ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
“УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ”

Ю. В. Козаченко, О. О. Курченко, О. О. Синявська

ТЕОРЕМИ ЛЕВІ-БАКСТЕРА ДЛЯ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Монографія

2018

УДК 519.21 (035.3)
К59

Рецензенти: Пашко А. О., доцент, доктор фіз.-мат. наук,
професор кафедри теоретичної кібернетики
КНУ імені Тараса Шевченка;
Слюсарчук П. В., доцент, кандидат фіз.-мат. наук,
завідувач кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»

Рекомендовано до друку вченою радою математичного факультету ДВНЗ “УжНУ” (протокол № 11 від 25 червня 2018 р.).

Ю. В. Козаченко, О. О. Курченко , О. О. Синявська.

К59 Теореми Леві-Бакстера для випадкових полів та їх застосування: Монографія. – Ужгород: «Шарк», 2018. – 228 с.

У монографії вивчаються граничні теореми Леві-Бакстера та застосування бакстерівських сум до оцінювання параметрів випадкових функцій у різних статистичних моделях.

Викладення базується, на результатах, отриманих авторами роботи. Рекомендується науковим співробітникам, викладачам, аспірантам і студентам університетів, що спеціалізуються у галузі теорії ймовірностей і математичної статистики.

УДК 519.21 (035.3)

ISBN 978-617-7132-90-4

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

У граничних теоремах для випадкових процесів і полів можна виділити окремим рядком теореми бакстерівського типу. *Бакстерівськими сумами* називають послідовності сум нелінійних функцій від приростів випадкових процесів або полів. За певних умов послідовності бакстерівських сум збігаються у тому чи іншому сенсі до невипадкової сталої. Теореми, в яких встановлюється така збіжність, називаються *теоремами Леві-Бакстера* або *теоремами бакстерівського типу*.

Ця монографія присвячена граничним теоремам бакстерівського типу для випадкових процесів і полів та застосуванню методу бакстерівських сум у статистиці випадкових процесів та полів.

Коротко зупинимося на історії розглядуваних питань.

Теорії оцінок параметрів у статистиці випадкових процесів присвячені роботи І. А. Ібрагімова та Р. З. Хасьмінського [15], І. Ш. Ібрамхалілова та А. В. Скорохода [16], А. Я. Дороговцева [13] та інших. У монографії О. В. Іванова та М. М. Леоненка [17] досліджені питання параметричного оцінювання у статистиці випадкових полів

Вперше теорему бакстерівського типу встановив П. Леві [104], який у 1940 р. отримав результат такого типу для стандартного броунівського руху. Наступний крок у розвитку цього напрямку зробив Г. Бакстер [62], який узагальнив результат П. Леві на більш широкий клас випадкових процесів. Після роботи Г. Бакстера збіжність бакстерівських сум для випадкових процесів і полів досліджувалася багатьма авторами. У припущеннях гауссовості випадкових процесів теореми бакстерівського типу отримали Є. Г. Гладишев [12], І. А. Ібрагімов та Ю. А. Розанов [14], Ю. М. Рижов [47-49], А. Вробель [117], Е. Гіне та Р. Клейн [83], Г. А. Шкляр [58]. Для гауссових випадкових полів та випадкових полів з гауссовими приростами збіжність послідовності бакстерівських сум досліджували С. М. Краснитський [21-22], С. Берман [64], Т. В. Арак [1], П. Стрейт [111], Т. Кавада [93], К. Део та С. Унг [73], К. Гійон

[85-86], К. Ксіонг, П. Ксіа [118], О. О. Курченко [24, 25, 27-29]. Проводилися також дослідження умов збіжності бакстерівських сум для окремих класів випадкових функцій. Так теореми типу Леві-Бакстера для строго передгауссових випадкових процесів отримали О. П. Бесклінська та Ю. В. Козаченко [3], а для псевдогауссових випадкових процесів – Л. Б. Вовк та Ю. В. Козаченко [11]. В. В. Булдигін, В. М. Мельник, В. Г. Шпортюк [6-8] встановили необхідні й достатні умови, за яких дробові поля мають властивість Леві-Бакстера на фіксованій та зростаючій параметричних множинах. В. В. Булдигін та Ю. В. Козаченко [10] отримали умови збіжності послідовності бакстерівських сум до детермінованої сталої для сумісно строго субгауссових та сумісно псевдогауссових випадкових процесів. С. М. Краснитський та О. О. Курченко отримали теорему бакстерівського типу для узагальнених гауссових випадкових процесів [98].

Ю. М. Рижов [48] отримав функціональну граничну теорему для послідовності випадкових процесів, побудованих за бакстерівськими сумами квадратів приростів гауссових випадкових процесів. Функціональну центральну граничну теорему для послідовності випадкових полів, побудованих за сумами квадратів приростів гауссових випадкових полів певного класу довів С. Део [74]. Асимптотичні розподіли, у тому числі функціональні граничні теореми, для нелінійних функціоналів від гауссових випадкових процесів та полів досліджували Р. Л. Добрушин та П. Майор [76], М. Розенблат [110], М. С. Такку [115], П. Бреуер та П. Майор [67].

М. Арато, А. М. Колмогоров, Я. Г. Сінай [2] вперше застосували статистики бакстерівського типу для оцінювання параметрів випадкових процесів. О. П. Бесклінська та Р. Є. Майборода [4] за допомогою бакстерівських статистик побудували оцінки параметрів та інтервали надійності для деяких параметрів процесів бакстерівського типу, зокрема для процесу Орнштейна-Уленбека. Р. Є. Майборода [42] встановив асимптотичну нормальність бакстерівських оцінок параметрів для певного класу випадкових процесів.

Найбільш яскравим прикладом випадкового процесу з неперервним часом та довгостроковою залежністю є дробовий броунівський рух. Вперше дробовий броунівський рух, як випадковий процес з стаціонарними приростами та властивістю самоподібності, розглянув А. М. Колмогоров [20] і назвав його спіраллю Вінера. Наступні кроки у вивченні дробового броунівського руху зробили Г. Ю. Хюрст [89], Б. Б. Мандельброт та В. Ван Несс [105], Ю. С. Мішура [106], Л. Декрейзефонд та А. С. Юстнел [72]. К. Джапарідзе та Г. ван Цантен [77-78] отримали представлення дробового броунівського руху у вигляді стохастичного ряду. Статистичному оцінюванню у моделях з дробовим броунівським рухом присвячена робота О. Г. Кукуша, Ю. С. Мішури, Е. Валкейла [99].

Бакстерівський підхід для оцінювання параметра Хюрста дробового броунівського руху застосовувався, зокрема, у статтях [61, 66, 71, 34, 103]. Зауважимо, що у статистиці випадкових процесів і полів існують численні моделі оцінювання параметрів, у яких бакстерівські статистики дозволяють отримати консистентні оцінки невідомих параметрів та побудувати неасимптотичні області надійності. Монографія Пракаса Рао [108] містить підрозділ, присвячений методу бакстерівських сум. Бакстерівські суми для оцінювання параметрів коваріаційних функцій випадкових процесів та полів застосовували Ю. В. Козаченко та О. О. Курченко [18, 96], О. О. Курченко та М. Є. Наумов [36], О. О. Синявська [112], О. О. Курченко [35, 39, 40].

Останнім часом зріс інтерес до задач оцінювання невідомих параметрів у моделях з похибками у спостереженнях. Розв’язанню таких задач присвячені, наприклад, монографії Р. Дж. Керолл, Д. Руперт, Л. А. Стефанські [68], С. Л. Ченг та Дж. В. Ван Несс [69], С. В. Масюк, О. Г. Кукуш, С. В. Шкляр, М. І. Чепурний, І. А. Ліхтарьов [44], статті О. Г. Кукуш та Г. Шнейєвайс [100], О. Г. Кукуш та А. Л. Маленко [101], Дж. Ю та Г. Чен [119], Л. Жірайтіс та Г. Коул [84]. Статистичне оцінювання параметра Хюрста дробового броунівського руху за спостереженнями з похибками розглянуто у статтях С. Ахард, Дж. Ф. Коерджоллі [59], О. О. Синявська [113].

Наукові результати, що ввійшли до цієї монографії, були отримані авторами і опубліковані.

Монографія складається з семи розділів.

