ЗМІСТ

ВСТУП

Ідея побудови логічних схем із елементів, подібних до нервових клітин людини, була запропонована У. Маккалохом та У. Піттсом [1]. Вони започаткували дослідження в області науки, що інтегрувала моделі, результати нейрофізіології, математики та інших галузей, і продовжує розвиватися, успішно завойовуючи нові області застосування під назвами штучні нейронні мережі, нейроматематика, нейрокомп'ютерна техніка та подібні їм [2-3].

У зв’язку зі зростаючим інтересом до цифрової обробки сигналів великого значення набуло дослідження методів реалізації дискретних функцій за допомогою штучних нейромереж [1, 4]. Основні результати, встановленні у цьому напрямку вітчизняними та зарубіжними вченими, знайшли своє відображення в курсі "Спектральний аналіз дискретних нейрофункцій". Цей курс читається для аспірантів спеціальності 122 — комп’ютерні науки протягом двох семестрів.

У методичному посібнику наведено матеріали, які стосуються першої частини курсу. Розглядається історичний розвиток методів синтезу нейронних елементів із пороговою функцією активації над полем дійсних чисел, а також методи синтезу нейронних елементів над полем комплексних чисел і поняття нейронного елемента над полем Галуа. Наводяться різні методи синтезу нейроподібних структур для розв'язування прикладних задач класифікації, розпізнавання, прогнозування і т. п. При викладі матеріалу за основу було взято монографію Ф. Е. Гече [5].

НЕЙРОННІ ЕЛЕМЕНТИ ТА НЕЙРОМЕРЕЖЕВІ СХЕМИ НАД АЛГЕБРАЇЧНИМИ СТРУКТУРАМИ

1.1. Історичний розвиток методів синтезу нейроелементів із пороговою функцією активізації

Значний інтерес до порогової логіки і до синтезу НЕ з пороговою функцією активації виник у кінці 50-их років минулого століття. Серед задач порогової логіки виділяють дві основні підзадачі.

Підзадача 1. Синтез НЕ із пороговою функцією активації. Нехай $Z_2 = \{0,1\}, Z_2^n$ – n-а декартова степінь множини $\mathbb{Z}_2$. Бульова функція в алфавіті $\mathbb{Z}_2$ задає однозначне відображення $f : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$. Математична модель НЕ з пороговою функцією активації з ваговим вектором $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ і порогом ω_0 задається так:

$$\begin{cases} f(x_1, \ldots, x_n) = 1, & \text{якщо } \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i \geq \omega_0, \\ f(x_1, \ldots, x_n) = 0, & \text{якщо } \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i < \omega_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

де ω_i, ω_0 – дійсні числа. Очевидно, що НЕ з довільним ваговим вектором $\mathbf{w}$ і порогом ω_0 реалізує певну бульову функцію. Зворотнє твердження є невірним. Отже, не кожну функцію алгебри логіки можна реалізувати одним НЕ з пороговою функцією активації над полем дійсних чисел. Природно виникає питання: яка бульова функція реалізується одним НЕ з пороговою функцією активації, і якщо вона реалізується, то як знайти ваговий вектор $\mathbf{w}$ і поріг ω_0 відповідного НЕ? Це питання і є в основі першої підзадачі порогової логіки [5].

Підзадача 2. Синтез нейромереж. Синтез логічних схем із НЕ полягає у з'єднанні окремих нейроелементів таким чином, щоб побудована мережа реалізувала потрібне відображення. Синтезувати схему із нейроелементів необхідно у тому випадку, коли задана функція не реалізується одним НЕ, або прикладна задача розпізнавання, або прогнозування не можуть бути розв'язані за допомогою одного НЕ.

При синтезі нейромережі, як правило, треба знайти не довільний спосіб зв'язування окремих НЕ, що забезпечує реалізацію даного відображення, а такий спосіб зв'язування, при якому справджуються деякі умови, які накладаються на мережу.

Такими додатковими умовами можуть бути, наприклад, досягнення оптимального значення деякого показника складності (загальні витрати, надійність, кількість елементів у мережі і т. п.). Синтез нейроелементів із пороговою функцією активації та синтез схем із них розглянуто у багатьох наукових працях, але ці дві підзадачі і багато інших важливих проблем цієї області повністю не розв'язані [6]. У зв'язку з цим, розроблення нових методів синтезу НЕ з пороговою функцією активізації, а також синтезу нейроподібних структур із цих елементів та нейроелементів над полем комплексних чисел і над скінченним полем Галуа є актуальною і практично важливою задачею. Нові моделі та методи синтезу нейроелементів, які наведені у наступних розділах дисертаційної роботи, можуть бути успішно застосовані в інженерній практиці при побудові нейромереж із великим числом входів, враховуючи обмеження на вагові вектори НЕ, що зв’язано з технічною реалізацією цих елементів [7-14].

Як правило, у роботах, присвячених нейроелементам із пороговою функцією активації (пороговим елементам – ПЕ), розглядається питання про реалізовність довільної бульової функції одним ПЕ та синтезу відповідного порогового елемента. Той факт, що можливість реалізувати задану бульову функцію одним НЕ з пороговою функцією активації зв'язана з існуванням розв'язку системи лінійних нерівностей типу (1.1), де невідомі є координатами вектора структури НЕ, було отримано в роботах [4]. У [4] і [5] було встановлено, що монотонність бульових функцій є необхідною умовою їх реалізовності одним НЕ із невід'ємним ваговим вектором та пороговою функцією активації. У [12] запропонований метод скорочення числа нерівностей у початковій системі шляхом виділення максимального в $f^{-1}(0)$ ($f^{-1}(0)$–повний прообраз 0) і мінімального в $f^{-1}(1)$ наборів.

Пол Мак-Класки [2] і Р.Віндер [4] узагальнили поняття монотонності бульових функцій, увівши поняття k-монотонності $(k=1,2,\ldots)$. Бульова функція, яка є k-монотонною для всіх можливих значень k, є повністю монотонною. На основі того, що у багатьох прикладах повністю монотонні функції допускали реалізацію одним НЕ з пороговою функцією активації, було зроблено припущення, що k-монотонність є достатньою умовою реалізовності бульових функцій одним НЕ. Відомий контрприклад Мура, наведений у роботі Р. Віндера [4], відкрив початок нових серій умов реалізовності бульових функцій одним НЕ, які базуються на понятті k-асумовності бульових функцій. У [4] показано, що 2-асумовність еквівалента повній монотонності бульових функцій. У [4] і [2] показано, що k-асумовність є необхідною і достатньою умовою реалізовності функцій алгебри логіки одним НЕ з пороговою функцією активації. Р. Віндер [6] довів, що k-асумовність при будь-якому скінченному k не є достатньою умовою реалізовності бульових функцій одним ПЕ. Як бачимо, перевірка належності функцій алгебри логіки до класу нейрофункцій (порогових) є незавершеною задачею, і, у зв'язку з цим, розробка нових методів перевірки реалізовності бульових функцій одним НЕ з пороговою функцією активації є важливим і актуальним завданням. У даній роботі для бульових функцій вводиться поняття ядра і показано, що бульова функція f із ядром $K(f)$

реалізується одним НЕ з пороговою функцією активації тоді і тільки тоді, коли $K(f)$ допускає зображення матрицями толерантності. За допомогою елементів ядра $K(f)$ будується множина зведених ядер $T(f)$ і на мові матриць толерантності, використавши елементи $T(f)$, отримано ряд необхідних і достатніх умов реалізовності бульових функцій одним НЕ з пороговою функцією активації, які просто перевіряються. Одержані в роботі результати можуть бути ефективно використані при перевірці належності бульових функцій до класу нейрофункцій і в тому випадку, коли інші методи, практично, не можуть бути застосовані.

Методи синтезу НЕ з пороговою функцією активації були розроблені багатьма авторами. Окрім методів, в основі яких є скорочення числа невідомих у початковій системі нерівностей, описаних в роботах [2,3,13], були розроблені алгебраїчні методи, які передбачали послідовне виключення невідомих. Методи лінійного програмування були застосовані в [2], а методи теорії гри – у працях [6]. Евристичні методи описані в [3]. Геометричний підхід синтезу НЕ розглянуто Р. Віндровим [4]. Методи навчання перцептрона (НЕ з пороговою функцією активації) в основі яких є послідовна корекція вагових коефіцієнтів, а також з'єднання локальних властивостей перцептрона в його глобальні властивості вивчались у працях [2-6]. Розпізнавання сигналів та зображень у нейроподібному базисі досліджувались у працях [2-3]. У працях [2-4] було досліджено функціональні можливості та надійність функціонування нейронних елементів з пороговою функцією активації. Метод апроксимації для синтезу НЕ детально описано у праці [4]. В основі цього методу є мінімізація функціоналу, що містить характеристичний вектор бульової функції і вектор структури нейроелемента. Функціонал у явному вигляді запишеться так:

$$L(\mathbf{w},\mathbf{b}_f) = \sum_{\mathbf{a}\in G_n} |\,\mathrm{w}(\mathbf{a})\,| - (\mathbf{w},\mathbf{b}_f), \tag{1.2}$$

де $\mathbf{w} = (\omega_1,\ldots,\omega_n,\omega_0)$ – $n+1$-вимірний дійсний вектор;

$G_n = \{\mathbf{a} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \mid \alpha_i \in \{-1,1\}\}$;

$\mathrm{w}(\mathbf{a}) = \omega_1\alpha_1 + \ldots + \omega_n\alpha_n + \omega_0$;

$\mathbf{b}_f$ – характеристичний вектор [4] бульової функції $f(x_1,\ldots,x_n)$;

$(\mathbf{w},\mathbf{b}_f)$ – скалярний добуток векторів $\mathbf{w}$ і $\mathbf{b}_f$.

Величину $|\,\mathrm{w}(\mathbf{a})\,|$ замінюють поліномами різних степенів у залежності від порядку апроксимації. Після цього мінімізується функціонал, і, якщо в точці мінімуму $\mathbf{w}^*$ функціонал $L(\mathbf{w},\mathbf{b}_f)$ приймає значення 0 і для кожного $\mathbf{a}\in G_n$ $\mathrm{w}^*(\mathbf{a}) \neq 0$, тоді НЕ з вектором структури $\mathbf{w}^*$ реалізує задану бульову функцію f. В інших випадках питання про реалізовність бульової функції $f(x_1,\ldots,x_n)$ одним НЕ з пороговою функцією активації залишається відкритим.

Основним недоліком цього методу є те, що не можна встановити порядок апроксимації, який би забезпечив синтез відповідного НЕ для заданої бульової нейрофункції $f(x_1,\ldots,x_n)$. Отже, за допомогою цього методу у загальному випадку не можна вказати порядок апроксимації на основі якого можна було б дати однозначну відповідь на питання: чи реалізується задана бульова функція одним НЕ з пороговою функцією активації?

Слід відмітити, що із збільшенням порядку апроксимації ускладнюється вигляд функціоналу $L(\mathbf{w},\mathbf{b}_f)$ у розгорнутій формі, що у свою чергу робить проблематичним знаходження точки мінімуму $\mathbf{w}^*$ цього функціоналу. Якщо розглядати апроксимацію 1-го порядку, то залежність між координатами ω_i і b_i векторів $\mathbf{w}$ і $\mathbf{b}_f$ є лінійною, при апроксимації 2-го порядку ця залежність є кубічною.

Для збільшення числа функцій алгебри логіки, реалізовних одним НЕ з пороговою функцією активації, у даній роботі розглядаються узагальнені НЕ відносно довільної системи характерів мультиплікативної групи G_n, що є областю визначення бульових функцій в алфавіті $\{-1,1\}$.

Ітераційні методи синтезу нейроелементів із пороговою функцією активації розглядались у працях [4]. При розробці ітераційного метода синтезу НЕ припускається, що задана бульова функція $f(x_1,\ldots,x_n)$ реалізується одним НЕ, вектор структури $\mathbf{w}_f$ якого невідомий. Задача полягає в тому, що довільний $n+1$-вимірний вектор $\mathbf{v}_1$, що є вектором структури НЕ, який реалізує деяку бульову функцію $h_1(x_1,\ldots,x_n)$, послідовно крок за кроком треба перетворити у вектор $\mathbf{w}_f$, якщо це можливо, або встановити нереалізовність даної бульової функції одним НЕ. Послідовність векторів $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k$ знаходиться за формулою:

$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \theta_i(\mathbf{b}_f - \mathbf{b}_{h_i}),$$

де $\mathbf{b}_{h_i}$ – характеристичний вектор бульової функції h_i;

θ_i – числовий коефіцієнт.

На кожному кроці ітерації для коефіцієнта θ_i визначається інтервал $(\theta_i^0, 2\theta_i^0]$, що забезпечує виконання наступних умов:

1. $\rho(\mathbf{v}_{i+1},\mathbf{w}_f) < \rho(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_f)$,
2. $h_{i+1} \neq h_i$,

де $\rho(\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_f)$ – відстань між векторами $\mathbf{v}_i$ і $\mathbf{w}_f$.

В ітераційному процесі може настати один із двох випадків:

– на деякому кроці ітерації $i = k$ функція h_k і f співпадають $(h_k = f)$. Тоді $\mathbf{w}_f = \mathbf{v}_k$ і задача синтезу НЕ завершена;

– так як кількість бульових функцій від n- змінних дорівнює 2^{2^n}, то на деякому кроці ітерації $\mathbf{b}_{h_k} = \mathbf{b}_{h_{k+m}} (h_k = h_{k+m})$, тобто в області характеристичних векторів бульових функцій, настане граничний цикл. Якщо лінійна комбінація векторів $\mathbf{b}_f - \mathbf{b}_{h_k}, \mathbf{b}_f - \mathbf{b}_{h_{k+1}}, \ldots, \mathbf{b}_f - \mathbf{b}_{h_{k+m-1}}$ із невід'ємними коефіцієнтами $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ і хоча б при одному $\lambda_i > 0$ дорівнює нульовому вектору, то це означає, що функція f не реалізується одним НЕ з пороговою функцією активізації.

До недоліків ітераційного методу синтезу НЕ можна віднести:

по перше – знаходження невід'ємних коефіцієнтів λ_i у загальному випадку є непростою задачею,

по друге – якщо не виконується умова

$$\lambda_0(\mathbf{b}_f - \mathbf{b}_{h_k}) + \lambda_1(\mathbf{b}_f - \mathbf{b}_{h_{k+1}}) + \ldots + \lambda_{m-1}(\mathbf{b}_f - \mathbf{b}_{h_{k+m-1}}) = 0$$

при $\lambda_i \geq 0$ і хоча б при одному $\lambda_i > 0$, то питання про реалізовність бульової функції одним НЕ залишається відкритим.

У зв'язку з тим, що за допомогою узагальнених НЕ розширюється клас бульових нейрофункцій, модифікація метода апроксимації та ітераційного метода для синтезу узагальнених нейроелементів із пороговою функцією активації є актуальною задачею. У дисертаційній роботі наводиться метод апроксимації та ітераційний методи синтезу НЕ відносно заданої системи характерів групи G_n. Крім цих двох методів синтезу НЕ, у даній роботі розроблено ще метод матриць толерантності, що використовує p-розклад ядра бульової функції відносно заданої системи характерів групи G_n.

Із метою розширення класа бульових нейрофункцій із дійсними векторами структури у праці [10] було запропоновано поняття комплексно-порогових функцій, тобто функцій, що реалізуються одним НЕ із пороговою функцією активації з вектором структури над полем комплексних чисел. Як виявилось, розширення поля дійсних чисел R до поля комплексних чисел C, на якому проводиться синтез нейроелементів, не призвело до збільшення класу нейрофункцій. У роботі [10] показано: якщо бульова функція $f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ не є дійсно-пороговою, то вона не буде і комплексно-пороговою і навпаки. Однак, як зазначено в роботі, якщо замість поля R розглядати скінченне поле Галуа, то в залежності від цього поля, можна розширити клас бульових дійсно-порогових функцій. Результати програм із синтезу НЕ з двозначною функцією активації свідчать про те, що коли збільшуємо кількість елементів поля Галуа, на якому проводиться синтез НЕ, то кількість елементів класу нейрофункцій не зменшується. У даній роботі показано, що для бульових функцій від 2-х змінних мінімальним полем Галуа, на якому всі бульові функції будуть нейрофункціями, є поле $GF(5)$. Аналогічно, за допомогою цих програм було встановлено, що для бульових функцій від 3-ох змінних таким полем буде поле $GF(7)$. На основі встановлених закономірностей у цій дисертаційній роботі висунута гіпотеза, обмеження якої до класу бульових функцій може бути сформульовано так: для довільного класу бульових функцій від n- змінних можна встановити таке мінімальне поле Галуа, на якому всі функції даного класу будуть нейрофункціями.

Отримані результати в області синтезу нейроелементів над полем Галуа можуть бути застосовані при розв'язуванні різних прикладних задач, наприклад, при кодуванні та передачі інформації, при класифікації та розпізнаванні образів і т. д. Тому вивчення властивостей нейрофункцій і розроблення нових методів синтезу НЕ над полем Галуа є актуальною і практично важливою задачею.

Задача синтезу нейромереж із НЕ з пороговою функцією активації вивчалась меншим числом авторів і тут отримано набагато менш вагомі результати. Синтез нейромереж із НЕ з пороговою функцією активації без обмеження на конфігурації майже не розглядались. У праці [5] досліджувались методи синтезу нейромереж із наперед заданими конфігураціями (порогово-диз'юнктивна, каскадна). Основна проблема у розробці ефективних методів синтезу нейромереж полягає в тому, що відомі методи синтезу НЕ з пороговими функціями активації (метод апроксимації, ітераційний метод, спектральний метод) є малоефективними. Розроблений у даній роботі p-розклад ядра бульових функцій може бути ефективно використано як для синтезу нейромереж із НЕ з пороговою функцією активації, так і для синтезу гібридних нейромереж (нейромереж, що містять НЕ з різними функціями активації), які мають широке застосування при розв'язуванні задач класифікації та розпізнаванні дискретних сигналів та зображень.

