im} g(s)/\operatorname{Re} g(s)| > \operatorname{tg}(\pi\alpha), \quad 0 < \alpha \leqslant {}^1/_2, \tag{10}$$

г) образ верхнього півкола радіуса s, який здається функцією $g'(s) = \sqrt[2\alpha]{g(s)}$, перетинає дійсну вісь g'-площини у точці $y > 0$, і

д) існують настільки малі додатні числа $\varepsilon = \varepsilon(s_0)$ і $\varepsilon' = \varepsilon'(s_0)$, що для всіх фізичних $s > s_0$

$$\rho(u') \geqslant \varepsilon \sqrt{u'^2 + \varepsilon' |g'(s)|^2}, \quad u \leqslant u' \leqslant u_0, \tag{11}$$

[2] Ця умова обмеженості $g(s)$ довільною лінійною експонентою може бути замінена ще більше слабкою умовою (див. (7. 1) у [13]).

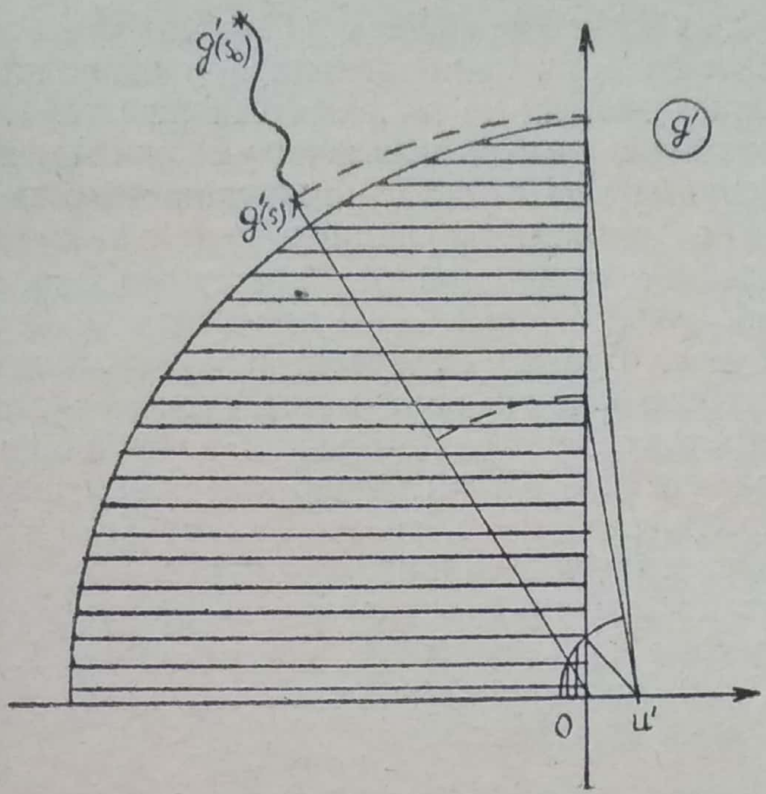

Рис. 1. Горизонтальними лініями заштрихована область, яка заборонена для кривої $g'(s)$ від точки s_0 до точки s для випадку $\varepsilon=\varepsilon'=1$ (розглянутого у [4]), вертикальними лініями — заборонена область у випадку $\varepsilon=\varepsilon'=1/4$.

де $\rho(u')$ — найкоротша віддаль від точки u' до образу відрізка $[s_0, s]$ дійсної осі, який задається функцією $g'(s)$ (див. рис. 1, де враховано, що $g'(s)$ задовольняє обмеження (10) з $\alpha=1/2$); нерівність (10), очевидно, завжди може бути виконана, якщо тільки функція $g(s)$ не осцилює, як будемо говорити, «патологічно» сильно.

Тоді для фізичних $s>s_0$

$$|g(s)|\leqslant O(s^{-\alpha\varepsilon}). \tag{12}$$

Ця теорема доводиться підстановкою нерівності (11) у нерівність Херша [15]

$$\int_{u}^{u_0}\frac{du'}{\rho(u')}\geqslant\frac{1}{2}\ln(s/s_0). \tag{13}$$

Відмітимо, що показник степеня s в (12) залежить лише від ε і не залежить від ε'.