У першому розділі досліджується збіжність послідовності бакстерівських сум для нелінійних функцій від приростів випадкових полів. Для побудови бакстерівських сум використовуються досить загальні прирости функції кількох змінних на багатовимірному паралелепіпеді. Вони є узагальненням приростів для функції однієї змінної, що застосовували Ж. Істас та Г. Ленг [90]. Розгляд більш загальних приростів дозволяє розширити сім'ю випадкових процесів та полів, для яких має місце збіжність послідовності бакстерівських сум до детермінованої додатної сталої. Отримані теореми Леві-Бакстера для випадкових полів, заданих на множинах, вимірних за Жорданом. Досліджена збіжність з імовірністю одиниця послідовності бакстерівських сум для векторних гауссових випадкових полів. Основні результати цього розділу опубліковані у статтях [24, 27, 28, 32, 37].

У другому розділі за допомогою нерівностей для моментів четвертого порядку приростів визначаються випадкові процеси та випадкові поля класу К. Для таких випадкових функцій отримані достатні умови збіжності послідовності бакстерівських сум до детермінованої додатної сталої. Результати другого розділу опубліковані у статтях [94, 95].

Третій розділ містить функціональну граничну теорему для послідовності східчастих полів, побудованих за допомогою нелінійної функції та приростів загального виду гауссового випадкового поля. При цьому використаний метод доведення функціональних граничних теорем, який полягає у доведенні слабкої збіжності послідовності скінченновимірних розподілів та перевірці щільності послідовності мір, а також прийом Крамера-Уолда, метод моментів, діаграмна формула. Результати цього розділу опубліковані у статтях [30-33].

У четвертому розділі за допомогою бакстерівських статистик отримані консистентні оцінки коефіцієнтів лінійної комбінації випадкових полів за спостереженнями у присутності заважаючого випадкового поля. Для цих коефіцієнтів побудовані неасимптотичні довірчі області. Ці результати опубліковані у статтях [38, 51].

У п'ятому розділі за допомогою бакстерівських статистик отримана сильно консистентна оцінка параметра Хюрста H дробового броунівського руху, а також побудована оцінка параметра коваріаційної функції випадкового процесу без припущення гауссовості. В обох випадках побудовані довірчі інтервали. До цього розділу ввійшли результати робіт [34, 53, 103].

У шостому розділі для певного класу гауссових однорідних полів за допомогою бакстерівських статистик побудовані консистентні оцінки параметрів коваріаційних функцій та знайдені еліпсоїди надійності. Отримані також консистентні оцінки параметра коваріаційної функції дробового анізотропного вінерівського поля. Результати шостого розділу опубліковані у статтях [18, 52].

У сьомому розділі бакстерівські статистики застосовуються до інтервального оцінювання параметра Хюрста H дробового броунівського руху за спостереженнями з похибками на дискретній підмножині одиничного інтервалу. До цього розділу ввійшли результати статті [113].

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕМИ ЛЕВІ-БАКСТЕРА ДЛЯ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ

У цьому розділі знайдені достатні умови збіжності у тому чи іншому сенсі послідовності бакстерівських сум для випадкових полів. Описаний клас розглядуваних приростів та їх основні властивості. Доведений закон великих чисел у схемі серій для нелінійних функцій від залежних гауссових випадкових величин. Досліджені умови збіжності у середньому квадратичному та з ймовірністю одиниця послідовності бакстерівських сум для нелінійних функцій від приростів гауссових випадкових полів та для квадратів приростів сумісно строго субгауссових полів. Досліджена також збіжність послідовності бакстерівських сум до детермінованої сталої для випадкових полів, заданих на вимірних за Жорданом множинах. Отримані умови збіжності з ймовірністю одиниця послідовності бакстерівських сум для векторних гауссових випадкових полів.

1.1. Прирости та їх властивості

Нехай d – натуральне число, $p_1,\ p_2, \dots,\ p_d$ – невід'ємні цілі числа,

$$A=\left\{a_{i_1 i_2 \dots i_d}\ :\ 0 \le i_1 \le p_1, \dots, 0 \le i_d \le p_d\right\} \tag{1.1}$$

– d - вимірна $(p_1+1)\times(p_2+1)\times\ldots\times(p_d+1)$ матриця з дійсними елементами.

Означення 1.1. *Невід'ємне ціле число* m *називається порядком* d *-вимірної матриці (1.1), якщо для довільних невід'ємних цілих чисел* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$, *сума яких менша числа* m, *виконується рівність*

$$\sum_{i_1=0}^{p_1} \dots \sum_{i_d=0}^{p_d} i_1^{\alpha_1} i_2^{\alpha_2} \dots i_d^{\alpha_d} a_{i_1 i_2 \dots i_d} = 0, \tag{1.2}$$

але знайдеться хоча б один набір невід'ємних цілих чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_d$*, таких, що* $\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_d=m$ *і*

$$\sum_{i_1=0}^{p_1}\ldots\sum_{i_d=0}^{p_d} {i_1}^{\beta_1}{i_2}^{\beta_2}..{i_d}^{\beta_d} a_{i_1 i_2\ldots i_d}\neq 0. \qquad (1.3)$$

Тут $0^0=1$*. Символ* $+\infty$ *назвемо порядком* d*-вимірної матриці (1.1), якщо такого невід'ємного цілого числа* m *не існує.*

Приклад 1.1. d -вимірна матриця

$$A=\left\{(-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_d} : i_k\in\{0,1\}; 1\le k\le d\right\} \qquad (1.4)$$

має порядок d. Дійсно, якщо виконується нерівність $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_d<d$, то хоча б для одного індексу k від одиниці до d буде виконуватися рівність $\alpha_k=0$. Тому в цьому випадку

$$\sum_{i_1=0}^{1}\ldots\sum_{i_d=0}^{1}(-1)^{i_1+\ldots+i_d}\, {i_1}^{\alpha_1}..{i_d}^{\alpha_d}=\prod_{r=1}^{d}\left(\sum_{i_r=0}^{1}(-1)^{i_p}\, {i_r}^{a_r}\right)=0.$$

Для вектора $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d)=(1,1,\ldots,1)$ маємо

$$\sum_{i_1=0}^{1}\ldots\sum_{i_d=0}^{1}(-1)^{i_1+\ldots+i_d}\, i_1\ldots i_d=\prod_{r=1}^{d}\left(\sum_{i_r=0}^{1}(-1)^{i_r}\, i_r\right)\neq 0.$$

Приклад 1.2. Нехай $p_1=p_2=\ldots=p_d=1$. Всі елементи матриці *A*, крім $a_{00\ldots0}$ та $a_{11\ldots1}$, дорівнюють нулеві; $a_{00\ldots0}=-1$, $a_{11\ldots1}=1$. Така матриця є матрицею першого порядку. Дійсно, для вектора $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d)=(0,0,\ldots,0)$ маємо

$$\sum_{i_1=0}^{1}\ldots\sum_{i_d=0}^{1}{i_1}^{0}{i_2}^{0}\ldots{i_d}^{0}a_{i_1 i_2\ldots i_d}=0,$$

але для вектора $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{d-1}, \alpha_d)=(0,\ 0,\ \ldots,\ 0,1)$

$$\sum_{i_1=0}^{1}\ldots\sum_{i_2=0}^{1}{i_1}^{0}{i_2}^{0}..{i_{d-1}}^{0}{i_d}^{1}a_{i_1 i_2\ldots i_d}\neq 0.$$

При $d=1$ матриця A є вектором і ми будемо говорити про вектор порядку m.

Приклад 1.3. $(p+1)-$ вимірний вектор

$$a=\left((-1)^p\binom{p}{0},\ (-1)^{p-1}\binom{p}{1}, \dots, \binom{p}{p}\right)$$

є вектором p - го порядку, оскільки внаслідок формул О.154.3 та О.154.4 [46]

$$\sum_{i=0}^{p}(-1)^{p-i}\binom{p}{i}i^k=0, \quad 0\le k\le p-1; \ \sum_{i=0}^{p}(-1)^{p-i}\binom{p}{i}i^p\ne 0.$$

Зауваження 1.1. Відмінний від нульового $(p+1)$- вимірний вектор має порядок, який не перевищує p.