Застосування нейроелементів із пороговими функціями активації в адаптаційних системах досліджувалась у [2], у перцептронах – [6] у системах АДАЛІН-МАДАЛІН – [3].

Отже, удосконалення і розроблення нових методів синтезу одного НЕ з пороговою функцією активації, а також синтезу нейромереж із цих елементів обґрунтовано тим, що при ефективних методах їх синтезу вони можуть бути успішно використані для розв'язування цілого класу прикладних задач: кодування та передачі інформації, класифікації та розпізнавання дискретних сигналів, прогнозування часових рядів і т. п.

1.2. Багатозначні нейроелементи з дискретними та неперервними функціями активації

Із метою реалізації функцій k-значної логіки $(k \geq 2)$ у праці [11] було введено поняття багатозначного порогового елемента (нейронний елемент із дискретною функцією активації), що є природним узагальненням порогового елемента (НЕ з пороговою функцією активації). Аналогічно розглядались багатозначні порогові елементи над полем комплексних чисел у [10], а синтез та застосування цих елементів при розв’язуванні прикладних задач у працях

[7, 8]. Для визначення поняття НЕ з дискретною функцією активації у вищеназваних роботах було введено функцію $C\mathrm{sign}\,z$ над полем комплексних чисел C:

$$\forall z \in C \setminus \{0\}\ C\mathrm{sign}\,z = \varepsilon^{j}, \qquad \text{якщо } \frac{2\pi}{k} j \le \arg z < \frac{2\pi}{k}(j+1),$$

де ε – первісний корінь k-го степеня з 1 над полем C і $j \in \{0,1,\ldots,k-1\}$. У роботі [10] точка 0 не виключається, а вважається, що $C\mathrm{sign}\,z$ у точці 0 приймає значення 0, тобто $\mathrm{Csign}\,0 = 0$.

Якщо алфавіт функції k-значної логіки від n- змінних позначити через $H_k = \{1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{k-1}\}$ і область її визначення через $G_n = H_k \otimes H_k \otimes \ldots \otimes H_k$ – прямий добуток n циклічних груп H_k, то очевидно, функція k-значної логіки f задає однозначне відображення $f : G_n \to H_k$.

Функція k-значної логіки $f(x_1, \ldots, x_n)$ називається нейрофункцією над полем комплексних чисел (багатозначною пороговою), якщо існує такий $n+1$-вимірний вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_0)$ над C, що

$$\forall \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in G_n \quad f(\mathbf{x}) = C\mathrm{sign}\,\mathrm{w}(\mathbf{x}), \tag{1.3}$$

де $\mathrm{w}(\mathbf{x}) = \omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n + \omega_0$.

Питання перевірки про належність функцій k-значної логіки до класу нейрофункцій зводиться до синтезу НЕ з дискретною функцією активації, що реалізує її.

У праці [8] отримано критерій реалізовності функцій k-значної $(k \ge 2)$ логіки одним НЕ з дискретною функцією активації. Описано інваріантні операції над k-значними нейрофункціями, а також розроблено метод синтезу НЕ, що зводиться до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь над C, яка містить k^n невідомих і $k^n - (n+1)$ рівнянь. Якщо система сумісна, то функція k- значної логіки реалізується одним НЕ з дискретною функцією активації і її розв'язок використовується при знаходженні вектора структури НЕ, а в протилежному випадку функція не реалізується одним НЕ.

Для реалізації функцій k-значної логіки, які не належать до класу нейрофункцій, необхідно будувати нейромережу із НЕ з дискретними функціями активації, а методи синтезу таких нейромереж із довільною конфігурацією практично відсутні. Актуальність та практична важливість розроблення методів синтезу нейронних елементів над скінченним полем Галуа підтверджується тим, що є функції k-значної логіки, які над полем C реалізуються тільки нейромережею, а над відповідним полем Галуа, можуть бути реалізовані одним НЕ. Щоб встановити критерії реалізовності функцій k-значної $(k \ge 2)$ логіки одним НЕ з дискретною функцією активації та розробити методи синтезу НЕ над відповідними скінченними полями необхідно задати алфавіт для функції k-значної логіки. Проблема вибору алфавіту зв'язана з задачею існування первісного кореня k-го степеня з 1 над полем Галуа. Якщо поле C для довільного $k\,(k \geq 2)$ завжди містить первісний корінь k-го степеня з 1, то це не вірно для довільного скінченного поля Галуа. У праці [7] показано, що поле $GF(p^m)$ містить первісний корінь k-го степеня з 1 тоді і тільки тоді, коли число $p^m - 1$ націло ділиться на k, і в цьому випадку для дослідження властивостей функцій k-значної логіки можна застосовувати методи спектрального аналізу дискретних функцій [2].

Якщо через ε позначити примітивний елемент поля $GF(p^m)$ і для довільного натурального числа k, не меншого за 2, параметри p і m поля $GF(p^m)$ вибрати так, щоб число k було дільником числа $p^m - 1$, тоді поле $GF(p^m)$ містить циклічну групу $H_k = \{1, \sigma, \ldots, \sigma^{k-1}\}\,(\sigma = \varepsilon^{(p^m-1)/k})$, яка задає алфавіт функції k-значної логіки. Отже, над полем $GF(p^m)$ функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ k-значної логіки задає однозначне відображення $f : G_n \to H_k$, де G_n – прямий добуток n циклічних груп H_k. Над полем $F = GF(p^m)$, окрім елемента 0, визначимо функцію $F\mathrm{sign}\,\xi$ наступним чином:

$$\forall \xi \in F \setminus \{0\} \quad F\mathrm{sign}\xi = \sigma^j, \quad \text{якщо } \frac{ju}{k} \leq \deg \xi < \frac{(j+1)u}{k},$$

де $\deg \xi$ — степінь елемента ξ $(\xi = \varepsilon^{\deg \xi})$;
$j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$;
$u = p^m - 1$.

За означенням функція k-значної логіки $f(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним НЕ з дискретною функцією активації $F\mathrm{sign}\,\xi$, якщо існує такий $n+1$-вимірний вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_0)$ над F, що

$$\forall \mathbf{x} \in G_n \quad f(\mathbf{x}) = F\mathrm{sign}\,\mathrm{w}(\mathbf{x}),$$

де $\mathrm{w}(\mathbf{x}) = \omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n + \omega_0$.

Функція $F\mathrm{sign}\,\xi$ є функцією активації НЕ, а $\mathrm{w}(\mathbf{x})$ – зваженою сумою вхідних значень НЕ.

У посібнику наведено критерій реалізовності дискретних функцій від n змінних, описано інваріантні операції над дискретними нейрофункціями, розроблено метод синтезу НЕ над полем Галуа, а також наведено спектральний аналіз двошарової нейромережі із НЕ з дискретними функціями активації над скінченним полем Галуа [5].

Із метою збільшення функціональних можливостей НЕ з дискретними функціями активації, як над полем C, так і над полем $F = GF(p^m)$, у роботі [5] розглянуто математична модель НЕ відносно заданої системи характерів групи G_n і отримано ряд нових критеріїв реалізовності дискретних функцій та методи синтезу цих НЕ над відповідними полями.

Методи синтезу НЕ з дискретними функціями активації для реалізації дискретних функцій (функції k-значної логіки є частинним випадком) як відносно твірних, так і відносно довільної системи характерів групи G_n над полем $F = GF(p^m)$, і методи синтезу нейромереж із вказаних НЕ раніше практично були відсутні. Отримані в даній роботі результати синтезу нейронних елементів відносно довільної системи характерів групи G_n над полем комплексних чисел С є узагальненнями результатів, наведених у працях [2–9].

1.3. Висновки

1. Серед існуючих методів перевірки реалізовності бульових функцій одним НЕ з пороговою функцією активації, які базуються на поняттях k-монотонності та k-асумовності, у загальному випадку, при скінченному значенні k не дають відповідь про належність функцій алгебри логіки до класу нейрофункцій.

2. Основні відомі методи синтезу НЕ з пороговою функцією активації, до яких можна віднести метод апроксимації та ітераційний метод, не вирішують ефективно цю задачу. У методі апроксимації це пов'язано з тим, що при синтезі НЕ для реалізації бульової нейрофункції від n змінних невідомо порядок апроксимації, який гарантує знаходження вектора структури відповідного НЕ. Збільшення порядку апроксимації призведе до ускладнення функціоналу, точка мінімуму якого може бути вектором структури шуканого НЕ. В ітераційному методі синтезу НЕ на кожному кроці ітерації кількість операцій має експоненційну залежність (2^n) від кількості входів n нейроелемента. Перевірка нереалізовності бульової функції одним НЕ через її граничний цикл в області характеристичних векторів зводиться до непростої задачі знаходження невід'ємних нетривіальних розв'язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

3. З урахуванням викладеного, розроблення нових методів синтезу одного НЕ з пороговою та іншими дискретними функціями активацій, як над полем комплексних чисел C, так і над полем Галуа, а також методи синтезу нейромережевих схем із цих нейроелементів для кодування і передачі інформації, для розпізнавання дискретних сигналів та зображень є актуальним завданням і потребує свого вирішення [5].

2. МАТРИЦІ ТОЛЕРАНТНОСТІ ТА БУЛЬОВІ НЕЙРОФУНКЦІЇ

2.1. Матриці толерантності та їх основні властивості

Нехай $\mathbb{Z}_2=\{0,1\}$ і $\mathbb{Z}_2^n$ – n-а декартова степінь множини $\mathbb{Z}_2$. Визначимо на множині $\mathbb{Z}_2^n$ відношення толерантності τ так: $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\tau(\beta_1,\ldots\beta_n)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\exists i(\alpha_i=\beta_i)$. Класом толерантності відносно τ називається максимальна підмножина множини $\mathbb{Z}_2^n$, елементи якої попарно толерантні. Множину, яка складається з усіх класів толерантності відносно τ, позначимо через M_τ. Складемо найрізноманітніші матриці, рядками яких будуть n-вимірні бульові вектори, які є елементами класу толерантності $N\in M_\tau$, тобто $N\to N_\xi$ – матриця, нумерація рядків у якій визначається елементом ξ симетричної групи S_m, де $m=|N|$ – кількість елементів класу N. Нехай $S(N)$ – множина всіх матриць, побудованих із елементів класу толерантності N і $M=\bigcup\limits_{N\in M_\tau} S(N)$. Елементи множини M назвемо матрицями толерантності відношення τ. Якщо $N\in M_\tau$, то $|N|=2^{n-1}$. Дійсно, якщо $N\in M_\tau$, то для довільного $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in N$ має місце $(\overline{\alpha}_1,\ldots,\overline{\alpha}_n)\notin N$, де $\overline{\alpha}_i$ – інвертоване значення α_i.

Нехай Ω_n – множина всіх n-вимірних дійсних векторів $\mathbf{w}$, таких, що для всіх різних $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\in\mathbb{Z}_2^n$ числа $(\mathbf{x}_1,\mathbf{w})$ і $(\mathbf{x}_2,\mathbf{w})$ різні ($(\mathbf{x}_i,\mathbf{w})$ – скалярний добуток векторів $\mathbf{x}_i,\mathbf{w}$).

Нехай $c_1>c_2>\ldots>c_{2^n}$, розташовані у порядку спадання, зважені суми $\mathbf{w}(\mathbf{x})=(\mathbf{x},\mathbf{w})$ при фіксованому $\mathbf{w}\in\Omega_n$ для всіх наборів $\mathbf{x}\in\mathbb{Z}_2^n$ і $\mathbf{c}_\mathbf{w}=(c_1,c_2\ldots,c_{2^n})$. Кожній матриці толерантності $N=(\alpha_{ij})$ поставимо у відповідність матрицю $N^*=(\alpha_{sj})$ наступним чином: $s=2^{n-1}-i+1$ і $\alpha_{sj}=\overline{\alpha}_{ij}$. Визначимо над матрицями толерантності N і N^* операцію ∇ так: $N\nabla N^*=\begin{pmatrix}N\\N^*\end{pmatrix}$.

Теорема 2.1. [5] *Якщо $\mathbf{w}\in\Omega_n$ і $Z_\mathbf{w}$ матриця над $\mathbb{Z}_2$ розміром $2^n\times n$, що задовольняє умову*

$$Z_\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}^T=\mathbf{c}_\mathbf{w}^T, \tag{2.1}$$

тоді в множині матриць толерантності M знайдеться така матриця $L_\mathbf{w}$, що $Z_\mathbf{w}=L_\mathbf{w}\nabla L_\mathbf{w}^*$ ($\cdot,T$ – відповідно операції матричного множення та транспонування матриць).

Доведення. З означення множини Ω_n випливає, що для кожного $\mathbf{w}\in\Omega_n$ можна побудувати матрицю $Z_\mathbf{w}$ розміру $2^n\times n$ на множині $\mathbb{Z}_2$, яка задовольняє умову (2.1). Матрицю, яка складається з перших 2^{n-1} рядків матриці $Z_{\mathbf{w}}$, позначимо через $L_{\mathbf{w}}$. Покажемо, що вектори $\mathbf{a}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ і $\bar{\mathbf{a}}=(\bar{\alpha}_1,\ldots,\bar{\alpha}_n)$ одночасно не можуть бути рядками матриці $L_{\mathbf{w}}$. Якщо припускати протилежне, тоді числа $c_p=(\mathbf{a},\mathbf{w})$ і $c_q=(\bar{\mathbf{a}},\mathbf{w})$ належать множині $\{(\mathbf{x},\mathbf{w})\,|\,\mathbf{x}\in m(L_{\mathbf{w}})\}$, де $m(L_{\mathbf{w}})$ – сукупність бульових векторів, які утворені з усіх рядків матриці $L_{\mathbf{w}}$. Отже, $p,q\in\{1,2,\ldots,2^{n-1}\}$. Нехай $c_p>c_q$ і $y=(1,1,\ldots,1)$. Тоді $c_q=(y,\mathbf{w})-c_p$ і, враховуючи (2.1), маємо:

$$q=2^n-p+1. \tag{2.2}$$

Отже, якщо $p\in\{1,2,\ldots,2^{n-1}\}$, то $q\notin\{1,2,\ldots,2^{n-1}\}$, а це суперечить тому, що $p,q\in\{1,2,\ldots,2^{n-1}\}$. Таким чином, наше припущення невірне, тобто $L_{\mathbf{w}}\in M$.

Якщо c_p пробігає множину $\{c_1,c_2,\ldots,c_{2^{n-1}}\}$, то згідно з (2.2) $c_q\in\{c_{2^{n-1}+1},\ldots,c_{2^n}\}$. Отже, $Z_{\mathbf{w}}=L_{\mathbf{w}}\nabla L_{\mathbf{w}}^*$.

Нехай $\mathbf{w}$ – фіксований вектор множини Ω_n і $\rho(\mathbf{w})$ – упорядкована множина n-вимірних бульових векторів $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\ldots,\mathbf{x}_{2^n}$ таких, що $(\mathbf{x}_i,\mathbf{w})>$ $>(\mathbf{x}_j,\mathbf{w})$, якщо $i<j$. Очевидно, що ρ на множині Ω_n індукує відношення еквівалентності: $\mathbf{w}\approx\mathbf{v}\Leftrightarrow\rho(\mathbf{w})=\rho(\mathbf{v})$. Класи еквівалентності множини Ω_n, які породжені відношенням ρ, позначимо через $\Omega_n^i, i=1,2,\ldots,t$. Нехай $\mathbf{w}_i\in\Omega_n^i$ і відображення ψ кожному класу Ω_n^i однозначно ставить у відповідність матрицю толерантності $L_{\mathbf{w}_i}$, що задовольняє умову $(L_{\mathbf{w}_i}\nabla L_{\mathbf{w}_i}^*)\cdot\mathbf{w}_i^T=\mathbf{c}_{\mathbf{w}_i}^T$. Тоді на основі теореми 2.1 відображення ψ задає бієктивне відображення множини $\{\Omega_n^i\,|\,i=1,2,\ldots,t\}$ на множину $E_n=\bigcup\limits_{\mathbf{w}\in\Omega_n}L_{\mathbf{w}}$. Отже, за допомогою матриць толерантності з E_n однозначно можна відновити представників $\mathbf{w}_i$ класів еквівалентності $\Omega_n^i\subset\Omega_n$.

Множина $\mathbb{Z}_2^n$ утворює абелеву групу відносно операції покомпонентного додавання за mod 2. Розглянемо ізоморфну до неї абелеву групу $G_n=\{((-1)^{x_1},\ldots,(-1)^{x_n})\,|\,(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{Z}_2^n\}$ відносно операції покомпонентного множення і визначимо дії групи G_n на множинах Ω_n і E_n так: якщо $\mathbf{g}=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\in G_n$ і $\mathbf{w}=(\omega_1,\ldots,\omega_n)\in\Omega_n, L=(\alpha_{ij})\in E_n$, тоді $\mathbf{g}\mathbf{w}=(\gamma_1\omega_1,\ldots,\gamma_n\omega_n)$, а $\mathbf{g}L=(\beta_{ij})$, де $\beta_{ij}=\alpha_{ij}$, коли $\gamma_j=1$ і $\beta_{ij}=\bar{\alpha}_{ij}$, коли $\gamma_j=-1$.

Результат дії елемента $\sigma\in S_n$ на $\mathbf{w}=(\omega_1,\ldots,\omega_n)\in\Omega_n$ і $L=(\alpha_{ij})\in E_n$ визначимо наступним чином: $\mathbf{w}^\sigma=(\omega_{\sigma(1)},\ldots,\omega_{\sigma(n)})$, $L^\sigma=(\alpha_{i\sigma(j)})$.

Нехай $\Omega_n^- = \{(\omega_1,\ldots,\omega_n) \in \Omega_n \mid 0 > \omega_1 > \ldots > \omega_n\}$, $E_n^- = \bigcup_{\mathbf{w}\in\Omega_n^-} L_{\mathbf{w}}$ і $E_n' = \{(\mathbf{g}L)^\sigma \mid L \in E_n^-, \mathbf{g} \in G_n, \sigma \in S_n\}$.

Теорема 2.2. [5] *Множина* E_n' *співпадає із множиною матриць толерантності* E_n.

