

УДК 512.643.8

**М. Ю. Бортош** (Інститут математики НАН України, Київ)

**ПРО ОДИН КЛАС ЗВІДНИХ МОНОМІАЛЬНИХ МАТРИЦЬ  
НАД КОМУТАТИВНИМИ КІЛЬЦЯМИ**

It is proved the reducibility of monomial matrices of some form over a commutative ring.

Доведена звідність мономіальних матриць деякого вигляду над комутативним кільцем.

Задача про класифікацію, з точністю до подібності, матриць над комутативним кільцем (що не є полем) як правило дуже важка; в більшості випадків вона є дикою, як у випадку кілець класів лишків [1], і розв’язана лише над деякими кільцями головних ідеалів для матриць малих порядків (див., напр., [2]– [4]). В такій ситуації більш важливою стає задача про вивчення незвідних та звідних матриць над кільцями.

У ряді робіт (див., напр., [5], [6]) вивчалися властивості матриць над комутативним кільцем вигляду

$$M(t, s_1, \dots, s_n) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & t^{s_n} \\ t^{s_1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & t^{s_{n-1}} & 0 \end{pmatrix},$$

де  $s_1, \dots, s_n \in \{0, 1\}$ , і, зокрема, їх звідність чи незвідність (основним випадком є випадок, коли  $t$  не є оборотним). Тут і надалі замість трьох горизонтальних і вертикальних крапок завжди стоять нульові елементи, а три діагональні крапки можуть означати як нульові, так і ненульові елементи (в кожному конкретному випадку очевидно, про які елементи йде мова).

Ми розглядаємо наступний частинний випадок цієї задачі:

$$M(t, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{2l+1}, a_1, a_2, \dots, a_m, 1, 1, 1) = \begin{pmatrix} \overbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}^{2l+1} \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ t \\ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 1 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \vdots \ \vdots \ \ddots \ \vdots \ \vdots \ \vdots \ \ddots \ \vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots \\ 0 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ a_1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ a_2 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \vdots \ \vdots \ \ddots \ \vdots \ \vdots \ \vdots \ \ddots \ \vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ a_m \ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ t \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ t \ 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де  $a_i \in \{0, 1\}$  і  $l > 0, m \geq 0$  — цілі числа. Ця матриця має розмір  $n \times n$ , де  $n = 2l + m + 4$ . Число  $l + m + 1$  позначимо через  $s$ .





Безпосереднім перемноженням матриць отримуємо рівність

$$C^{-1}NC = \left( \begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 \end{matrix}}^{l+1} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}}^l \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a_m \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t \end{matrix} \end{array} \right). \quad (2)$$

Мономіальна матриця, яка стоїть в правій частині рівності (2) (однаковою) перестановкою рядків і стовпців може бути приведена до вигляду

$$M(t, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{2l+1}, a_1, a_2, \dots, a_m, 1, 1, 1) = \left( \begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 \end{matrix}}^{2l+1} & \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a_m \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t \end{matrix} \end{array} \right).$$

Теорема 1 доведена.

Розглянемо один приклад.

Як і раніше, ми розглядаємо матриці над комутативним кільцем  $K$  і  $t$  позначає його ненульовий елемент.

За теоремою 1 матриця  $M(t, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1)$  є звідною. Ми продемонструємо доведення теореми 1 у цьому частинному випадку.

Розглянемо звідну матрицю

$$N = \left( \begin{array}{cccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

і покладемо

$$C = \left( \begin{array}{cccccc|cc} 1 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & t & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Тоді

$$C^{-1} = \left( \begin{array}{cccccc|cc} 1 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & t & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

і безпосереднім перемноженням матриць отримуємо рівність

$$C^{-1}NC = \left( \begin{array}{cccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 \end{array} \right),$$

причому мономіальну матрицю, яка стоїть у правій частині цієї рівності (одно-

часною) перестановкою рядків та стовпців можна привести до вигляду

$$M(t, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}.$$

Автор висловлює щирю подяку професору В. М. Бондаренку за постановку задачі та корисні поради.

1. *Бондаренко В. М.* О подобии матриц над кольцами классов вычетов // Математический сборник. – Киев: Из-во “Наукова думка”, 1976. – С. 275–277.
2. *Шевченко В. Н., Сидоров С. В.* О подобии матриц второго порядка над кольцом целых чисел // Известия вузов. Сер. матем. – 2006. – № 4. – С. 57–64.
3. *Pizarro A.* Similarity Classes of  $3 \times 3$  Matrices over a Discrete Valuation Ring // Linear Algebra and Its Applications. – 1983. – **54**. – P. 29–51.
4. *Prasad A., Singla P., and Spallone S.* Similarity of matrices over local rings of length two // <http://arxiv.org/pdf/1212.6157.pdf>.
5. *Динис Р. Ф., Тилышчак О. А.* Про звідність матриць деякого вигляду над локальними областями головних ідеалів // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2012. – Вип. 23, №1. – С. 57–62.
6. *Bondarenko Vitaliy M., Bortos Maria Yu., Dinis Ruslana F., Tylyshchak Alexander A.* Reducibility and irreducibility of monomial matrices over commutative rings // Algebra Discrete Math. – 2013. – **16**, **N2**. – P. 171–187.
7. *Бондаренко В. М.* Про один метод доведення звідності номіальних матриць // Усне повідомлення. – 2013.