Доведення. Застосуємо метод доведення від супротивного. Нехай відмінний від нульового $(p+1)$- вимірний вектор $a=(a_0, a_1, \dots, a_p)$ має порядок $m>p$. Тоді його координати задовольняють наступній лінійній однорідній системі рівнянь

$$\begin{cases} a_0+a_1+a_2+\ldots+a_p=0, \\ 0+1\cdot a_1+2\cdot a_2+\ldots+p\cdot a_p=0, \\ 0+1^2\cdot a_1+2^2\cdot a_2+\ldots+p^2\cdot a_p=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0+1^p\cdot a_1+2^p\cdot a_2+\ldots+p^p\cdot a_p=0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Визначник матриці лінійної однорідної системи рівнянь (1.5) дорівнює

$$p!\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^{p-1} & \dots & p^{p-1} \end{vmatrix}.$$

Визначник у останньому виразі є визначником Вандермонда [23, с. 52] і відмінний від нуля. Таким чином, матриця лінійної однорідної системи рівнянь (1.5) не вироджена. Тому тільки нульовий вектор задовольняє цій системі рівнянь. Отримали суперечність з припущенням, що вектор a відмінний від нульового. □

Зауваження 1.2. Нехай $p_1,\ p_2, \dots,\ p_d$ − невід'ємні цілі числа,

$$a^{(r)} = \left(a_0{}^{(r)},\ a_1{}^{(r)}, \dots,\ a_{p_r}{}^{(r)} \right)$$

– $(p_r + 1)$-вимірний вектор з дійсними координатами, який має порядок $m_r, 1 \le r \le d$. Тоді d-вимірна матриця

$$A = \left\{ a_{i_1 i_2 .. i_d} = a_{i_1}{}^{(1)} a_{i_2}{}^{(2)} .. a_{i_d}{}^{(d)} : 0 \le i_1 \le p_1, \dots, 0 \le i_d \le p_d \right\} \quad (1.6)$$

має порядок $m_1 + m_2 + \dots + m_d$.

Доведення. Для невід'ємних цілих чисел $\alpha_1,\ \alpha_2, \dots,\ \alpha_d$ маємо

$$\sum_{i_1=0}^{p_1} \dots \sum_{i_d=0}^{p_d} i_1{}^{\alpha_1} i_2{}^{\alpha_2} .. i_d{}^{\alpha_d} a_{i_1 i_2 \dots i_d} = \prod_{r=1}^{d} \left(\sum_{i_r=0}^{p_r} a_{i_r}{}^{(r)} i_r{}^{\alpha_r} \right). \quad (1.7)$$

Якщо

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d < m_1 + m_2 + \dots + m_d,$$

то хоча б для одного індексу $k \in \{1, 2, \dots, d\}$ виконується нерівність $\alpha_k < m_k$. Тоді

$$\sum_{i_k=0}^{p_k} a_{i_k}{}^{(k)} i_k{}^{\alpha_k} = 0$$

і тому вираз у правій частині рівності (1.7) дорівнює нулю. Оскільки

$$\sum_{i_k=0}^{p_k} a_{i_k}{}^{(k)} i_k{}^{m_k} \ne 0,\ 1 \le k \le d,$$

то при $\alpha_1 = m_1, \dots, \alpha_d = m_d$ вираз у правій частині рівності (1.7) відмінний від нуля. □

За допомогою d-вимірної матриці A визначимо приріст функції d змінних на d-вимірному паралелепіпеді.

Нехай $t=(t_1,\, t_2,\, \dots,\, t_d)\in R^d$, $h=(h_1, h_2, \dots, h_d)\in(0, +\infty)^d$, $\Pi=\left[t, t+h\right]=$ $=\left[t_1,\, t_1+h_1\right]\times\left[t_2,\, t_2+h_2\right]\times\ldots\times\left[t_d,\, t_d+h_d\right]$ – d-вимірний паралелепіпед; $f:\Pi\to R$ – дійсна функція d змінних; d-вимірна матриця A визначена у рівності (1.1).

Означення 1.2. *Приростом функції* f *на паралелепіпеді* Π, *побудованим за допомогою матриці* A, *називається число*

$$f(\Pi,\, A)=\sum_{i_1=0}^{p_1}\ldots\sum_{i_d=0}^{p_d} a_{i_1 i_2 \ldots i_d}\, f\left(t_1+i_1\delta_1,\, t_2+i_2\delta_2,\, \dots,\, t_d+i_d\delta_d\right),$$

де

$$\delta_1=\frac{h_1}{\max(p_1, 1)},\; \delta_2=\frac{h_2}{\max(p_2, 1)},\; \dots,\; \delta_d=\frac{h_d}{\max(p_d, 1)}.$$

Порядком приросту функції f *на паралелепіпеді* Π, *побудованим за допомогою матриці* A, *називається порядок матриці* A.

Приклад 1.4. Нехай A – d-вимірна матриця, визначена у прикладі 1.1 рівністю (1.4). Тоді

$$f(\Pi,\, A)=\sum_{i_1=0}^{1}\ \ldots\sum_{i_d=0}^{1}(-1)^{i_1+\ldots+i_d}\, f\left(t_1+i_1 h_1,\, \dots,\, t_d+i_d h_d\right) \tag{1.8}$$

Цей приріст можна зобразити у вигляді суперпозиції приростів наступним чином:

$$f(\Pi,\, A)=\Delta_{h_d}{}^{(d)}\ldots\Delta_{h_2}{}^{(2)}\Delta_{h_1}{}^{(1)} f(t), \tag{1.9}$$

де для $r\in\{1, 2, \dots, d\}$

$$\Delta_{h_r}{}^{(r)} f(t_1, \dots, t_r, \dots, t_d)= f(t_1, \dots, t_r+h_r, \dots, t_d)- f(t_1, \dots, t_r, \dots, t_d). \tag{1.10}$$

Прирости, розглянуті у прикладі 1.4, називають *повними приростами* або d-*приростами*. Бакстерівські суми для випадкових полів за допомогою таких приростів будувалися, наприклад, у роботах [1, 21, 92].

Приклад 1.5. Нехай матриця A визначена рівністю (1.6) у зауваженні 1.2, де

$$a_{i_r}^{(r)} = (-1)^{p_r - i_r} \binom{p_r}{i_r}, \ 0 \le i_r \le p_r, \ 1 \le r \le d.$$

З прикладу 1.3 та зауваження 1.2 випливає, що матриця A має порядок $p_1 + p_2 + \ldots + p_d$. Прирости, побудовані за допомогою такої матриці, застосовувалися у роботах [6, 7], в яких досліджувалися умови збіжності бакстерівських сум для дробових полів.

У наступному прикладі будується d-вимірна матриця, за допомогою якої можна побудувати прирости, використані у роботі [29].

Приклад 1.6. Спочатку побудуємо допоміжну зліченну сім'ю векторів, в якому вектор під номером $q \ge 1$ має розмірність $p(q)+1$, де $p(q) = 2^{q-1}$. Елементи цієї сім'ї ми позначимо

$$a^{(q)} = \left(a_0^{(q)}, a_1^{(q)}, \ldots, a_p^{(q)}\right), \ q \ge 1$$

і задамо рекурентно наступними рівностями:

$$a_1^{(1)} = (-1, 1);$$

$$a_i^{(q+1)} = \begin{cases} -a_i^{(q)}, \ 0 \le i \le p(q) - 1, \\ a_0^{(q)} - a_q^{(q)}, \ i = p(q), \\ a_{i-p(q)}^{(q)}, \ \ p(q) + 1 \le i \le 2p(q). \end{cases}$$

Вектор $a^{(q)}$ має порядок q. Для доведення цього твердження застосуємо метод математичної індукції.