Доведення. Нехай $\mathbf{w}$ – довільний вектор множини Ω_n і $L_{\mathbf{w}} = (\alpha_{ij})$ така матриця толерантності з E_n, що

$$\tilde{L}_{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{w}^T = \mathbf{c}_{\mathbf{w}}^T, \tag{2.3}$$

де $\tilde{L}_{\mathbf{w}} = L_{\mathbf{w}} \nabla L_{\mathbf{w}}^*$. Покажемо, що $L_{\mathbf{w}}$ належить множині E_n'. Нехай усі координати вектора $\mathbf{w}$ від'ємні. Тоді для $\mathbf{w}$ можна вказати такий $\sigma \in S_n$, що $\mathbf{w}^\sigma = \mathbf{w}_1 \in \Omega_n^-$. Множина E_n^- містить матрицю $N_{\mathbf{w}_1}$, таку, що $\tilde{N}_{\mathbf{w}_1} \cdot \mathbf{w}_1^T = \mathbf{c}_{\mathbf{w}_1}^T$. Отже,

$$\mathbf{c}_{\mathbf{w}_1}^T = \tilde{N}_{\mathbf{w}_1} \cdot \mathbf{w}_1^T = \tilde{N}_{\mathbf{w}_1} \cdot (\mathbf{w}^\sigma)^T = \tilde{N}_{\mathbf{w}_1}^{\sigma^{-1}} \cdot \mathbf{w}^T = \mathbf{c}_{\mathbf{w}}^T. \tag{2.4}$$

З (2.3) і (2.4) маємо: $L_{\mathbf{w}} = N_{\mathbf{w}_1}^{\sigma^{-1}} \in E_n'$.

Розглянемо випадок, коли хоча б одна координата вектора $\mathbf{w} \in \Omega_n$ додатна. Тоді для $\mathbf{w}$ знайдеться такий елемент $\mathbf{g} = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n \in G_n$ і $\sigma \in S_n$, що $(\mathbf{g}\mathbf{w})^\sigma = \mathbf{w}_1 \in \Omega_n^-$. Нехай $c_r' = \sum_{i=1}^{n}(\omega_i\gamma_i)\alpha_{ri}$, $c_r = \sum_{i=1}^{n}\omega_i(\gamma_i\alpha_{ri})$ і $\delta : c_r' \to c_r$. Відображення δ задає монотонний ізоморфізм між упорядкованими множинами $\mathbf{c}'_{\mathbf{w}} = (c_1',\ldots,c_{2^n}')$ і $\mathbf{c}_{\mathbf{w}} = (c_1,\ldots,c_{2^n})$. Це означає, що

$$\mathbf{c}'^{\,T}_{\mathbf{w}} = \tilde{N}_{\mathbf{w}_1} \cdot \mathbf{w}_1^T = \tilde{N}_{\mathbf{w}_1} \cdot ((\mathbf{g}\mathbf{w})^\sigma)^T = \tilde{N}_{\mathbf{w}_1}^{\sigma^{-1}} \cdot (\mathbf{g}\mathbf{w})^T \xrightarrow{\delta} (\mathbf{g}\tilde{N}_{\mathbf{w}_1}^{\sigma^{-1}}) \cdot \mathbf{w}^T = \mathbf{c}_{\mathbf{w}}^T$$

і $L_{\mathbf{w}} = \mathbf{g}N_{\mathbf{w}_1}^{\sigma^{-1}} \in E_n'$. Отже, $E_n \subset E_n'$.

Доведемо зараз обернене включення. Нехай $\mathbf{w}_1$ – довільний вектор множини Ω_n^- і $N_{\mathbf{w}_1}$ – матриця множини E_n^-, яка задовольняє умову $\tilde{N}_{\mathbf{w}_1} \cdot \mathbf{w}_1^T = \mathbf{c}_{\mathbf{w}_1}^T$. За побудовою Ω_n^- для довільних $\mathbf{g} \in G_n, \sigma \in S_n$ вектор $\mathbf{w}=(\mathbf{g}\mathbf{w}_1)^\sigma$ належить множині Ω_n і

$$\mathbf{c}'^{\,T}_{\mathbf{w}} = \tilde{N}_{\mathbf{w}_1} \cdot (\mathbf{g}\mathbf{w}^{\sigma^{-1}})^T \xrightarrow{\delta} \mathbf{g}\tilde{N}_{\mathbf{w}_1} \cdot (\mathbf{w}^{\sigma^{-1}})^T = (\mathbf{g}\tilde{N}_{\mathbf{w}_1})^\sigma \cdot \mathbf{w}^T = \mathbf{c}_{\mathbf{w}}^T.$$

Отже, $L_{\mathbf{w}} = (\mathbf{g}N_{\mathbf{w}_1})^\sigma \in E_n$, тобто $E_n' \subset E_n$. Теорему доведено.

Основні властивості матриць толерантності множини E_n.

1. Якщо матриця толерантності $L_{\mathbf{w}} \in E_n$, тоді $L_{\mathbf{w}}^\sigma$ також належить E_n при будь-якому $\sigma \in S_n$.

Дійсно, $(L_{\mathbf{w}}^{\sigma} \nabla L_{\mathbf{w}}^{*\sigma}) \cdot (\mathbf{w}^{\sigma})^{T} = (L_{\mathbf{w}} \nabla L_{\mathbf{w}}^{*}) \cdot \mathbf{w}^{T}$.

2. Якщо матриця толерантності $L_{\mathbf{w}}$ належить множині E_n, тоді матриця $\mathbf{g}L_{\mathbf{w}} \in E_n$ для будь-якого $\mathbf{g} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in G_n$.

Доведення безпосередньо випливає з наступного співвідношення:

$$\mathbf{c}'^{\,T}_{\mathbf{w}} = (\mathbf{g}L_{\mathbf{w}} \nabla (\mathbf{g}L_{\mathbf{w}})^{*}) \cdot (\mathbf{gw})^{T} \xrightarrow{\varepsilon} (L_{\mathbf{w}} \nabla L_{\mathbf{w}}^{*}) \cdot \mathbf{w}^{T} = \mathbf{c}_{\mathbf{w}}^{T},$$

де

$L_{\mathbf{w}} \nabla L_{\mathbf{w}}^{*} = (\alpha_{ri}), \ \ (r = 1, \ldots, 2^{n})$;

$\varepsilon : \sum_{i=1}^{n} (\gamma_i \alpha_{ri})(\gamma_i \omega_i) \to \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ri} \omega_i$ – задає монотонний ізоморфізм між упорядкованими множинами $\mathbf{c}'_{\mathbf{w}} = = (c'_1, \ldots, c'_{2^n}),\ \mathbf{c}_{\mathbf{w}} = (c_1, \ldots, c_{2^n})$.

Із властивостей 1 та 2 маємо:

3. Якщо $L_{\mathbf{w}}$ – довільна матриця толерантності з E_n, тоді $\mathbf{g}L_{\mathbf{w}}^{\sigma}$ також є матрицею толерантності з E_n при будь-яких $\mathbf{g} \in G_n$ та $\sigma \in S_n$, тобто множина E_n замкнена відносно групових перетворень G_n і S_n.

Нехай $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega_n$ і $L_{\mathbf{w}} \in E_n$, тобто $(L_{\mathbf{w}} \nabla L_{\mathbf{w}}^{*}) \cdot \mathbf{w}^{T} = \mathbf{c}_{\mathbf{w}}^{T}$. Виникає питання, чи належить матриця $L_{\mathbf{w}}^{*}$ множині E_n? У загальному випадку можна стверджувати, що $L_{\mathbf{w}}^{*}$ є матрицею толерантності, але не завжди належить E_n, тобто множина E_n не є замкненою відносно операції, за якої будуємо матрицю $L_{\mathbf{w}}^{*}$ з $L_{\mathbf{w}}$. Покажемо це на наступному прикладі. Нехай $n = 3$. Множина E_3^{-}, очевидно, складається з двох матриць:

$$E_3^{-} = \left\{ L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Розглянемо вектор $\mathbf{w} = (-1;-2;-2{,}5) \in \Omega_3^{-}$, для якого $L_{\mathbf{w}} = L_2$ і

$$L_{\mathbf{w}}^{*} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що для $\forall \mathbf{g} \in G_3, \forall \sigma \in S_3$ матриця толерантності $(\mathbf{g}L_{\mathbf{w}}^{*})^{\sigma}$ не належить E_3^{-}. Тоді на основі теореми 2.2 можна стверджувати, що $L_{\mathbf{w}}^{*} \notin E_3$. Із цих міркувань випливає, що матриця $L_{\mathbf{w}}^{*}$ належить множині E_n тільки в тому випадку, коли $\mathbf{g}_1 L_{\mathbf{w}}^* \in E_n^-$, де $\mathbf{g}_1 = ((-1)^{\alpha_{11}^*}, \ldots, (-1)^{\alpha_{1n}^*})$ і $(\alpha_{11}^*, \ldots, \alpha_{1n}^*)$ – перший рядок матриці $L_{\mathbf{w}}^*$. Очевидно, що $L_{\mathbf{w}}^{**} = (L_{\mathbf{w}}^*)^* = L_{\mathbf{w}}$. За допомогою простої перевірки легко переконатися, що

$$E_1^- = \{L_1 = (0)\}, \quad E_2^- = \left\{ L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\};$$

$$E_3^- = \left\{ L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\};$$

$E_4^- = \{L_1, L_2, \ldots, L_{14}\}$ [5],

2.2. Критерій зображення бульових векторів матрицями толерантності

Нехай $A = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q\}$ – довільна підмножина множини $\mathbb{Z}_2^n$ і $A' = \mathbb{Z}_2^n \setminus A$ – різниця множин $\mathbb{Z}_2^n$ і A. З елементів множини A побудуємо матрицю A_ξ наступним чином: першим рядком матриці A_ξ буде вектор $\mathbf{a}_{\xi(1)} = (\alpha_{\xi(1)1}, \ldots, \alpha_{\xi(1)n})$ з A, другим рядком матриці буде вектор $\mathbf{a}_{\xi(2)} = = (\alpha_{\xi(2)1}, \ldots, \alpha_{\xi(2)n})$, останнім рядком A_ξ буде $\mathbf{a}_{\xi(q)} = (\alpha_{\xi(q)1}, \ldots, \alpha_{\xi(q)n})$, де $\xi(i)$ – дія підстановки $\xi \in S_q$ на i.

Матрицю N, побудовану з перших r рядків матриці толерантності $L \in E_n$, називають передматрицею толерантності і позначають $N = L(r)$.

Будемо вважати, що множина $A \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ допускає зображення матрицями толерантності з E_n, якщо існує такий елемент $\xi \in S_q$ $(q = |A|)$ і матриця толерантності $L \in E_n$, що справджується одна з умов:

1) $A_\xi = L(q)$, якщо $q \le 2^{n-1}$;

2) $A'_\xi = L(q')$, де $q' = 2^n - q$, якщо $q > 2^{n-1}$.

Зауваження. Якщо $A = \varnothing$, то вважаємо, що $A_\xi = L(0)$, де L – довільна матриця з E_n.

Визначимо опуклу оболонку $\mathrm{conv}A$ множини $A \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ наступним чином:

$$\mathrm{conv}A = \{\mathbf{x} \in [0,1]^n \mid \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \mathbf{a}_i, \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = 1, \ \ \lambda_1 \ge 0, \ldots, \lambda_q \ge 0; \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q \in A\}.$$

Теорема 2.3. [5] *Множина* $A \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ *допускає зображення матрицями толерантності з* E_n *тоді і тільки тоді, коли* $\mathrm{conv}A \cap \mathrm{conv}A' = \varnothing$.

Доведення. Необхідність доведемо від супротивного. Припустимо, що

$\mathrm{conv}A \cap \mathrm{conv}A' \neq \varnothing$ і A допускає зображення матрицями толерантності з E_n. Розглянемо випадок, коли $q \leq 2^{n-1}$. Тоді існує такий $\xi \in S_q$ і $L = L_{\mathbf{w}} \in E_n$, що $A_\xi = L_{\mathbf{w}}(q)$. Із останньої рівності випливає, що для всіх $\mathbf{a} \in A$ і для всіх $\mathbf{b} \in A'$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{w}) > (\mathbf{b}, \mathbf{w}). \tag{2.5}$$

Нехай $\mathbf{d} \in \mathrm{conv}A \cap \mathrm{conv}A'$. Тоді

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \mathbf{a}_i;\ \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = 1; \lambda_1, \ldots \lambda_q \geq 0; \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q \in A, \tag{2.6}$$

і

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^{q'} \lambda_i' \mathbf{b}_i;\ \sum_{i=1}^{q'} \lambda_i' = 1; \lambda_1', \ldots \lambda_{q'}' \geq 0; \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{q'} \in A'. \tag{2.7}$$

Нехай $\omega_{\min} = \min\{(\mathbf{a}_i, \mathbf{w}) \mid i = 1, 2, \ldots, q\}$ і $\omega'_{\max} = \max\{(\mathbf{b}_j, \mathbf{w}) \mid j = 1, 2, \ldots, q'\}$. На основі (2.5)-(2.7) маємо:

$$(\mathbf{d}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i (\mathbf{a}_i, \mathbf{w}) \geq \left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i \right) \omega_{\min} > \omega'_{\max} = \left(\sum_{j=1}^{q'} \lambda_j' \right) \omega'_{\max} \geq \sum_{j=1}^{q'} \lambda_j' (\mathbf{b}_j, \mathbf{w}) = (\mathbf{d}, \mathbf{w}).$$

Одержана нерівність $(\mathbf{d}, \mathbf{w}) > (\mathbf{d}, \mathbf{w})$ показує, що наше припущення, що $\mathrm{conv}A \cap \mathrm{conv}A' \neq \varnothing$ при $A_\xi = L_{\mathbf{w}}(q)$ є невірним. Отже, при $q \leq 2^{n-1}$, необхідність доведено.

У випадку, коли $q > 2^{n-1}$, для A' існує такий елемент $\sigma \in S_n$ і матриця толерантності $L_{\mathbf{v}} \in E_n$, що $(A')^\sigma = L_{\mathbf{v}}(q')$. Тоді, аналогічно, як у попередньому випадку, можна показати, що $(\mathbf{d}, \mathbf{v}) > (\mathbf{d}, \mathbf{v})$, якщо $\mathbf{d} \in \mathrm{conv}A \cap \mathrm{conv}A'$. Одержане протиріччя показує неможливість нашого припущення і в цьому випадку. Отже, необхідність доведено повністю.

Покажемо, що коли $\mathrm{conv}A \cap \mathrm{conv}A' = \varnothing$, то A допускає зображення матрицями толерантності з E_n.

За допомогою опуклих оболонок $\mathrm{conv}A$ і $\mathrm{conv}A'$ побудуємо множину

$$D = \{\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b} \mid \mathbf{a} \in \mathrm{conv}A,\ \mathbf{b} \in \mathrm{conv}A'\},$$

яка, очевидно, опукла і не містить нульовий вектор $\mathbf{0}$, оскільки $\mathrm{conv}A \cap \mathrm{conv}A' = \varnothing$. Опуклі оболонки $\mathrm{conv}A$ і $\mathrm{conv}A'$ компактні [5], отже, множина D також компактна, і тому замкнена. Тоді, на основі теореми про відокремлення [2], можна стверджувати, що для D у n-вимірному евклідовому просторі R^n існує така гіперплощина $\pi = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n \mid (\mathbf{p}, \mathbf{x}) = p_0\}$

$(\mathbf{p} \neq \mathbf{0}), p_0 \in \mathbb{R}$, яка задовольняє умови

$$p_0 = (\mathbf{p}, \mathbf{0}) = 0 \tag{2.8}$$

і для всіх $\mathbf{d} \in D$

$$(\mathbf{p}, \mathbf{d}) < p_0 . \tag{2.9}$$

Враховуючи, що $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ $(\mathbf{a} \in \mathrm{conv} A, \mathbf{b} \in \mathrm{conv} A')$ з останньої нерівності випливає, що

$$(\mathbf{p}, \mathbf{a}) < (\mathbf{p}, \mathbf{b}), \tag{2.10}$$

для будь-якого $\mathbf{a} \in \mathrm{conv} A$ і для довільного $\mathbf{b} \in \mathrm{conv} A'$. Отже, нерівність (2.10) має місце для всіх $\mathbf{a} \in A$ і для всіх $\mathbf{b} \in A'$. Якщо $q \leq 2^{n-1}$, то вектор $\mathbf{v} = -\mathbf{p}$ задовольняє нерівність:

$$\forall \mathbf{a} \in A, \ \forall \mathbf{b} \in A' \quad (\mathbf{v}, \mathbf{a}) > (\mathbf{v}, \mathbf{b}). \tag{2.11}$$

Тоді, як показано в [5], існує такий вектор $\mathbf{w} \in \Omega_n$, який задовольняє (2.11). Це означає, що з елементів множини A можна побудувати таку матрицю A_ξ, що $A_\xi = L_{\mathbf{w}}(q)$. Якщо $q > 2^{n-1}$, то $\mathbf{v} = \mathbf{p}$ і аналогічно до того, як вище зазначено для A, можна показати, що з елементів A' можна побудувати матрицю A'_ξ таку, що $A'_\xi = L_{\mathbf{w}'}(q')$, де $\mathbf{w}' \in \Omega_n$. Отже, теорему доведено.

Нехай $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in A \subset Z_2^n, \quad \mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega_n$ і

$$\mathbf{a}A = \{(\alpha_1 \oplus \beta_1, \ldots, \alpha_n \oplus \beta_n) \mid (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in A\}, \mathbf{aw} = ((-1)^{\alpha_1} \omega_1, \ \ldots, (-1)^{\alpha_n} \omega_n),$$

де $\oplus$ – сума за модулем 2.

Через $\mathbf{a}_i A_\xi$ позначимо матрицю, рядки якої побудовані з елементів множини $\mathbf{a}_i A$, де $\xi \in S_q$ $(q = |A|)$ задає порядок розташування елементів з $\mathbf{a}_i A$ у матриці $\mathbf{a}_i A_\xi$.