Нерівність (12), звичайно, є значно менш обмежуюча, ніж нерівність, яка являє собою твердження теореми

Меймана 1. Однак нерівність (12) виконується при значно більш слабких припущеннях про осциляції $g(s)$ при фізичних $s \to \infty$, як це пояснюється на рис. 1.

Щодо значно менше обмежуючої умови (11), яка забезпечує нерівність (12), то її виконуваність буде означати, за визначенням, що функція $g(s)$ вільна від «патологічно сильних» осциляцій. Ми поширимо цю термінологію і на функції $f(s)$, які не прямують до нуля при фізичних $s \to \infty$. Будемо говорити, що $f(s)$ вільна від сильних осциляцій, якщо вона може бути представлена у вигляді добутку монотонної функції на функцію $g(s)$, яка задовольняє (11) з $\varepsilon'=1$. Якщо ж у цьому визначенні не вимагати, щоб $\varepsilon'=1$, то ми будемо говорити про відсутність патологічно сильних осциляцій $f(s)$.

Щоб додатково проілюструвати надзвичайну ліберальність умови (11), вкажемо, що ця умова і, отже, нерівність (12) напевно буде виконана, якщо при достатньо великих фізичних s

$$|g(se^{i\pi/2})/g(s)| \geqslant \varepsilon'', \tag{14}$$

де $\varepsilon''>0$ як завгодно мале. Надзвичайна ж ліберальність умови (14) очевидна (пор. обговорення близького питання у [14]). Вкажемо, наприклад, що функції $s^{-1}\sin s$, яка має нескінченне число нулів при фізичних s, властиві сильні осциляції, але вона вільна від патологічно сильних осциляцій.

Суть справи полягає в тому, що для доведення верхньої границі (4) або, відповідно, (6), як буде показано нижче, нам досить нерівності (12), і немає необхідності апелювати до більш сильного твердження теореми Меймана 1. Нагадаємо, що теорема Меймана 1 вимагає, щоб функція $g(s)$ задовольняла умову (11), у якій покладено $\varepsilon=\varepsilon'=1$. Неважко бачити, що ця теорема вірна при послабленій умові, яка одержується з (11) підстановкою $\varepsilon'=1$. Виконуваність цієї послабленої умови і означає, за визначенням, що функція $g(s)$ вільна від «сильних» осциляцій при фізичних $s \to \infty$.

Зараз ми вкажемо на ті загальні вимоги на амплітуду $f(s)$, які нам будуть потрібні далі.

1) Амплітуда $f(s)$ голоморфна у верхній півплощині (можливо, з деякою вирізаною скінченною частиною) і обмежена там довільною лінійною експонентою. Ця умова випливає як з принципу локальності Мей-

мана [13], так і з формулювання Ломсадзе—Кривського [16] принципу мікропричинності.

2) Амплітуда $f(s)$ неперервна в області голоморфності та на границі (тобто на достатньо віддаленій частині дійсної осі). Ця умова разом з умовою 1) забезпечує застосовність до різних допоміжних функцій, які будуватимуться нижче на основі амплітуди $f(s)$, узагальненого принципу максимуму Фрагмена—Ліндельофа—Неванлінни, який гарантує виконуваність для них нерівності Херша (13) і умов теореми Меймана 3.

3) Амплітуда $f(s)$ задовольняє крос-симетрію у виді

$$f^*(-s^*)=f(s), \tag{15}$$

де ліва частина розуміється як аналітичне продовження з верхнього берега правої півосі на верхній же берег лівої півосі.

У розд. 4 ми повернемось до цих загальних умов аналітичності, які накладаються на амплітуду, з тим щоб їх значно послабити.

Тоді на основі модифікованої теореми Меймана 1 може бути доведена така

Теорема I. Якщо амплітуда $f(s)$ не осцилює патологічно сильно і задовольняє загальні властивості 1)—3) і якщо вірні нерівності (1) і (2), то фактично для достатньо великих фізичних s

$$f(s)\leqslant O(s^{1-2\alpha+\delta}), \tag{16}$$

яким малим би не було $\delta>0$.

