Київський університет ім. Тараса Шевченка

ISSN 0868-6904

ТЕОРІЯ ймовірностей

92
2015

та математична СТАТИСТИКА

Видавництво ТВіМС

Зареєстрований 23 травня 2000 року.
Номер державної реєстрації КВ4229.
Засновники: Київський національний університет імені Тараса Шевченка та мале підприємство «ТВіМС».

Видавець: мале підприємство «ТВіМС»
Свідоцтво ДК110 від 05.07.2000 р.
Київ 03127, проспект Глушкова, 6

СКЛАД РЕДАКЦІЙНОЇ КОЛЕГІЇ

Журнал *"Теорія ймовірностей та математична статистика"* виходить двічі на рік і перекладається на англійську мову Американським математичним товариством з 1970 року. У журналі публікуються оригінальні статті та огляди з різних питань теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів та полів, математичної статистики та їх застосувань. Рецензії на монографії та інформація відносно наукових подій публікуються як виключення. Всі матеріали, що надходять до редколегії, рецензуються. Після виходу у світ всі матеріали реферуються у *"Mathematical Reviews"* (AMS), *"Zentralblatt für Mathematik"* (Springer) та *"Statistical Methods and Applications"* (ISI). В 2014 році журнал включено до науково-метричної бази Scopus (Elsevier).

Адреса редколегії: Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, 01601, Київ, Україна
тел.: (38 044) 259-03-92
факс: (38 044) 259-03-92
e-mail: journal.tims@gmail.com
web-page: http://probability.univ.kiev.ua/tims/
http://www.ams.org/journals/tpms/

Журнал включено в каталог видань України ДП "Преса". Передплата здійснюється в усіх відділеннях "Укрпошти". Передплатний індекс 90216.

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету.
Протокол № 11 від 25 травня 2015 року.
Формат 70*108/16. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 14.00.
Здано до друку 30.05.2015. Номер замовлення 15-150. Тираж 100 прим.

Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 92, 2015, стор. 61–70

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 92, 2015, pp. 61–70

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ПРОСТОРІВ $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ КРАТНИХ ІНТЕГРАЛІВ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

УДК 519.21

Ю. В. КОЗАЧЕНКО І Ю. Ю. МЛАВЕЦЬ

Анотація. Знаходяться надійність і точність в просторі $C(T)$ обчислення кратних інтегралів методом Монте-Карло.

Abstract. Reliability and accuracy in space $C(T)$ for multiple integrals calculation by Monte Carlo method are established.

Аннотация. Находятся надежность и точность в пространстве $C(T)$ вычисления кратных интегралов методом Монте-Карло.

1. Вступ

Дана робота є продовженням робіт [1] і [2]. Результати роботи [2] застосовувались для знаходження надійності та точності в рівномірній метриці підрахунку інтегралів, що залежать від параметру методом Монте-Карло. На відміну від роботи [1], де використовувалась теорія просторів Орліча випадкових величин, тут використовується теорія просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. В цій роботі точність визначається в нормах простору $C(T)$.

Простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ був введений С. В. Єрмаковим та Є. І. Островським у роботі [3]. В роботі [2] вивчались властивості цих просторів та знайдено умови, за яких для цих просторів виконується умова **H**. Зауважимо, що умова **H** використовується для знаходження точності та надійності при підрахунку інтегралів методом Монте-Карло.

Робота складається із вступу та трьох розділів. В другому розділі наведені необхідні відомості з теорії просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. В третьому розділі розглядаються оцінки розподілу супремумів випадкових процесів із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. В четвертому розділі знаходяться надійність та точність у просторі $C(T)$ обчислення інтегралів, залежних від параметру, методом Монте-Карло і розглядаються приклади.

2. $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ – простори

Означення 2.1. [2] Нехай $\psi(u) > 0$, $u \geq 1$ – монотонно зростаюча неперервна функція, така що $\psi(u) \to \infty$ при $u \to \infty$. Випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, якщо виконується умова:

$$\sup_{u\geq 1} \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} < \infty.$$

Подібне означення сформульоване в роботі С. В. Єрмакова та Є. І. Островського [3]. Але там вимагалось, щоб $E\xi = 0$, якщо $\xi \in \mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Крім того розглядались випадкові величини, такі що $E\,|\xi|^u = \infty$ при певному $u > 0$.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G07; Secondary 65C05.

Ключові слова і фрази. Простори випадкових величин $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, мажоруюча характеристика, випадкові процеси, метод Монте-Карло.

Доведення з роботи [3] того, що $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ є простором Банаха з нормою

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{u\geq 1} \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)}$$

нічим не відрізняється від доведення в нашому випадку.