Теорема 2.4. [5] *Якщо в множині $A \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ існує такий елемент $\mathbf{a}_i$, що матриця $\mathbf{a}_i A_\xi$ містить s_i нульових стовпців і $|A| \leq 2^{n-s_i-1}$, то A допускає зображення матрицями толерантності з E_n тоді і тільки тоді, коли існують такі елементи $\sigma \in S_n, \xi \in S_q$ і матриця толерантності $V \in E^-_{m_i}$, що*

$$\mathbf{a}_i^\sigma A_\xi^\sigma = (V(q) 0 \ \ldots 0 \ ), \tag{2.12}$$

де $m_i = n - s_i$ і 0 – вектор стовпчик із нулів вимірності q.

Доведення. Дано, що матриця $\mathbf{a}_i A_\xi$ містить s_i нульових стовпців, $q = |A| \leq 2^{n-s_i-1}$ і допускає зображення матрицями толерантності з E_n. Тоді в E_n існує така матриця L і елемент $\sigma \in S_n$, що

$$L = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_i^{\sigma} A_{\xi}^{\sigma} \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & \overbrace{0 \;\ldots 0}^{s_i} \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Покажемо, що в множині $E_{m_i}^{-}$ є така матриця V, яка задовольняє умову $H = V(q)$. Нехай $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega_n^{-}$ і

$$(L_{\mathbf{w}} \nabla L_{\mathbf{w}}^{*}) \cdot \mathbf{w}^T = \mathbf{c}_{\mathbf{w}}^T. \tag{2.14}$$

Вектор $\mathbf{w}_1 = (\omega_1, \ldots, \omega_{m_i})$, очевидно, належить множині $\Omega_{m_i}^{-}$. Отже, існує така матриця толерантності $V_{\mathbf{w}_1} \in E_{m_i}^{-}$, що

$$(V_{\mathbf{w}_1} \nabla V_{\mathbf{w}_1}^{*}) \cdot \mathbf{w}_1^T = \mathbf{c}_{\mathbf{w}_1}^T. \tag{2.15}$$

На основі (2.13)-(2.15) робимо висновок, що перші q координати векторів $\mathbf{c}_{\mathbf{w}}$ і $\mathbf{c}_{\mathbf{w}_1}$ співпадають, тобто $H = V_{\mathbf{w}_1}(q)$ і $\mathbf{a}_i^{\sigma} A_{\xi}^{\sigma} = (V_{\mathbf{w}_1}(q) 0 \;\ldots 0\;)$. Отже, необхідність доведено.

Розглянемо множину матриць толерантності

$$\left\{ V_1 = \begin{pmatrix} V & 0_{m_i} \\ V^{*} & 0_{m_i} \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} V_1 & 0_{m_i+1} \\ V_1^{*} & 0_{m_i+1} \end{pmatrix}, \ldots, V_{s_i} = \begin{pmatrix} V_{s_i-1} & 0_{m_i+s_i-1} \\ V_{s_i-1}^{*} & 0_{m_i+s_i-1} \end{pmatrix} \right\},$$

де $V \in E_{m_i}^{-}$ і 0_{m_i} – вектор стовпчик із нулів вимірності 2^{m_i-1}. Матриця V_{s_i} належить E_n^{-} і має вигляд:

$$\begin{pmatrix} V & 0_{m_i} & \ldots & 0_{m_i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

Для матриці $V_{s_i} \in E_n^{-}$ існує вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega_n^{-}$ такий, що

$$(V_{s_i} \nabla V_{s_i}^{*}) \cdot \mathbf{w}^T = \mathbf{c}_{\mathbf{w}}^T. \tag{2.17}$$

З (2.12), (2.16) та (2.17) випливає, що $A_\xi = \mathbf{a}_i V_{s_i}^{\sigma^{-1}}(q)$. Теорему доведено.

2.3. Необхідні умови зображення множин бульових векторів матрицями толерантності

Для того, щоб відповісти на запитання, чи допускає множина $A \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ зображення матрицями толерантності з E_n, треба перевірити умови теореми 2.3. Ця перевірка є досить складною. Отже, встановлення простих необхідних умов зображення множин бульових векторів матрицями толерантності з E_n є актуальною і важливою задачею.

Теорема 2.5. *Якщо множина $A \subset \mathbb{Z}_2^n$ допускає зображення матрицями толерантності з E_n і $|A| \le 2^{n-1}$, тоді з того, що $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in A$, випливає $\overline{\mathbf{a}} = (\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n) \notin A$, де $\overline{\alpha}_i$ – інвертоване значення α_i.*

Доведення. Дано, що $A = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q\}$ допускає зображення матрицями з E_n і $q \le 2^{n-1}$. Отже, існує така матриця толерантності $L \in E_n$ і такий елемент $\xi \in S_q$, що $A_\xi = L(q)$. Рядки матриці L є елементами певного класу толерантності відносно $\tau : (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \tau (\beta_1, \ldots, \beta_n) \Leftrightarrow \exists i (\alpha_i = \beta_i)$. Однак, передматриця толерантності $L(q)$ одночасно не містить вектори $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\overline{\mathbf{a}} = (\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n)$, де $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – довільний рядок матриці $L(q)$. Теорему доведено.

Зауваження. Якщо $|A| > 2^{n-1}$, то множина $A' = \mathbb{Z}_2^n \setminus A$ задовольняє умови теореми 2.5.

Нехай $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_2^n$, $K_\mathbf{a} = \{i \mid \alpha_i = 1\}$ і $S(K_\mathbf{a})$ – множина всіх підмножин множини $K_\mathbf{a}$.

Теорема 2.6. *Якщо множина $A \subset \mathbb{Z}_2^n$ допускає зображення матрицями толерантності з E_n і $|A| \le 2^{n-1}$, то в A знайдеться такий елемент $\mathbf{a}_r$, що для довільного $\mathbf{a}$ з $\mathbf{a}_r A$ має місце співвідношення:*

$$\mathbf{a} \in \mathbf{a}_r A \Rightarrow \bigcup_{K_\mathbf{b} \in S(K_\mathbf{a})} \{\mathbf{b}\} \subset \mathbf{a}_r A.$$

Доведення. З того, що A допускає зображення матрицями толерантності з E_n і $|A| \le 2^{n-1}$, випливає існування таких $L \in E_n$ і $\xi \in S_q$ $(q = |A|)$, які задовольняють умову

$$A_\xi = L(q). \tag{2.18}$$

Нехай $L = L_\mathbf{w}$, тобто

$$(L \nabla L^*) \cdot \mathbf{w}^T = \mathbf{c}_\mathbf{w}^T. \tag{2.19}$$

Виберемо за $\mathbf{a}_r$ перший рядок матриці L і перетворимо рівність (2.18) так:

$$\mathbf{a}_r A_\xi = \mathbf{a}_r L(q).$$

Координати вектора $\mathbf{w}_1 = \mathbf{a}_r \mathbf{w}$ від'ємні, і матриця $L_{\mathbf{w}_1} = \mathbf{a}_r L$ задовольняє умову

$$(L_{\mathbf{w}_1} \nabla L^*_{\mathbf{w}_1}) \cdot \mathbf{w}_1^T = \mathbf{c}^T_{\mathbf{w}_1}. \tag{2.20}$$

Розташуємо координати вектора $\mathbf{w}_1$ у порядку спадання, тобто побудуємо вектор $\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1^\sigma$, де $\sigma \in S_n$. Тоді на основі (2.20) маємо:

$$(L_{\mathbf{w}_2} \nabla L^*_{\mathbf{w}_2}) \cdot \mathbf{w}_2^T = \mathbf{c}^T_{\mathbf{w}_2}, \tag{2.21}$$

де $L_{\mathbf{w}_2} = L^\sigma_{\mathbf{w}_1}$. Нехай $\mathbf{d}$ – довільний рядок матриці $\mathbf{a}_r^\sigma A_\xi^\sigma = L_{\mathbf{w}_2}(q)$, крім першого. Якщо $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}_2^n$ такий, що $K_\mathbf{b} \subset K_\mathbf{d}$ $(\mathbf{b} \neq \mathbf{d})$, то справджується нерівність $(\mathbf{d}, \mathbf{w}_2) < (\mathbf{b}, \mathbf{w}_2)$. З останньої нерівності та з (2.21) випливає, що порядковий номер рядка $\mathbf{d}$ у матриці $L_{\mathbf{w}_2}(q)$ більший за порядковий номер рядка $\mathbf{b}$, тобто, якщо $K_\mathbf{b} \subset K_\mathbf{d}$ $(\mathbf{b} \neq \mathbf{d})$, то $\mathbf{d} \in \mathbf{a}_r^\sigma A_\xi^\sigma \Rightarrow \mathbf{b} \in \mathbf{a}_r^\sigma A_\xi^\sigma$. Якщо через $\mathbf{a}$ позначимо вектор $\mathbf{b}^{\sigma^{-1}}$, то з останнього співвідношення безпосередньо випливає, що

$$\mathbf{a} \in \mathbf{a}_r A \Rightarrow \bigcup_{K_\mathbf{b} \in S(K_\mathbf{a})} \{\mathbf{b}\} \subset \mathbf{a}_r A$$

і теорему доведено.

Нехай $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ і $\|\mathbf{a}\| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Наслідок 1. *Якщо множина $A \subset \mathbb{Z}_2^n$ допускає зображення матрицями толерантності з E_n і $|A| \leq 2^{n-1}$, то в A знайдеться такий елемент $\mathbf{a}_r$, що для довільного $\mathbf{a}$ з $\mathbf{a}_r A$ та для будь-якого невід'ємного цілого числа $k < \|\mathbf{a}\|$ справджується нерівність*

$$|\{\mathbf{b} \in \mathbf{a}_r A \mid \|\mathbf{b}\| = k\}| \geq C^k_{\|\mathbf{a}\|},$$

де C_n^m – біномний коефіцієнт.

Нехай

$$A = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q\} \subset \mathrm{Z}_2^n,\ k_i^* = \max\{\|\mathbf{a}\| \mid \mathbf{a} \in \mathbf{a}_i A\} \text{ і } k_A^* = \min\{k_i^* \mid i = 1, 2, \ldots, q\}.$$

Наслідок 2. *Якщо множина $A \subset \mathbb{Z}_2^n$ допускає зображення матрицями толерантності з E_n і $|A| \leq 2^{n-1}$, тоді має місце нерівність*

$$|A| \geq 2^{k_A^*}.$$

Зауваження. Якщо A допускає зображення матрицями толерантності з E_n і $|A| > 2^{n-1}$, то множина $A' = \mathbb{Z}_2^n \setminus A$ задовольняє умови теореми 2.6.

Нехай $B = (\beta_{kr})$ – прямокутна $m \times n$ матриця над $\mathbb{Z}_2, A \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ $k(B) = \sum_{r=1}^{n} \beta_{kr}$ і $n(A) = \{i \mid \mathbf{e}_i \in A\}$.

Теорема 2.7. *Якщо множина $A \subset \mathbb{Z}_2^n$ допускає зображення матрицями толерантності з E_n і $2^j < |A| \le 2^{j+1}$ $(j \in \{1,2,\ldots,n-2\})$, тоді в A знайдеться такий елемент $\mathbf{a}_i$, що*

1) $\forall k \in \{1,2\ldots,|A|\}$ $k(\mathbf{a}_i A_\xi) \le j+1$,

2) $|n(\mathbf{a}_i A)| \ge j+1$.

Доведення. Дано, що множина $A \subset \mathbb{Z}_2^n$ допускає зображення матрицями толерантності з E_n і $2^j < |A| \le 2^{j+1}$ $(j \in \{1,2,\ldots,n-2\})$. Отже, існує така матриця толерантності $H \in E_n$ і такий елемент $\xi \in S_q$ $(q = |A|)$, що $A_\xi = H(q)$. Якщо через $\mathbf{a}_i$ позначимо перший рядок матриці A_ξ, то з останньої рівності маємо: $\mathbf{a}_i A_\xi = H_1(q)$, де $H_1 = \mathbf{a}_i H \in E_n^-$.

Розглянемо вектор $\mathbf{w} = (\omega_1,\ldots,\omega_n) \in \Omega_n^-$, координати якого задовольняють умови $\omega_1 = -1, \omega_i = \sum_{j=1}^{i-1} \omega_i - 1 (i = 2,3,\ldots,n)$ і систему матриць толерантності

$$L_1 = (0_1), L_2 = \begin{pmatrix} L_1 & 0_1 \\ L_1^* & 0_1 \end{pmatrix}, \ldots, L_n = \begin{pmatrix} L_{n-1} & 0_{n-1} \\ L_{n-1}^* & 0_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{2.22}$$

де 0_t – нульовий стовпчик розміру $2^{t-1} \times 1$. Легко бачити, що

$$(L_{\mathbf{w}} \nabla L_{\mathbf{w}}^*) \cdot \mathbf{w}^T = \mathbf{c}_{\mathbf{w}}^T. \tag{2.23}$$

Із побудови вектора $\mathbf{w}$ та (2.23) випливає, що будь-яка матриця $V \in E_n^-$ задовольняє умову: $\forall k \in \{1,2,\ldots,q\}$ $k(V) \le k(L_n) \le j+1$. Тоді на основі рівності $\mathbf{a}_i A_\xi = H_1(q)$ $(H_1 \in E_n^-)$ і $2^j < q \le 2^{j+1}$ $(j \in \{1,2,\ldots,\ldots,n\text{–}2\})$ робимо висновок, що $\forall k \in \{1,2,\ldots,q\}$ $k(\mathbf{a}_i A) \le j+1$.

Порядковий номер рядка $\mathbf{e}_i$ у будь-якій матриці толерантності $V \in E_n^-$ не більший за порядковий номер рядка $\mathbf{e}_i$ у матриці L_n $(i \in \{1,2,\ldots,n-1\})$. Отже, якщо через $L_n(q)$ і $V(q)$ позначити передматриці толерантності відповідних матриць L_n і V, то з (2.23) випливає $|n(V(q))| \ge$ $\ge |n(L_n(q))| = j+1$. З умови довільності матриці толерантності $V \in E_n^-$ і

$\mathbf{a}_i A_\xi = H_1(q)\,(H_1 \in E_n^-)$ випливає, що $|n(\mathbf{a}_i A)| \ge |n(L_n(q))| = j+1$. Теорему доведено.

Визначимо відстань $\rho(\mathbf{a},\mathbf{b})$ між елементами $\mathbf{a} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ і $\mathbf{b} = (\beta_1,\ldots,\beta_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ наступним чином:

$$\rho(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|.$$

Очевидно, $\rho(\mathbf{a},\mathbf{b})$ є число координат, у яких відрізняються вектори $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$.

Нехай $A \subseteq \mathbb{Z}_2^n$, $\mathbf{a},\mathbf{b}$ – довільні елементи з $A\,(\mathbf{a} \ne \mathbf{b})$ і $O(\mathbf{a},\mathbf{b})$ – множина таких орт-векторів $\mathbf{e}_{i_1},\ldots,\mathbf{e}_{i_s}$, що $\mathbf{a} \oplus \mathbf{b} = \mathbf{e}_{i_1} + \mathbf{e}_{i_2} + \ldots + \mathbf{e}_{i_s}$, де $\oplus$ – покоординатна сума векторів за модулем 2, $i_r \ne i_k$, якщо $r \ne k$. Позначимо через $H(\mathbf{a},\mathbf{b})$ підгрупу групи $\mathbb{Z}_2^n$ ($\mathbb{Z}_2^n$ утворює групу відносно операції $\oplus$), яка породжується елементами з $O(\mathbf{a},\mathbf{b})$, тобто $H(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \left\langle \mathbf{e}_{i_1},\ldots,\mathbf{e}_{i_s} \mid \mathbf{e}_{i_1},\ldots,\mathbf{e}_{i_s} \in O(\mathbf{a},\mathbf{b}) \right\rangle$.

Нехай $\mathbf{a} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n), \mathbf{b} = (\beta_1,\ldots,\beta_n) \in \mathbb{Z}_2^n$. Покоординатну кон'юнкцію векторів $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$ позначимо через $\mathbf{a}\,\&\,\mathbf{b} = (\alpha_1 \,\&\, \beta_1,\ldots,\alpha_n \,\&\, \beta_n)$ і через $H(\mathbf{a}\,\&\,\mathbf{b})$ позначимо суміжний клас групи $\mathbb{Z}_2^n$ за підгрупою $H(\mathbf{a},\mathbf{b})$, що визначається елементом $\mathbf{a}\,\&\,\mathbf{b}$, тобто $H(\mathbf{a}\,\&\,\mathbf{b}) = \mathbf{a}\,\&\,\mathbf{b} \oplus H(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

Теорема 2.8. *Якщо множина* $A \subset \mathbb{Z}_2^n\ (|A| \ge 2)$ *допускає зображення матрицями толерантності з* E_n, *тоді для будь-яких двох елементів* $\mathbf{a},\mathbf{b}$ *з* A, *для яких* $|H(\mathbf{a}\,\&\,\mathbf{b}) \cap A'| \ge 2\ (A' = \mathbb{Z}_2^n \setminus A)$ *і для будь-яких двох елементів* $\mathbf{g},\mathbf{h}$ *з* $H(\mathbf{a}\,\&\,\mathbf{b}) \cap A'$ *справджується нерівність* $\rho(\mathbf{g},\mathbf{h}) < \rho(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

Доведення. Нехай $\mathbf{a} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n), \mathbf{b} = (\beta_1,\ldots,\beta_n)$ – довільні елементи з $A\,(\mathbf{a} \ne \mathbf{b})$, $\mathbf{g} = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n), \mathbf{h} = (\delta_1,\ldots,\delta_n)$ – довільні елементи з $H(\mathbf{a}\,\&\,\mathbf{b}) \cap A'$ і $\rho = \rho(\mathbf{a},\mathbf{b})$. Не обмежуючи загальності міркувань, будемо вважати, що перші ρ координат векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ різні, а інші рівні, тобто $\alpha_i \ne \beta_i$ для $i = 1,2,\ldots,\rho$ і $\alpha_i = \beta_i, i = \rho+1,\ldots,n$. За теоремою 2.3 та з того, що A допускає зображення матрицями толерантності з E_n, випливає:

$$\mathrm{conv}A \cap \mathrm{conv}A' = \varnothing.$$

Отже,

$$\lambda_1 \mathbf{a} + (1-\lambda_1)\mathbf{b} \ne \lambda_2 \mathbf{g} + (1-\lambda_2)\mathbf{h}, \tag{2.24}$$

для всіх $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$.