Доведення. Для нульової ітерації будуємо («локальним» способом) допоміжну функцію

$$g_0(s)=f(s)s^{-1}e^{i\pi/2}(\ln s-i\pi/2)^{-\gamma},\ \gamma>2, \tag{17}$$
$$0\leqslant \arg s \leqslant\pi.$$

Функція $g_0(s)$ задовольняє умову а) внаслідок загальних умов 1) і 2) і обмеження (1) для амплітуди $f(s)$. Вона задовольняє умову б) внаслідок (15). Вона задовольняє умову в) внаслідок обмеження (2). Виконання умови г) завжди можна добитись підбором знака $g_0(s)$. Крім того, оскільки при великих фізичних s

$$|g_0(s)|=|f(s)|s^{-1}\ln^{-\gamma}s, \tag{18}$$

а $s^{-1}\ln^{-\gamma}s$ монотонна при великих s, умова д) накладає на високоенергетичну поведінку амплітуди $f(s)$ дуже ліберальні обмеження, які зводяться до відсутності патологічно сильних її осциляцій.

Тому за модифікованою теоремою Меймана 1 при достатньо великих фізичних s

$$|g_0(s)| \leqslant O(s^{-\varepsilon\alpha}) \qquad (19)$$

і, отже,

$$|f(s)| \leqslant O(s^{1-\varepsilon\alpha}\ln^{2+\delta_0}s), \qquad (20)$$

де $\delta_0>0$ як завгодно мале.

Для $(n+1)$-го ітераційного кроку введемо допоміжну функцію

$$g_n(s)=f(s)s^{-1+\beta_{n-1}}e^{i\pi(1-\beta_{n-1})/2}(\ln s-i\pi/2)^{-\gamma}, \qquad (21)$$

де

$$\beta_n \equiv 2\alpha[1-(1-\varepsilon/2)^{n+1}]. \qquad (22)$$

Для цієї функції

$$|\eta(s)| \equiv |\operatorname{Im} g_n(s)/\operatorname{Re} g_n(s)| \geqslant \operatorname{tg}[\pi(\alpha-\Theta_n)], \qquad (23)$$

$$\Theta_n=\alpha[1-(1-\varepsilon/_2)^n].$$

При достатньо великих s

$$|g_n(s)|=|f(s)|\, s^{-1+\beta_{n-1}}\ln^{-\gamma}s, \qquad (24)$$

де $s^{-1+\beta_{n-1}}\ln^{-\gamma}s$ монотонно при великих s. Отже, за модифікованою теоремою Меймана 1 при достатньо великих фізичних s

$$|g_n(s)| \leqslant O(s^{-\varepsilon(\alpha-\Theta)}) \qquad (25)$$

і, значить, фактично при великих фізичних s

$$|f(s)| \leqslant O(s^{1-\beta n}\ln^{2+\delta_n}s). \qquad (26)$$

Оскільки n може бути вибране довільно великим, звідси зразу ж слідує потрібний результат (16).

Вкажемо, що нерівність (23), строго кажучи, виконується лише з точністю до членів порядку $O(\ln^{-1}s)$. Це означає, що у (23) повинна бути проведена заміна $\varepsilon\to\varepsilon+O(\ln^{-1}s)$. Неважко, однак, побачити, що врахування цих членів не змінить результату (26) і, отже, кінцевого результату (16).

Цілком аналогічно може бути доведена така

Теорема II. Якщо амплітуда $f(s)$ не осцилює патологічно сильно і задовольняє загальні властивості 1)—3) і якщо вірні нерівності (1) і (5), то фактично для досить великих фізичних s

$$|f(s)| < O(s^{-1+2\beta+\delta}). \tag{27}$$

Зробимо декілька зауважень відносно кінцевого результату (16) і (27). По-перше, цей результат не змінився б, якщо замість нерівності (13) ми використали б більш слабку нерівність Неванлінни (див. (А. 9) у [4]). По-друге, цей результат не залежить ні від ε, ні від ε'. По-третє, всі одержані вище результати вірні не тільки для $t=0$, але і для довільного фіксованого фізичного t, для якого припускається вірною верхня границя (1).