Для $q = 1$ вектор $a^{(1)} = (-1, \ 1)$ має порядок один. Припустимо, що твердження виконується для $q = k$ і доведемо його для $q = k+1$. Нехай $p(k) = 2^{k-1}$ і вектор $a^{(k)} = \left(a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, \ldots, a_p^{(k)}\right)$ має порядок k. Це означає, що для всіх чисел $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ виконується рівність

$$0^i a_0^{(k)} + 1^i a_1^{(k)} + 2^i a_2^{(k)} + \ldots + p(k)^i a_{p(k)}^{(k)} = 0,$$

але

$$0^i a_0^{(k)} + 1^i a_1^{(k)} + 2^i a_2^{(k)} + \ldots + p(k)^i a_{p(k)}^{(k)} \neq 0.$$

Розглянемо вектор

$$a^{(k+1)} = \left(-a_0^{(k)}, -a_1^{(k)}, \ldots, -a_{p(k)-1}^{(k)}, a_0^{(k)} - a_{p(k)}^{(k)}, a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_{p(k)}^{(k)}\right).$$

Доведемо, що порядок цього вектора дорівнює $k+1$. Очевидно, сума координат вектора $a^{(k+1)}$ дорівнює нулю. Для $i \geq 1$ маємо:

$$-0^i a_0^{(k)} - 1^i a_1^{(k)} - 2^i a_2^{(k)} - \ldots - (p-1)^i a_{p-1}^{(k)} + p^i (a_0^{(k)} - a_p^{(k)}) + (p+1)^i a_1^{(k)} +$$

$$+ (p+2)^i a_2^{(k)} + \ldots + (p+p)^i a_p^{(k)} = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} p^{i-j} \sum_{l=0}^{p} l^j a_l^{(k)}. \qquad (1.11)$$

Оскільки вектор $a^{(k)}$ має порядок k, то для всіх значень $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ маємо $\sum_{l=0}^{p} l^j a_l^{(k)} = 0$, так як значення індексу j не буде перевищувати $k-1$. Тому права частина рівності (1.11) дорівнює нулеві для $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Для $i = k+1$ права частина рівності (1.11) матиме вигляд

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} p^{k+1-j} \sum_{l=0}^{p} l^j a_l^{(k)}.$$

Цей вираз відмінний від нуля, оскільки $\sum_{l=0}^{p} l^j a_l^{(k)} = 0$ при $0 \leq j \leq k-1$ та $\sum_{l=0}^{p} l^k a_l^{(k)} \neq 0.$

Нехай, далі, $q_1, q_2, \ldots, q_d$ – невід’ємні цілі числа,

$$p_r = \begin{cases} 0, & q_r = 0, \\ 2^{q_r - 1}, & q_r \geq 1, \end{cases} \quad 1 \leq r \leq d; \quad a_0 = 1.$$

Матриця A задається наступним чином:

$$A=\left\{a_{i_1 i_2 \ldots i_d}=a_{i_1}^{(q_1)} a_{i_2}^{(q_2)} \ldots a_{i_d}^{(q_d)} : 0 \le i_1 \le p_1, \ldots, 0 \le i_d \le p_d\right\}.$$

За допомогою цієї d-вимірної матриці будуються прирости, використані у роботі [24].

Лема 1.1. *Нехай* $d=1$, $f \in C^{(1)}([t, t+h])$, $a=(a_0, a_1, \ldots, a_p)$ *– вектор* m*-го порядку,* $m \ge 1$. *Тоді приріст функції* f *на відрізку* $[t, t+h]$*, побудований за допомогою вектора* a*, має наступне інтегральне зображення:*

$$f([t, t+h], a)=\int_t^{t+\delta} f'\left([t_1, t_1+(p-1)\delta], b^{(1)}\right) dt_1, \tag{1.12}$$

де $\delta=\dfrac{h}{p}$, *вектор* $b^{(1)}=\left(b_0^{(1)}, b_1^{(1)}, \ldots, b_{p-1}^{(1)}\right)$ *визначається однозначно через координати вектора* a *і має порядок* $m-1$.

Доведення. Запишемо рівність (1.12) у розгорнутому вигляді:

$$a_0 f(t)+a_1 f(t+\delta)+a_2 f(t+2\delta)+\ldots+a_p f(t+p\delta)=$$

$$=\int_t^{t+\delta}\left(b_0^{(1)} f'(t_1)+b_1^{(1)} f'(t_1+\delta)+\ldots+b_{p-1}^{(1)} f'(t_1+(p-1)\delta)\right) dt_1 .$$

У правій частині останньої рівності застосуємо формулу Ньютона-Лейбніца:

$$a_0 f(t)+a_1 f(t+\delta)+a_2 f(t+2\delta)+\ldots+a_p f(t+p\delta)=$$

$$=b_0^{(1)}(f(t+\delta)-f(t))+b_1^{(1)}(f(t+2\delta)-f(t+\delta))+\ldots+$$

$$+b_{p-1}^{(1)}(f(t+p\delta)-f(t+(p-1)\delta)). \tag{1.13}$$

Ця рівність має виконуватися для всіх неперервно диференційованих на відрізку $[t, t+h]$ функцій. Тому коефіцієнти у лівій і правій частинах рівності (1.13) рівні. Враховуючи, що порядок вектора a не менший за одиницю, отримуємо:

$$b_0^{(1)} = a_1 + a_2 + \ldots + a_p,\ b_1^{(1)} = a_2 + \ldots + a_p,\ \ldots,\ b_{p-1}^{(1)} = a_p\,. \qquad (1.14)$$

Далі, вираз

$$b_0^{(1)} + b_1^{(1)} + b_2^{(1)} + \ldots + b_{p-1}^{(1)} = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + pa_p$$

дорівнює нулеві, якщо $m \geq 2$, і відмінний від нуля при $m = 1$. Для $k \geq 1$ символом $S_k(n)$ позначимо суму k-тих степенів натуральних чисел від 1 до n. Відомо, що $S_k(n)$ – многочлен $(k+1)$-го степеня відносно n. Нехай

$$S_k(n-1) = \alpha_{k(k+1)} n^{k+1} + \alpha_{kk} n^k + \alpha_{k(k-1)} + \ldots + \alpha_{k1} n, \qquad (1.15)$$

для $n \geq 1$, де $\alpha_{k(k+1)}, \alpha_{kk}, \ldots, \alpha_{k1} \in R$. При $n = 1$ з рівності (1.15) отримуємо, що

$$\alpha_{k(k+1)} + \alpha_{kk} + \alpha_{k(k-1)} + \ldots. + \alpha_{k1} = 0\,. \qquad (1.16)$$

Для $k \in \{1, \ldots, m-1\}$ з урахуванням рівностей (1.14), маємо:

$$1^k b_1^{(1)} + 2^k b_2^{(1)} + 3^k b_3^{(1)} + \ldots + (p-1)^k b_{p-1}^{(1)} =$$

$$= S_k(1) a_2 + S_k(2) a_3 + S_k(3) a_3 + \ldots + S_k(p-1) a_p =$$

$$= \alpha_{k(k+1)}\left(2^{k+1} a_2 + 3^{k+1} a_3 + \ldots + p^{k+1} a_p\right) + \alpha_{kk}\left(2^k a_2 + 3^k a_3 + \ldots + p^k a_p\right) + \ldots +$$

$$+ \alpha_{k1}(2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + \ldots + pa_p)\,. \qquad (1.17)$$

Якщо $1 \leq k < m-1$, то

$$2^k a_2 + 3^k a_3 + \ldots + p^k a_p = -a_1, \qquad (1.18)$$

і, внаслідок ланцюжка рівностей (1.17),

$$1^k b_1^{(1)} + 2^k b_2^{(1)} + 3^k b_3^{(1)} + \ldots + (p-1)^k b_{p-1}^{(1)} =$$

$$= \alpha_{k(k+1)}(-a_1) + \alpha_{kk}(-a_1) + \ldots + \alpha_{k1}(-a_1) = 0\,.$$

При $k = m-1$

$$2^{k+1} a_2 + 3^{k+1} a_3 + \ldots + p^{k+1} a_p \neq -a_1,$$

звідки, враховуючи рівності (1.17), (1.18) отримаємо, що

$$1^{m-1}b_1^{(1)}+2^{m-1}b_2^{(1)}+3^{m-1}b_3^{(1)}+\ldots+(p-1)^{m-1}b_{p-1}^{(1)}\neq 0.$$

Таким чином, вектор $b^{(1)}$ має порядок $m-1$. □

Лема 1.2. *Нехай функція* $f\in C^m([t,\,t+h])$*, вектор* $a=(a_0,\,a_1,\,\ldots,\,a_p)$ *має порядок* $m\geq 1$*. Тоді приріст функції* f *на відрізку* $[t,\,t+h]$*, побудований за допомогою вектора* a*, допускає наступне інтегральне зображення:*

$$f([t,t+h];a)=\int_t^{t+\delta}\int_{t_1}^{t_1+\delta}\int_{t_2}^{t_2+\delta}\ldots\int_{t_{m-1}}^{t_{m-1}+\delta}f^{(m)}\left([t_m,\,t_m+h];\,b^{(m)}\right)dt_m dt_{m-1}\ldots dt_1,$$

де $\delta=\dfrac{h}{p}$*, вектор* $b^{(m)}=\left(b_0^{(m)},\,b_1^{(m)},\,\ldots,\,b_{p-m}^{(m)}\right)$ *визначається однозначно через координати вектора* a *і має нульовий порядок, тобто*

$$b_0^{(m)}+b_1^{(m)}+b_2^{(m)}+\ldots+b_{p-m}^{(m)}\neq 0.$$

Для доведення достатньо m раз послідовно застосувати лему 1.1.