Наведемо приклади випадкових величин із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Приклад 2.1. Випадкова величина ξ, для якої з імовірністю одиниця виконується умова $|\xi| < C$, де $C > 0$ – деяка константа, належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, що породжений будь-якою функцією ψ з означення 2.1:

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{u\geq 1} \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} \leq \sup_{u\geq 1} \frac{\left(C^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} = \sup_{u\geq 1} \frac{C}{\psi(u)} = \frac{C}{\psi(1)}.$$

Приклад 2.2. Випадкова величина, що має розподіл Лапласа (щільність розподілу $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$) належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u$, що встановлюється еквівалентністю $\sqrt[k]{\mathsf{E}\,|\xi|^k} = \sqrt[k]{k!} \sim k$ при $k \geq 1$.

Приклад 2.3. Нормальна випадкова величина $\xi = N(0,1)$ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u^{1/2}$, оскільки $\sqrt[2l]{\mathsf{E}\,|\xi|^{2l}} = \sqrt[2l]{\frac{(2l)!}{2^l l!}} \sim l^{1/2}$ при $l \geq 1$.

Теорема 2.1. [2] *Нехай випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконується нерівність:*

$$\mathsf{P}\left\{|\xi| > \varepsilon\right\} \leq \inf_{u\geq 1} \frac{\|\xi\|_\psi^u \left(\psi(u)\right)^u}{\varepsilon^u}.$$

Теорема 2.2. *Нехай випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ і $\psi(u) = u^\alpha$, де $\alpha > 0$, тоді для будь-якого $\varepsilon \geq e^\alpha \|\xi\|_\psi$ виконується нерівність:*

$$P\left\{|\xi| > \varepsilon\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\alpha}{e}\left(\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_\psi}\right)^{1/\alpha}\right\}.$$

Доведення. Використовуючи теорему 2.1 маємо, що

$$P\left\{|\xi| > \varepsilon\right\} \leq \inf_{u\geq 1} \frac{\|\xi\|_\psi^u\, u^{\alpha u}}{\varepsilon^u}. \tag{1}$$

Позначимо, що $\frac{\|\xi\|_\psi}{\varepsilon} = b$, тоді з рівностей

$$\left(\ln\left(b^u u^{\alpha u}\right)\right)' = \left(u \ln b + \alpha u \ln u\right)' = \ln b + \alpha \ln u + \alpha = 0;$$
$$\ln u = -\frac{\ln b + \alpha}{\alpha}$$

випливає, що інфінум досягається в точці $u = \frac{1}{e}b^{-1/\alpha}$. Оскільки $u \geq 1$, тоді має виконуватись нерівність $\varepsilon \geq e^\alpha \|\xi\|_\psi$. Підставимо дане значення для величини u в нерівність (1), отримаємо:

$$P\left\{|\xi| > \varepsilon\right\} \leq b^{\frac{1}{e}b^{-\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{1}{e}b^{-\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha\frac{1}{e}b^{-\frac{1}{\alpha}}} = \exp\left\{-\frac{\alpha}{e}\left(\frac{1}{b}\right)^{1/\alpha}\right\}.$$

Звідси випливає твердження теореми 2.2. □

Теорема 2.3. *Нехай випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ і $\psi(u) = e^{au^\beta}$, де $a > 0$, $\beta > 0$, тоді для будь-якого $\varepsilon \geq e^{a(\beta+1)} \|\xi\|_\psi$ виконується нерівність:*

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leq \exp\left\{ -\frac{\beta}{a^{1/\beta}} \left(\frac{\ln \frac{\varepsilon}{\|\xi\|_\psi}}{\beta+1} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta}} \right\}.$$

Доведення. Із теореми 2.1 отримаємо, що

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leq \inf_{u \geq 1} \frac{\|\xi\|_\psi^u \, e^{au^{\beta+1}}}{\varepsilon^u}. \tag{2}$$

Позначимо $\frac{\|\xi\|_\psi}{\varepsilon} = b$. Із рівностей

$$\left(\ln\left(b^u e^{au^{\beta+1}}\right)\right)' = \left(u \ln b + au^{\beta+1}\right)' == \ln b + a(\beta+1)u^\beta = 0;$$

$$u^\beta = -\frac{\ln b}{a(\beta+1)}$$

випливає, що інфінум досягається в точці $u = \left(-\frac{\ln b}{a(\beta+1)}\right)^{1/\beta}$. Оскільки $u \geq 1$, тоді має виконуватись нерівність $\varepsilon \geq e^{a(\beta+1)} \|\xi\|_\psi$. Підставляючи це значення u в нерівність (2), отримаємо

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leq b^{\left(-\frac{\ln b}{a(\beta+1)}\right)^{1/\beta}} e^{a\left(-\frac{\ln b}{a(\beta+1)}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}} = \exp\left\{ -\frac{\beta}{a^{1/\beta}} \left(\frac{\ln \frac{1}{b}}{\beta+1} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta}} \right\},$$

що й треба було довести. □

Теорема 2.4. *Нехай випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ і $\psi(u) = (\ln(u+1))^\lambda$, де $\lambda > 0$, тоді для будь-якого $\varepsilon \geq (e \ln 2)^\lambda \|\xi\|_\psi$ виконується нерівність:*