Нарешті, по-четверте, припущення про істотну нейтральність однієї з розсіюючих частинок не істотне, і замість крос-симетрії (15) можна було б скористатись крос-симетрією у вигляді (див., наприклад, [17])

$$f^{\mathrm{I}*}(-s^*) = f^{\mathrm{II}}(s), \tag{28}$$

де індекси I і II вказують на реакцію і, відповідно, крос-реакцію. В цьому випадку довелося б запровадити симетричну і антисиметричну амплітуди

$$\begin{aligned} f_+(s) &= 2^{-1/2}[f^{\mathrm{I}}(s) + f^{\mathrm{II}}(s)], \\ f_-(s) &= 2^{-1/2}\, i\, [f^{\mathrm{I}}(s) - f^{\mathrm{II}}(s)], \end{aligned} \tag{29}$$

кожна з яких вже буде задовольняти загальні властивості 1) — 3) і, зокрема, крос-співвідношення у вигляді (15). Верхня границя (16) або, відповідно, (27) буде вірна тоді для кожної з амплітуд $f^{\mathrm{I}}(s)$ і $f^{\mathrm{II}}(s)$, якщо жодна з амплітуд $f_+(s)$ і $f_-(s)$ не осцилює патологічно сильно і якщо виконуються нерівності

$$|\mathrm{H}_\pm(s)| \leqslant \operatorname{ctg}(\pi\alpha), \tag{30}$$

$$\mathrm{H}_\pm(s) \equiv \operatorname{Im} f_\pm / \operatorname{Re} f_\pm = \pm(\operatorname{Im} f^{\mathrm{I}} \pm \operatorname{Im} f^{\mathrm{II}})^{\pm 1}(\operatorname{Re} f^{\mathrm{I}} \operatorname{Re} f^{\mathrm{II}} \pm)^{\mp 1},$$

або, відповідно, нерівності

$$\operatorname{ctg}(\pi\beta) \leqslant \mathrm{H}_\pm(s) \leqslant \operatorname{ctg}(\pi\alpha). \tag{31}$$

3. Дальші обмеження на амплітуду

Щоб одержати дальші обмеження на високоенергетичну поведінку амплітуди розсіяння $f(s)$, нам буде потрібна така

Теорема Меймана 3. Якщо функція $G(s)$ задовольняє умови а) і б) модифікованої теореми Меймана 1, то при фізичних s

$$b(s)/a < (\pi^8/_4)\ln^{-1}(s/s_0), \qquad (32)$$

де $a = \sup|\operatorname{Re}G(s)|$ у верхньому півколі (див. рис. 2), яке обмежене колами достатньо великих радіусів s_0 і $s > s_0$, а $b(s) = \operatorname{Im}f|\operatorname{Im}G(s)|$ на відрізку $[s_0, s]$.

