УДК 512.643.8

В. М. Бондаренко, М. Ю. Бортош (Інститут математики НАН України, Київ)

ПРО $(*,2)$-ЗВІДНІ МОНОМІАЛЬНІ МАТРИЦІ НАД КОМУТАТИВНИМИ КІЛЬЦЯМИ

It is proved the reducibility of special type of monomial matrices of some form over a commutative ring.

Доведена звідність спеціального типу мономіальних матриць деякого вигляду над комутативним кільцем.

Задача про класифікацію, з точністю до подібності, матриць над комутативним кільцем (що не є полем), як правило, дуже важка; в більшості випадків вона містить в собі задачу про пару матриць над полем (в сучасній термінології є дикою [1]), як у випадку кілець класів лишків [2], і розв'язана лише над деякими кільцями головних ідеалів для матриць малих порядків (див., напр., [3] – [5]). В такій ситуації більш важливою стає задача про вивчення незвідних та звідних матриць над кільцями.

У ряді робіт (див., напр., [6] – [9]) вивчалися властивості матриць над комутативним кільцем, які мають вигляд

$$M(t; s_1, \dots, s_n) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & t^{s_n} \\ t^{s_1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & t^{s_{n-1}} & 0 \end{pmatrix},$$

де $s_1 \dots, s_n \in \mathbb{N} \cup 0$, і, зокрема, їх звідність чи незвідність (основним випадком є випадок, коли t не є оборотним). У цій статті ми продовжуємо вивчати матриці такого вигляду.

На протязі всієї статті K позначає комутативне локальне кільце з максимальним ідеалом $R = RadK \neq 0$ і $t \neq 0$ — будь-який фіксований елемент із R. Замість $M(t; s_1, \dots, s_n)$ пишемо просто $M(s_1, \dots, s_n)$.

1. Формулювання основних теорем у випадку $t^2 = 0$. Матрицю A над кільцем K називатимемо $(*,2)$-звідною, якщо вона подібна матриці вигляду $\left(\begin{smallmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{smallmatrix}\right)$, де A_{11} і A_{22} — матриці розміру $q \times q$, $q \geq 1$, і 2×2 відповідно. В цьому випадку матрицю A називатимемо також $(q,2)$-звідною.

Якщо A — матриця розміру $n \times n$, то число n будемо називати порядком матриці A.

Теорема 1. *Нехай $t^2 = 0$. Тоді матриця $M(0,1,0,0,0,p_1,\dots,p_s,1,1,1)$ порядку $n \geq 8$ є $(n-2,2)$-звідною.*

Теорема 2. *Нехай $t^2 = 0$. Тоді матриця $M(0,0,1,0,0,p_1,\dots,p_s,1,1,1)$ порядку $n \geq 8$ є $(n-2,2)$-звідною.*

Доведення теорем приводиться в п.2 і п.3. У п.4 розглядаються узагальнення теорем 1 і 2 на випадок $t^m = 0$, $m > 2$.

2. Доведення теореми 1. Спочатку введемо деякі позначення для перетворень довільної квадратної матриці над кільцем K. $P_{ij}(a)$ позначає додавання i-го рядка, помноженого на елемент $a \in K$, до j-го рядка. $Q_{ij}(a)$ позначає аналогічне перетворення для стовпців. Через $[m \xrightarrow{a} s]$ позначимо перетворення подібності, яке полягає в тому, що спочатку застосовується перетворення $P_{ms}(a)$, а потім обернене до нього перетворення $Q_{sm}(-a)$.

Покладемо $\alpha_i = t^{p_i}$. Тоді

$$M(0,1,0,0,0,p_1,\ldots,p_s,1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо $(n-2,2)$-звідну матрицю

$$N = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -t & 1 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -t & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Покажемо, що матриця N подібна матриці $M(0,1,0,0,0,p_1,\ldots,p_s,1,1,1)$.