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leq e^\lambda \exp\left\{ -\lambda \exp\left\{ \left(\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_\psi} \right)^{1/\lambda} \frac{1}{e} \right\} \right\}.$$

Доведення. Оскільки з теореми 2.1 випливає, що

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leq \inf_{u \geq 1} \frac{\|\xi\|_\psi^u \, (\ln(u+1))^{\lambda u}}{\varepsilon^u}, \tag{3}$$

тоді покладемо $u + 1 = \exp\left\{ \left(\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_\psi} \right)^{1/\lambda} \frac{1}{z} \right\}$, де $z > 0$. Тоді, підставляючи цей вираз в нерівність (3), отримаємо:

$$\left(\frac{\|\xi\|_\psi (\ln(u+1))^\lambda}{\varepsilon} \right)^u = \frac{1}{z^{\lambda u}} = \exp\{-\lambda u \ln z\} =$$

$$= \exp\left\{ -\lambda(\ln z) \left(\exp\left\{ \left(\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_\psi} \right)^{1/\lambda} \frac{1}{z} \right\} - 1 \right) \right\} =$$

$$= z^\lambda \exp\left\{ -\lambda(\ln z) \exp\left\{ \left(\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_\psi} \right)^{1/\lambda} \frac{1}{z} \right\} \right\}.$$

Покладемо в цій рівності $z = e$, тоді враховуючи, що $u \geq 1$ отримаємо твердження теореми:

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leq e^{\lambda} \exp\left\{-\lambda \exp\left\{\left(\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_{\psi}}\right)^{1/\lambda} \frac{1}{e}\right\}\right\}. \qquad \square$$

Означення 2.2. [2] Неспадна числова послідовність $(\varkappa(n) > 0, n \geq 1)$ називається M-характеристикою (мажоруючою характеристикою) простору $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$, якщо для будь-яких випадкових величин ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ із цього простору, виконується нерівність:

$$\left\|\max_{1\leq i\leq n} |\xi_i|\right\|_{\psi} \leq \varkappa(n) \max_{1\leq i\leq n} \|\xi_i\|_{\psi}.$$

Теорема 2.5. [2] *Послідовність*

$$\varkappa(n) = \sup_{u\geq 1} \inf_{v>0} n^{\frac{1}{u+v}} \frac{\psi(u+v)}{\psi(u)}$$

є мажоруючою характеристикою простору $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$.

В роботах [2] і [4] знайдено мажоруючі характеристикти для простору $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$, що породжується функціями $\psi(u) = u^{\alpha}$, $\psi(u) = e^{au^{\beta}}$, $\psi(u) = (\ln(u+1))^{\lambda}$. Зокрема, послідовність

$$\varkappa(n) = \left(\frac{e}{\alpha}\right)^{\alpha} (\ln n)^{\alpha}$$

є мажоруючою характеристикою простору $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$ при $n > 1$, де $\psi(u) = u^{\alpha}$, $\alpha > 0$.

Означення 2.3. [2] Скажемо, що для просторів $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$ випадкових величин виконується умова $\mathbf{H}$, якщо існує абсолютна константа C_{ψ} така, що для будь-яких центрованих незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ із $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$ виконується нерівність:

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right\|^2 \leq C_{\psi} \sum_{i=1}^{n} \|\xi_i\|^2.$$

Константу C_{ψ} назвемо масштабною константою простору $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$.

3. Випадкові процеси з просторів $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$, задані на компакті

Означення 3.1. [5] Скажемо, що випадковий процес $X = \{X(t),\ t \in T\}$, де T – деяка параметрична множина, належить простору $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$, якщо для будь-якого $t \in T$ випадкова величина $X(t)$ належить простору $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$.

Приклади випадкових процесів з простору $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$ можна знайти в роботі [6].

Означення 3.2. [5] Метричною масивністю $N(u)$ компактного метричного простору (T, ρ) називається найменше число замкнених куль радіуса не більше u, що покривають множину T.

Теорема 3.1. *Нехай* (T, ρ) *– компактний метричний простір,* $Y = \{Y(t), t \in T\}$ *– випадковий процес, який належить простору* $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$ *для якого виконується умова* $\mathbf{H}$ *з константою* C_{ψ}*,* Y *– сепарабельний процес на* (T, ρ)*. Крім того, нехай існує неперервна монотонно зростаюча функція* $\sigma(h)$*,* $\sigma(0) = 0$*, така, що*

$$\sup_{\rho(t,s)\leq h} \left\|Y(t) - Y(s)\right\|_{\psi} \leq \sigma(h)$$

і для будь-якого $z > 0$ *виконується умова*

$$\int_0^z \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du < \infty,$$

де $\varkappa(n)$ *– мажоруюча характеристика простору* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Нехай $X(t) = Y(t) - m(t)$, *де* $m(t) = \mathsf{E}\, X(t)$ *і* $X_k(t)$ *– незалежні копії процесу* $X(t)$, $S_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k(t)$, $\sigma_1(t) = 2\sqrt{C_\psi}\sigma(t)$.