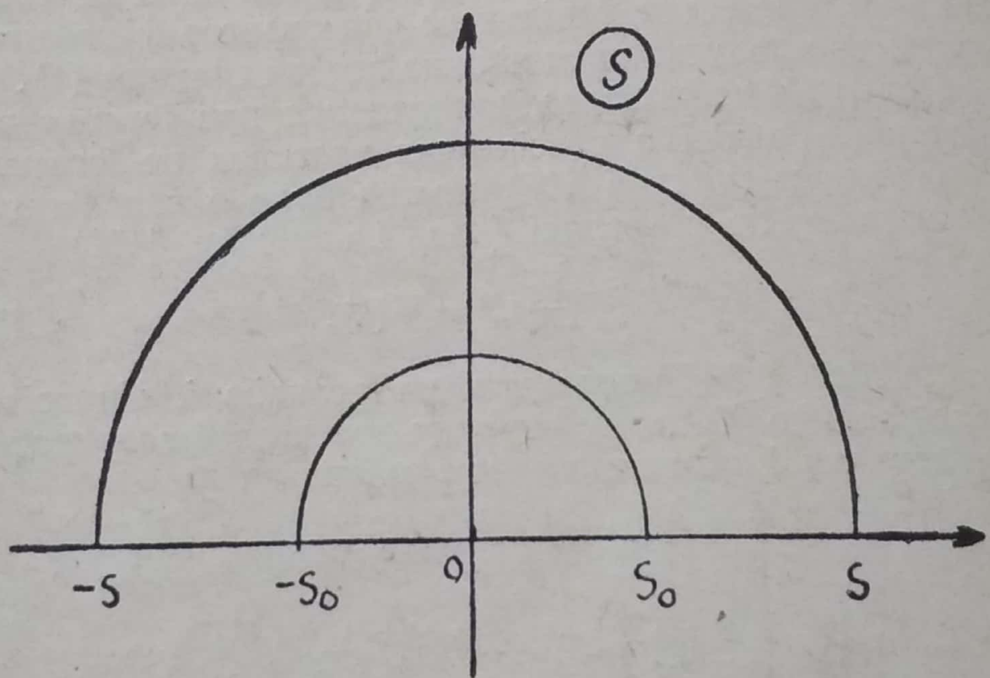

Рис. 2. Півколо в s-площині.

Наслідок. Як би повільно не прямувала до нуля функція $G(s)$, її $\operatorname{Im}G(s) \to 0$ на деякій послідовності точок, що йдуть в нескінченність, швидше, ніж $\ln^{-1}s$.

Ця теорема та її наслідок були використані Мейманом для нового доведення теореми Померанчука за умови, що амплітуда $g(s)$ зростає повільніше $s\ln s$.

Покажемо зараз, що теорема Меймана 3 дозволяє одержати при дуже ліберальних припущеннях дальші обмеження на високоенергетичну поведінку амплітуди розсіяння $f(s)$.

Припустимо (див. рис. 3), що як би сильно не осцилювала функція $|\mathrm{Im}\, G(s)|$, знайдеться така точка $s'(s)$, яка уходить у нескінченність при $s \to \infty$ не швидше, ніж деякий скінченний степінь s

$$s'(s) \leqslant O(s^a), \tag{33}$$

така, що для всіх фізичних $s'' \geqslant s'$ значення функції не перебільшує $b(s)$,

$$|\mathrm{Im}\, G(s'')| \leqslant b(s), \quad s'' \geqslant s'. \tag{34}$$

В тому окремому випадку, коли $|\mathrm{Im}\, G(s)|$ монотонно спадає при фізичних $s \to \infty$, можна вибирати $s' = s$. Будемо говорити для короткості, що і функція $f(s)$, яка не прямує до нуля при фізичних $s \to \infty$, задовольняє умову (34), якщо її можна представити у вигляді добутку монотонної функції на функцію $G(s)$, яка задовольняє цю умову.

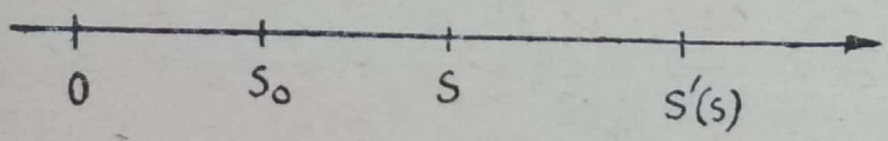

Рис. 3. Пояснення до обмеження на осциляцій.

Ясно, що припущення, яке приймається, надзвичайно ліберальне. Якщо воно виконано, то із (32), як неважко показати, випливає при досить великих фізичних s

$$|\mathrm{Im}\, G(s)| < O(\ln^{-1} s). \tag{35}$$

Зміст цього твердження полягає в тому, що як би повільно не спадала функція $G(s)$, її $\mathrm{Im}\, G(s)$ повинна спадати швидше, ніж $\ln^{-1}(s/s_0)$.

Зауважимо, що якщо $|\mathrm{Im}\, G(s)|$ осцилює настільки патологічно сильно, що нерівність (34) не може бути гарантована при умові (33), але може бути гарантована при умові

$$s'(s) \leqslant O(\exp(Bs^a)), \tag{36}$$

тоді із (32) буде випливати менш обмежуюча нерівність

$$|\mathrm{Im}\, G(s)| < O(\ln^{-1} \ln s). \tag{37}$$

Ми, однак, виключимо можливість такої сильної патологічної поведінки функції $G(s)$.

Припустимо, що нам стало відомо (наприклад, із яких-небудь загальних міркувань чи з експерименту), що при фізичних s

$$|f(s)|=o(\varphi(s)) \tag{38}$$

і що існує така функція $\Phi^{-1}(s)$, яка задовольняє умову (34) і умови а) і б) модифікованої теореми Меймана 1, що при великих фізичних s

$$|\Phi(s)|\sim\varphi(s). \tag{39}$$

Функцію бажано вибрати як можна ближче до істинної асимптотики функції $|f(s)|$.