Враховуючи, що точки $\mathbf{a},\mathbf{b}\,(\mathbf{a} \ne \mathbf{b}),\ \mathbf{g},\ \mathbf{h}\,(\mathbf{g} \ne \mathbf{h})$ є кутовими точками відповідних множин $\mathrm{conv}A, \mathrm{conv}A'$ і $A \cap A' = \varnothing$, нерівність (2.24) можна замінити нерівністю

$$\lambda_1(\mathbf{a}-\mathbf{b})+\mathbf{b} \neq \lambda_2(\mathbf{g}-\mathbf{h})+\mathbf{h} \tag{2.25}$$

за умови, що

$$\lambda_1 \in (0,1) \text{ та } \lambda_2 \in (0,1). \tag{2.26}$$

Із (2.25) випливає, що існує таке число $r \in \{1,\dots,\rho\}$, для якого має місце нерівність

$$\lambda_1(\alpha_r-\beta_r)+\beta_r \neq \lambda_2(\gamma_r-\delta_r)+\delta_r. \tag{2.27}$$

Покажемо, що з (2.25), (2.26) і $\alpha_r \neq \beta_r$ маємо $\gamma_r=\delta_r$, тобто $\rho(\mathbf{g},\mathbf{h})<\rho(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

Розглянемо наступні можливі випадки:

1. Нехай $\alpha_r=1$. Тоді $\beta_r=0$ і з (2.27) маємо $\lambda_1 \neq \lambda_2(\gamma_r-\delta_r)+\delta_r$. Звідси

$$\gamma_r-\delta_r \neq \frac{1}{\lambda_2}(\lambda_1-\delta_r). \tag{2.28}$$

Ліва частина нерівності (2.28) приймає значення з множини $\{-1,0,1\}$, оскільки $\gamma_r,\delta_r \in \mathbb{Z}_2$.

Права частина нерівності (2.28) у зв'язку з (2.26) не може дорівнювати 0 ні при яких значеннях λ_1, λ_2. Отже, нерівність (2.27) має місце при довільних $\lambda_1,\lambda_2 \in (0,1)$ тільки у тому випадку, коли $\gamma_r-\delta_r=0$. Отже, $\rho(\mathbf{g},\mathbf{h})<\rho(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

2. Нехай $\alpha_r \neq 0$. Тоді $\beta_r=1$ і з (2.27) випливає, що

$$-\lambda_1+1 \neq \lambda_2(\gamma_r-\delta_r)+\delta_r,$$

або

$$(\gamma_r-\delta_r) \neq \frac{1}{\lambda_2}(1-\lambda_1-\delta_r).$$

Як і в першому випадку, остання нерівність має місце для всіх $\lambda_1,\lambda_2 \in (0,1)$ тільки у тому випадку, коли $\gamma_r-\delta_r=0$. Отже, $\rho(\mathbf{g},\mathbf{h})<\rho(\mathbf{a},\mathbf{b})$. Теорему доведено.

Зауваження. У випадку, коли $|A|=0$, або $|A|=1$, множина A, очевидно, допускає зображення матрицями толерантності з E_n, якщо вважати, що порожня матриця (матриця без жодного рядка) є передматрицею довільної матриці толерантності з E_n.

Нехай B – прямокутна $m \times n$ матриця над $\mathbb{Z}_2$ і $s(i;B)$ – кількість одиниць i-го стовпчика матриці B.

Теорема 2.9. *Якщо множина $A \subset \mathbb{Z}_2^n$ допускає зображення матрицями* *толерантності з* E_n *і* $q = |A| \le 2^{n-1}$*, тоді існують такі елементи* $\mathbf{a}_t \in A, \xi \in S_q$ *та* $\sigma \in S_n$*, що для всіх* $i \in \{2,3,\ldots,n\}$ *має місце нерівність*

$$s(i-1;\mathbf{a}_t^{\sigma} A_{\xi}^{\sigma}) \ge s(i;\mathbf{a}_t^{\sigma} A_{\xi}^{\sigma}), \tag{2.29}$$

де $\mathbf{a}_t^{\sigma} A_{\xi}^{\sigma}$ *є передматрицею деякої матриці толерантності з* E_n^-.

Доведення. Дано, що A допускає зображення матрицями толерантності з E_n, тобто існує така матриця толерантності $L \in E_n$ і такий елемент $\xi \in S_q$, що

$$A_{\xi} = L(q). \tag{2.30}$$

Позначимо перший рядок матриці A_{ξ} через $\mathbf{a}_t$ і за допомогою цього елемента перетворимо (2.30) так:

$$\mathbf{a}_t A_{\xi} = \mathbf{a}_t L(q). \tag{2.31}$$

Матриця $L_{\mathbf{w}} = \mathbf{a}_t L$ визначає вектор $\mathbf{w} \in \Omega_n^-$, усі координати якого від'ємні, оскільки перша координата вектора $\mathbf{c}_{\mathbf{w}}^T = (L_{\mathbf{w}} \nabla L_{\mathbf{w}}^*) \cdot \mathbf{w}^T$ дорівнює 0. Елемент $\sigma \in S_n$ виберемо так, щоб координати вектора $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}^{\sigma}$ були розташовані у порядку спадання. Тоді матриця $L_{\mathbf{w}_1} = (\mathbf{a}_t L)^{\sigma} = \mathbf{a}_t^{\sigma} L^{\sigma}$ задовольняє умову $\left(L_{\mathbf{w}_1} \nabla L_{\mathbf{w}_1}^*\right) \cdot \mathbf{w}_1^T = c_{\mathbf{w}_1}^T$, тобто $L_{\mathbf{w}_1} \in E_n^-$. Застосовуючи перетворення $\sigma \in S_n$ до (2.31) маємо:

$$\mathbf{a}_t^{\sigma} A_{\xi}^{\sigma} = \mathbf{a}_t^{\sigma} L^{\sigma}(q) = L_{\mathbf{w}_1}(q). \tag{2.32}$$

Нехай $\mathbf{a} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-2},0,1,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)$ є рядком передматриці толерантності $L_{\mathbf{w}_1}(q)$. Тоді $\mathbf{b} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-2},1,\ 0,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)$ також буде рядком матриці $L_{\mathbf{w}_1}(q)$ і його порядковий номер у матриці $L_{\mathbf{w}_1}(q)$ буде менший від порядкового номера $\mathbf{a}$, оскільки $\mathbf{w}_1 \in \Omega_n^-$. Це означає, що для будь-якого $i \in \{2,3,\ldots,n\}$, для будь-якого $m \in \{1,2,\ldots,q\}$ виконується нерівність:

$$s\left(i-1; L_{\mathbf{w}_1}(m)\right) \ge s\left(i; L_{\mathbf{w}_1}(m)\right).$$

Теорему доведено.

Зауваження. Якщо $|A| > 2^{n-1}$, то теорема має місце для $A' = \mathbb{Z}_2^n \setminus A$.

Нехай $A = \{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_q\} \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ і $\{L_1,\ldots,L_n\}$ — множина матриць толерантності, елементи якої побудовані за рекурентним співвідношенням

(2.22). Через $p\left(\mathbf{a}_i^{\sigma_i} A^{\sigma_i}\right)$ позначимо матрицю, рядками якої є елементи максимальної підмножини множини $(\mathbf{a}_i A)^{\sigma_i}$, що задовольняють умову

$$(L_{j_i} \underbrace{0_{j_i} \ldots 0_{j_i}}_{n-j_i}) \nabla (L^*_{j_i} (q_0^i) \underbrace{0 \ldots 0}_{n-(j_i+1)}) \nabla \ldots \nabla (L^*_{j_i+r_i} (q_{r_i}^i) \underbrace{0 \ldots 0}_{n-(j_i+r_i+1)}),$$

де $q_0^i \geq q_1^i \geq \ldots \geq q_{r_i}^i$.

Отже,

$$p\left(\mathbf{a}_i^{\sigma_i} A^{\sigma_i}\right) = p_0\left(\mathbf{a}_i^{\sigma_i} A^{\sigma_i}\right) \nabla p_1\left(\mathbf{a}_i^{\sigma_i} A^{\sigma_i}\right) \nabla \ldots \nabla p_{r_i+1}\left(\mathbf{a}_i^{\sigma_i} A^{\sigma_i}\right),$$

де

$$p_0\left(\mathbf{a}_i^{\sigma_i} A^{\sigma_i}\right) = (L_{j_i} \underbrace{0_{j_i} \ldots 0_{j_i}}_{n-j_i});$$

$$p_1\left(\mathbf{a}_i^{\sigma_i} A^{\sigma_i}\right) = (L^*_{j_i} (q_0^i) \underbrace{0 \ldots 0}_{n-(j_i+1)});$$

....

$$p_{r_i+1}\left(\mathbf{a}_i^{\sigma_i} A^{\sigma_i}\right) = (L^*_{j_i+r_i} (q_{r_i}^i) \underbrace{0 \ldots 0}_{n-(j_i+r_i+1)})$$

і елемент $\sigma_i \in S_n$ визначається за теоремою 2.9. Нехай $\left|p\left(\mathbf{a}_i^{\sigma_i} A^{\sigma_i}\right)\right|$ – кількість рядків матриці $p\left(\mathbf{a}_i^{\sigma_i} A^{\sigma_i}\right)$ і $\left|p\left(\mathbf{a}_m^{\sigma_m} A^{\sigma_m}\right)\right| = \max\{\left|p\left(\mathbf{a}_i^{\sigma_i} A^{\sigma_i}\right)\right| \mid i = 1,2,\ldots,q\}$. Якщо множина $\left\{\left|p\left(\mathbf{a}_i^{\sigma_i} A^{\sigma_i}\right)\right| \mid i = 1,2,\ldots,q\right\}$ містить декілька максимальних елементів, то через $\left|p\left(\mathbf{a}_m^{\sigma_m} A^{\sigma_m}\right)\right|$ позначимо один із них. Пороговий оператор p із мітками $\mathbf{a}_m$ і σ_m відносно множини A визначимо так: $p(A) = p\left(\mathbf{a}_m^{\sigma_m} A^{\sigma_m}\right)$, тобто

$$p(A) = p_0(A) \nabla p_1(A) \nabla \ldots \nabla p_{t_0}(A), \tag{2.33}$$

де $p_s(A) = p_s\left(\mathbf{a}_m^{\sigma_m} A^{\sigma_m}\right), s = 0,1,\ldots,r_m + 1\ (t_0 = r_m + 1)$. Максимальну підмножину множини A, з елементів якої можна побудувати матрицю (2.33), назвемо p-підмножиною множини A з мітками $\mathbf{a}_m$ та σ_m і позначимо через $A^{(1)}$. Індекс j_0 p-підмножини $A^{(1)}$ визначимо так: $j_0 = \log_2 | p_0(A) | + 1$, де $| p_0(A) |$ – кількість рядків матриці $p_0(A)$.

Побудуємо наступну систему множин:

$$A_{j_0}^{(1)} = \{\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{j_0 - 1}, 1, \alpha_{j_0+1}, \ldots, \alpha_n) \mid \mathbf{a} \in (\mathbf{a}_m A)^{\sigma_m}\},$$

$$A_{j_0+1}^{(1)} = \{\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{j_0}, 1, \alpha_{j_0+2}, \ldots, \alpha_n) \mid \mathbf{a} \in (\mathbf{a}_m A)^{\sigma_m}\},$$

....

$$A_{j_0+t_0-1}^{(1)} = \{\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{j_0+t_0-2}, 1, \alpha_{j_0+t_0}, \ldots, \alpha_n) \mid \mathbf{a} \in (\mathbf{a}_m A)^{\sigma_m}\},$$

елементи якої будемо називати одноіндексними множинами p-розкладу множини A. До кожної з цих множин застосовуємо пороговий оператор p відповідно з мітками

$$\mathbf{e}_{j_0} = (0, \ldots, 0, \underset{(j_0)}{1}, 0, \ldots, 0), \sigma_m^{(1)},$$

$$\mathbf{e}_{j_0+1} = (0, \ldots, 0, \underset{(j_0+1)}{1}, 0, \ldots, 0), \sigma_m^{(1)},$$

$$\ldots$$

$$\mathbf{e}_{j_0+t_0-1} = (0, \ldots, 0, \underset{(j_0+t_0-1)}{1}, 0, \ldots, 0), \sigma_m^{(1)},$$

де $\sigma_m^{(1)}$ задовольняє умови:

1) $\forall j \in \{1, 2, \ldots, j_0 - 1, j_0 + t_0, j_0 + t_0 + 1, \ldots, n\}\ \sigma_m^{(1)}(j) = \sigma_m(j)$;

2) якщо $i, j \in \{j_0, j_0 + 1, \ldots, j_0 + t_0 - 1\}\ (i \neq j)$ і $\sigma_m^{(1)}(i) = \sigma_m(j)$, $\sigma_m^{(1)}(j) = \sigma_m(i)$, то це можливо тільки в тому випадку, коли сума одиниць у стовпчиках i та j матриці $(\mathbf{a}_m A)_\xi^{\sigma_m}$ $(\xi \in S_q)$ співпадають, тобто $s(i; (\mathbf{a}_m A)_\xi^{\sigma_m}) = s(j; (\mathbf{a}_m A)_\xi^{\sigma_m})$;

3) якщо $i, j \in \{j_0, j_0 + 1, \ldots, j_0 + t_0 - 1\}$ і $s(i; (\mathbf{a}_m A)_\xi^{\sigma_m}) \neq s(j; (\mathbf{a}_m A)_\xi^{\sigma_m})$, то $\sigma_m^{(1)}(i) = \sigma_m(i), \sigma_m^{(1)}(j) = \sigma_m(j)$.

Нехай

$$p\left(A_{j_0}^{(1)}\right) = p_0\left(A_{j_0}^{(1)}\right) \nabla\, p_1\left(A_{j_0}^{(1)}\right) \nabla \ldots \nabla\, p_{t_{j_0}}\left(A_{j_0}^{(1)}\right),$$

$$p\left(A_{j_0+1}^{(1)}\right) = p_0\left(A_{j_0+1}^{(1)}\right) \nabla\, p_1\left(A_{j_0+1}^{(1)}\right) \nabla \ldots \nabla\, p_{t_{j_0+1}}\left(A_{t_{j_0+1}}^{(1)}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.34)$$

$$p\left(A_{j_0+t_0-1}^{(1)}\right) = p_0\left(A_{j_0+t_0-1}^{(1)}\right) \nabla\, p_1\left(A_{j_0+t_0-1}^{(1)}\right) \nabla \ldots \nabla\, p_{t_{j_0+t_0-1}}\left(A_{t_{j_0+t_0-1}}^{(1)}\right)$$

і

$$p^2(A) = p_0(A)\nabla\left(\mathop{\nabla}_{i_0=j_0}^{j_0+t_0-1} p\left(A_{i_0}^{(1)}\right)\right). \qquad (2.35)$$

Максимальну підмножину множини A, з елементів якої можна побудувати матрицю $p^2(A)$, позначимо через $A^{(2)}$. Якщо враховувати, що $p_1(A) = \mathbf{e}_{j_0} p_0\left(A_{j_0}^{(1)}\right)$, $p_2(A) = \mathbf{e}_{j_0+1} p_0\left(A_{j_0+1}^{(1)}\right)$, …, $p_{t_0}(A) = \mathbf{e}_{j_0+t_0-1} p_0\left(A_{j_0+t_0-1}^{(1)}\right)$, то на основі (2.33)-(2.35) робимо висновок, що $A^{(1)} \subseteq A^{(2)}$.

Для кожного $i_0 \in \{j_0, j_0+1, \ldots, j_0+t_0-1\}$ побудуємо систему множин

$$A_{i_0,i_1(i_0)}^{(2)} = \left\{\mathbf{a} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{i_1(i_0)-1},1,\alpha_{i_1(i_0)+1},\ldots,\alpha_n) \mid \mathbf{a} \in \left(\mathbf{e}_{i_0} A_{i_0}^{(1)}\right)^{\sigma_m^{(1)}}\right\},$$

$$A_{i_0,i_1(i_0)+1}^{(2)} = \left\{\mathbf{a} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{i_1(i_0)},1,\alpha_{i_1(i_0)+2},\ldots,\alpha_n) \mid \mathbf{a} \in \left(\mathbf{e}_{i_0} A_{i_0}^{(1)}\right)^{\sigma_m^{(1)}}\right\},$$

$$\ldots$$

$$A_{i_0,i_1(i_0)+t_{i_0}-1}^{(2)} = \left\{\mathbf{a} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{i_1(i_0)+t_{i_0}-2},1,\ldots,\alpha_n) \mid \mathbf{a} \in \left(\mathbf{e}_{i_0} A_{i_0}^{(1)}\right)^{\sigma_m^{(1)}}\right\},$$

елементи якої будемо називати двоіндексними множинами p-розкладу множини A, і до кожної двоіндексної множини застосовуємо пороговий оператор p відповідно з мітками

$$\mathbf{e}_{i_1(i_0)} = (0,\ldots,0,\underset{(i_1(i_0))}{1},0,\ldots,0), \sigma_m^{(2)},$$

$$\mathbf{e}_{i_1(i_0)+1} = (0,\ldots,0,\underset{(i_1(i_0)+1)}{1},0,\ldots,0), \sigma_m^{(2)},$$

....

$$\mathbf{e}_{i_1(i_0)+t_{i_0}-1} = (0,\ldots,0,\underset{(i_1(i_0)+t_{i_0}-1)}{1},0,\ldots,0), \sigma_m^{(2)},$$

де $\sigma_m^{(2)}$ задовольняє умови:

1) $\forall j \in \{1,2,\ldots,i_1(i_0)-1, i_1(i_0)+t_{i_0}, i_1(i_0)+t_{i_0}+1,\ldots,n\}$ і $\sigma_m^{(2)}(j) = \sigma_m^{(1)}(j)$;

2) якщо $i, j \in \{i_1(i_0), i_1(i_0)+1,\ldots,i_1(i_0)+t_{i_0}-1\}$ $(i \neq j)$ і $\sigma_m^{(2)}(i) = \sigma_m^{(1)}(j)$, $\sigma_m^{(2)}(j) = \sigma_m^{(1)}(i)$, то це можливо тільки в тому випадку, коли сума одиниць у

стовпчиках i та j матриці $\left(\mathbf{e}_{i_0} A_{i_0}^{(1)}\right)_{\xi}^{\sigma_m^{(1)}}$ $(\xi \in S_q)$ співпадають, тобто $s\left(i;\left(\mathbf{e}_{i_0} A_{i_0}^{(1)}\right)_{\xi}^{\sigma_m^{(1)}}\right)=s\left(j;\left(\mathbf{e}_{i_0} A_{i_0}^{(1)}\right)_{\xi}^{\sigma_m^{(1)}}\right)$ і p-розклад множини $A_{i_0}^{(1)}$ буде інваріантним відносно такої перестановки $(i_0 \in \{j_0, j_0+1, \ldots, j_0+t_0-1\})$;

3) Якщо $i, j \in \{i_1(i_0)+1, \ldots, i_1(i_0)+t_{i_0}-1\}$ і $s\left(i;\left(\mathbf{e}_{i_0} A_{i_0}^{(1)}\right)_{\xi}^{\sigma_m^{(1)}}\right) \neq$ $\neq s\left(j;\left(\mathbf{e}_{i_0} A_{i_0}^{(1)}\right)_{\xi}^{\sigma_m^{(1)}}\right)$, то $\sigma_m^{(2)}(i)=\sigma_m^{(1)}(i)$, $\sigma_m^{(2)}(j)=\sigma_m^{(1)}(j)$.

