УДК 512.643.8

В. М. Бондаренко, М. Ю. Бортош (Інститут математики НАН України)

ОПИС ДЕЯКИХ КАТЕГОРІЙ НЕЗВІДНИХ МАТРИЦЬ МАЛИХ ПОРЯДКІВ НАД ЛОКАЛЬНИМИ КІЛЬЦЯМИ

One describes the categories of irreducible t-monomial matrices of order $n < 7$ over a commutative local ring K with radical $R = tK, R^2 = 0$.

Описуються категорії незвідних t-мономіальних матриць порядку $n < 7$ над комутативним локальним кільцем K з радикалом $R = tK, R^2 = 0$.

1. Вступ. Нехай K — комутативне кільце з одиницею. Під *мономіальною матрицею* $M = (m_{ij})$ *над* K будемо розуміти квадратну матрицю порядку $n \geq 1$, в кожному рядку і в кожному стовпці якої стоїть рівно один ненульовий елемент. Такій матриці можна природнім чином зіставити незорієнтований граф $\Gamma(M)$ з n вершинами, занумерованими числами $1, \ldots, n$, і ребрами $i — j$ для всіх $m_{ij} \neq 0$. Очевидно, що $\Gamma(M)$ є неперетинним об'єднанням циклів. Якщо цикл лише один, то мономіальну матрицю будемо називати *циклічною*. Циклічну матрицю вигляду

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & m_{1n} \\ m_{21} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & m_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

будемо називати *канонічно циклічною*. Зауважимо, що будь-яка циклічна матриця перестановочно подібна канонічно циклічній матриці.

У випадку, коли всі ненульові елементи m_{ij} мономіальної (відповідно циклічної, канонічно циклічної) матриці M мають вигляд $t^{s_{ij}}$ $(t \in K)$, де $s_{ij} \geq 0$, матрицю M будемо називати t-*мономіальною* (відповідно t-*циклічною*, *канонічно* t-*циклічною*); очевидно, що тоді $t^{s_i} \neq 0$ для всіх i.

Найбільш цікавим випадком є, очевидно, випадок, коли t — необоротний елемент.

Стаття присвячена вивченню з категорної точки зору мономіальних матриць малих порядків над комутативними локальними кільцями.

Переходимо до постановки задачі та основних результатів.

Множину всіх матриць порядку n над кільцем K (яка є K-алгеброю) позначимо через $M_n(K)$ і покладемо $M(K) = \cup_{n \in \mathbb{N}} M_n(K)$. Множину $M(K)$ можна розглядати як категорію, якщо для довільних матриць $A, B \in M(K)$ покласти

$$Hom(A, B) = \{X \in M(K) \,|\, AX = XB\}.$$

Позначимо цю категорію через $\mathcal{M}(K)$; вона є, очевидно, K-категорією, тобто всі множини морфізмів є K-модулями і множення морфізмів K-білінійне. Повну підкатегорію категорії $\mathcal{M}(K)$ з множиною об'єктів X будемо позначати через $\mathcal{M}(K, X)$.

Нагадаємо, що матриця $M \in M(K)$ називається звідною, якщо

$$X^{-1}MX = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ 0 & N_{22} \end{pmatrix}$$

для деякої оборотної матриці X, і розкладною, якщо

$$Y^{-1}MY = \begin{pmatrix} N_{11} & 0 \\ 0 & N_{22} \end{pmatrix}$$

для деякої оборотної матриці Y (X і Y — матриці над K). В іншому разі M називається відповідно незвідною матрицею і нерозкладною матрицею. Ці означення легко переформулювати в термінах категорії $\mathcal{M}(K)$.

Надалі будемо вважати, що K — комутативне локальне кільце з радикалом $R = tK \neq 0$, $R^2 = 0$.

Введемо такі підмножини в $M_n(K)$: $M_{t,n} = M_{t,n}(K)$, $C_{t,n} = C_{t,n}(K)$ і $C^\circ_{t,n} = C^\circ_{t,n}(K)$ — відповідно множини всіх t-мономіальних, t-циклічних і канонічно t-циклічних матриць; $IRD_{t,n} = IRD_{t,n}(K)$, $Ird_{t,n} = Ird_{t,n}(K)$ і $Ird^{\,\circ}_{t,n} = Ird^{\,\circ}_{t,n}(K)$ — відповідно множини всіх незвідних матриць із $M_{t,n}$, $C_{t,n}$ і $C^\circ_{t,n}$. Тоді, очевидно, $\mathcal{M}(K, IRD_{t,n}) = \mathcal{M}(K, Ird_{t,n})$ (як підкатегорії в $\mathcal{M}(K)$) і ця категорія еквівалентна своїй підкатегорії $\mathcal{M}(K, Ird^{\,\circ}_{t,n})$ (бо кожний об'єкт першої категорії ізоморфний, і навіть перестановочно ізоморфний, деякому об'єкту другої категорії).

P-остовом категорії $\mathcal{M}(K, X)$ для кожної із вище введених множин X будемо називати повну її підкатегію, об'єктами якої є представники класів еквівалентності відносно перестановочних ізоморфізмів (із кожного класу по одному представнику); перестановочний ізоморфізм — це 1-мономіальна матриця (див. вище). P-остов не залежить від вибору представників у тому сенсі, що в різних випадках будемо отримувати ізоморфні категорії. P-остов категорії $\mathcal{M}(K, X)$ будемо позначати через $\mathcal{PSM}(K, X)$.

Із результатів роботи [1] та вище введених понять і позначень випливає наступна теорема.

Теорема 1. *Якщо об'єкт категорії $\mathcal{M}(K, C_{t,n})$ незвідний, то число його елементів t взаємно просте з n. У випадку $n < 7$ вірне і обернене твердження.*

Основна ціль цієї статті — опис категорії $\mathcal{M}(K, IRD_{t,n})$ незвідних t-мономіальних матриць порядку $n < 7$ над кільцем K. Під описом категорії мається на увазі опис її об'єктів і морфізмів. Оскільки (як було сказано вище) кожний об'єкт категорії $\mathcal{M}(K, IRD_{t,n})$ перестановочно ізоморфний деякому об'єкту її підкатегорії $\mathcal{M}(K, Ird^{\,\circ}_{t,n})$ (до того ж цей об'єкт, як і відповідний ізоморфізм легко вказати), то достатньо описати категорію $\mathcal{M}(K, Ird^{\,\circ}_{t,n})$. Більш того, по аналогічній причині достатньо описати категорію $\mathcal{PSM}(K, Ird^{\,\circ}_{t,n})$. Саме останню категорію ми і будемо описувати. Випадки $n \leq 4$, $n = 5$ і $n = 6$ розглядаються відповідно в параграфах 3, 4 і 5, а в параграфі 2 буде вказана необхідна і достатня умова перестановочної подібності канонічно циклічних (а значить і канонічно t-циклічних) матриць. Одне зауваження до теореми 1 розглядається в параграфі 6.