Нехай амплітуда $f(s)$ задовольняє загальні аналітичні властивості 1) —3) і умову (34). Тоді допоміжна функція

$$G(s)=f(s)\Phi^{-1}(s) \tag{40}$$

буде задовольняти усі умови теореми Меймана 3 і, отже, при великих фізичних s

$$|\mathrm{Im}\, G(s)|=|\mathrm{Im}\, f\, \mathrm{Re}\Phi-\mathrm{Re}\, f\, \mathrm{Im}\Phi|\ |\Phi|^{-2}<O(\ln^{-1}s). \tag{41}$$

Таким чином, при великих фізичних s має місце така

Теорема III

$$|\mathrm{Im} f(s)\,\mathrm{Re}\Phi(s)-\mathrm{Re} f(s)\,\mathrm{Im}\Phi(s)|<O(|\Phi|^2\ln^{-1}s). \tag{42}$$

Ця нерівність, очевидно, має реальний зміст тоді, коли $\varphi(s)$ апроксимує $|f(s)|$ при фізичних $s\to\infty$ з точністю до фактора, який зростає повільніше, ніж $\ln s$.

Тут слід спеціально підкреслити, що нерівність (42) повинна виконуватись для всіх достатньо великих фізичних s. Ми досягли цього завдяки припущенню (34). Якщо б ми не зробили такого припущення, нерівність (42), проте, виконувалася б, але вже не для всіх достатньо великих фізичних s, а лише для деякої послідовності таких s, які прямують на нескінченність. В цьому випадку нерівність (42) була б, по-перше, значно менш обмежуючою, і, по-друге, її дуже важко було б перевірити на експерименті.

Одержимо ряд важливих наслідків із теореми III.

Наслідок 1. Якщо амплітуда $f(s)$ задовольняє загальні аналітичні вимоги 1) — 3) і умову (34) і якщо

$$O(\varphi(s)\ln^{-1}s) \leqslant |f(s)| < O(\varphi(s)), \tag{43}$$

де

$$\varphi(s) = s^a \ln^b s, \tag{44}$$

то при фізичних $s \to \infty$

$$\mathrm{H}(s) \to \mathrm{tg}(\pi a/_2). \tag{45}$$

Наслідок 2. Якщо амплітуда задовольняє загальні аналітичні вимоги 1) — 3), умову (34) і верхню границю

$$|f(s)| < O(s^a \ln^b s), \quad a \neq 0,\ 1 \tag{46}$$

і якщо $\mathrm{H}(s) \to \mathrm{tg}(\pi a/2)$, але не дуже швидко, так що

$$|\mathrm{H}(s) - \mathrm{tg}(\pi a/2)| > O(\ln^{-1+\delta} s), \tag{47}$$

де $\delta > O$ може бути вибране як завгодно малим, то фактично при фізичних $s \to \infty$

$$|f(s)| < O(s^a \ln^{-M} s) \tag{48}$$

з як завгодно великим $M > 0$.

Доведення. Із нерівності (42) і верхньої границі (46) випливає, що

$$|\mathrm{Re}\, f(s)|\, |\mathrm{H}(s) - \mathrm{tg}(\pi a/2)| < O(s^a \ln^{b-1+\varepsilon} s) \tag{49}$$

і

$$|\mathrm{Im}\, f(s)|\, |\mathrm{H}^{-1}(s) - \mathrm{ctg}(\pi a/2)| < O(s^a \ln^{b-1+\varepsilon} s), \tag{50}$$

ди ми маємо право вибрати $\varepsilon = \delta/2$. Беручи це до уваги (47), одержимо

$$|f(s)| < O(s^a \ln^{b-\delta/2} s). \tag{51}$$

Повторюючи цей ітераційний процес необмежене число разів, ми одержимо потрібний результат (48).

Дальші наслідки із теореми III належать до випадків, коли $a=1$ чи $a=0$.