Зокрема, при $p=m$ отримуємо наступне твердження.

Наслідок 1.1. *Нехай функція* $f\in C^p([t,\,t+h])$*, вектор* $a=(a_0,\,a_1,\,\ldots,\,a_p)$ *має порядок* p*. Тоді приріст функції* f *на відрізку* $[t,\,t+h]$*, побудований за допомогою вектора* a*, допускає наступне інтегральне зображення:*

$$f([t,\,t+h];\,a)=b^{(p)}\int_t^{t+\delta}\int_{t_1}^{t_1+\delta}\int_{t_2}^{t_2+\delta}\ldots\int_{t_{p-1}}^{t_{p-1}+\delta}f^{(p)}(t_p)dt_p dt_{p-1}\ldots dt_1,$$

де $\delta=\dfrac{h}{p}$*, стала* $b^{(p)}$ *визначається однозначно через координати вектора* a.

Лема 1.3. *Нехай* d*-вимірна матриця* A *задана набором векторів* $a^{(i)}=\left(a_0^{(i)},\,\ldots.,\,a_{p_i}^{(i)}\right)$, $1\leq i\leq d$*, де вектор* $a^{(i)}$ *має порядок* p_i, $p=p_1+\ldots+p_d$*. Нехай, далі,* $\Pi=[t_1,\,t_1+h_1]\times\ldots\times[t_d,\,t_d+h_d]$, $f\in C^{(p)}(\Pi)$*. Тоді приріст* $f(\Pi;\,A)$ *допускає зображення у вигляді добутку сталої, яка залежить тільки від* *матриці* A*, і* p*-кратного інтеграла від мішаної похідної* $\frac{\partial^p f}{\partial t_1^{p_1} .. \partial t_d^{p_d}}$ *по деякій вимірній підмножині* p*-вимірного паралелепіпеда* $[t_1, t_1 + h_1]^{p_1} \times \ldots \times [t_d, t_d + h_d]^{p_d}$.

Твердження цієї леми випливає з наслідку 1.1.

Наслідок 1.2. *Нехай виконуються умови леми 1.3. Тоді*

$$|f(\Pi; A)| \le C \sup_{t \in \Pi} \left| \frac{\partial^p f(t)}{\partial t_1^{p_1} \ldots \partial t_d^{p_d}} \right| \|h\|^p,$$

де стала C *залежить лише від матриці* A*,* $\|h\|$ *– евклідова норма вектора* $h = (h_1, \ldots, h_d)$.

Лема 1.4. *Нехай функція* $f: [0,1]^d \to R$ *набуває значення нуль на гіперплощинах* $t_r = 0,\ 1 \le r \le d$*; матриця* A *задана рівністю (1.4). Тоді довільну лінійну комбінацію значень функції* f *у точках* $\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(\nu)} \in [0,1]^d$ *можна подати у вигляді лінійної комбінації приростів функції* f*, побудованих за допомогою матриці* A*, на паралелепіпедах, які є підмножинами* $[0, 1]^d$*, не мають спільних внутрішніх точок, причому точки* $\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(\nu)}$ *лежать у вершинах цих паралелепіпедів, а коефіцієнти лінійної комбінації не залежать від функції* f *.*

Доведення. Для $\nu = 1$ твердження леми очевидне. Нехай $\nu \ge 2.$ Через кожну з точок $\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(\nu)}$ проведемо d гіперплощин паралельно гіперплощинам $t_r = 0,\ 1 \le r \le d$. Ці гіперплощини разом з гіперплощинами $t_r = 0,\ 1 \le r \le d$ утворять сім'ю $B = \left\{ B_{i_1 \ldots i_d} \mid 1 \le i_r \le \nu,\ 1 \le r \le d \right\}$ паралелепіпедів без спільних внутрішніх точок (деякі паралелепіпеди можуть мати d-вимірну міру Лебега нуль). Нехай $\left\{ t_{(i_1 - \alpha_1) \ldots (i_d - \alpha_d)} \mid 0 \le \alpha_r \le 1,\ 1 \le r \le d \right\}$ – сукупність вершин паралелепіпеда $B_{i_1 \dots i_d}$. Тоді $V = \left\{ t_{j_1 \dots j_d} \mid 0 \le j_r \le \nu, \quad 1 \le r \le d \right\}$ – множина всіх вершин паралелепіпедів сім'ї B. Відмітимо, що $\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(\nu)} \in V$.

Нехай

$$\sum_{j_1=0}^{\nu} \dots \sum_{j_d=0}^{\nu} u_{j_1 \dots j_d} f\left(t_{j_1 \dots j_d}\right),$$

– довільна лінійна комбінація з коефіцієнтами $\{u_{j_1 \dots j_d} \mid 0 \le j_r \le \nu, 1 \le r \le d\} \subset R$ значень функції f у точках множини V. Символом $f_\Delta(\Pi)$ позначимо приріст, породжений матрицею A, функції f на паралелепіпеді Π.

Покажемо, що існують коефіцієнти $\{v_{i_1 \dots i_d} \mid 1 \le i_r \le \nu, \ 1 \le r \le d\} \subset R$ такі, що

$$\sum_{i_1=1}^{\nu} \dots \sum_{i_d=1}^{\nu} v_{i_1 \dots i_d} f_\Delta\left(B_{i_1 \dots i_d}\right) = \sum_{j_1=0}^{\nu} \dots \sum_{j_d=0}^{\nu} u_{j_1 \dots j_d} f\left(t_{j_1 \dots j_d}\right). \tag{1.19}$$

Зауважимо, що

$$f_\Delta\left(B_{i_1 \dots i_d}\right) = \sum_{\alpha_1=0}^{1} \dots \sum_{\alpha_d=0}^{1} (-1)^{d+|\alpha|} f\left(t_{(i_1-\alpha_1)\dots(t_d-\alpha_d)}\right), \tag{1.20}$$

де $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d), |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$. Відмітимо також, що

$$f\left(t_{(i_1-\alpha_1)\dots(i_d-\alpha_d)}\right) = 0,$$

якщо хоча б один з індексів $(i_1 - \alpha_1), (i_2 - \alpha_2), \dots, (i_d - \alpha_d)$ дорівнює нулеві. Підставимо (1.20) у (1.19) і отримаємо рівність

$$\sum_{i_1=1}^{\nu} \dots \sum_{i_d=0}^{\nu} v_{i_1 \dots i_d} \sum_{\alpha_1=0}^{1} \dots \sum_{\alpha_d=0}^{1} (-1)^{d+|\alpha|} f\left(t_{(i_1-\alpha_1)\dots(i_d-\alpha_d)}\right) = \sum_{j_1=0}^{\nu} \dots \sum_{j_d=0}^{\nu} u_{j_1 \dots j_d} f\left(t_{j_1 \dots j_d}\right), \tag{1.21}$$

яка має виконуватися для всіх функцій $f : [0,1]^d \to R,$ рівних нулю на координатних гіперплощинах $t_r = 0, \ 1 \le r \le d$. Прирівняємо коефіцієнти при

$f(t_{i_1\ldots i_d}), 1\le i_r \le \nu, 1\le r\le d$ правої та лівої частин рівності (1.21) і отримаємо лінійну систему рівнянь для визначення коефіцієнтів $v_{i_1\ldots i_d}, 1\le i_r\le \nu,\ 1\le r\le d$. Покладемо

$$w_{i_1\ldots i_d} = v_{(\nu-i_1)\ldots(\nu-i_d)}, \quad s_{i_1\ldots i_d} = t_{(\nu-i_1)\ldots(\nu-i_d)}, \quad z_{i_1\ldots i_d} = u_{(\nu-i_1)\ldots(\nu-i_d)},$$

де $0\le i_r\le \nu-1,\ 1\le r\le d$. Розташуємо коефіцієнти $w_{i_1\ldots i_d},\ 0\le i_r\le \nu-1,\ 1\le r\le d$ у порядку, при якому індекси цих змінних утворюють набір послідовних цілих чисел від 0 до $\overline{(\nu-1)\ldots(\nu-1)}_\nu$ у системі числення з основою ν. Тоді система лінійних рівнянь для визначення коефіцієнтів $w_{i_1\ldots i_d}$ матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned}
&w_{0\ldots0} = z_{0\ldots0},\\
&w_{0\ldots01} - w_{0\ldots0} = z_{0\ldots01},\\
&\ldots\quad \ldots.\quad \ldots.\quad \ldots.\quad \ldots..\\
&\sum_{\alpha_1=0}^{1}\ldots\sum_{\alpha_d=0}^{1}(-1)^{d+|\alpha|}w_{(\nu-1-\alpha_1)\ldots(\nu-1-\alpha_d)} = z_{(\nu-1)\ldots(\nu-1)}.
\end{aligned}$$

Матриця цієї системи трикутна з ненульовими елементами на головній діагоналі.