2. Перестановочна подібність канонічно циклічних матриць. Нехай $x_1, x_2, \dots, x_m$ — деяка послідовність; (+)-*циклічною перестановкою* її членів назвемо послідовність вигляду

$$x_i, x_{i+1}, \dots, x_m, x_1, x_2, \dots, x_{i-1},$$

а (−)-*циклічною перестановкою* — послідовність вигляду

$$x_i, x_{i-1}, \dots, x_1, x_m, x_{m-1}, \dots, x_{i+1}.$$

Очевидно, що добуток двох (+)-циклічних чи (−)-циклічних перестановок є (+)-циклічною перестановкою, а добуток (+)-циклічної і (−)-цикличної перестановок (в довільному порядку) є (−)-циклічною перестановкою.

Дві матриці назвемо (±)-*циклічно подібними*, якщо одну із них можна отримати із іншої за допомогою (+)-циклічної чи (−)-цикличної перестановки її рядків і стовпців.

Має місце наступне твердження.

Теорема 2. *Дві канонічно циклічні матриці (над будь-яким кільцем) перестановочно подібні тоді і лише тоді, коли вони (±)-циклічно подібні.*

Доведення. Кожна мономіальна матриця однозначно задається своїм графом (див. вище). Щоб така матриця була циклічною, треба, щоб граф був циклом, а щоб канонічно циклічною, — щоб додатково вершини цикла були занумеровані підряд (в одному із напрямків). Залишилося лише скористатися очевидним фактом, що послідовності чисел, якими задаються дві нумерації, з вказаною властивістю, вершин одного і того ж цикла, отримуються одна із іншої (+)-циклічною або (−)-циклічною перестановкою її членів.

3. Опис категорії незвідних t-мономіальних матриць порядку $n \leq 4$.

Випадок $n = 1$ очевидний: маємо 2 незвідних об'єкта $A_1 = (1)$, $A_2 = (t)$ і $Hom(A_1, A_1) = K$, $Hom(A_2, A_2) = K/R$, $Hom(A_1, A_2) = Hom(A_2, A_1) = 0$.

Випадок $n = 2$. Із теорем 1 і 2 випливає, що категорія $\mathcal{PSM}(K, Ird^{\circ}_{t,2})$ має один об'єкт. Будемо вважати, що це матриця

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Із рівності $A_1X = XA_1$ або, в розгорнутому вигляді,

$$\begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

маємо $tx_{21} = x_{12}$, $tx_{22} = x_{11}t$, $x_{11} = x_{22}$, $x_{12} = x_{21}t$.

Отже, $Hom(A_1, A_1)$ складається із усіх матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 t \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Випадок $n = 3$. Із теорем 1 і 2 випливає, що за об'єкти категорії $\mathcal{PSM}(K, Ird^{\circ}_{t,3})$ можна взяти такі матриці:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо 4 випадки: $A_1X = XA_1$, $A_2Y = YA_2$, $A_1Z = ZA_2$, $A_2V = VA_1$, де

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix},$$

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо спочатку випадок $A_1X = XA_1$.

В розгорнутому вигляді ця рівність має наступний вигляд:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{pmatrix} tx_{31} & tx_{32} & tx_{33} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{11}t \\ x_{22} & x_{23} & x_{21}t \\ x_{32} & x_{33} & x_{31}t \end{pmatrix}.$$

Випишемо відповідні скалярні рівності, позначаючи через (i,j) рівність елементів лівої та правої матриць, що стоять на перетині i-го рядка і j-го стовпця:

$$\begin{array}{llllll} (1,1): & tx_{31} = x_{12}, & (1,2): & tx_{32} = x_{13}, & (1,3): & tx_{33} = x_{11}t; \\ (2,1): & x_{11} = x_{22}, & (2,2): & x_{12} = x_{23}, & (2,3): & x_{13} = x_{21}t; \\ (3,1): & x_{21} = x_{32}, & (3,2): & x_{22} = x_{33}, & (3,3): & x_{23} = x_{31}t. \end{array}$$

Отже, матриця X буде мати, як легко бачити, наступний вигляд:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1t & z_1t \\ z_1 & x_1 & y_1t \\ y_1 & z_1 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Із усіх матриць такого вигляду і складається множина морфізмів із об'єкта A_1 в себе, тобто

$$Hom(A_1, A_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1t & z_1t \\ z_1 & x_1 & y_1t \\ y_1 & z_1 & x_1 \end{pmatrix} \right\}.$$

По такій схемі розглядаються всі подальші випадки (і не лише цього параграфа).

Розглянемо випадок $A_2Y = YA_2$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_{31} & y_{32} & y_{33} \\ ty_{11} & ty_{12} & ty_{13} \\ ty_{21} & ty_{22} & ty_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{12}t & y_{13}t & y_{11} \\ y_{22}t & y_{23}t & y_{21} \\ y_{32}t & y_{33}t & y_{31} \end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{llllll} (1,1): & y_{31} = y_{12}t, & (1,2): & y_{32} = y_{13}t, & (1,3): & y_{33} = y_{11}; \\ (2,1): & ty_{11} = y_{22}t, & (2,2): & ty_{12} = y_{23}t, & (2,3): & ty_{13} = y_{21}; \\ (3,1): & ty_{21} = y_{32}t, & (3,2): & ty_{22} = y_{33}t, & (3,3): & ty_{23} = y_{31}. \end{array}$$

Отже,

$$Hom(A_2, A_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ z_1 t & x_1 + x_2 t & y_1 + y_2 t \\ y_1 t & z_1 t & x_1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Розглянемо випадок $A_1 Z = Z A_2$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} tz_{31} & tz_{32} & tz_{33} \\ z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{12}t & z_{13}t & z_{11} \\ z_{22}t & z_{23}t & z_{21} \\ z_{32}t & z_{33}t & z_{31} \end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{llllll} (1,1): & tz_{31} = z_{12}t, & (1,2): & tz_{32} = z_{13}t, & (1,3): & tz_{33} = z_{11}; \\ (2,1): & z_{11} = z_{22}t, & (2,2): & z_{12} = z_{23}t, & (2,3): & z_{13} = z_{21}; \\ (3,1): & z_{21} = z_{32}t, & (3,2): & z_{22} = z_{33}t, & (3,3): & z_{23} = z_{31}. \end{array}$$