Наслідок 3. Якщо амплітуда $f(s)$ задовольняє загальні вимоги 1) — 3), умову (34) і верхню границю

$$|f(s)| < O(s \ln^b s), \tag{52}$$

то

$$|\mathrm{Re}\, f(s)| < O(s \ln^{b-1} s). \tag{53}$$

Доведення. Як фунцію $\varphi(s)$ виберемо

$$\varphi(s)=s\ln^b s. \tag{54}$$

Тоді

$$\Phi(s)=s\,e^{i\pi/2}(\ln s-i\pi/2)^b. \tag{55}$$

Нерівність (42) в цьому випадку дає

$$|-\mathrm{Re}\,f(s)+O(\mathrm{Im}\,f(s)\ln^{-1}s)|<O(s\ln^{b-1}s), \tag{56}$$

тобто

$$|\mathrm{Re}\,f(s)|<O(s\ln^{b-1}s). \tag{57}$$

Наслідок 4. Якщо амплітуда $f(s)$ задовольняє загальні властивості 1) — 3), умову (34) і верхню границю

$$|f(s)|<O(\ln^b s), \tag{58}$$

то

$$|\mathrm{Im}\,f(s)|<O(\ln^{b-1}s). \tag{59}$$

Цей наслідок доводиться аналогічно попередньому. Відмітимо, що наслідки 3 і 4 справедливі без будь-яких припущень про поведінку $H(s)$. Із наслідку 3, зокрема, випливає з врахуванням верхньої границі Фруассара—Мартена (1), що $|\mathrm{Re}f(s)|<O(s\ln s)$.

Наслідок 5. Якщо вірні умови наслідку 3 і якщо, крім того,

$$|H(s)|<O(\ln^{1-\delta}s), \tag{60}$$

де $\delta>0$ може бути як завгодно малим, то

$$|f(s)|<O(s\ln^{-M}s) \tag{61}$$

з як завгодно великим $M>0$.

Цей наслідок доводиться аналогічно наслідку 2. Об'єднуючи цей результат з теоремою 2 Хурі і Кіношити [4], ми приходимо до висновку, що границя (63) вірна, якщо амплітуда $f(s)$ або вільна від сильних осциляцій, або задовольняє умову (34).

Наслідок 6. Якщо вірні умови наслідку 4 і якщо, крім того,

$$|H(s)|>O(\ln^{-1+\delta}s), \tag{62}$$

де $\delta>0$ може бути як завгодно малим, то

$$|f(s)|<O(\ln^{-M}s) \tag{63}$$

з як завгодно великим $M>0$.

Вкажемо, що якщо відмовитись від обмеження (34), то всі твердження (45), (48), (53), (59), (61) і (63) наслідків 1 — 6 хоч і будуть вірні, але вже не для всіх достатньо великих фізичних s, а лише для деякої послідовності таких s, які прямують на нескінченність. Вкажемо також, що всі результати цього розділу, по-перше, справедливі не тільки для $t=0$, але і для будь-якого фіксованого фізичного t, і, по-друге, їх легко поширити на випадок довільної бінарної реакції у відповідності з рекомендацією, яка дана в кінці розділу 2.

4. Обговорення вихідних припущень

Відмітимо, перш за все, що для доведення всіх вищезгаданих результатів, взагалі кажучи, не було необхідності в аналітичності самої амплітуди $f(s)$. Для цього достатньо було використати аналітичність лише асимптотичної амплітуди $f_\infty(s)$, запровадженої Мейманом [18, 13], для якої виконуються всі умови узагальненого принципу максимуму Фрагмена—Ліндельофа—Неванлінни, який гарантує справедливість модифікованої теореми Меймана 1 і теореми Меймана 3. При цьому, однак, потрібно задовольнити умову асимптотичної еквівалентності точної і асимптотичної амплітуди, тобто потрібно виключити можливість осциляцій амплітуди $f(s)$ в розумінні [13], або вимагати виконання нерівності [17, 19]

$$\sigma^{\perp}\sim o(s). \tag{64}$$

Можливість експериментального теста цієї умови обговорена в [19].