Тоді для будь-якого $0 < p < 1$ *справджується нерівність:*

$$\left\| \sup_{t\in T} |S_n(t)| \right\|_\psi \le \frac{1}{\sqrt{n}} B(p),$$

де

$$B(p) = 2\sqrt{C_\psi} \inf_{t\in T} \|Y(t)\|_\psi + \frac{1}{p(1-p)} \int_0^{\gamma p} \varkappa\left(N\left(\sigma_1^{(-1)}(u)\right)\right) du,$$

$$\gamma = \sigma_1\left(\sup_{t,s\in T} \rho(t,s)\right).$$

При цьому, для будь-якого $\varepsilon > 0$ *справджується нерівність*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in T} |S_n(t)| > \varepsilon\right\} \le \inf_{u\ge 1} \left(\frac{B(p)\psi(u)}{\varepsilon\sqrt{n}}\right)^u. \tag{4}$$

Доведення. Теорема випливає з теореми 4.1 та наслідку 4.1 з роботи [2]. □

Приклад 3.1. Розглянемо простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u^\alpha$, $\alpha > 0$, тоді з теорем 3.1 та 2.2 при $\varepsilon \ge \frac{e^\alpha B(p)}{\sqrt{n}}$ отримаємо:

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in T} |S_n(t)| > \varepsilon\right\} \le \exp\left\{-\frac{\alpha}{e}\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{B(p)}\right)^{1/\alpha}\right\}.$$

Приклад 3.2. Розглянемо простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = e^{au^\beta}$, $a > 0$, $\beta > 0$, тоді з теорем 3.1 та 2.3 при $\varepsilon \ge \frac{e^{a(\beta+1)} B(p)}{\sqrt{n}}$ дістанемо:

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in T} |S_n(t)| > \varepsilon\right\} \le \exp\left\{-\frac{\beta}{a^{1/\beta}}\left(\frac{\ln \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{B(p)}}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}\right\}.$$

Приклад 3.3. Розглянемо простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = (\ln(u+1))^\lambda$, $\lambda > 0$, тоді з теорем 3.1 та 2.4 при $\varepsilon \ge \frac{(e\ln 2)^\lambda B(p)}{\sqrt{n}}$ маємо:

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in T} |S_n(t)| > \varepsilon\right\} \le e^\lambda \exp\left\{-\lambda \exp\left\{\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{B(p)}\right)^{1/\lambda} \frac{1}{e}\right\}\right\}.$$

4. Надійність та точність у просторі $C(T)$ обчислення інтегралів, залежних від параметру методом Монте-Карло

Нехай $\{\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mu\}$ – вимірний простір, μ – σ-скінченна міра, $p(s) \ge 0$, $s \in \mathcal{S}$ – така функція, що $\int_{\mathcal{S}} p(s) d\mu(s) = 1$, $P(A)$, $A \in \mathcal{A}$ – міра, яка визначається так: $P(A) = \int_A p(s) d\mu(s)$. Оскільки $P(A)$ є ймовірнісною мірою, тоді простір $\{\mathcal{S}, \mathcal{A}, P\}$ є ймовірнісним простором.

Нехай функція $f(s,t)$ залежить від $t \in T$, де (T, ρ) – компактний метричний простір і ця функція $f(s,t)$ неперервна відносно t. Вважаємо, що існує інтеграл $\int_{\mathcal{S}} f(s,t) p(s) d\mu(s) = I(t)$.

Розглянемо $f(s,t)$ як випадковий процес на $\{\mathcal{S}, \mathcal{A}, P\}$ і позначимо його $\xi(s,t) = \xi(t)$ та $I(t) = \int_{\mathcal{S}} f(s,t) p(s) d\mu(s) = \int_{\mathcal{S}} f(s,t) dP(s) = \mathsf{E}\,\xi(t)$.

Нехай $\xi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ – незалежні копії випадкового процесу $\xi(t)$, $Z_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i(t)$. Тоді за посиленим законом великих чисел $Z_n(t) \to \mathsf{E}\,\xi(t) = I(t)$ з імовірністю одиниця для будь-якого $t \in T$.

Означення 4.1. Скажемо, що $Z_n(t)$ наближається до $I(t)$ в просторі $C(T)$ з надійністю $1-\delta$, $\delta > 0$ і точністю $\varepsilon > 0$, якщо виконується така нерівність:

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in T}|Z_n(t)-I(t)| > \varepsilon\right\} \leq \delta.$$

Теорема 4.1. *Нехай випадковий процес $\xi(t)$, $t \in T$ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ для якого виконується умова* **H** *з константою C_ψ, $Z_n(t)-I(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (\xi_i(t)-I(t))$, де $\xi_i(t)$ – незалежні копії випадкового процесу $\xi(t)$.*