Отже,

$$Hom(A_1, A_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 t \\ y_1 t & z_1 t & x_1 t \end{pmatrix} \right\}.$$

Розглянемо випадок $A_2 V = V A_1$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} v_{31} & v_{32} & v_{33} \\ tv_{11} & tv_{12} & tv_{13} \\ tv_{21} & tv_{22} & tv_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{12} & v_{13} & v_{11}t \\ v_{22} & v_{23} & v_{21}t \\ v_{32} & v_{33} & v_{31}t \end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{llllll} (1,1): & v_{31} = v_{12}, & (1,2): & v_{32} = v_{13}, & (1,3): & v_{33} = v_{11}t; \\ (2,1): & tv_{11} = v_{22}, & (2,2): & tv_{12} = v_{23}, & (2,3): & tv_{13} = v_{21}t; \\ (3,1): & tv_{21} = v_{32}, & (3,2): & tv_{22} = v_{33}, & (3,3): & tv_{23} = v_{31}t. \end{array}$$

Отже,

$$Hom(A_2, A_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 t & y_1 t & 0 \\ z_1 t & 0 & 0 \\ y_1 t & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Випадок $n = 4$**.** Із теорем 1 і 2 випливає, що за об'єкти категорії $\mathcal{PSM}(K, Ird^{\circ}_{t,4})$ можна взяти такі матриці:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо 4 випадки: $A_1X = XA_1$, $A_2Y = YA_2$, $A_1Z = ZA_2$, $A_2V = VA_1$. де

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \end{pmatrix},$$

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо спочатку випадок $A_1X = XA_1$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} tx_{41} & tx_{42} & tx_{43} & tx_{44} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{11}t \\ x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{21}t \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{31}t \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{41}t \end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{llll} (1,1): \ tx_{41} = x_{12}, & (1,2): \ tx_{42} = x_{13}, & (1,3): \ tx_{43} = x_{14}, & (1,4): \ tx_{44} = x_{11}t; \\ (2,1): \ x_{11} = x_{22}, & (2,2): \ x_{12} = x_{23}, & (2,3): \ x_{13} = x_{24}, & (2,4): \ x_{14} = x_{21}t; \\ (3,1): \ x_{21} = x_{32}, & (3,2): \ x_{22} = x_{33}, & (3,3): \ x_{23} = x_{34}, & (3,4): \ x_{24} = x_{31}t; \\ (4,1): \ x_{31} = x_{42}, & (4,2): \ x_{32} = x_{43}, & (4,3): \ x_{33} = x_{44}, & (4,4): \ x_{34} = x_{41}t. \end{array}$$

Отже,

$$Hom(A_1, A_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1t & z_1t & u_1t \\ u_1 & x_1 & y_1t & z_1t \\ z_1 & u_1 & x_1 & y_1t \\ y_1 & z_1 & u_1 & x_1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Розглянемо випадок $A_2Y = YA_2$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \\ ty_{11} & ty_{12} & ty_{13} & ty_{14} \\ ty_{21} & ty_{22} & ty_{23} & ty_{24} \\ ty_{31} & ty_{32} & ty_{33} & ty_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{12}t & y_{13}t & y_{14}t & y_{11} \\ y_{22}t & y_{23}t & y_{24} & y_{21} \\ y_{32}t & y_{33}t & y_{34}t & y_{31} \\ y_{42}t & y_{43}t & y_{44}t & y_{41} \end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{llll} (1,1): \ y_{41} = y_{12}t, & (1,2): \ y_{42} = y_{13}t, & (1,3): \ y_{43} = y_{14}t, & (1,4): \ y_{44} = y_{11}; \\ (2,1): \ ty_{11} = y_{22}t, & (2,2): \ ty_{12} = y_{23}t, & (2,3): \ ty_{13} = y_{24}t, & (2,4): \ ty_{14} = y_{21}; \\ (3,1): \ ty_{21} = y_{32}t, & (3,2): \ ty_{22} = y_{33}t, & (3,3): \ ty_{23} = y_{34}t, & (3,4): \ ty_{24} = y_{31}; \\ (4,1): \ ty_{31} = y_{42}t, & (4,2): \ ty_{32} = y_{43}t, & (4,3): \ ty_{33} = y_{44}t, & (4,4): \ ty_{34} = y_{41}. \end{array}$$

Отже,

$$Hom(A_2, A_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ u_1t & x_1 + x_2t & y_1 + y_2t & z_1 + z_2t \\ z_1t & u_2t & x_1 + x_3t & y_1 + y_3t \\ y_1t & z_1t & u_1t & x_1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Розглянемо випадок $A_1Z = ZA_2$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} tz_{41} & tz_{42} & tz_{43} & tz_{44} \\ z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{12}t & z_{13}t & z_{14}t & z_{11} \\ z_{22}t & z_{23}t & z_{24}t & z_{21} \\ z_{32}t & z_{33}t & z_{34}t & z_{31} \\ z_{42}t & z_{43}t & z_{44}t & z_{41} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
&(1,1): \ tz_{41} = z_{12}t, && (1,2): \ tz_{42} = z_{13}t, && (1,3): \ tz_{43} = z_{14}t, && (1,4): \ tz_{44} = z_{11}; \\
&(2,1): \ z_{11} = z_{22}t, && (2,2): \ z_{12} = z_{23}t, && (2,3): \ z_{13} = z_{24}t, && (2,4): \ z_{14} = z_{21}; \\
&(3,1): \ z_{21} = z_{32}t, && (3,2): \ z_{22} = z_{33}t, && (3,3): \ z_{23} = z_{34}t, && (3,4): \ z_{24} = z_{31}; \\
&(4,1): \ z_{31} = z_{42}t, && (4,2): \ z_{32} = z_{43}t, && (4,3): \ z_{33} = z_{44}t, && (4,4): \ z_{34} = z_{41}.
\end{aligned}$$

Отже,

$$Hom(A_1, A_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_1t \\ y_1t & z_1t & u_1t & x_1t \end{pmatrix} \right\}.$$