Нарешті вкажемо, що із принципу локальності Меймана або ж із формулювання Ломсадзе—Кривського

[16] (див. також [20]) принципу мікропричинності випливає здійсненність для асимптотичної амплітуди $f_\infty(s)$ всіх умов узагальненого принципу максимуму Фрагмена—Ліндельофа—Неванлінни, крім умови неперервності на границі, тобто на достатньо віддаленій частині дійсної осі. Іншими словами, ми можемо гарантувати лише, що $f_\infty(s)$ задовольняє умови 1) і 3) теореми І і, взагалі кажучи, не може забезпечити здійсненність умови 2). Це означає, що $f_\infty(s)$ (також, звичайно, як і $f(s)$) для дійсних s є деяка узагальнена, а не звичайна функція.

Відомо, однак, що узагальнений принцип максимуму може бути сформульований при значно більш ліберальній вимозі на границі, ніж вимога неперервності функції. Такі формулювання, зокрема, були дані Фрагменом і Ліндельофом [21] для аналітичних функцій $f(s)$ і Неванлінною [22] для гармонічних функцій $u(z)$. Дальше розширення узагальненого принципу максимуму було дано в роботі Меймана [23], у книжці Носіро [24] та в роботах Ломсадзе—Токар [19]. Істотно, що фізичної вимоги «спостережуваності» амплітуди розсіяння досить [19] для забезпечення застосовності до неї цього узагальненого принципу максимуму.

Автори глибоко вдячні проф. Н. Н. Мейману, який люб'язно надав в їх розпорядження одну з своїх теорем, що названа у роботі теоремою Меймана 3, і який зробив ряд цінних зауважень, та проф. В. Я. Файнбергу за дуже плідне обговорення.

ЛІТЕРАТУРА

1. H. Froissart, Phys. Rev., **123**, 1053, 1961.
2. O. W. Greenberg and F. E. Low, Phys. Rev., **124**, 2047, 1961.
3. A. Martin, Phys. Rev., **129**, 1432, 1963; Lectures at the Scottish Summer School of Theoretical Physics, Edinburgh, Scotland, 1963; Nuovo Cim. **29**, 993, 1963; Phys. Lett., **1**, 62, 1962.
4. N. N. Khuri, T. Kinoshita, Phys. Rev., **137**, B 720, 1965.
5. N. N. Khuri, T. Kinoshita, Phys. Rev., **140**, B 706, 1965.
6. А. А. Логунов, Нгуен Ван Хьеу, И. Т. Тодоров, УФН **88**, вып. 1, 51, § 1, разд. 2, 1966.
7. A. Martin, Preprint of CERN № 66/488/5—TH 652, 1966.
8. Й. Шуба, Ю. Ломсадзе, А. Лендьел, цей зб., стор. 53.
9. Ю. С. Вернов, ЖЭТФ, **50**, вып. 3, 672, 1966.
10. Ю. С. Вернов, ЖЭТФ, **53**, вып. 1, 191, 1967.

11. D. Bessis and T. Kinoshita, Nuovo Cim., **50**, № 1, 1967.
12. R. Eden and L. Lukaszuk, Nuovo Cim., **47**, № 4, 817, 1967.
13. Н. Н. Мейман, ЖЭТФ, **47**, 1966, 1964.
14. Н. Н. Мейман, ЖЭТФ, **46**, 1039, 1964.
15. J. Hersch, Commentarii Math. Helv. **29**, 301, 1955.
16. Ю. Ломсадзе, И. Кривский, ДАН СССР, **173** № 2, 312, 1967; Ю. М. Ломсадзе, сб. «Физика высоких энергий и теория элементарных частиц», К., 1966, стр. 791.
17. Ю. Ломсадзе, С. Токарь, ЖЭТФ, **52**, вып. 6, 1529, 1967.
18. Н. Н. Мейман, ЖЭТФ, **46**, 1502, 1964.
19. Ю. Ломсадзе, С. Токарь, Труды Международного совещания по нелокальным взаимодействиям, Дубна, июль, 1967; цей зб. стор. 19.
20. Ю. Ломсадзе, в сб. «Гносеологические аспекты измерений», К., 1968.
21. E. Phragmen et E. Lindelöf, Acta Math., **31**, 381, 1908.
22. Р. Неванлинна, Однозначные аналитические функции, ОГИЗ, М.—Л., 1941.
23. Н. Н. Мейман, Усп. мат. наук, **18**, вып. 4, 208, 1963.
24. К. Носиро, Предельные множества, ИЛ, М., 1963.