Припустимо, що існує неперервна монотонно зростаюча функція $\sigma(h)$, $\sigma(0)=0$, така, що справджується нерівність

$$\sup_{\rho(t,s)\leq h}\left\|\xi(t)-\xi(s)\right\|_\psi \leq \sigma(h).$$

Припустимо також, що для будь-якого $z > 0$ виконується умова

$$\int_0^z \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du < \infty,$$

де $\varkappa(n)$ – мажоруюча характеристика, $N(u)$ – метрична масивність простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, а $\sigma^{(-1)}(u)$ – обернена функція до $\sigma(u)$. Тоді $Z_n(t)$ наближає $I(t)$ з надійністю $1-\delta$, $\delta > 0$ і точністю ε в просторі $C(T)$, якщо число n таке, що для будь-якого $0 < p < 1$ справджується умова

$$\inf_{u\geq 1}\left(\frac{B(p)\psi(u)}{\varepsilon\sqrt{n}}\right)^u \leq \delta, \tag{5}$$

де $B(p) = 2\sqrt{C_\psi}\inf_{t\in T}\|\xi(t)\|_\psi + \frac{1}{p(1-p)}\int_0^{\gamma p}\varkappa\left(N\left(\sigma_1^{(-1)}(u)\right)\right)du$, $\sigma_1(u) = 2\sqrt{C_\psi}\sigma(u)$, $\gamma = \sigma_1\left(\sup_{t,s\in T}\rho(t,s)\right)$.

Доведення. Згідно з теоремою 3.1 маємо, що

$$\|Z_n(t)-I(t)\|_\psi \leq \frac{1}{\sqrt{n}}B(p).$$

Тоді з нерівності (4) випливає, що

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in T}|Z_n(t)-I(t)| > \varepsilon\right\} \leq \inf_{u\geq 1}\left(\frac{B(p)\psi(u)}{\varepsilon\sqrt{n}}\right)^u.$$

З останньої нерівності випливає твердження теореми. □

Теорема 4.2. *Нехай $\xi(\vec{t})$ – сепарабельний випадковий процес, заданий на просторі (T,ρ), де $T = \{a_j \leq t_j \leq b_j, j=1,d\}$, $\rho(\vec{t},\vec{s}) = \max_{1\leq j\leq d}|t_j - s_j|$, $\vec{t} = (t_1,\ldots,t_d)$, $\vec{s} = (s_1,\ldots,s_d)$. Крім того, $\xi(\vec{t})$ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u^\alpha$, $\alpha \geq \frac{1}{2}$ і справджується нерівність*

$$\sup_{\rho(\vec{t},\vec{s})\leq h}\left\|\xi(\vec{t})-\xi(\vec{s})\right\|_\psi \leq C\,|h|^\beta,$$

де $C > 0$, $0 < \beta \leq 1$. Нехай $Z_n(\vec{t}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i(\vec{t})$, де $\xi_i(\vec{t})$ – незалежні копії випадкового процесу $\xi(\vec{t})$, $I(\vec{t}) = \int_S f(\vec{s},\vec{t})p(\vec{s})d\mu(\vec{s}) = \mathsf{E}\,\xi(\vec{t})$.

Тоді $Z_n(\vec{t})$ наближає $I(\vec{t})$ з надійністю $1-\delta$, $\delta > 0$ і точністю ε в просторі $C(T)$, якщо справджується нерівність:

$$n \geq \left(\frac{e^\alpha B(\beta)}{\varepsilon}\right)^2 \max\left(1, \left(-\frac{\ln\delta}{\alpha}\right)^{2\alpha}\right), \tag{6}$$

де $B(\beta) = 4\cdot 3^\alpha \inf_{t\in T}\left\|\xi(\vec{t})\right\|_\psi + \left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^\alpha \cdot \frac{4Cd3^{\alpha+\frac{3}{2}}R^\beta}{2^{\frac{\beta}{2}-1}\beta}$.

Доведення. Теорема випливає з теореми 4.1. В нашому випадку $\sigma(h) = C\,|h|^{\beta}$. В роботі [5] показано, що $C_{\psi} = 4\cdot 9^{\alpha}$, коли $\psi(u) = u^{\alpha}$, $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Отже, $\sigma_1(u) = 4\cdot 3^{\alpha} C\,|u|^{\beta}$, то $\sigma_1^{(-1)}(u) = \left(\frac{u}{4\cdot 3^{\alpha}C}\right)^{1/\beta}$. В роботі [2] знайдено мажоруючу характеристику для простору $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$, $\psi(u) = u^{\alpha}$, яка має вигляд

$$\varkappa(n) = \left(\frac{e}{\alpha}\right)^{\alpha} (\ln n)^{\alpha}.$$

Легко бачити, що

$$N\left(\sigma_1^{(-1)}(u)\right) \leq \prod_{j=1}^{d}\left(\frac{b_j - a_j}{2\sigma_1^{(-1)}(u)} + 1\right) \leq \left(\frac{R}{2\sigma_1^{(-1)}(u)} + 1\right)^{d},$$

де $R = \max_{1\leq j\leq d}(b_j - a_j)$. В нашому випадку

$$N\left(\sigma_1^{(-1)}(u)\right) \leq \left(\frac{R(4\cdot 3^{\alpha}C)^{1/\beta}}{2u^{1/\beta}} + 1\right)^{d}.$$