Розглянемо випадок $A_2V = VA_1$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} \\ tv_{11} & tv_{12} & tv_{13} & tv_{14} \\ tv_{21} & tv_{22} & tv_{23} & tv_{24} \\ tv_{31} & tv_{32} & tv_{33} & tv_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{12} & v_{13} & v_{14} & v_{11}t \\ v_{22} & v_{23} & v_{24} & v_{21}t \\ v_{32} & v_{33} & v_{34} & v_{31}t \\ v_{42} & v_{43} & v_{44} & v_{41}t \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
&(1,1): \ v_{41} = v_{12}, && (1,2): \ v_{42} = v_{13}, && (1,3): \ v_{43} = v_{14}, && (1,4): \ v_{44} = v_{11}t; \\
&(2,1): \ tv_{11} = v_{22}, && (2,2): \ tv_{12} = v_{23}, && (2,3): \ tv_{13} = v_{24}, && (2,4): \ tv_{14} = v_{21}t; \\
&(3,1): \ tv_{21} = v_{32}, && (3,2): \ tv_{22} = v_{33}, && (3,3): \ tv_{23} = v_{34}, && (3,4): \ tv_{24} = v_{31}t; \\
&(4,1): \ tv_{31} = v_{42}, && (4,2): \ tv_{32} = v_{43}, && (4,3): \ tv_{33} = v_{44}, && (4,4): \ tv_{34} = v_{41}t.
\end{aligned}$$

Отже,

$$Hom(A_2, A_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1t & y_1t & 0 & 0 \\ u_1t & 0 & 0 & 0 \\ z_1t & 0 & 0 & 0 \\ y_1t & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

4. Опис категорії незвідних t-мономіальних матриць порядку $n = 5$. Із теорем 1 і 2 випливає, що за об'єкти категорії $\mathcal{PSM}(K, Ird^{\circ}_{t,5})$ можна взяти такі матриці:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$Hom(A_1, A_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1 t & z_1 t & u_1 t & v_1 t \\ v_1 & x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ u_1 + u_2 t & v_1 t & x_1 + x_2 t & y_1 + y_2 t & z_1 + z_2 t \\ z_1 + z_3 t & u_1 t & v_2 t & x_1 + x_3 t & y_1 + y_3 t \\ y_1 + y_4 t & z_1 t & u_3 t & v_3 t & x_1 + x_4 t \end{pmatrix} \right\},$$

$$Hom(A_2, A_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1 t & 0 & 0 & v_1 t \\ v_1 & x_1 & y_1 t & z_1 t & u_1 t \\ u_1 & v_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ z_1 + z_2 t & u_1 t & v_1 t & x_1 + x_2 t & y_1 + y_2 t \\ y_1 + y_3 t & z_1 t & 0 & v_2 t & x_1 + x_3 t \end{pmatrix} \right\},$$

$$Hom(A_3, A_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1 t & 0 & 0 & v_1 t \\ v_1 & x_1 & y_1 t & 0 & u_1 t \\ u_1 & v_1 & x_1 & y_1 t & z_1 t \\ z_1 & u_1 & v_1 & x_1 & y_1 \\ y_1 + y_2 t & z_1 t & u_1 t & v_1 t & x_1 + x_2 t \end{pmatrix} \right\},$$

$$Hom(A_4, A_4) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1 t & z_1 t & u_1 t & v_1 t \\ v_1 & x_1 & y_1 t & z_1 t & u_1 t \\ u_1 & v_1 & x_1 & y_1 t & z_1 t \\ z_1 & u_1 & v_1 & x_1 & y_1 t \\ y_1 & z_1 & u_1 & v_1 & x_1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$Hom(A_5, A_5) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 t & u_1 & v_1 \\ v_1 t & x_1 + x_2 t & y_1 t & z_2 t & u_1 + u_2 t \\ u_1 + u_2 t & v_1 + v_2 t & x_1 + x_2 t & y_1 + y_2 t & z_2 + z_3 t \\ z_2 t & u_1 + u_3 t & v_1 t & x_1 + x_3 t & y_1 + y_3 t \\ y_1 t & z_1 t & u_1 t & v_1 t & x_1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$Hom(A_6,A_6)=\left\{\begin{pmatrix} x_1 & y_1t & z_1 & u_1t & v_1t \\ v_1 & x_1 & y_1 & z_1 & u_1t \\ u_1t & v_1t & x_1+x_2t & y_1t & z_1t \\ z_1+z_2t & u_1t & v_1+v_2t & x_1+x_2t & y_1t \\ y_1+y_2t & z_1+z_2t & u_1 & v_1+v_2t & x_1+x_2t \end{pmatrix}\right\},$$

$$Hom(A_1,A_2)=\left\{\begin{pmatrix} x_1t & 0 & 0 & u_1t & v_1t \\ v_1 & x_1t & 0 & z_1t & u_1 \\ u_1+u_2t & v_1t & 0 & y_1t & z_3t \\ z_2t & u_1t & 0 & x_3t & y_3t \\ y_2t & 0 & 0 & v_2t & x_2t \end{pmatrix}\right\},$$

$$Hom(A_2,A_1)=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1t & 0 & 0 & z_1t & u_1t \\ u_1 & v_1t & x_1t & y_1t & z_1 \\ z_1+z_2t & u_1t & v_3t & x_3t & y_3t \\ y_2t & z_1t & u_2t & v_2t & x_2t \end{pmatrix}\right\},$$

$$Hom(A_1,A_3)=\left\{\begin{pmatrix} x_1t & 0 & 0 & 0 & v_1t \\ v_1 & x_1t & 0 & 0 & u_1t \\ u_2t & v_1t & 0 & 0 & z_1t \\ z_2t & 0 & 0 & 0 & y_1t \\ y_2t & 0 & 0 & 0 & x_2t \end{pmatrix}\right\},$$

$$Hom(A_3,A_1)=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_1t & 0 & 0 & 0 & z_1t \\ z_1 & u_1t & v_1t & x_1t & y_1t \\ y_2t & z_1t & u_2t & v_2t & x_2t \end{pmatrix}\right\},$$

$$Hom(A_1,A_4)=\left\{\begin{pmatrix} x_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1t & x_1t & 0 & 0 & 0 \\ u_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\},$$

$$Hom(A_4,A_1)=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1t & z_1t & u_1t & v_1t & x_1t \end{pmatrix}\right\},$$

$$Hom(A_1,A_5)=\left\{\begin{pmatrix} 0 & y_1t & 0 & u_1t & v_1t \\ v_1t & x_1t & y_1t & z_1t & u_1 \\ u_1t & v_3t & 0 & y_3t & z_3t \\ 0 & u_2t & 0 & x_3t & y_2t \\ 0 & z_2t & 0 & v_2t & x_2t \end{pmatrix}\right\},$$

$$Hom(A_5,A_1)=\left\{\begin{pmatrix} x_1t & y_1t & z_1t & u_1t & v_1t \\ v_3t & 0 & 0 & 0 & u_2t \\ u_2+u_3t & v_3t & x_3t & y_3t & z_3t \\ z_2t & u_2t & v_2t & x_2t & y_2t \\ y_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\},$$