На 1-му кроці застосуємо до матриці N перетворення $[n-1 \xrightarrow{t} n-2]^-$:

$$N_1 = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -t & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & t & 1 & 0 \end{array}\right).$$

На 2-му кроці застосуємо до матриці N_1 перетворення $[1 \overset{-1}{\to} n]^+$:

$$N_2 = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
\hline
t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0
\end{array}\right).$$

На 3-му кроці застосуємо до матриці N_2 перетворення $[2 \overset{-1}{\to} n-1]^+$:

$$N_3 = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0
\end{array}\right).$$

На 4-му кроці застосуємо до матриці N_3 перетворення $[3 \overset{-1}{\to} 1]^+$:

$$N_4 = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
t & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0
\end{array}\right).$$

На 5-му кроці застосуємо до матриці N_4 перетворення $[4 \overset{-t}{\to} 2]^+$:

$$N_5 = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0
\end{array}\right).$$

На 6-му кроці застосуємо до матриці N_5 перетворення $[5 \overset{-t}{\to} 3]^+$:

$$N_6 = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0
\end{array}\right).$$

Матриця N_6 однаковою перестановкою (чи, іншими словами, перенумерацією) рядків і стовпців приводиться до матриці $M(0,1,0,0,0,p_1,\dots,p_s,1,1,1)$.

3. Доведення теореми 2. Доведення проводимо по тій же схемі, що і доведення теореми 1. Оскільки t^{p_i} позначається через α_i, то

$$M(0,0,1,0,0,p_1,\dots,p_s,1,1,1) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0
\end{pmatrix}.$$

Розглянемо $(n-2,2)$-звідну матрицю

$$N = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -t & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right).$$

Покажемо, що матриця N подібна матриці $M(0,0,1,0,0,p_1,\dots,p_s,1,1,1)$.

На 1-му кроці застосуємо до матриці N перетворення $[n-1 \xrightarrow{t} n-2]^-$:

$$N_1 = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 1 & 0
\end{array}\right).$$

На 2-му кроці застосуємо до матриці N_1 перетворення $[1 \xrightarrow{-1} n]^+$:

$$N_2 = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
\hline
t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0
\end{array}\right).$$

На 3-му кроці застосуємо до матриці N_2 перетворення $[2 \overset{-t}{\rightarrow} n-1]^{+}$:

$$N_3 = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc}
0 & t & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & -t & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -t & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & t & 0 & 0
\end{array}\right).$$

На 4-му кроці застосуємо до матриці N_3 перетворення $[3 \overset{-1}{\rightarrow} 1]^{+}$:

$$N_4 = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & -t & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -t & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & t & 0 & 0
\end{array}\right).$$

На 5-му кроці застосуємо до матриці N_4 перетворення $[4 \overset{-1}{\rightarrow} 2]^{+}$:

$$N_5 = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t & 0 & t & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -t & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & t & 0 & 0
\end{array}\right).$$

На 6-му кроці застосуємо до матриці N_5 перетворення $[5 \xrightarrow{-t} 3]^+$:

$$N_6 = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Матриця N_6 однаковою перестановкою (чи, іншими словами, перенумерацією) рядків і стовпців приводиться до матриці $M(0,0,1,0,0,p_1,\dots,p_s,1,1,1)$.

4. Узагальнення теорем 1 і 2. У цьому пункті розглядаються деякі узагальнення теорем 1 і 2 на випадок $t^m = 0$, $m > 2$. Як і раніше, $t^{p_i} = \alpha_i$ для $i = 1,\dots,s$.

Наступна теорема узагальнює теорему 1.