Отже,

$$B(p) \leq 4\cdot 3^{\alpha}\inf_{t\in T}\left\|\xi(\vec{t})\right\|_{\psi} + \frac{1}{p(1-p)}\int_0^{\tilde{\gamma}p}\left(\frac{e}{\alpha}\right)^{\alpha}\ln\left(\frac{R(4\cdot 3^{\alpha}C)^{1/\beta}}{2u^{1/\beta}} + 1\right)^{d} du, \tag{7}$$

де $\tilde{\gamma} = \sigma_1(R) = 4\cdot 3^{\alpha}CR^{\beta}$. Оскільки, при будь-якому $0 < \theta \leq 1$

$$\ln(1+x) \leq \frac{x^{\theta}}{\theta},$$

то з нерівності (7) випливає, що при $\theta < \beta$ маємо, що

$$\begin{aligned}
B(p) &\leq 4\cdot 3^{\alpha}\inf_{t\in T}\left\|\xi(\vec{t})\right\|_{\psi} + \frac{1}{p(1-p)}\int_0^{\tilde{\gamma}p}\left(\frac{e}{\alpha}\right)^{\alpha}\frac{d}{\theta}\left(\frac{R(4\cdot 3^{\alpha}C)^{1/\beta}}{2u^{1/\beta}}\right)^{\theta} du = \\
&= 4\cdot 3^{\alpha}\inf_{t\in T}\left\|\xi(\vec{t})\right\|_{\psi} + \frac{1}{p(1-p)}\left(\frac{e}{\alpha}\right)^{\alpha}\frac{d}{\theta 2^{\theta}}\left(R^{\beta}4\cdot 3^{\alpha}C\right)^{\frac{\theta}{\beta}}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{\theta}{\beta}\right)}(\tilde{\gamma}p)^{1-\frac{\theta}{\beta}} = \\
&= 4\cdot 3^{\alpha}\inf_{t\in T}\left\|\xi(\vec{t})\right\|_{\psi} + \left(\frac{e}{\alpha}\right)^{\alpha}\frac{d}{\theta 2^{\theta}}\cdot\frac{4\cdot 3^{\alpha}R^{\beta}C}{\left(1-\frac{\theta}{\beta}\right)}\cdot\frac{1}{p^{\frac{\theta}{\beta}}(1-p)}.
\end{aligned}$$

З прикладу 3.1 випливає, що при $\varepsilon \geq \frac{e^{\alpha}B(p)}{\sqrt{n}}$ має місце

$$\inf_{u\geq 1}\left(\frac{B(p)\psi(u)}{\varepsilon\sqrt{n}}\right)^{u} = \exp\left\{-\frac{\alpha\varepsilon^{1/\alpha}n^{1/2\alpha}}{e(B(p))^{1/\alpha}}\right\}.$$

Тепер зрозуміло, що нерівність (5) справджується, коли виконується нерівність

$$n \geq \left(\frac{e^{\alpha}B(p)}{\varepsilon}\right)^{2}\max\left(1, \left(-\frac{\ln\delta}{\alpha}\right)^{2\alpha}\right). \tag{8}$$

Оскільки, нерівність (8) має місце при всіх $0 < p < 1$, то можна мінімізувати праву частину останньої нерівності по θ та p. Тоді при $\theta = \frac{\beta}{2}$, $p = \frac{1}{3}$ отримаємо:

$$\begin{aligned}
B(p) &\leq 4\cdot 3^{\alpha}\inf_{t\in T}\left\|\xi(\vec{t})\right\|_{\psi} + \left(\frac{e}{\alpha}\right)^{\alpha}\frac{d}{\theta 2^{\theta}}\cdot\frac{4\cdot 3^{\alpha}R^{\beta}C}{\left(1-\frac{\theta}{\beta}\right)}\cdot\frac{1}{p^{\frac{\theta}{\beta}}(1-p)} = \\
&= 4\cdot 3^{\alpha}\inf_{t\in T}\left\|\xi(\vec{t})\right\|_{\psi} + \left(\frac{e}{\alpha}\right)^{\alpha}\cdot\frac{4Cd3^{\alpha+\frac{3}{2}}R^{\beta}}{2^{\frac{\beta}{2}-1}\beta} = B(\beta).
\end{aligned}$$

Тоді з останньої нерівності та нерівності (8) випливає, що має місце нерівність (6). □

Використовуючи теореми 2.3 та 2.4 і приклади 3.2, 3.3 можна отримати теореми подібні до теореми 4.2 для простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ породжений функціями $\psi(u) = e^{au^\beta}$, $\psi(u) = (\ln(u+1))^\lambda$.

Приклад 4.1. Розглянемо інтеграл

$$I(t) = rq\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-rx-qy}\sin\left(2\sqrt{txy}\right)dxdy,$$

де $0 \le t \le T$, $r > 0$, $q > 0$.