$$Hom(A_1, A_6) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1t & 0 & z_1t & 0 & 0 \\ v_1t & x_1t & y_1t & z_1t & 0 \\ u_1t & 0 & x_2t & 0 & 0 \\ z_2t & 0 & v_2t & 0 & 0 \\ y_2t & 0 & u_2t & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$Hom(A_6, A_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1t & x_1t & y_1t & z_1t & u_1t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_2t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_2t & z_2t & u_2t & v_2t & x_2t \end{pmatrix} \right\},$$

$$Hom(A_2, A_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1t & 0 & 0 & 0 & v_1t \\ v_1 & x_1t & 0 & 0 & u_1t \\ u_1 & v_1 & x_1t & 0 & z_1t \\ z_2t & u_1t & v_1t & 0 & y_1t \\ y_2t & 0 & 0 & 0 & x_2t \end{pmatrix} \right\},$$

$$Hom(A_3, A_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1t & 0 & 0 & 0 & u_1t \\ u_1 & v_1t & 0 & 0 & z_1t \\ z_1 & u_1 & v_1t & x_1t & y_1t \\ y_2t & z_1t & u_1t & v_2t & x_2t \end{pmatrix} \right\},$$

$$Hom(A_2, A_4) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1t & x_1t & 0 & 0 & 0 \\ u_1t & v_1t & x_1t & 0 & 0 \\ z_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$Hom(A_4, A_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1t & u_1t & 0 & 0 & 0 \\ y_1t & z_1t & u_1t & v_1t & x_1t \end{pmatrix} \right\},$$

$$Hom(A_2, A_5) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1t & y_1t & 0 & u_1t & v_1t \\ v_1t & x_1 & y_1t & z_1t & u_1 \\ u_1 & v_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ z_1t & u_1 + u_2t & v_1t & x_1 + x_2t & y_1 + y_2t \\ y_1t & z_2t & u_1t & v_2t & x_1 + x_3t \end{pmatrix} \right\},$$

$$Hom(A_5, A_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1t & u_1t & v_1 \\ v_1 + v_2t & x_1t & y_1t & z_1t & u_2t \\ u_2 + u_3t & v_1 + v_2t & x_1t & y_1 + y_2t & z_1 \\ z_1 + z_2t & u_2t & v_1t & x_2t & y_1 + y_3t \\ y_1 & z_1t & 0 & v_1t & x_1t \end{pmatrix} \right\},$$

$$Hom(A_2, A_6) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1t & 0 & z_1t & 0 & 0 \\ v_1t & x_1t & y_1t & z_1t & 0 \\ u_1t & v_1t & x_1 & y_1t & z_1t \\ z_2t & 0 & v_2t & x_1t & 0 \\ y_2t & 0 & u_2t & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$Hom(A_6, A_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1t & y_1t & 0 & 0 & 0 \\ v_1t & x_1t & y_1t & z_1t & u_1t \\ u_2t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_2t & u_2t & 0 & 0 & y_1t \\ y_1 & z_2t & u_2t & v_2t & x_2t \end{pmatrix} \right\},$$

$$Hom(A_3, A_4) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1t & x_1t & 0 & 0 & 0 \\ u_1t & v_1t & x_1t & 0 & 0 \\ z_1t & u_1t & v_1t & x_1t & 0 \\ y_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$Hom(A_4, A_3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_1t & v_1t & 0 & 0 & 0 \\ z_1t & u_1t & v_1t & 0 & 0 \\ y_1t & z_1t & u_1t & v_1t & x_1t \end{pmatrix} \right\},$$

$$Hom(A_3, A_5) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_1t \\ u_1t & v_1t & 0 & y_1t & z_1t \\ z_1t & u_1 & v_1t & x_1t & y_1 \\ y_1t & z_2t & u_1t & v_2t & x_2t \end{pmatrix} \right\},$$

$$Hom(A_5, A_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1t & 0 & 0 & v_1t \\ v_2t & x_1t & 0 & 0 & u_1t \\ u_1 & v_2t & x_1t & 0 & z_1t \\ z_2t & u_1t & 0 & 0 & y_2t \\ y_1t & 0 & 0 & 0 & x_1t \end{pmatrix} \right\},$$

$$Hom(A_3, A_6) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1t & y_1t & z_1t & u_1t & 0 \\ v_1t & x_1t & y_1 & z_1t & u_1t \\ u_1 & v_1t & x_1 & y_1 & z_1t \\ z_1 & u_1 & v_1 & x_1 & y_1 \\ y_1 + y_2t & z_1t & u_1 + u_2t & v_1t & x_1t \end{pmatrix} \right\},$$

$$Hom(A_6, A_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1t & z_1t & u_1t & v_1t \\ v_1 & x_1 & y_1t & z_1t & u_1 \\ u_1 + u_2t & v_1t & x_1t & 0 & z_1t \\ z_1 & u_1 + u_2t & v_1t & x_1t & y_1t \\ y_1 & z_1 & u_1 + u_2t & v_1t & x_1 + x_2t \end{pmatrix} \right\},$$

$$Hom(A_4, A_5) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_1t & 0 & 0 & y_1t \\ y_1t & z_1t & u_1t & v_1t & x_1t \end{pmatrix} \right\},$$

$$Hom(A_5, A_4) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1t & y_1t & 0 & 0 & 0 \\ v_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_1t & v_1t & 0 & 0 & 0 \\ z_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$Hom(A_4, A_6) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1t & 0 & 0 \\ z_1t & 0 & v_1t & x_1t & 0 \\ y_1t & z_1t & u_1t & v_1t & x_1t \end{pmatrix} \right\},$$

$$Hom(A_6, A_4) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1t & x_1t & 0 & 0 & 0 \\ u_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1t & u_1t & 0 & 0 & 0 \\ y_1t & z_1t & u_1t & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$Hom(A_5, A_6) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1t & y_1t & z_1t & u_1t & 0 \\ v_1t & 0 & y_2t & 0 & 0 \\ u_2t & v_1t & x_2t & y_2t & 0 \\ z_2t & 0 & v_2t & 0 & 0 \\ y_1t & 0 & u_1t & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$Hom(A_6, A_5) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y_1t & 0 & 0 & v_1t \\ v_1t & x_1t & y_1t & z_1t & u_1t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2t & 0 & 0 & y_2t \\ y_2t & z_2t & u_2t & v_2t & x_2t \end{pmatrix} \right\}.$$