1.2. Закон великих чисел у схемі серій для нелінійних функцій від гауссових випадкових величин

Нехай (Ω, F, P) – імовірнісний простір, Y – центрована гауссова випадкова величина з одиничною дисперсією,

$$H = L_2\left(R, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dx\right)$$

– гільбертовий простір класів еквівалентності вимірних за Лебегом функцій $G: R\to R,$ для яких

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^2(x)\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dx<\infty.$$

Послідовність многочленів Чебишова-Ерміта $\{H_k(x),\, x\in R:\ k\geq 0\}$ утворює повну ортогональну систему функцій у просторі H:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_k(x)H_m(x)\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dx=\sqrt{2\pi}\,\delta(k,m)m!,$$

де $\delta(k,m)$ – символ Кронекера, рівний одиниці при $k=m$ та нулю при $k\neq m$. Многочлени Чебишова-Ерміта можна виразити за допомогою формули

$$H_k(x)=(-1)^k\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\frac{d^k}{dx^k}\left(\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right)\ k\geq 0.$$

Перші чотири многочлени Чебишова-Ерміта мають такий вигляд:

$$H_0(x)=1,\quad H_1(x)=x,\quad H_2(x)=x^2-1,\quad H_3(x)=x^3-3x;\quad x\in R.$$

Функція $G\in H$ допускає розвинення у ряд за многочленами Чебишова-Ерміта, який збігається за нормою простору H:

$$G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{J(k)}{k!}H_k(x),$$

де $J(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}G(x)H_k(x)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx=E(G(Y)H_k(Y)),\ k\geq 0$ – коефіцієнти Чебишова-Ерміта функції $G.$ Внаслідок рівності Парсеваля,

$$EG^2(Y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{J^2(k)}{k!}<\infty.$$

Означення 1.3. *Нехай функція* $G\in H$ *відмінна від нульової функції. Рангом Ерміта функції* G *називається невід'ємне ціле число* $\mathrm{rang}(G)=$ $=\min\{k\geq 0:\ J(k)\neq 0\}.$

Поняття рангу Ерміта функції $G \in H$ було введено у статті [114]. Зрозуміло, що многочлен Чебишова-Ерміта $H_m(x)$, $x \in R$ має ранг Ерміта *m*.

Приклад 1.7. Нехай $\gamma > -\frac{1}{2}$, $\gamma \neq 0$. Функція

$$G(x) = |x|^{\gamma},\ x \in R \setminus \{0\},\ G(0) = 0$$

належить простору H, оскільки невласний інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{2\gamma} e^{-x^2/2} dx$$

збігається при $\gamma > -\frac{1}{2}$. Знайдемо ранг Ерміта функції $F(x) = G(x) - EG(Y)$, $x \in R$ у залежності від значень параметра $\gamma > -0.5$; $\gamma \neq 0$. Маємо: $EF(Y) = 0$; $E(YF(Y)) = 0$. Далі,

$$E(H_2(Y)F(Y)) = 0 \ \Leftrightarrow\ E\left(Y^2 G(Y)\right) = EG(Y) \ \Leftrightarrow\ E|Y|^{\gamma+2} = E|Y|^{\gamma} \ \Leftrightarrow$$

$$2\Gamma\left(\frac{\gamma+3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right) \ \Leftrightarrow\ \gamma = 0.$$

Отже, для всіх $\gamma \in (-0.5\,;\,0) \cup (0;+\infty)$ функція $F(x)$, $x \in R$ має ранг Ерміта, рівний 2.

Нехай (X, Y) – гауссовий випадковий вектор з нульовим математичним сподіванням та кореляційною матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}.$$

Відомо [14, лема 2.1.1], що

$$E\left(H_k(X)H_j(Y)\right) = k!\rho^k \delta(k, j), \tag{1.22}$$

де $\delta(k, j)$ – символ Кронекера.

Лема 1.5. *Нехай функція $G \in H$ має ранг Ерміта рівний m Тоді*

$$E\left(G(X)G(Y)\right)=\sum_{k=m}^{\infty}\frac{J^2(k)}{k!}\rho^k, \tag{1.23}$$

$$\left|E\left(G(X)G(Y)\right)\right|\le EG^2(Y)|\rho|^m. \tag{1.24}$$

*Доведення***.** Оскільки функція G має ранг Ерміта *m*, то випадкова величина $G(Y)$ має наступне розвинення у ряд, збіжний у просторі $L_2(\Omega, F, P)$:

$$G(Y)=\sum_{k=m}^{\infty}\frac{J(k)}{k!}H_k(Y).$$

Тому у просторі $L_1(\Omega, F, P)$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k,j=m}^{n}\frac{J(k)J(j)}{k!\,j!}H_k(X)H_j(Y)=G(X)G(Y) \quad \text{і}$$

$$E\left(G(X)G(Y)\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k,j=m}^{n}\frac{J(k)J(j)}{k!\,j!}E\left(H_k(X)H_j(Y)\right).$$

З останньої рівності та рівності (1.22) випливає рівність (1.23). Далі,

$$\left|E\left(G(X)G(Y)\right)\right|\le\sum_{k=m}^{\infty}\frac{J^2(k)}{k!}|\rho|^k\le|\rho|^m\sum_{k=m}^{\infty}\frac{J^2(k)}{k!}=|\rho|^m EG^2(Y),$$

оскільки $|\rho|\le 1$. □

Нехай $\left\{X_{nj}:1\le j\le a(n)\right\}, n\ge 1$ –послідовність серій випадкових величин, які у кожній серії мають сумісний гауссовий розподіл з нульовим математичним сподіванням та коваріаційною матрицею

$$B_n=\{r_n(i,\ j):1\le i,\ j\le a(n)\}$$

з одиничними елементами на головній діагоналі. Тут $a(n)\in N, n\ge 1;$ $a(n)\to\infty$ при $n\to\infty$. Нехай, далі, функція $G\in H$ має ранг Ерміта $m\ge 1$.

Розглянемо послідовність випадкових величин

$$S_n(G)=\frac{1}{a(n)}\sum_{j=1}^{a(n)}G(X_{nj}),\ n\ge 1.$$

Математичне сподівання випадкової величини $S_n(G),\ n\ge 1$ дорівнює нулеві, а дисперсія обчислюється за формулою

$$\mathrm{Var}S_n(G)=\frac{1}{a^2(n)}\sum_{i,j=1}^{a(n)}E\big(G(X_{ni})G(X_{nj})\big)=\frac{1}{a^2(n)}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{J^2(k)}{k!}\sum_{i,j=1}^{a(n)}r_n^{\,k}(i,j).$$

Покладемо

$$b_{nk}=\frac{1}{a^2(n)}\sum_{i,j=1}^{a(n)}r_n^{\,k}(i,j),\ k\ge 1,\ n\ge 1; \qquad (1.25)$$

$$M_G=\{k\ge m|\ J(k)\ne 0\}. \qquad (1.26)$$

З урахуванням цих позначень,

$$\mathrm{Var}S_n(G)=\sum_{k\in M_G}\frac{J^2(k)}{k!}b_{nk}. \qquad (1.27)$$

Оскільки $\mathrm{Var}S_n(H_k)=k!b_{nk}$, то $b_{nk}\ge 0$ при $k\ge m,\ n\ge 1$.

Теорема 1.1. *Нехай функція* $F\in H$, $c=EF(Y)$; $G(x)=F(x)-c,\ x\in R$. *Для збіжності у середньому квадратичному послідовності випадкових величин* $S_n(F)$, $n\ge 1$ *до сталої* c *необхідно і достатньо щоб для кожного* $k\in M_G$ $b_{nk}\to 0$ *при* $n\to\infty$.