Нехай ξ і η – незалежні випадкові величини, які розподілені за показниковим розподілом з параметрами r та q

$$\mathsf{P}\{\xi < x\} = \begin{cases} 1 - e^{-rx}, & \text{x>0;} \\ 0, & \text{x<0,} \end{cases}$$

$$\mathsf{P}\{\eta < y\} = \begin{cases} 1 - e^{-qx}, & \text{y>0;} \\ 0, & \text{y<0.} \end{cases}$$

Таким чином,

$$I(t) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} re^{-rx}qe^{-qy}\sin\left(2\sqrt{txy}\right)dxdy = \mathsf{E}\sin\left(2\sqrt{t\xi\eta}\right).$$

Розглянемо простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u^2$ і випадковий процес $\xi(t) = \sin\left(2\sqrt{t\xi\eta}\right)$, $\xi_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ – незалежні копії процесу $\xi(t)$. Тоді оцінкою $I(t)$ є $Z_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i(t)$. Оцінимо норму та норму приросту цього процесу. Тобто $\|\xi(t)\|_\psi = \left\|\sin\left(2\sqrt{t\xi\eta}\right)\right\|_\psi$, а $\inf_{0\le t\le T}\|\xi(t)\|_\psi = 0$. Оцінка норми приросту має вигляд

$$\begin{aligned} \|\xi(t) - \xi(s)\|_\psi &= \left\|\sin\left(2\sqrt{t\xi\eta}\right) - \sin\left(2\sqrt{s\xi\eta}\right)\right\|_\psi \le \\ &\le 2\left\|\sin\left(\sqrt{\xi\eta}\left(\sqrt{t}-\sqrt{s}\right)\right)\right\|_\psi \le 2\left\|\sqrt{\xi\eta}\right\|_\psi\left|\sqrt{t}-\sqrt{s}\right| \le 2\sqrt{|t-s|}\left\|\sqrt{\xi\eta}\right\|_\psi. \end{aligned} \quad (9)$$

З означення норми простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ випливає, що

$$\left\|(\xi\eta)^{\frac{1}{2}}\right\|_\psi = \sup_{u\ge1}\frac{\left(\mathsf{E}(\xi\eta)^{\frac{u}{2}}\right)^{1/u}}{u^2} = \sup_{u\ge1}\frac{\left(\mathsf{E}\,\xi^{\frac{u}{2}}\,\mathsf{E}\,\eta^{\frac{u}{2}}\right)^{1/u}}{u^2}.$$

Звідси маємо, що

$$\mathsf{E}\,\xi^{\frac{u}{2}} = \int_0^{+\infty} x^{\frac{u}{2}}re^{-rx}dx = \frac{1}{r^{\frac{u}{2}}}\Gamma\left(\frac{u}{2}+1\right).$$

Оскільки $\Gamma(z) \le e^{-z}z^{z-\frac{1}{2}}C_z$, де $C_z = \sqrt{2\pi}e^{\frac{1}{12z}}$, то

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{u}{2}+1\right) &\le e^{-\left(\frac{u}{2}+1\right)}\left(\frac{u}{2}+1\right)^{\frac{u}{2}+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}e^{\frac{1}{12\left(\frac{u}{2}+1\right)}} \le \\ &\le e^{-\left(\frac{u}{2}+1\right)}\left(\frac{u}{2}+1\right)^{\frac{u}{2}+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}e^{\frac{1}{18}}. \end{aligned}$$

Отже, при $u \ge 1$ справедливо

$$\left(\mathsf{E}\,\xi^{\frac{u}{2}}\right)^{\frac{1}{u}} \le \frac{1}{\sqrt{r}}e^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{u}}\left(\frac{u}{2}+1\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2u}}\sqrt{2\pi}e^{\frac{1}{18}} \le \frac{1}{\sqrt{r}}\left(\frac{u}{2}+1\right)\sqrt{2\pi}e^{-\frac{8}{18}}.$$

Аналогічно можна знайти, що $\left(\mathsf{E}\,\eta^{\frac{u}{2}}\right)^{\frac{1}{u}} \le \frac{1}{\sqrt{q}}\left(\frac{u}{2}+1\right)\sqrt{2\pi}e^{-\frac{8}{18}}$. Отже,

$$\sup_{u\ge1}\frac{\left(\mathsf{E}\,\xi^{\frac{u}{2}}\,\mathsf{E}\,\eta^{\frac{u}{2}}\right)^{1/u}}{u^2} = \sup_{u\ge1}\frac{1}{\sqrt{rq}}\left(\frac{u}{2}+1\right)^2 2\pi e^{-\frac{8}{9}}\frac{1}{u^2} = \frac{1}{\sqrt{rq}}\cdot\frac{9\pi}{2e^{\frac{8}{9}}}$$

Тоді нерівність (9) має вигляд

$$\|\xi(t)-\xi(s)\|_\psi \le \sqrt{|t-s|}\frac{1}{\sqrt{rq}}\cdot\frac{9\pi}{e^{\frac{8}{9}}}$$

Тобто в термінах теореми 4.2 маємо, що

$$\sigma(h)=Ch^{\frac{1}{2}},$$

де $C=\frac{1}{\sqrt{rq}}\cdot\frac{9\pi}{e^{\frac{8}{9}}}$.