Нехай

$$p\left(A_{i_0,i_1(i_0)}^{(2)}\right)=p_0\left(A_{i_0,i_1(i_0)}^{(2)}\right)\nabla \ldots \nabla\, p_{t_{i_0,i_1(i_0)}}\left(A_{i_0,i_1(i_0)}^{(2)}\right),$$

$$p\left(A_{i_0,i_1(i_0)+1}^{(2)}\right)=p_0\left(A_{i_0,i_1(i_0)+1}^{(2)}\right)\nabla \ldots \nabla\, p_{t_{i_0,i_1(i_0)+1}}\left(A_{i_0,i_1(i_0)+1}^{(2)}\right),$$

....

$$p\left(A_{i_0,i_1(i_0)+t_{i_0}-1}^{(2)}\right)=p_0\left(A_{i_0,i_1(i_0)+t_{i_0}-1}^{(2)}\right)\nabla \ldots \nabla\, p_{t_{i_0,i_1(i_0)+t_{i_0}-1}}\left(A_{i_0,i_1(i_0)+t_{i_0}-1}^{(2)}\right) \tag{2.36}$$

і

$$p^3(A)=p_0(A)\nabla\left(\mathop{\nabla}_{i_0=j_0}^{j_0+t_0-1}\left(p_0\left(A_{i_0}^{(1)}\right)\nabla\left(\mathop{\nabla}_{i_1=i_1(i_0)}^{i_1(i_0)+t_{i_0}-1} p\left(A_{i_0,i_1}^{(2)}\right)\right)\right)\right). \tag{2.37}$$

Максимальну підмножину множини A, з елементів якої можна побудувати матрицю (2.37), позначимо $A^{(3)}$. Якщо враховувати, що $p_1\left(A_{i_0}^{(1)}\right)=\mathbf{e}_{i_1(i_0)}p_0\left(A_{i_1(i_0)}^{(2)}\right), \ldots, p_{t_{i_0}}\left(A_{i_0}^{(1)}\right)=\mathbf{e}_{i_1(i_0)+t_{i_0}-1}p_0\left(A_{i_1(i_0)+t_{i_0}-1}^{(2)}\right)$, то на основі (2.34)-(2.37) можна стверджувати, що $A^{(2)} \subseteq A^{(3)}$. Аналогічно до того, як побудовано $A^{(3)}$ з $A^{(2)}$, можна побудувати $A^{(4)}$ з $A^{(3)}$ і т.д.

Елементи неспадної послідовності множин $A^{(1)} \subseteq A^{(2)} \subseteq A^{(3)} \subseteq \ldots$ відповідно будемо називати p-підмножинами першого, другого, третього, ... порядку множини A.

Теорема 2.10. *Якщо множина* $A \subset \mathbb{Z}_2^n$ *допускає зображення матрицями толерантності з* E_n *і* $|A| \leq 2^{n-1}$, *тоді в* A *існує такий елемент* $\mathbf{a}$, *таке число* $k \in \{1,2,\ldots,j_0-1\}$ $(2 \leq j_0 \leq n)$ *і такий елемент* $\sigma \in S_n$, *що*

$A = A^{(k)}$.

Доведення. Дано, що $|A| \leq 2^{n-1}$ і A допускає зображення матрицями толерантності з E_n, тобто існує такий елемент $\xi \in S_q$ $(q = |A|)$ і матриця $L_1 \in E_n$, що

$$A_\xi = L_1(q). \tag{2.38}$$

Нехай $L_1 = L_{\mathbf{w}_1}$, де $\mathbf{w}_1 \in \Omega_n$. Тоді

$$\begin{pmatrix} A_\xi \\ \dots \\ \dots \\ \\ \end{pmatrix} \cdot \mathbf{w}_1^T = \mathbf{c}_{\mathbf{w}_1}^T. \tag{2.39}$$

Виберемо елементи $\mathbf{a} \in A$ і $\sigma \in S_n$ таким чином, щоб $\mathbf{w} = (\mathbf{a}\mathbf{w}_1)^\sigma \in \Omega_n^-$, і за допомогою них перетворимо рівність (2.38):

$$\mathbf{a}^\sigma A_\xi^\sigma = \mathbf{a}^\sigma L_1^\sigma(q).$$

Вводимо позначення $A_1 = \mathbf{a}^\sigma A_\xi^\sigma$, $L = \mathbf{a}^\sigma L_1^\sigma$. Тоді на основі (2.39) вектор $\mathbf{w} = (\mathbf{a}\mathbf{w}_1)^\sigma \in \Omega_n^-$ і матриця A_1 задовольняє умову

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ \dots \\ \dots \\ \\ \end{pmatrix} \cdot \mathbf{w}^T = \mathbf{c}_{\mathbf{w}}^T. \tag{2.40}$$

Припустимо, що з елементів множини $A^{(1)}$ не можна побудувати матрицю A_1, тобто $A \neq A^{(1)}$ і

$$A^{(1)} = A^{(2)} = \ldots = A^{(j_0-1)}. \tag{2.41}$$

Це означає, що справджується нерівність

$$A_1 \neq (L_{j_0} \underbrace{0\ldots0}_{n-j_0}) \nabla (L_{j_0}^*(q_0)0\ldots0) \nabla \ldots \nabla (L_{j_0+t_0-1}^*(q_{t_0-1})0\ldots0). \tag{2.42}$$

З (2.41) та (2.42) випливає, що має місце одна з умов:

1) існують такі числа $i, j \in \{j_0, j_0+1, \ldots, j_0+t_0-1\}$, що

$i < j, s(i;A_1) > s(j;A_1)$ і $q_{i-j_0} < q_{j-j_0}$;

2) існує таке число $i \in \{j_0, j_0+1,\ldots, j_0+t_0-1\}$ і такий рядок $\mathbf{a}' = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ матриці A_1, що не належить множині рядків матриці $(L_i^*(q_{i-j_0}+1)\underbrace{0\ldots0}_{n-i})$, але є рядком матриці $(L_i^*(q_{i-j_0}+r)\underbrace{0\ldots0}_{n-r})$, де $r \in \{2,3,\ldots,2^{i-1}\}$;

3) існує таке число $i \in \{j_0+t_0, j_0+t_0+1,\ldots,n\}$ і такий рядок $\mathbf{a} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ матриці A_1, що є довільним рядком матриці $(L_i^*\underbrace{0\ldots0}_{n-i})$, крім першого.

Нехай має місце випадок 1. З того, що вектор $\mathbf{w} = (\omega_1,\ldots$ $\ldots,\omega_i,\ldots,\omega_j,\ldots,\omega_n) \in \Omega_n^-$, маємо $\omega_i > \omega_j$. Отже, вектори $\mathbf{a}'$ та $\mathbf{b}'$ з однаковими порядковими номерами у відповідних матрицях $(L_i^*\underbrace{0\ldots0}_{n-i})$, $(L_j^*\underbrace{0\ldots0}_{n-j})$ задовольняють нерівність

$$(\mathbf{a}',\mathbf{w}) > (\mathbf{b}',\mathbf{w}). \tag{2.43}$$

Із побудови матриці $(L_r^*\underbrace{0\ldots0}_{n-r})$ $(r \in \{1,2,\ldots,n\})$ випливає: якщо порядковий номер рядка $\mathbf{a}_1$ в матриці $(L_r^*\underbrace{0\ldots0}_{n-r})$ менший від порядкового номера рядка $\mathbf{a}_2$, то

$$(\mathbf{a}_1,\mathbf{w}) > (\mathbf{a}_2,\mathbf{w}). \tag{2.44}$$

Враховуючи умови (2.41)-(2.44), робимо висновок, що матриця A_1 не може задовольняти рівність (2.40). Одержане протиріччя показує, що випадок 1 не може мати місце. Нехай має місце випадок 2. Тоді в множині рядків матриці A_1 можна вказати такий вектор $\mathbf{a}'$ з порядковим номером $n(\mathbf{a}')$ в матриці $(L_i^*(q_{i-j_0}+r)\underbrace{0\ldots0}_{n-i})$ $(r > 2)$, що $(\mathbf{a}',\mathbf{w}) > (\mathbf{b}',\mathbf{w})$, де $\mathbf{b}'$ не входить у множину рядків матриці A_1 і $n(\mathbf{b}') = q_{i-j_0}+1 < n(\mathbf{a}')$. Нерівність $(\mathbf{a}',\mathbf{w}) > (\mathbf{b}',\mathbf{w})$ при умові $n(\mathbf{a}') > n(\mathbf{b}')$ суперечить побудові матриці $(L_i^*\underbrace{0\ldots0}_{n-i})$, а це означає, що випадок 2 не може мати місце, якщо виконуються умови (2.40)-(2.42).

Припустимо, що має місце випадок 3. Якщо через $\mathbf{a}' = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},1,0,\ldots,0)$ позначити рядок матриці A_1, що є рядком матриці $(L_i^*\underbrace{0\ldots0}_{n-i})$, крім першого, то хоча б одна координата $\alpha_r \neq 0$ $(r \in \{1,2,\ldots,i-1\})$ і $(\mathbf{a}',\mathbf{w}) > (\mathbf{e}_i,\mathbf{w})$, де $\mathbf{e}_i = (0,\ldots,0,\underset{(i)}{1},0,\ldots,0)$. З останньої нерівності безпосередньо випливає $\alpha_1\omega_1+\ldots+\alpha_{i-1}\omega_{i-1} > 0$, що суперечить умові

$\mathbf{w}=(\omega_1,\ldots,\omega_n)\in\Omega_n^-$. Отже, якщо виконуються умови (2.40) і (2.41), то нерівність (2.42) не може мати місце, а це означає, що $A=A^{(1)}$.

Розглянемо випадок, коли множина $A^{(1)}$ є власною підмножиною множини $A^{(2)}$ і множини $A^{(2)},A^{(3)},\ldots,A^{(j_0-1)}$ співпадають, тобто

$$A^{(1)}\subset A^{(2)}=A^{(3)}=\ldots=A^{(j_0-1)}, \tag{2.45}$$

але з елементів множини $A^{(2)}$ не можна побудувати матрицю A_1, що задовольняє (2.40). З елементів множини $A^{(2)}$ за допомогою порогового оператора p із відповідними мітками можна побудувати матрицю:

$$p^2(A)=p_0(A)\nabla\left(p_0\left(A_{j_0}^{(1)}\right)\nabla p_1\left(A_{j_0}^{(1)}\right)\nabla\ldots\nabla p_{t_{j_0}}\left(A_{j_0}^{(1)}\right)\right)\nabla$$

$$\nabla\left(p_0\left(A_{j_0+1}^{(1)}\right)\nabla p_1\left(A_{j_0+1}^{(1)}\right)\nabla\ldots\nabla p_{t_{j_0+1}}\left(A_{j_0+1}^{(1)}\right)\right)\nabla\ldots$$

$$\ldots\nabla\left(p_0\left(A_{j_0+t_0-1}^{(1)}\right)\nabla\ldots\nabla p_{t_{j_0+t_0-1}}\left(A_{j_0+t_0-1}^{(1)}\right)\right).$$

Якщо припускати, що $A_1\neq p^2(A)$, то на основі (2.45) можна стверджувати, що серед блоків:

$$p_1^2(A)=p_0\left(A_{j_0}^{(1)}\right)\nabla p_1\left(A_{j_0}^{(1)}\right)\nabla\ldots\nabla p_{t_{j_0}}\left(A_{j_0}^{(1)}\right),$$

………………………………………………………

$$p_2^2(A)=p_0\left(A_{j_0+1}^{(1)}\right)\nabla p_1\left(A_{j_0+1}^{(1)}\right)\nabla\ldots\nabla p_{t_{j_0+1}}\left(A_{j_0+1}^{(1)}\right),$$

…………………………………………………………….

$$p_{t_0}^2(A)=p_0\left(A_{j_0+t_0-1}^{(1)}\right)\ \nabla\ldots\nabla\ p_{t_{j_0+t_0-1}}\left(A_{j_0+t_0-1}^{(1)}\right)$$

матриці $p^2(A)$ існує хоча б один блок, для якого має місце один з попередніх випадків відносно відповідних параметрів цього блока. Це означає, що нерівність $A_1\neq p^2(A)$ не справджується при (2.45), тобто $A=A^{(2)}$.

У випадку, коли

$$A^{(1)}\subset\ldots\subset A^{(k-1)}\subset A^{(k)}=A^{(k+1)}=\ldots=A^{(j_0-1)}, \tag{2.46}$$

шляхом аналогічних міркувань можна показати, що нерівність $A_1\neq p^k(A)$ не може мати місце при умові (2.46). Отже, $A = A^{(k)}$. Теорему доведено.

Зауваження. Слід зазначити, що в (2.46) включення "$\subset$" – власна підмножина частково може бути замінено на "=", тобто (2.46) може бути переписано так:

$$A^{(1)} = A^{(2)} = \ldots = A^{(k_1)} \subset A^{(k_1+1)} = \ldots = A^{(k_2)} \subset$$

$$\subset A^{(k_2+1)} \subset \ldots \subset A^{(k)} = A^{(k+1)} = \ldots = A^{(j_0-1)},$$

і, очевидно, це не впливає на одержаний результат.

2.4. Достатні умови зображення множин бульових векторів матрицями толерантності

У цьому параграфі розглянемо достатні умови зображення множин бульових векторів матрицями толерантності з E_n, які можуть бути успішно використані при синтезі нейромереж для розпізнавання дискретних сигналів, при представленні дискретних зображень у нейробазисі та при синтезі комбінаційних схем із нейроелементів.

Нехай $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_q\} \subset \mathbb{Z}_2^n \ (q \le 2^{n-1})$ і $\{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ – система матриць толерантності, елементи якої побудовані за рекурентним співвідношенням (2.22).

Застосовуємо пороговий оператор p з мітками $\mathbf{a}_m$ і σ_m ($\mathbf{a}_m \in A$) відносно множини A, тобто $p(A) = p\left(\mathbf{a}_m^{\sigma_m} A^{\sigma_m}\right)$ і

$$p(A) = p_0(A) \nabla\, p_1(A) \nabla \ldots \nabla\, p_{t_0}(A), \tag{2.47}$$

де

$$p_0(A) = p_0\left(\mathbf{a}_m^{\sigma_m} A^{\sigma_m}\right) = (L_{j_m} 0_{j_m} \ldots 0_{j_m});$$

$$p_1(A) = p_1\left(\mathbf{a}_m^{\sigma_m} A^{\sigma_m}\right) = (L^*_{j_m}(q_0^m)\underbrace{0\ldots0}_{n-j_m});$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_{t_0}(A) = p_{t_0}\left(\mathbf{a}_m^{\sigma_m} A^{\sigma_m}\right) = (L^*_{j_m+t_0-1}(q^m_{t_0-1})\underbrace{0\ldots0}_{n-(j_m+t_0-1)})$$

і $q_0^m \ge q_1^m \ge \ldots \ge q^m_{t_0-1} > 0$. Відносно цього порогового оператора знаходимо p-

підмножину $A^{(1)}$ множини A.

Теорема 2.11. *Якщо* $A = A^{(1)}$*, то множина* A *допускає зображення матрицями толерантності з* E_n.