Доведення. Зауважимо, що $S_n(F)\to c$ у середньому квадратичному тоді й тільки тоді, коли $S_n(G)\to 0$ у середньому квадратичному.

Необхідність. Нехай $S_n(G)\to 0$ у середньому квадратичному при $n\to\infty$. Це означає, що

$$ES_n^{\,2}(G)=\sum_{k\in M_G}\frac{J^2(k)}{k!}b_{nk}\to 0$$

при $n \to \infty$. Оскільки доданки під знаком суми невід'ємні, то для кожного $k \in M_G$ $b_{nk} \to 0$ при $n \to \infty$.

Достатність. Нехай для кожного $k \in M_G$ $b_{nk} \to 0$ при $n \to \infty$. Доданки під знаком суми у рівності (1.25) за абсолютною величиною не перевищують одиниці. Тому, враховуючи невід'ємність чисел b_{nk}, отримуємо, що для всіх натуральних чисел $n,\ k:\ b_{nk} \in [0,1]$. Ряд із загальним членом $\frac{J^2(k)}{k!}$ збігається. Тому для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число $k_0 > m$, що

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{J^2(k)}{k!} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Оскільки для всіх натуральних чисел $n,\ k:\ b_{nk} \in [0,1]$, то для всіх $n \geq 1$

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{J^2(k)}{k!} b_{nk} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нехай s – число елементів скінченної множини $M_G \cap \{m, m+1, \ldots, k_0 - 1\}$ Якщо $s = 0$, то для всіх $n \geq 1$ виконується нерівність $ES_n{}^2(G) < \frac{\varepsilon}{2}$. Припустимо далі, що множина $M_G \cap \{m,\ m+1,\ \ldots,\ k_0 - 1\} = \{k_1,\ \ldots,\ k_s\}$ непорожня. Оскільки для всіх $k \in M_G:\ b_{nk} \to 0$ при $n \to \infty$, то існує таке натуральне число N, що для всіх $n > N$ та всіх $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ s\}$ виконується нерівність

$$0 \leq b_{nk_i} < \frac{k_i!}{J^2(k_i)} \cdot \frac{\varepsilon}{2(s+1)}.$$

Тоді

$$\sum_{k \in M_G, k < k_0} \frac{J^2(k)}{k!} b_{nk} = \sum_{i=1}^{s} \frac{J^2(k_i)}{k_i!} b_{nk_i} < \sum_{i=1}^{s} \frac{J^2(k_i)}{k_i!} \cdot \frac{k_i!}{J^2(k_i)} \cdot \frac{\varepsilon}{2(s+1)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким чином, для всіх $n > N$ маємо:

$$ES_n^{\,2}(G)=\sum_{k=m}^{\infty}\frac{J^2(k)}{k!}b_{nk}=\sum_{k=m}^{k_0-1}\frac{J^2(k)}{k!}b_{nk}+\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{J^2(k)}{k!}b_{nk}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\,.$$

Отже, $ES_n^{\,2}(G)\to 0$ у середньому квадратичному при $n\to\infty$. □

Зауваження 1.3. Нехай функції F, G такі ж як у теоремі 1.1 і

$$\sum_{i,j=1}^{a(n)}\left|r_n(i,j)\right|^m=o\left(a^2(n)\right), n\to\infty. \qquad (1.28)$$

Тоді $S_n(F)\to c$ у середньому квадратичному при $n\to\infty$.

*Доведення***.** Дійсно, для довільного $k\in M_G$ маємо:

$$b_{nk}=\frac{1}{a^2(n)}\sum_{i,j=1}^{a(n)}r_n^{\,k}(i,j)\le\frac{1}{a^2(n)}\sum_{i,j=1}^{a(n)}|\,r_n(i,j)|^m\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Тому з теореми 1.1 випливає твердження. □

Теорема 1.2. *Нехай функція* $F\in H\,, c=EF(Y);\; G(x)=F(x)-c,\; x\in R$ *і*

$$\sup_{k\in M_G}\sum_{n=1}^{\infty}b_{nk}<\infty, \qquad (1.29)$$

де b_{nk} *визначені у рівності (1.25). Тоді* $S_n(F)\to c$ *з ймовірністю одиниця при* $n\to\infty$.

Доведення. Спочатку доведемо збіжність ряду із загальним членом $\mathrm{Var}S_n(G)=ES_n^{\,2}(G)$. Маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}ES_n^{\,2}(G)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{J^2(k)}{k!}b_{nk}=\sum_{k=m}^{\infty}\frac{J^2(k)}{k!}\sum_{n=1}^{\infty}b_{nk}\,,$$

причому останній повторний ряд з невід’ємними членами збіжний.

Оскільки ряд з дисперсій $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Var}\ S_n(G)$ збігається, то $S_n(G)-ES_n(G)\to$ $\to 0$ з ймовірністю одиниця при $n\to\infty$ [41, с. 24]. Але $ES_n(G)=0$. □

Теорема 1.3. *Нехай функція* $F \in H, c = EF(Y)$; $G(x) = F(x) - c,\ x \in R$. *Функція* G *має ранг Ерміта* $m \geq 2$, *де* m *– парне число. Для збіжності у середньому квадратичному послідовності випадкових величин* $S_n(F), n \geq 1$ *до сталої* c *при* $n \to \infty$ *необхідно й достатньо, щоб* $b_{nm} \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Якщо ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_{nm}$ *збігається, то* $S_n(F) \to c$ *з ймовірністю одиниця при* $n \to \infty$.

Доведення. Оскільки елементи коваріаційної матриці B_n за абсолютною величиною не перевищують одиниці, то для довільного $k \geq m$ виконується нерівність

$$0 \leq b_{nk} = \frac{1}{a^2(n)} \sum_{i,j=1}^{a(n)} r_n{}^k(i,j) \leq \frac{1}{a^2(n)} \sum_{i,j=1}^{a(n)} r_n{}^m(i,j) = b_{nm} .$$

Тому для кожного $k \in M_G$: $b_{nk} \to 0$ при $n \to \infty$. Якщо ряд із загальним членом $b_{nm}, n \geq 1$ збігається, то і $\sup_{k \in M_G} \sum_{n=1}^{\infty} b_{nk} < \infty$. Тепер твердження теореми 1.3 випливають з теореми 1.1 та теореми 1.2. □

Зауваження 1.4. Якщо ранг Ерміта функції G в умовах теореми 1.3 – непарне натуральне число, то твердження теореми 1.3 у частині достатності, взагалі кажучи, не виконується. Наприклад, для послідовності серій випадкових величин

$$\left\{X_{ni} = (-1)^{i+1} Y : 1 \leq i \leq 2n\right\},\ n \geq 1,$$

де Y – стандартна гауссова випадкова величина з математичним сподіванням нуль та дисперсією одиниця, і функції $G(x) = H_1(x) + H_2(x)$, $x \in R$ маємо $b_{n1} = 0,\ n \geq 1$. Але $b_{n2} = 1, n \geq 1$ і тому послідовність $S_n(G),\ n \geq 1$ не збігається до нуля у середньому квадратичному при $n \to \infty$.