Крім того, $Z_n(t)$ наближає $I(t)$ в просторі $C([0,1])$ з надійністю $1-\delta$ і точністю ε, якщо в нерівності (6) покласти $\varepsilon=0.03B(\beta)$, $\delta=0.01$ маємо, що

$$n\ge 60665.$$

Приклад 4.2. Розглянемо інтеграл

$$I(t)=rq\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{xy}}e^{-rx-qy}\sin\left(\sqrt{txy}\right)dxdy,$$

де $0\le t\le T$, $r>0$, $q>0$.

Нехай ξ і η – незалежні випадкові величини, які розподілені за показниковим розподілом з параметрами r та q. Таким чином,

$$I(t)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{xy}}re^{-rx}qe^{-qy}\sin\left(\sqrt{txy}\right)dxdy=\mathsf{E}\left(\frac{\sin\left(\sqrt{t\xi\eta}\right)}{\sqrt{\xi\eta}}\right).$$

Розглянемо простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u)=u^{\frac{1}{2}}$ і випадковий процес $\xi(t)=\frac{\sin(\sqrt{t\xi\eta})}{\sqrt{\xi\eta}}$, $\xi_i(t)$, $i=1,n$ – незалежні копії процесу $\xi(t)$. Тоді оцінкою $I(t)$ є $Z_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\xi_i(t)$. Оцінимо норму та норму приросту цього процесу. Тобто $\|\xi(t)\|_\psi=\left\|\frac{\sin(\sqrt{t\xi\eta})}{\sqrt{\xi\eta}}\right\|_\psi\le\sqrt{t}$, а $\inf_{0\le t\le T}\|\xi(t)\|_\psi=0$. Оцінка норми приросту має вигляд

$$\|\xi(t)-\xi(s)\|_\psi=\left\|\frac{\sin\left(\sqrt{t\xi\eta}\right)}{\sqrt{\xi\eta}}-\frac{\sin\left(\sqrt{s\xi\eta}\right)}{\sqrt{\xi\eta}}\right\|_\psi\le$$

$$\le 2\left\|\frac{\sin\left(\sqrt{\xi\eta}\left(\sqrt{t}-\sqrt{s}\right)\right)}{2\sqrt{\xi\eta}}\right\|_\psi\le\left\|\sqrt{t}-\sqrt{s}\right\|_\psi\le|t-s|^{\frac{1}{2}}.$$

Тобто в термінах теореми 4.2 маємо, що

$$\sigma(h)=Ch^{\frac{1}{2}},$$

де $C=1$.

Крім того, $Z_n(t)$ наближає $I(t)$ в просторі $C([0,1])$ з надійністю $1-\delta$ і точністю ε, якщо в нерівності (6) покласти $\varepsilon=0.03B(\beta)$, $\delta=0.01$ маємо, що

$$n\ge 3021.$$

Автори виражають подяку професору Ю. С. Мішурі за цінні поради.

5. Висновки

В роботі наведено необхідні відомості з теорії просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Розглянуто оцінки розподілу супремумів випадкових процесів на компакті із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Знайдено умови, за яких кратні інтеграли обчислюються із заданою надійністю та точністю у просторі $C(T)$ методом Монте-Карло. При отриманні цих результатів використовувались методи теорії випадкових процесів з просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Література

1. Yu. V. Kozachenko and Yu. Yu. Mlavets, *Probability of large deviations of sums of random processes from Orlicz space*, Monte Carlo Methods Appl. **17** (2011), 155–168.
2. Ю. В. Козаченко, Ю. Ю. Млавець, *Простори Банаха випадкових величин* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, Теорія ймовір. та матем. статист. **86** (2012), 92–107.
3. С. В. Ермаков, Е. И. Островский *Условия непрерывности, экспоненциальные оценки и центральная предельная теорема для случайных полей*, Деп. в ВИНИТИ, no. 752-В.86.0, 1986.
4. Yu. Yu. Mlavets, $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$*-spaces of random variables with exponential function* ψ, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kiev. Series: Physics & Mathematics **2** (2012), 19–22.
5. Yu. Kozachenko and Yu. Mlavets, *Stochastic processes from* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ *spaces*, Contemporary Mathematics and Statistics **2** (2014), no. 1, 55–75.
6. Ю. Ю. Млавець, *Умови рівномірної збіжності випадкових функціональних рядів із просторів* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика **1** (2014), 97–103.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-матема тичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: ykoz@ukr.net

Кафедра кібернетики і прикладної математики, математичний факультет, Державний вищий навчальний заклад "Ужгородський національний університет", вул. Університетська, 14, Ужгород 88000, Україна

Адреса електронної пошти: yura-mlavec@ukr.net

Надійшла 15/02/2015

ЗМІСТ