Доведення легко провести по вказаній вище схемі, якщо скористатися наступними рівностями:

$$A_1X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx_{51} & tx_{52} & tx_{53} & tx_{54} & tx_{55} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ tx_{21} & tx_{22} & tx_{23} & tx_{24} & tx_{25} \\ tx_{31} & tx_{32} & tx_{33} & tx_{34} & tx_{35} \\ tx_{41} & tx_{42} & tx_{43} & tx_{44} & tx_{45} \end{pmatrix},$$

$$A_2X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx_{51} & tx_{52} & tx_{53} & tx_{54} & tx_{55} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ tx_{31} & tx_{32} & tx_{33} & tx_{34} & tx_{35} \\ tx_{41} & tx_{42} & tx_{43} & tx_{44} & tx_{45} \end{pmatrix},$$

$$A_3X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx_{51} & tx_{52} & tx_{53} & tx_{54} & tx_{55} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ tx_{41} & tx_{42} & tx_{43} & tx_{44} & tx_{45} \end{pmatrix},$$

$$A_4X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx_{51} & tx_{52} & tx_{53} & tx_{54} & tx_{55} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \end{pmatrix},$$

$$A_5X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \\ tx_{11} & tx_{12} & tx_{13} & tx_{14} & tx_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ tx_{31} & tx_{32} & tx_{33} & tx_{34} & tx_{35} \\ tx_{41} & tx_{42} & tx_{43} & tx_{44} & tx_{45} \end{pmatrix},$$

$$A_6X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx_{51} & tx_{52} & tx_{53} & tx_{54} & tx_{55} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ tx_{21} & tx_{22} & tx_{23} & tx_{24} & tx_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \end{pmatrix},$$

$$XA_1 = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{12} & x_{13}t & x_{14}t & x_{15}t & x_{11}t \\ x_{22} & x_{23}t & x_{24}t & x_{25}t & x_{21}t \\ x_{32} & x_{33}t & x_{34}t & x_{35}t & x_{31}t \\ x_{42} & x_{43}t & x_{44}t & x_{45}t & x_{41}t \\ x_{52} & x_{53}t & x_{54}t & x_{55}t & x_{51}t \end{pmatrix},$$

$$XA_2 = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14}t & x_{15}t & x_{11}t \\ x_{22} & x_{23} & x_{24}t & x_{25}t & x_{21}t \\ x_{32} & x_{33} & x_{34}t & x_{35}t & x_{31}t \\ x_{42} & x_{43} & x_{44}t & x_{45}t & x_{41}t \\ x_{52} & x_{53} & x_{54}t & x_{55}t & x_{51}t \end{pmatrix},$$

$$XA_3 = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15}t & x_{11}t \\ x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25}t & x_{21}t \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35}t & x_{31}t \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45}t & x_{41}t \\ x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55}t & x_{51}t \end{pmatrix},$$

$$XA_4 = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{11}t \\ x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{21}t \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{31}t \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} & x_{41}t \\ x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} & x_{51}t \end{pmatrix},$$

$$XA_5 = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{12}t & x_{13} & x_{14}t & x_{15}t & x_{11} \\ x_{22}t & x_{23} & x_{24}t & x_{25}t & x_{21} \\ x_{32}t & x_{33} & x_{34}t & x_{35}t & x_{31} \\ x_{42}t & x_{43} & x_{44}t & x_{45}t & x_{41} \\ x_{52}t & x_{53} & x_{54}t & x_{55}t & x_{51} \end{pmatrix},$$

$$XA_6 = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{12} & x_{13}t & x_{14} & x_{15} & x_{11}t \\ x_{22} & x_{23}t & x_{24} & x_{25} & x_{21}t \\ x_{32} & x_{33}t & x_{34} & x_{35} & x_{31}t \\ x_{42} & x_{43}t & x_{44} & x_{45} & x_{41}t \\ x_{52} & x_{53}t & x_{54} & x_{55} & x_{51}t \end{pmatrix}.$$

5. Опис категорії незвідних t-мономіальних матриць порядку $n = 6$. Цей випадок аналогічний випадку $n = 4$. Проведемо доведення в трохи скороченому вигляді.

Із теорем 1 і 2 випливає, що за об'єкти категорії $\mathcal{PSM}(K, Ird^{\circ}_{t,6})$ можна взяти такі матриці:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо 4 випадки: $A_1X = XA_1$, $A_2Y = YA_2$, $A_1Z = ZA_2$, $A_2V = VA_1$, де

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{36} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} & x_{46} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} & x_{56} \\ x_{61} & x_{62} & x_{63} & x_{64} & x_{65} & x_{66} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{15} & y_{16} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} & y_{25} & y_{26} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} & y_{35} & y_{36} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} & y_{45} & y_{46} \\ y_{51} & y_{52} & y_{53} & y_{54} & y_{55} & y_{56} \\ y_{61} & y_{62} & y_{63} & y_{64} & y_{65} & y_{66} \end{pmatrix},$$

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} & z_{15} & z_{16} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} & z_{25} & z_{26} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} & z_{35} & z_{36} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} & z_{45} & z_{46} \\ z_{51} & z_{52} & z_{53} & z_{54} & z_{55} & z_{56} \\ z_{61} & z_{62} & z_{63} & z_{64} & z_{65} & z_{66} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} & v_{15} & v_{16} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} & v_{25} & v_{26} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} & v_{35} & v_{36} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} & v_{45} & v_{46} \\ v_{51} & v_{52} & v_{53} & v_{54} & v_{55} & v_{56} \\ v_{61} & v_{62} & v_{63} & v_{64} & v_{65} & v_{66} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо спочатку випадок $A_1X = XA_1$.