Доведення. Дано, що $A = A^{(1)}$. Це означає, що існують такі елементи $\mathbf{a}_m \in A$ і $\sigma_m \in S_n$, відносно яких з елементів множини $\mathbf{a}^{\sigma_m} A^{\sigma_m}$ можна побудувати матрицю $p(A)$ (2.47). Покажемо, що існує такий n-вимірний дійсний вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, який задовольняє умову

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{a}_m^{\sigma_m} A^{\sigma_m}, \forall \mathbf{y} \in \mathbb{Z}_2^n \setminus \mathbf{a}_m^{\sigma_m} A^{\sigma_m} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{w}) > (\mathbf{y}, \mathbf{w}). \tag{2.48}$$

Матриця $p(A) = p\left(\mathbf{a}_m^{\sigma_m} A^{\sigma_m}\right)$ допускає зображення (2.47), тобто, t_0 – найменше таке додатне ціле число, що $q_{t_0}^m \neq 0$ і $q_{t_0+1}^m = \ldots = q_{n-j_m}^m = 0$, де j_m – індекс p-підмножини $A^{(1)}$. Позначимо через $\mathbf{z}_0, \ldots, \mathbf{z}_{t_0-1}$ останні рядки відповідних матриць $p_1(A), \ldots, p_{t_0}(A)$, коли $t_0 \geq 2$ і побудуємо вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots \ldots, \omega_n)$ наступним чином:

1) $\omega_1 = -1, \omega_2 = \omega_1 - 1, \ldots, \omega_{j_m} = \sum\limits_{i=1}^{j_m-1} \omega_i - 1;$

2) координати ω_{j_m+s} послідовно знаходимо з рівностей:

$$\begin{aligned}&(\mathbf{z}_s, (\omega_1, \ldots, \omega_{j_m}, \ldots, \omega_{j_m+s}, 0, \ldots, 0)) = \\ &\quad = (\mathbf{z}_{s-1}, (\omega_1, \ldots, \omega_{j_m+s-1}, 0, \ldots, 0)),\ s = 1, \ldots, t\ (t = t_0 - 1);\end{aligned}$$

3) $\omega_{j_m+1} = \ldots = \omega_n = (\mathbf{z}_t, (\omega_1, \ldots, \omega_{j_m} \ldots, \omega_{j_m+t}, 0, \ldots, 0)) - 1$.

Побудований таким чином вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ задовольняє умову (2.48). Тоді для вектора $\mathbf{w}_1 = \mathbf{a}_m \mathbf{w}^{\sigma_m^{-1}}$ маємо:

$$\forall \mathbf{x} \in A,\ \forall \mathbf{y} \in \mathbb{Z}_2^n \setminus A \quad (\mathbf{x}, \mathbf{w}_1) > (\mathbf{y}, \mathbf{w}_1). \tag{2.49}$$

З останньої нерівності та з [5] безпосередньо випливає існування такого вектора $\mathbf{v} \in \Omega_n$, який також задовольняє (2.49). Отже, з елементів множини A можна побудувати передматрицю толерантності $L_{\mathbf{v}}(q)$, де q – кількість елементів множини A і в цьому випадку $(t_0 \geq 2)$ теорему доведено. Якщо $t_0 = 0$ або $t_0 = 1$, то з властивостей матриць толерантності множини E_n випливає, що A допускає зображення матрицями толерантності з E_n. Отже, теорему доведено повністю.

Теорема 2.12. *Якщо кількість елементів множини бульових векторів*

$A \subset \mathbb{Z}_2^n$ менша від числа 12, то A допускає зображення матрицями толерантності з E_n тоді і тільки тоді, коли $A = A^{(1)}$.

Доведення. Дано, що $|A| < 12$ і A допускає зображення матрицями толерантності з E_n, тобто існує така матриця $L_{\mathbf{w}} \in E_n$, перші $q = |A|$ рядки якої можуть бути побудовані з елементів A. Через $\mathbf{a}_m$ позначимо елемент з A, що є першим рядком матриці $L_{\mathbf{w}}$, і σ_m – такий елемент групи S_n, що $\mathbf{w}_1 = (\mathbf{a}_m \mathbf{w})^{\sigma_m} \in \Omega_n^-$. Тоді матриця $L_{\mathbf{w}_1}(q)$ допускає одне із зображень:

1) якщо $q = 1$, то

$$L_{\mathbf{w}_1}(1) = (L_1 \underbrace{0\ldots0}_{n-1}), \tag{2.50}$$

2) якщо $1 < q < 12$, то

$$L_{\mathbf{w}_1}(q) = (L_2 \underbrace{0\ldots0}_{n-2}) \nabla \left(\mathop{\nabla}_{i=0}^{n_2} (L^*_{2+i}(q_i) \underbrace{0\ldots0}_{n-(2+i)}) \right), \tag{2.51}$$

де $1 = q_0 = q_1 = \ldots = q_{n_2}, n_2 \leq 9$,

або

$$L_{\mathbf{w}_1}(q) = (L_3 \underbrace{0\ldots0}_{n-3}) \nabla \left(\mathop{\nabla}_{i=0}^{n_3} (L^*_{3+i}(q_i) \underbrace{0\ldots0}_{n-(3+i)}) \right), \tag{2.52}$$

де $3 \geq q_0 \geq q_1 \geq \ldots \geq q_{n_3} > 0$ і n_3 визначається з нерівності $q_0 + q_1 + \ldots + + q_{n_3} \leq 7$, або

$$L_{\mathbf{w}_1}(q) = (L_4 \underbrace{0\ldots0}_{n-4}) \nabla \left(\mathop{\nabla}_{i=0}^{n_4} (L^*_{4+i}(q_i) \underbrace{0\ldots0}_{n-(4+i)}) \right), \tag{2.53}$$

де $3 \geq q_0 \geq q_1 \geq \ldots \geq q_{n_4} > 0$ і n_4 визначається з нерівності $q_0 + q_1 + \ldots + + q_{n_4} \leq 3$.

На основі (2.50)-(2.53) можна стверджувати, що всі елементи множини A входять у підмножину $A^{(1)}$, тобто $A = A^{(1)}$.
Достатність випливає з теореми 2.11.

Теорема 2.13. *Якщо $A = A^{(2)}, |A| \leq 2^{n-1}$ і блоки*

$$p_1^2(A) = p_0\left(A_{j_0}^{(1)}\right)\nabla\, p_1\left(A_{j_0}^{(1)}\right)\nabla\ldots\nabla\, p_{t_{j_0}}\left(A_{j_0}^{(1)}\right),$$

$$p_2^2(A) = p_0\left(A_{j_0+1}^{(1)}\right)\nabla\, p_1\left(A_{j_0+1}^{(1)}\right)\nabla\ldots\nabla\, p_{t_{j_0+1}}\left(A_{j_0+1}^{(1)}\right),$$

....

$$p_{t_0}^2(A) = p_0\left(A_{j_0+t_0-1}^{(1)}\right)\nabla\ldots\nabla\, p_{t_{j_0+t_0-1}}\left(A_{j_0+t_0-1}^{(1)}\right),$$

матриці

$$p^2(A) = p_0(A)\nabla\, p_1^2(A)\nabla\ldots\nabla\, p_{t_0}^2(A)$$

задовольняють умови:

1) $\left|p_0\left(A_{j_0+i}^{(1)}\right)\right| = \left|p_0\left(A_{j_0+i+1}^{(1)}\right)\right|, i = 0,1,\ldots,t_0-2$;

2) *при кожному фіксованому* $i \in \{0,1,\ldots,t_0-2\}$ $t_{j_0+i} = t_{j_0+i+1}$ *і для кожного* $k \in \{1,2,\ldots,t_{j_0+i+1}\}$

$$\left|p_k\left(A_{j_0+i}^{(1)}\right)\right| - \left|p_k\left(A_{j_0+i+1}^{(1)}\right)\right| = q_i \geq 0,$$

тоді множина A *допускає зображення матрицями толерантності з* E_n.

Доведення. Дано, що $A = A^{(2)}$ і $|A| \leq 2^{n-1}$, тобто існують такі елементи $\mathbf{a} \in A$ і $\sigma \in S_n$, відносно яких з елементів множини $\mathbf{a}^\sigma A^\sigma$ можна побудувати $p^2(A) = p_0(A)\nabla\, p_1^{(2)}(A)\nabla\ldots\nabla\, p_{t_0}^{(2)}(A)$. Покажемо, що коли блоки $p_1^{(2)}(A), p_2^{(2)}(A),\ldots, p_{t_0}^{(2)}(A)$ матриці задовольняють умови 1, 2, то існує такий n-вимірний вектор $\mathbf{w} = (\omega_1,\ldots,\omega_n)$, для якого має місце нерівність

$$\forall \mathbf{x} \in a^\sigma A^\sigma, \forall \mathbf{y} \in \mathbb{Z}_2^n \setminus a^\sigma A^\sigma \quad (\mathbf{x},\mathbf{w}) > (\mathbf{y},\mathbf{w}). \tag{2.54}$$

Нехай $j_1 = \log_2\left|p_0\left(A_{j_0}^{(1)}\right)\right| + 1$ $(j_1 < j_0)$ і

$$\omega_1 = -1, \omega_2 = \omega_1 - 1, \ldots, \omega_{j_1} = \sum_{i=1}^{j_1-1}\omega_i - 1.$$

Позначимо через $\mathbf{z}_0,\ldots,\mathbf{z}_{t_{j_0}-1}$ останні рядки відповідних матриць $p_1\left(A_{j_0}^{(1)}\right),\ldots, p_{t_{j_0}}\left(A_{j_0}^{(1)}\right)$, коли $t_0 \geq 2$ і координати ω_{j_1+s} послідовно знаходимо з рівностей:

$$(\mathbf{z}_s,(\omega_1,\omega_{j_1},\ldots,\omega_{j_1+s},0,\ldots,0)) =$$

$$= (\mathbf{z}_{s-1},(\omega_1,\omega_{j_1},\ldots,\omega_{j_1+s-1},0,\ldots,0)), s = 1,2,\ldots,t_{j_0}-1.$$

Параметри j_0, j_1 та $t_{j_0}-1$ пов'язані з одним із співвідношень:

a) $j_0-(j_1+t_{j_0}-1)>1$;

b) $j_0-(j_1+t_{j_0}-1)=1$.

У першому випадку координати $\omega_{j_1+t_{j_0}}, \omega_{j_1+t_{j_0}+1}, \ldots, \omega_{j_0-1}$ вектора $\mathbf{w}$ знаходимо наступним чином:

$$\omega_{j_1+t_{j_0}}=\ldots=\omega_{j_0-1}=(\mathbf{z}_t,(\omega_1,\ldots,\omega_{j_1+t},0,\ldots,0))-1,$$

де $t=t_{j_0}-1$.

У другому випадку координати $\omega_1,\ldots,\omega_{j_1},\ldots,\omega_{j_0-1}$ вектора $\mathbf{w}$ уже визначені. Координату ω_{j_0} визначимо за формулою: $\omega_{j_0}=\sum_{i=1}^{j_0-1}\omega_i-1$. Тоді з умови 2 для координат ω_{j_0+i} маємо: $\omega_{j_0+i}=\omega_{j_0+i-1}-q_{i-1}(i=1,2,\ldots,t_0-1)$. Координати $\omega_{j_0+t_0}, \omega_{j_0+t_0+1}\ldots,\omega_n$ знаходимо за формулою:

$$\omega_{j_0+t_0}=\ldots=\omega_n=(\mathbf{z}_0,(\omega_1,\ldots,\omega_{j_1},0,\ldots,0))+\omega_{j_0}-1.$$

Тоді вектор $\mathbf{w}=(\omega_1,\ldots,\omega_n)$ задовольняє умову (2.54) і для вектора $\mathbf{w}_1=\mathbf{a}\mathbf{w}^{\sigma^{-1}}$ маємо:

$$\forall\mathbf{x}\in A,\forall\mathbf{y}\in\mathbb{Z}_2^n\setminus A\quad(\mathbf{x},\mathbf{w}_1)>(\mathbf{y},\mathbf{w}_1). \tag{2.55}$$

Із останньої нерівності та з [5] випливає існування такого вектора $\mathbf{v}\in\Omega_n$, який також задовольняє (2.55). Отже, з елементів множини A можна побудувати передматрицю толерантності $L_{\mathbf{v}}(q)\,(q=|A|)$ і в цьому випадку теорему доведено. Якщо $t_{j_0}=0$, або $t_{j_0}=1$, то $A^{(2)}=A^{(1)}$ і вектор $\mathbf{w}$ будується за теоремою 2.11. Отже, теорему доведено.

Теорема 2.14. *Якщо* $A=A^{(m)}, |A|\le 2^{n-1}\ (m\ge 2)$ *і*

$$p(A)=p_0(A)\nabla p_1(A),\ j_0=\log_2|p_0(A)|+1;$$

$$p\left(A_{j_0}^{(1)}\right)=p_0\left(A_{j_0}^{(1)}\right)\nabla p_1\left(A_{j_0}^{(1)}\right), j_1=\log_2|p_0\left(A_{j_0}^{(1)}\right)|+1;$$

$$p\left(A_{j_1,j_0}^{(2)}\right)=p_0\left(A_{j_1,j_0}^{(2)}\right)\nabla p_1\left(A_{j_1,j_0}^{(2)}\right), j_2=\log_2|p_0\left(A_{j_1,j_0}^{(2)}\right)|+1;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p\left(A_{j_{m-3},\ldots,j_1,j_0}^{(m-2)}\right)=p_0\left(A_{j_{m-3},\ldots,j_1,j_0}^{(m-2)}\right)\nabla p_1\left(A_{j_{m-3},\ldots,j_1,j_0}^{(m-2)}\right), \tag{2.56}$$

$$j_{m-2}=\log_2|p_0\left(A_{j_{m-3},\ldots,j_1,j_0}^{(m-2)}\right)|+1;$$

$$p\left(A^{(m-1)}_{j_{m-2},\ldots,j_1,j_0}\right)= p_0\left(A^{(m-1)}_{j_{m-2},\ldots,j_1,j_0}\right)\nabla\ldots\nabla\, p_{t_m}\left(A^{(m-1)}_{j_{m-2},\ldots,j_1,j_0}\right),$$

тоді множина A *допускає зображення матрицями толерантності з* E_n.

Доведення. З того, що $A = A^{(m)}$ і матриці $p(A)$, $p\left(A^{(1)}_{j_0}\right),\ldots$ $\ldots, p\left(A^{(m-1)}_{j_{m-2},\ldots,j_1,j_0}\right)$ задовольняють умову (2.56), випливає: в множині A та в групі S_n відповідно існують такі елементи $\mathbf{a}$, σ, що з елементів множини $\mathbf{a}^{\sigma}A^{\sigma}$ можна побудувати матрицю:

$$\begin{aligned} p^m(A) = p_0(A)\,\nabla\, p_0\left(A^{(1)}_{j_0}\right)\nabla\, p_0\left(A^{(2)}_{j_1,j_0}\right)\nabla\ldots \\ \nabla\, p_0\left(A^{(m-1)}_{j_{m-2},\ldots,j_1,j_0}\right)\nabla\ldots\nabla\, p_{t_m}\left(A^{(m-1)}_{j_{m-2},\ldots,j_1,j_0}\right). \end{aligned} \qquad (2.57)$$

Нехай $\mathbf{z}_1,\ldots,\mathbf{z}_{t_m}$ – останні рядки відповідних блоків:

$$p_1\left(A^{(m-1)}_{j_{m-2},\ldots,j_1,j_0}\right),\ldots, p_{t_m}\left(A^{(m-1)}_{j_{m-2},\ldots,j_1,j_0}\right)$$

і $j_{m-1} = \log_2\left|p_0\left(A^{(m-1)}_{j_{m-2},\ldots,j_1,j_0}\right)\right| + 1$. Побудуємо n-вимірний вектор $\mathbf{w} = (\omega_1,\ldots,\omega_n)$, що задовольняє умову:

$$\forall \mathbf{x}\in \mathbf{a}^{\sigma}A^{\sigma} \;\; ^3\forall \mathbf{y}\in \mathbb{Z}_2^n \setminus \mathbf{a}^{\sigma}A^{\sigma} \quad (\mathbf{x},\mathbf{w}) > (\mathbf{y},\mathbf{w}). \qquad (2.58)$$

Перші j_{m-1} координати вектора $\mathbf{w}$ визначимо так:

$$\omega_1 = -1,\ \omega_2 = \omega_1 - 1,\ldots,\omega_{j_{m-1}} = \omega_1 + \ldots + \omega_{j_{m-1}-1} - 1.$$

Координати $\omega_{j_{m-1}+1},\ldots,\omega_{j_{m-1}+t_m-1}$ послідовно знаходимо з рівностей:

$$(\mathbf{z}_i,(\omega_1,\ldots,\omega_{j_{m-1}+i-1},0,\ldots,0)) = (\mathbf{z}_{i+1},(\omega_1,\ldots,\omega_{j_{m-1}+i},0,\ldots,0)),$$

де $i = 1,2,\ldots,t_m - 1$. Індекси j_{m-2}, j_{m-1} відповідних p-підмножин $A^{(m-1)}, A^{(m)}$ задовольняють одну з умов:

1) $j_{m-2} = j_{m-1} + t_m$,
2) $j_{m-2} > j_{m-1} + t_m$.

У першому випадку координату $\omega_{j_{m-2}}$ вектора $\mathbf{w}$ знаходимо за формулою $\omega_{j_{m-2}} = \omega_1 + \ldots + \omega_{j_{m-1}+t_m-1} - 1$. У другому випадку спочатку визначимо

$$\omega_{j_{m-1}+t_m} = \omega_{j_{m-1}+t_m+1} = \ldots = \omega_{j_{m-2}-1} = (\mathbf{z}_{t_m},(\omega_1,\ldots,\omega_{j_{m-1}+t_m-1},0,\ldots,0)) - 1,$$

а потім $\omega_{j_{m-2}} = \omega_1 + \ldots + \omega_{j_{m-2}-1} - 1$.

Нехай k послідовно пробігає множину $\{3,4,\ldots,m\}$, і для кожного фіксованого значення k розглянемо різницю $j_{m-k} - j_{m-(k-1)}$:

1) якщо $j_{m-k} - j_{m-(k-1)} = 1$, тоді $\omega_{j_{m-k}} = \omega_1 + \ldots + \omega_{j_{m-(k-1)}} - 1$;

2) якщо $j_{m-k} - j_{m-(k-1)} > 1$, тоді

$$\omega_{j_{m-(k-1)}+1} = \omega_{j_{m-(k-1)}+2} = \ldots = \omega_{j_{m-k}-1} =$$

$$= (\mathbf{z}_{t_m}, (\omega_1, \ldots, \omega_{j_{m-1}+t_m-1}, 0, \ldots, 0)) + \sum_{i=2}^{k-1} \omega_{j_{m-i}} - 1$$

і $\omega_{j_{m-k}} = \omega_1 + \ldots + \omega_{j_{m-k}-1} - 1$.