Теорема 3. *Нехай $t^m = 0$, $t^{m-i} \neq 0$, де $m > 2$, і $0 < i,j,p,q < m$, $i \leq q$, $j+p \geq m$, $0 \leq p_1,\dots,p_s < m$. Тоді матриця $M(0,i,0,0,0,p_1,\dots,p_s,j,p,q)$ порядку $n = s+8$ є $(n-2,2)$-звідною.*

Доведення. Розглянемо $(n-2,2)$-звідну матрицю

$$N = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -t^p & 1 & 0 \\ t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -t^q & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Зробивши (з її рядками та стовцями) послідовно перетворення $[n-1 \xrightarrow{t^p} n-2]^-$,

$[1 \xrightarrow{-1} n]^+$, $[2 \xrightarrow{-t^{q-i}} n-1]^+$, $[3 \xrightarrow{-t^{q-i}} 1]^+$, $[4 \xrightarrow{-t^q} 2]^+$, $[5 \xrightarrow{-t^q} 3]^+$, отримаємо матрицю

$$N_6 = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^p & 0 & 0 \end{array}\right),$$

яка однаковою перестановкою (перенумерацією) рядків і стовпців приводиться до матриці $M(0, i, 0, 0, 0, p_1, \dots, p_s, j, p, q)$.

Наступна теорема узагальнює теорему 2.

Теорема 4. *Нехай $t^m = 0$, $t^{m-i} \neq 0$, де $m > 2$, і $0 < i, j, p, q < m$, $i \leq q$, $3q - i \geq m$, $j+p \geq m$, $0 \leq p_1, \dots, p_s < m$. Тоді матриця $M(0, 0, i, 0, 0, p_1, \dots, p_s, j, p, q)$ порядку $n = s + 8$ є $(n-2, 2)$-звідною.*

Доведення. Розглянемо $(n-2, 2)$-звідну матрицю

$$N = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -t^p & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -t^{2q-i} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -t^q & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Зробивши (з її рядками та стовцями) послідовно перетворення $[n-1 \xrightarrow{t^p} n-2]^-$, $[1 \xrightarrow{-1} n]^+$, $[2 \xrightarrow{-t^q} n-1]^+$, $[3 \xrightarrow{-t^{q-i}} 1]^+$, $[4 \xrightarrow{-t^{q-i}} 2]^+$, $[5 \xrightarrow{-t^q} 3]^+$, отримаємо матрицю

$$N_6 = \left(\begin{array}{ccccccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^p & 0 & 0 \end{array}\right),$$

яка однаковою перестановкою (перенумерацією) рядків і стовпців приводиться до матриці $M(0, 0, i, 0, 0, p_1, \ldots, p_s, j, p, q)$.

Список використаної літератури

1. *Дрозд Ю. А.* О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 104–114.
2. *Бондаренко В. М.* О подобии матриц над кольцами классов вычетов // Математический сборник. – Киев: Из-во “Наукова думка”, 1976. – С. 275–277.
3. *Шевченко В. Н., Сидоров С. В.* О подобии матриц второго порядка над кольцом целых чисел // Известия вузов. Сер. матем. – 2006. – № 4. – С. 57–64.
4. *Pizarro A.* Similarity Classes of 3×3 Matrices over a Discrete Valuation Ring // Linear Algebra and Its Applications. – 1983. – **54**. – P. 29–51.
5. *Prasad A., Singla P., and Spallone S.* Similarity of matrices over local rings of length two// `http://arxiv.org/pdf/1212.6157.pdf`.
6. *Динис Р. Ф., Тилищак О. А.* Про звідність матриць деякого вигляду над локальними областями головних ідеалів // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2012. – Вип. 23, №1. – С. 57–62.
7. *Bondarenko Vitaliy M., Bortos Maria Yu., Dinis Ruslana F., Tylyshchak Alexander A.* Reducibility and irreducibility of monomial matrices over commutative rings // Algebra Discrete Math. – 2013. – **16**, no 2. – P. 171–187.
8. *Бортош М. Ю.* Про один клас звідних мономіальних матриць над комутативними кільцями // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2014. – Вип. 25, №1. – С. 15–20.
9. *Bondarenko Vitaliy M., Bortos Maria Yu., Dinis Ruslana F., Tylyshchak Alexander A.* Indecomposable and irreducible t-monomial matrices over commutative rings // Algebra Discrete Math. – 2016. – **22**, no 1. – P. 11–20.