$$\begin{pmatrix} tx_{61} & tx_{62} & tx_{63} & tx_{64} & tx_{65} & tx_{66} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{36} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} & x_{46} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} & x_{56} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & x_{11}t \\ x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} & x_{21}t \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{36} & x_{31}t \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} & x_{46} & x_{41}t \\ x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} & x_{56} & x_{51}t \\ x_{62} & x_{63} & x_{64} & x_{65} & x_{66} & x_{61}t \end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{llllll} (1,1): & tx_{61} = x_{12}, & (1,2): & tx_{62} = x_{13}, & (1,3): & tx_{63} = x_{14}, \\ (2,1): & x_{11} = x_{22}, & (2,2): & x_{12} = x_{23}, & (2,3): & x_{13} = x_{24}, \\ (3,1): & x_{21} = x_{32}, & (3,2): & x_{22} = x_{33}, & (3,3): & x_{23} = x_{34}, \\ (4,1): & x_{31} = x_{42}, & (4,2): & x_{32} = x_{43}, & (4,3): & x_{33} = x_{44}, \\ (5,1): & x_{41} = x_{52}, & (5,2): & x_{42} = x_{53}, & (5,3): & x_{43} = x_{54}, \\ (6,1): & x_{51} = x_{62}, & (6,2): & x_{52} = x_{63}, & (6,3): & x_{53} = x_{64}, \\ (1,4): & tx_{64} = x_{15}, & (1,5): & tx_{65} = x_{16}, & (1,6): & tx_{66} = x_{11}t; \\ (2,4): & x_{14} = x_{25}, & (2,5): & x_{15} = x_{26}, & (2,6): & x_{16} = x_{21}t; \\ (3,4): & x_{24} = x_{35}, & (3,5): & x_{25} = x_{36}, & (3,6): & x_{26} = x_{31}t; \\ (4,4): & x_{34} = x_{45}, & (4,5): & x_{35} = x_{46}, & (4,6): & x_{36} = x_{41}t; \\ (5,4): & x_{44} = x_{55}, & (5,5): & x_{45} = x_{56}, & (5,6): & x_{46} = x_{51}t; \\ (6,4): & x_{54} = x_{65}, & (6,5): & x_{55} = x_{66}, & (6,6): & x_{56} = x_{61}t. \end{array} .$$

Отже,

$$Hom(A_1, A_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1t & z_1t & u_1t & v_1t & w_1t \\ w_1 & x_1 & y_1t & z_1t & u_1t & v_1t \\ v_1 & w_1 & x_1 & y_1t & z_1t & u_1t \\ u_1 & v_1 & w_1 & x_1 & y_1t & z_1t \\ z_1 & u_1 & v_1 & w_1 & x_1 & y_1t \\ y_1 & z_1 & u_1 & v_1 & w_1 & x_1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Розглянемо випадок $A_2Y = YA_2$.

$$\begin{pmatrix} y_{61} & y_{62} & y_{63} & y_{64} & y_{65} & y_{66} \\ ty_{11} & ty_{12} & ty_{13} & ty_{14} & ty_{15} & ty_{16} \\ ty_{21} & ty_{22} & ty_{23} & ty_{24} & ty_{25} & ty_{26} \\ ty_{31} & ty_{32} & ty_{33} & ty_{34} & ty_{35} & ty_{36} \\ ty_{41} & ty_{42} & ty_{43} & ty_{44} & ty_{45} & ty_{46} \\ ty_{51} & ty_{52} & ty_{53} & ty_{54} & ty_{55} & ty_{56} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{12}t & y_{13}t & y_{14}t & y_{15}t & y_{16}t & y_{11} \\ y_{22}t & y_{23}t & y_{24}t & y_{25}t & y_{26}t & y_{21} \\ y_{32}t & y_{33}t & y_{34}t & y_{35}t & y_{36}t & y_{31} \\ y_{42}t & y_{43}t & y_{44}t & y_{45}t & y_{46}t & y_{41} \\ y_{52}t & y_{53}t & y_{54}t & y_{55}t & y_{56}t & y_{51} \\ y_{62}t & y_{63}t & y_{64}t & y_{65}t & y_{66}t & y_{61} \end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{llllll} (1,1): & y_{61} = y_{12}t, & (1,2): & y_{62} = y_{13}t, & (1,3): & y_{63} = y_{14}t, \\ (2,1): & ty_{11} = y_{22}t, & (2,2): & ty_{12} = y_{23}t, & (2,3): & ty_{13} = y_{24}t, \\ (3,1): & ty_{21} = y_{32}t, & (3,2): & ty_{22} = y_{33}t, & (3,3): & ty_{23} = y_{34}t, \\ (4,1): & ty_{31} = y_{42}t, & (4,2): & ty_{32} = y_{43}t, & (4,3): & ty_{33} = y_{44}t, \\ (5,1): & ty_{41} = y_{52}t, & (5,2): & ty_{42} = y_{53}t, & (5,3): & ty_{43} = y_{54}t, \\ (6,1): & ty_{51} = y_{62}t, & (6,2): & ty_{52} = y_{63}t, & (6,3): & ty_{53} = y_{64}t, \\ (1,4): & y_{64} = y_{15}t, & (1,5): & y_{65} = y_{16}t, & (1,6): & y_{66} = y_{11}; \\ (2,4): & ty_{14} = y_{25}t, & (2,5): & ty_{15} = y_{26}t, & (2,6): & ty_{16} = y_{21}; \\ (3,4): & ty_{24} = y_{35}t, & (3,5): & ty_{25} = y_{36}t, & (3,6): & ty_{26} = y_{31}; \\ (4,4): & ty_{34} = y_{45}t, & (4,5): & ty_{35} = y_{46}t, & (4,6): & ty_{36} = y_{41}; \\ (5,4): & ty_{44} = y_{55}t, & (5,5): & ty_{45} = y_{56}t, & (5,6): & ty_{46} = y_{51}; \\ (6,4): & ty_{54} = y_{65}t, & (6,5): & ty_{55} = y_{66}t, & (6,6): & ty_{56} = y_{61}. \end{array}$$

Отже,

$$Hom(A_2, A_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & u_1 & v_1 & w_1 \\ w_1t & x_1 + x_2t & y_1 + y_2t & z_1 + z_2t & u_1 + u_2t & v_1 + v_2t \\ v_1t & w_2t & x_1 + x_3t & y_1 + y_3t & z_1 + z_3t & u_1 + u_3t \\ u_1t & v_3t & w_3t & x_1 + x_4t & y_1 + y_4t & z_1 + z_4t \\ z_1t & u_4t & v_4t & w_4t & x_1 + x_5t & y_1 + y_5t \\ y_1t & z_1t & u_1t & v_1t & w_1t & x_1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Розглянемо випадок $A_1Z = ZA_2$.