Останні координати $\omega_{j_0+1} = \ldots = \omega_n$ вектора $\mathbf{w}$ визначимо з рівності

$$\omega_n = (\mathbf{z}_{t_m}, (\omega_1, \ldots, \omega_{j_{m-1}+t_m-1}, 0, \ldots, 0)) + \sum_{i=2}^{m} \omega_{j_{m-i}} - 1. \tag{2.59}$$

З побудови вектора $\mathbf{w}$ безпосередньо випливає, що для довільного рядка $\mathbf{x}$ матриці $p^m(A)$ справджується нерівність

$$(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \geq \left((\mathbf{z}_{t_m}, (\omega_1, \ldots, \omega_{j_m+t_m-1}, 0, \ldots, 0)) + \sum_{i=2}^{m} \omega_{j_{m-i}} \right) = \omega_0,$$

а для будь-якого n-вимірного бульового вектора $\mathbf{y}$, що не входить у множину рядків матриці $p^m(A)$, має місце нерівність $(\mathbf{y}, \mathbf{w}) < \omega_0$. Отже, для $\mathbf{w}_1 = \mathbf{a}\mathbf{w}^{\sigma^{-1}}$ маємо:

$$\forall \mathbf{x} \in A, \forall \mathbf{y} \in \mathbb{Z}_2^n \setminus A \quad (\mathbf{x}, \mathbf{w}_1) > (\mathbf{y}, \mathbf{w}_1). \tag{2.60}$$

Тоді, як показано в [5], існує такий вектор $\mathbf{v} \in \Omega_n^-$, що задовольняє нерівність (2.60), а це означає, що з елементів множини A можна побудувати передматрицю толерантності $L_{\mathbf{v}}(q)$ $(q = |A|)$. Теорему доведено.

Теорема 2.15. *Якщо* $A = A^{(m)}$ $(m \geq 2)$ *і*

$$p(A) = p_0(A)\nabla\ldots\nabla p_{t_0}(A),\ j_0 = \log_2|p_0(A)|+1, (t_0 \ge 2),$$

$$\forall i \in \{1,2,\ldots,t_0-1\}\left|p\left(A^{(1)}_{j_0+i}\right)\right| = \left|p\left(A^{(1)}_{j_0+i-1}\right)\right|,$$

$$p\left(A^{(1)}_{j_0+i}\right) = p_0\left(A^{(1)}_{j_0+i}\right)\nabla p_1\left(A^{(1)}_{j_0+i}\right), j_1 = \log_2\left|p_0\left(A^{(1)}_{j_0+i}\right)\right| + 1,$$

$$\forall i \in \{1,2,\ldots,t_0-1\}\left|p\left(A^{(2)}_{j_1,j_0+i}\right)\right| = \left|p\left(A^{(2)}_{j_1,j_0+i-1}\right)\right|,$$

$$p\left(A^{(2)}_{j_1,j_0+i}\right) = p_0\left(A^{(2)}_{j_1,j_0+i}\right)\nabla p_1\left(A^{(2)}_{j_1,j_0+i}\right),\ j_2 = \log_2\left|p_0\left(A^{(2)}_{j_1,j_0+i}\right)\right| + 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\forall i \in \{1,2,\ldots,t_0-1\}\left|p\left(A^{(m-2)}_{j_{m-3},\ldots,1,j_0+i}\right)\right| = \left|p\left(A^{(m-2)}_{j_{m-3},\ldots,j_1,j_0+i-1}\right)\right|, \quad 2.61)$$

$$p\left(A^{(m-2)}_{j_{m-3},\ldots,j_1,j_0+i}\right) = p_0\left(A^{(m-2)}_{j_{m-3},\ldots,j_1,j_0+i}\right)\nabla p_1\left(A^{(m-2)}_{j_{m-3},\ldots,j_1,j_0+i}\right),$$

$$j_{m-2} = \log_2\left|p_0\left(A^{(m-2)}_{j_{m-3},\ldots,j_1,j_0+i}\right)\right| + 1,$$

$$\forall i \in \{1,2,\ldots,t_0-1\}\ p\left(A^{(m-1)}_{j_{m-2},\ldots,j_1,j_0+i}\right) = p_0\left(A^{(m-1)}_{j_{m-2},\ldots,j_1,j_0+i}\right)\nabla\ldots\nabla p_{t_m}\left(A^{(m-1)}_{j_{m-2},\ldots,j_1,j_0+i}\right),$$

$$\left|p_k\left(A^{(m-1)}_{j_{m-2},\ldots,1,j_0+i}\right)\right| = \left|p_k\left(A^{(m-1)}_{j_{m-2},\ldots,j_1,j_0+i-1}\right)\right|,\ k \in \{0,1,\ldots,t_m\},$$

тоді множина A *допускає зображення матрицями толерантності з* E_n.

Теорема доводиться аналогічно до теореми 2.14. Різниця тільки в тому, що у даному випадку $\omega_{j_0+1} = \omega_{j_0+2} = \ldots = \ldots = \omega_{j_0+t_0-1} = \omega_{j_0}$, і за формулою (2.59) визначаються координати $\omega_{j_0+t_0},\ldots,\omega_n$ вектора $\mathbf{w}$.

Нехай $\mathbf{a} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_j,\ldots,\alpha_{j+s},\ldots,\alpha_n)$ – довільний вектор множини $\mathbb{Z}_2^n, s \in \{0,1,\ldots,n-j\}$ і $j \ge 2$. На множині координат $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ вектора $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_2^n$ для фіксованих s та j визначимо функцію $\varepsilon_j^k\ (k \in \{0,\ldots,s\})$ наступним чином:

$$\varepsilon_j^k(\alpha_i) = \begin{cases} \alpha_i, & \text{якщо } i \le j-1; \\ \alpha_i(j-r_k), & \text{якщо } i = j+k; \\ \alpha_i j, & \text{якщо } i > j+s; \end{cases} \quad (2.62)$$

де $r_0, r_1, \ldots, r_s \in \{1,2,\ldots, j-1\}$. Через функції ε_j^k $(k=0,\ldots,s)$ при фіксованих $s \in \{0,\ldots,n-j\}$ та j задаємо відображення $\varepsilon_j^s : \mathbb{Z}_2^n \to Z_{j+1}^n$ $(Z_{j+1} = \{0,1,\ldots, j\},\ 2 \le j \le n)$ наступним чином:

$$\varepsilon_j^s(\mathbf{a}) = (\varepsilon_j^s(\alpha_1),\ldots,\varepsilon_j^s(\alpha_{j-1}),\varepsilon_j^0(\alpha_j),\varepsilon_j^1(\alpha_{j+1}),\ldots,\varepsilon_j^s(\alpha_{j+s}),\varepsilon_j^s(\alpha_{j+s+1}),\ldots,\varepsilon_j^s(\alpha_n))$$

і визначимо функціонал v_j^s на множині $\mathbb{Z}_2^n$ за формулою:

$$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{Z}_2^n \quad v_j^s(\mathbf{a}) = \sum_{i \in I_s(j)} \varepsilon_j^s(\alpha_i) + \sum_{i=0}^{s} \varepsilon_j^i(\alpha_{j+i}), \tag{2.63}$$

де $I_s(j) = \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{j, j+1,\ldots, j+s\}$. За допомогою функціонала v_j^s для кожного $k \in \{0,1,\ldots,s\}$ побудуємо множину бульових векторів $F_{j+k}^{(r_k,s)}$ так:

$$F_{j+k}^{(r_k,s)} = \{\mathbf{a} \in m(L_{j+k}^{*} 0\ldots0) \mid v_j^s(\mathbf{a}) \le j-1\},$$

де $m(L_{j+k}^{*} 0\ldots0)$ – множина бульових векторів, що побудована з рядків матриці $\left(L_{j+k}^{*} 0\ldots0\right)$, а $r_0, r_1, \ldots, r_s \in \{1,\ldots, j-1\}$.

Теорема 2.16. *Якщо в множині* $A \subset \mathbb{Z}_2^n$ $(|A| \le 2^{n-1})$, *групі* S_n *відповідно існують такі елементи* $\mathbf{a}, \sigma$ *і такі цілі числа* $r_0 \ge r_1 \ge \ldots \ge r_s > 0$ $(r_0 \le j-1)$, *що*

$$\mathbf{a}^{\sigma} A^{\sigma} = m(L_j \underbrace{0\ldots0}_{n-j}) \cup \left(\bigcup_{i=0}^{s} F_{j+i}^{(r_i,s)} \right), \tag{2.64}$$

тоді множина A *допускає зображення матрицями толерантності з* E_n.

Доведення. Задаємо n-вимірний вектор $\mathbf{w} = (\omega_1,\ldots,\omega_n)$ наступним чином:

$\omega_1 = \ldots = \omega_{j-1} = -1,\ \omega_j = r_0 - j, \omega_{j+1} = r_1 - j, \ldots, \omega_{j+s} = r_s - j, \omega_{j+s+1} = \ldots = \omega_n = -j$.

За побудовою вектора $\mathbf{w}$ маємо:

$$\min\{(\mathbf{x},\mathbf{w})\,|\,\mathbf{x}\in m(L_j 0\ldots 0)\}=1-j,$$

$$\forall k\in\{0,1,\ldots,s\}\ \min\{(\mathbf{x},\mathbf{w})\,|\,\mathbf{x}\in F_{j+k}^{(r_k,k)}\}=1-j>$$

$$>\max\{(\mathbf{x},\mathbf{w})\,|\,\mathbf{x}\in m(L_{j+k}^{*}0\ldots 0)\setminus F_{j+k}^{(r_k,k)}\}=-j,$$

$$\forall t\in\{s+1,\ldots,n\}\ \max\{(\mathbf{x},\mathbf{w})\,|\,\mathbf{x}\in m(L_t^{*}0\ldots 0)\}=-j$$

Тоді з (2.64) безпосередньо випливає:

$$\forall\mathbf{x}\in\mathbf{a}^{\sigma}A^{\sigma},\forall\mathbf{y}\in\mathbb{Z}_2^n\setminus\mathbf{a}^{\sigma}A^{\sigma}\ (\mathbf{x},\mathbf{w})>(\mathbf{y},\mathbf{w}). \qquad (2.65)$$

Отже, існує такий вектор $\mathbf{v}\in\Omega_n^-$ [5], який також задовольняє нерівність (2.65). Це означає, що існує такий елемент $\xi\in S_q\ (q=|A|)$, що $\mathbf{a}^{\sigma}(A_{\xi})^{\sigma}=L_{\mathbf{v}}(q)$, де $L_{\mathbf{v}}\in E_n^-$. Тоді з елементів множини A можна побудувати передматрицю толерантності $L_1(q)\left(L_1=\mathbf{a}L_{\mathbf{v}}^{\sigma^{-1}}\right)$. Отже, теорему доведено.

Розглянемо узагальнення функції ε_j^k і функціоналу v_j^s. Нехай $\mathbf{a}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_j,\ldots,\alpha_{j+s},\ldots,\alpha_n)\in\mathrm{Z}_2^n,\ s\in\{0,1,\ldots,n-j\}\ (j\ge 2)$. Для фіксованих $j\in\{2,3,\ldots,n\}$ і $t\in\{1,2,\ j-1\}$ будуємо множину векторів $u_j(t)$:

$$\mathbf{u}_j(t)=\{(u_1,\ldots,u_t)\,|\,u_1+\ldots+u_t=j-1,\ u_1,\ldots,u_t\in\{1,2,\ldots,j-t\}\}$$

і через неї визначимо $U_j=\bigcup\limits_{t=1}^{j-1}\mathbf{u}_j(t)$. Нехай $\mathbf{u}=(u_1,\ldots,u_{l_{\mathbf{u}}})\in U_j,\ l_{\mathbf{u}}\ge 2$ ($l_{\mathbf{u}}$– вимірність вектора $\mathbf{u}$) і $\forall k\in\{0,1,\ldots,s\}$

$$\varepsilon_j^{(\mathbf{u},k)}(\alpha_i)=\begin{cases}\alpha_i, & \text{якщо } i\le u_1,\\ \alpha_i 2^{r-1}, & \text{якщо } \sum\limits_{p=1}^{r-1}u_p<i\le\sum\limits_{p=1}^{r}u_p,\\ \alpha_i\left(\sum\limits_{p=1}^{l_{\mathbf{u}}}u_p 2^{p-1}-r_k+1\right), & \text{якщо } i=j+k,\\ \alpha_i\left(\sum\limits_{p=1}^{l_{\mathbf{u}}}u_p 2^{p-1}+1\right), & \text{якщо } i>j+s,\end{cases}$$

де $r\in\{2,3,\ldots,l_{\mathbf{u}}\}$. Якщо $l_{\mathbf{u}}=1$, то $\varepsilon_j^{(\mathbf{u},k)}=\varepsilon_j^k$. Для фіксованих $j\in\{2,3,\ldots,n\},\ s\in\{0,1,\ldots,n-j\}$ і $\mathbf{u}=(u_1,\ldots,u_{l_u})\in U_j$ задаємо відображення

$\varepsilon_j^{(\mathbf{u},s)}:\mathbb{Z}_2^n \to Z_{h+1}^n \left(h = \sum_{p=1}^{l_{\mathbf{u}}} u_p 2^{p-1} + 1 \right)$ так:

$$\varepsilon_j^{(\mathbf{u},s)}(\mathbf{a}) = (\varepsilon_j^{(\mathbf{u},s)}(\alpha_1),\ldots,\varepsilon_j^{(\mathbf{u},s)}(\alpha_{j-1}),\varepsilon_j^{(\mathbf{u},0)}(\alpha_j),\varepsilon_j^{(\mathbf{u},1)}(\alpha_{j+1}),\ldots$$

$$\ldots,\varepsilon_j^{(\mathbf{u},s)}(\alpha_{j+s}),\varepsilon_j^{(\mathbf{u},s)}(\alpha_{j+s+1}),\ldots,\varepsilon_j^{(\mathbf{u},s)}(\alpha_n))$$

і визначимо функціонал $v_j^{(\mathbf{u},s)}$ на множині $\mathbb{Z}_2^n$ за допомогою наступної формули:

$$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{Z}_2^n \;\; v_j^{(\mathbf{u},s)}(\mathbf{a}) = \sum_{i \in I_s(j)} \varepsilon_j^{(\mathbf{u},s)}(\alpha_i) + \sum_{i=0}^{s} \varepsilon_j^{(\mathbf{u},i)}(\alpha_{j+i}),$$

де $I_s(j) = \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{j, j+1,\ldots, j+s\}$.

Через функціонал $v_j^{(\mathbf{u},s)}$ задаємо множину бульових векторів $F_{j+k}^{(\mathbf{u},r_k,s)}$:

$$F_{j+k}^{(\mathbf{u},r_k,s)} = \left\{ \mathbf{a} \in m(L_{j+k}^{*}0\ldots0) \,|\, v_j^{(\mathbf{u},s)}(\mathbf{a}) \le \sum_{p=1}^{l_{\mathbf{u}}} u_p 2^{p-1} \right\},$$

де $r_0, r_1,\ldots, r_s \in \{1,\ldots,\sum_{p=1}^{l_{\mathbf{u}}} u_p 2^{p-1}\}, k \in \{0,1,\ldots,s\}$

ЛІТЕРАТУРА

1. McCulloch, W. S. A logical calculus of ideas immanent in nervous activity / W. S. McCulloch, W. Pitts // Bull. Mathematical Biophysics. – 1943. – vol 5. – PP. 115-133.
2. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс / С. Хайкин. – 2-е изд. – М. : Вильямс-Телеком, 2006. – 1104 с.
3. Руденко,О.Г. Штучні нейронні мережі/ О.Г. Руденко, Є.В. Бодянський. – Харків: Компанія СМІТ, 2006. – 404 с.
4. Дертоузос, М. Пороговая логика / М. Дертоузос. – М.: Мир, 1967. – 342 с.
5. Гече, Ф. Аналіз дискретних функцій та синтез логічних схем у нейробазисі: [Монографія] / Ф. Гече. – Ужгород: Видавництво В. Падяка, 2010 – 210 с.
6. Минский, М. Персептроны / М. Минский, С. Пейперт.– М.: Мир,1971.–252 с.
7. Гече, Ф. Нейронні елементи над кільцем Z_{p^m} / Ф.Е. Гече, В.М. Коцовський // Доповіді Національної академії наук України. Кібернетика та обчислювальна техніка. – К., 2004. – № 6. – С. 70-72.
8. Грицик В.В. Реалізація бульових та багатозначних логічних функцій на нейронних елементах / В.В. Грицик, Ф.Е. Гече // Доповіді Національної академії наук України. Кібернетика та обчислювальна техніка. – К., 2004. – № 5. – С. 65-68.
9. Гече Ф. Про деякі критерії пороговості булевих функцій / Ф. Гече, В. Коцовський, А. Батюк // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Комп'ютерна інженерія та інформаційні технології. – Львів, 2001. – № 433. – С. 160-165.
10. Айзенберг, Н. Н. Многозначная пороговая логика / Н. Н. Айзенберг, Ю. Л. Иваськив. – К. : Наук. думка, 1977. – 145 с.
11. Лабунец, В. Г. Гармонический анализ булевых функций и функций k-значной логики над конечными полями / В. Г. Лабунец, О. П. Ситников // Известия АН СССР. Сер. : Техническая кибернетика. – М. – 1975. – № 1. – С. 141-148.
12. Гече, Ф. Е. Матриці толерантності і узагальнені нейронні елементи / Ф. Е. Гече, В. М. Коцовський // V Міжнародна школа-семінар "Теорія прийняття рішень". – Ужгород. – 2010. – С. 53-54.
13. Коцовський В. Про поведінку алгоритму навчання перцептрона у несепарабельному випадку./ Ф. Гече, О. Міца, А. Батюк // ISDMIT'2012. Шоста міжнародна наукова конференція «Інтелектуальні системи прийняття рішень і прикладні аспекти інформаційних технологій».– Євпаторія,. – 27-31 травня 2012. – Т.2. – С. 12-14.
14. Гече Ф.Е. Про збіжність спектрального алгоритму навчання нейронних елементів / Ф.Е. Гече, В.М. Коцовський, С.А. Ковальов // Proceedings of the International Conference on Computer Science and Information Technologies "CSIT 2007". – Львів. – 2007. – С. 67-69.