$$\begin{pmatrix} tz_{61} & tz_{62} & tz_{63} & tz_{64} & tz_{65} & tz_{66} \\ z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} & z_{15} & z_{16} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} & z_{25} & z_{26} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} & z_{35} & z_{36} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} & z_{45} & z_{46} \\ z_{51} & z_{52} & z_{53} & z_{54} & z_{55} & z_{56} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{12}t & z_{13}t & z_{14}t & z_{15}t & z_{16}t & z_{11} \\ z_{22}t & z_{23}t & z_{24}t & z_{25}t & z_{26}t & z_{21} \\ z_{32}t & z_{33}t & z_{34}t & z_{35}t & z_{36}t & z_{31} \\ z_{42}t & z_{43}t & z_{44}t & z_{45}t & z_{46}t & z_{41} \\ z_{52}t & z_{53}t & z_{54}t & z_{55}t & z_{56}t & z_{51} \\ z_{62}t & z_{63}t & z_{64}t & z_{65}t & z_{66}t & z_{61} \end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{llllll}
(1,1): & tz_{61}=z_{12}t, & (1,2): & tz_{62}=z_{13}t, & (1,3): & tz_{63}=z_{14}t,\\
(2,1): & z_{11}=z_{22}t, & (2,2): & z_{12}=z_{23}t, & (2,3): & z_{13}=z_{24}t,\\
(3,1): & z_{21}=z_{32}t, & (3,2): & z_{22}=z_{33}t, & (3,3): & z_{23}=z_{34}t,\\
(4,1): & z_{31}=z_{42}t, & (4,2): & z_{32}=z_{43}t, & (4,3): & z_{33}=z_{44}t,\\
(5,1): & z_{41}=z_{52}t, & (5,2): & z_{42}=z_{53}t, & (5,3): & z_{43}=z_{54}t,\\
(6,1): & z_{51}=z_{62}t, & (6,2): & z_{52}=z_{63}t, & (6,3): & z_{53}=z_{64}t,\\
(1,4): & tz_{64}=z_{15}t, & (1,5): & tz_{65}=z_{16}t, & (1,6): & tz_{66}=z_{11};\\
(2,4): & z_{14}=z_{25}t, & (2,5): & z_{15}=z_{26}t, & (2,6): & z_{16}=z_{21};\\
(3,4): & z_{24}=z_{35}t, & (3,5): & z_{25}=z_{36}t, & (3,6): & z_{26}=z_{31};\\
(4,4): & z_{34}=z_{45}t, & (4,5): & z_{35}=z_{46}t, & (4,6): & z_{36}=z_{41};\\
(5,4): & z_{44}=z_{55}t, & (5,5): & z_{45}=z_{56}t, & (5,6): & z_{46}=z_{51};\\
(6,4): & z_{54}=z_{65}t, & (6,5): & z_{55}=z_{66}t, & (6,6): & z_{56}=z_{61}.
\end{array}$$

Отже,

$$Hom(A_1,A_2)=\left\{\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&y_1t\\ y_1t&z_1t&u_1t&v_1t&w_1t&x_1t \end{pmatrix}\right\}.$$

Розглянемо випадок $A_2V=VA_1$.

$$\begin{pmatrix} v_{61}&v_{62}&v_{63}&v_{64}&v_{65}&v_{66}\\ tv_{11}&tv_{12}&tv_{13}&tv_{14}&tv_{15}&tv_{16}\\ tv_{21}&tv_{22}&tv_{23}&tv_{24}&tv_{25}&tv_{26}\\ tv_{31}&tv_{32}&tv_{33}&tv_{34}&tv_{35}&tv_{36}\\ tv_{41}&tv_{42}&tv_{43}&tv_{44}&tv_{45}&tv_{46}\\ tv_{51}&tv_{52}&tv_{53}&tv_{54}&tv_{55}&tv_{56} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_{12}&v_{13}&v_{14}&v_{15}&v_{16}&v_{11}t\\ v_{22}&v_{23}&v_{24}&v_{25}&v_{26}&v_{21}t\\ v_{32}&v_{33}&v_{34}&v_{35}&v_{36}&v_{31}t\\ v_{42}&v_{43}&v_{44}&v_{45}&v_{46}&v_{41}t\\ v_{52}&v_{53}&v_{54}&v_{55}&v_{56}&v_{51}t\\ v_{62}&v_{63}&v_{64}&v_{65}&v_{66}&v_{61}t \end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{llllll}
(1,1): & v_{61}=v_{12}, & (1,2): & v_{62}=v_{13}, & (1,3): & v_{63}=v_{14},\\
(2,1): & tv_{11}=v_{22}, & (2,2): & tv_{12}=v_{23}, & (2,3): & tv_{13}=v_{24},\\
(3,1): & tv_{21}=v_{32}, & (3,2): & tv_{22}=v_{33}, & (3,3): & tv_{23}=v_{34},\\
(4,1): & tv_{31}=v_{42}, & (4,2): & tv_{32}=v_{43}, & (4,3): & tv_{33}=v_{44},\\
(5,1): & tv_{41}=v_{52}, & (5,2): & tv_{42}=v_{53}, & (5,3): & tv_{43}=v_{54},\\
(6,1): & tv_{51}=v_{62}, & (6,2): & tv_{52}=v_{63}, & (6,3): & tv_{53}=v_{64},\\
(1,4): & v_{64}=v_{15}, & (1,5): & v_{65}=v_{16}, & (1,6): & v_{66}=v_{11}t;\\
(2,4): & tv_{14}=v_{25}, & (2,5): & tv_{15}=v_{26}, & (2,6): & tv_{16}=v_{21}t;\\
(3,4): & tv_{24}=v_{35}, & (3,5): & tv_{25}=v_{36}, & (3,6): & tv_{26}=v_{31}t;\\
(4,4): & tv_{34}=v_{45}, & (4,5): & tv_{35}=v_{46}, & (4,6): & tv_{36}=v_{41}t;\\
(5,4): & tv_{44}=v_{55}, & (5,5): & tv_{45}=v_{56}, & (5,6): & tv_{46}=v_{51}t;\\
(6,4): & tv_{54}=v_{65}, & (6,5): & tv_{55}=v_{66}, & (6,6): & tv_{56}=v_{61}t.
\end{array}$$

Отже,

$$Hom(A_2,A_1)=\left\{\begin{pmatrix} x_1t&y_1t&0&0&0&0\\ w_1t&0&0&0&0&0\\ v_1t&0&0&0&0&0\\ u_1t&0&0&0&0&0\\ z_1t&0&0&0&0&0\\ y_1t&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}\right\}.$$

6. Зауваження. Для $n \geq 7$ морфізми між канонічно t-циклічними матрицями, звичайно ж, можна обчислювати по запропонованій схемі, але, якщо говорити про незвідні матриці, то друга частина теореми 1 вже не виконується. Як контрприклад можна привести наступну матрицю:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & t \\ t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}$$

Її звідність доведена в останньому параграфі роботи [1].

Список використаної літератури

1. *Bondarenko V. M., Bortos M. Yu., Dinis M. Yu., Tylyshchak A. A.* Reducibility and irreducibility of monomial matrices over commutative rings, Algebra and Discrete Mathematici **16** (2), 2013. – P. 171–187.