Приклад 1.8. Нехай $\{\xi_n, n \in Z\}$ – стаціонарний гауссовий процес з нульовим середнім значенням, $E\xi_n{}^2 = 1, n \in Z$ і коваріаційною функцією $r(n) = E(\xi_0 \xi_n)$, $n \in Z$. Припустимо, що для деякого показника $\alpha > 0$

$$r(n) \sim n^{-\alpha} L(n), \ n \to \infty,$$

де $L(t), t > 0$ – неперервна на промені $(0, +\infty)$ функція повільної зміни на нескінченності [50]. Розглянемо наступну послідовність серій

$$\left\{ X_{nj} = \xi_j \mid 1 \le j \le a(n) \right\}, \ n \ge 1.$$

Нехай функція $F \in H, c = EF(Y); \ G(x) = F(x) - c, \ x \in R$; функція G має ранг Ерміта m, де m – парне натуральне число. Маємо:

$$b_{nm} = \frac{1}{a^2(n)} \sum_{i=1}^{a(n)} \sum_{j=1}^{a(n)} r^m(j-i) = \frac{1}{a^2(n)} \left(a(n) r^m(0) + 2 \sum_{l=1}^{a(n)-1} (a(n) - l) r^m(l) \right) \le$$

$$\le \frac{1}{a(n)} + \frac{2}{a(n)} \sum_{l=1}^{a(n)-1} r^m(l).$$

При $\alpha m > 1$ ряд із загальним членом $r^m(l), \ l \ge 1$ збіжний і тому $b_{nm} = O\left(\frac{1}{a(n)} \right), \ n \to \infty$. Якщо $\alpha m = 1$, то

$$b_{nm} = O\left(\frac{L^m(a(n)) \log a(n)}{a(n)} \right), \ n \to \infty,$$

а при $0 < \alpha m < 1$

$$b_{nm} = O\left(L^m(a(n)) (a(n))^{-m\alpha} \right) \ \text{при} \ \ n \to \infty.$$

Таким чином, для всіх значень показника $\alpha > 0$ має місце збіжність до нуля послідовності b_{nm} при $n \to \infty$, і, внаслідок теореми 1.3, $S_n(F) \to c$ у середньому квадратичному при $n \to \infty$. Якщо послідовність $a(n)$ зростає достатньо швидко для збіжності ряду із загальним членом $b_{nm}, n \ge 1$, (наприклад, при $a(n) = 2^n$, $n \ge 1$), то $S_n(F) \to c$ з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$.

Зауваження 1.5. Нехай

$$\left\{\alpha_{nj} : 1 \le j \le a(n)\right\},\ n \ge 1$$

– послідовність серій невід’ємних дійсних чисел, які задовольняють наступні умови :

1) $\sum_{j=1}^{a(n)} \alpha_{nj} = 1;$

2) $\max\left\{\alpha_{nj} : 1 \le j \le a(n)\right\} \to 0, \quad n \to \infty.$

Для функції $G \in H$ покладемо

$$S_n^{(\alpha)} = \sum_{j=1}^{a(n)} \alpha_{nj} G\left(X_{nj}\right);\ b_{nk}^{(\alpha)} = \sum_{i,j=1}^{a(n)} \alpha_{ni}\alpha_{nj} r^k\left(i, j\right),\ k \ge 1,\ \ n \ge 1 .$$

Нехай функція $F \in H$. Для послідовності випадкових величин $\left\{S_n^{(\alpha)}(F) : n \ge 1\right\}$ мають місце твердження, аналогічні теоремам 1.1, 1.2, 1.3, в яких замість чисел $\left\{b_{nk} : k \ge 1,\ n \ge 1\right\}$ фігурують числа $\left\{b_{nk}^{(\alpha)} : k \ge 1,\ n \ge 1\right\}$.

1.3. Збіжність бакстерівських сум для нелінійних функцій від приростів гауссових випадкових полів

Нехай M – відкрита множина в R^d, $[0, 1]^d \subset M$; $\left\{X(t) : t = (t_1, \ldots, t_d) \in \in M\right\}$ – гауссове випадкове поле з нульовим математичним сподіванням та коваріаційною функцією $r(s, t) = E\left(X(s)X(t)\right)$, $s, t \in M$. Символом $X(q; A)$ позначимо приріст випадкового поля $X(t)$, $t \in M$ на паралелепіпеді

$$q = q(t, h) = [t_1, t_1 + h_1] \times \ldots \times [t_d, t_d + h_d] \subset [0, 1]^d ,$$

де $t=(t_1,\dots,t_d)$, $h=(h_1,\dots,h_d)$, $h_i>0$, $1\le i\le d$, побудований за допомогою матриці A. Нехай, далі, $\lambda=\{q\}$ – розбиття d-вимірного паралелепіпеда $[0,1]^d$ на паралелепіпеди з ребрами, паралельними координатним осям,

$$|\lambda|=\sup_{q\in\lambda}\sup_{x,y\in q}\|x-y\|$$

– дрібність розбиття λ, де $\|\cdot\|$ – евклідова норма у просторі R^d. Для довільного паралелепіпеда $q\subset[0,1]^d$ покладемо

$$X_q=\frac{X(q;A)}{\sqrt{EX^2(q;A)}}.$$

Ця випадкова величина є гауссовою з нульовим математичним сподіванням та одиничною дисперсією. Для функції $F\in H$ та довільного розбиття λ одиничного паралелепіпеда $[0,1]^d$ покладемо

$$v(F,\lambda)=\sum_{q\in\lambda}F\left(X_q\right)mes(q),$$

де символом *mes* позначена міра Лебега у просторі R^d.

Нехай d-вимірна матриця A визначена рівністю (1.1). Зазначимо, що для паралелепіпедів $q,\ p\subset[0,1]^d$

$$E(X(q;A)X(p;A))=r(q\times p;A\otimes A),$$

де $A\otimes A=\left\{a_{i_1i_2\dots i_d}a_{j_1j_2\dots j_d}:0\le i_1,\ j_1\le p_1,\dots,0\le i_d,\ j_d\le p_d\right\}$.

Теорема 1.4. *Нехай функція* $F\in H$, $c=EF(Y)$; $G(x)=F(x)-c$, $x\in R$. *Для того, щоб*

$$v(F,\lambda)\to c$$

у середньому квадратичному при $|\lambda|\to 0$ *необхідно й достатньо, щоб для кожного* $k\in M_G$

$$b_{\lambda k} = \sum_{q,p\in\lambda} \frac{r^k(q\times p;\ A\otimes A)\, mes(q)\, mes(p)}{\sqrt{r^k(q\times q;\ A\otimes A) r^k(p\times p;\ A\otimes A)}} \to 0$$

при $|\lambda| \to 0$.

Доведення. Оскільки $\{X(t),\ t\in M\}$ – гауссове випадкове поле з нульовим середнім значенням, то сім’я випадкових величин $\{X_q : q\in\lambda\}$ має сумісний гауссовий розподіл з нульовим середнім та коваріаційною матрицею

$$\left\{ b(q,\ p) = \frac{r(q\times p;\ A\otimes A)}{\sqrt{r(q\times q;\ A\otimes A)\, r(p\times p;\ A\otimes A)}}: \quad q,\ p\in\lambda \right\}.$$

Набір чисел $\{mes(q):\ q\in\lambda\}$ відіграє роль детермінованих невід’ємних сталих $\left\{\alpha_{nj} :\ 1\le j\le a(n)\right\}$ із зауваження 1.5. Таким чином, з теореми 1.1 і зауваження 1.5 випливає твердження теореми 1.4. □

У наступній теоремі наведені достатні умови збіжності послідовності випадкових величин $\{v(F,\ \lambda_n): n\ge 1\}$ до сталої c з імовірністю одиниця.

Теорема 1.5. *Нехай функція* $F\in H$, $c = EF(Y)$; $G(x) = F(x) - c,\ x\in R$; $\{\lambda_n : n\ge 1\}$ *– послідовність розбиттів,* $|\lambda_n| \to 0$ *при* $n\to\infty$. *Якщо*

$$\sup_{k\in M_G} \sum_{n=1}^{\infty} b_{\lambda_n k} < \infty,$$

то $v(F, \lambda_n) \to c$ *з імовірністю одиниця при* $n\to\infty$.

Доведення випливає з теореми 1.2 та зауваження 1.5.

У випадку, коли ранг Ерміта функції G – парне натуральне число, має місце наступний наслідок.

Наслідок 1.3. *Нехай функція* $F\in H$, $c = EF(Y)$; $G(x) = F(x) - c,\ x\in R$ *і ранг Ерміта* m *функції* G *– парне натуральне число. Тоді:*

1) для збіжності $v(F,\ \lambda)\to c$ *у середньому квадратичному при* $|\lambda|\to 0$ *необхідно й достатньо, щоб*

$$b_{\lambda m}=\sum_{q,p\in\lambda}\frac{r^m(q\times p;\,A\otimes A)\,mes(q)\,mes(p)}{\sqrt{r^m(q\times q;\,A\otimes A)\,r^m(p\times p;\,A\otimes A)}}\to 0 \text{ при } |\lambda|\to 0\,;$$

2) якщо ряд із загальним членом $b_{\lambda_n m}$, $n\ge 1$ *збігається, де* $\{\lambda_n : n\ge 1\}$ *послідовність розбиттів,* $|\lambda_n|\to 0$ *при* $n\to\infty$, *то* $v(F,\ \lambda_n)\to c$ *з імовірністю одиниця при* $n\to\infty$.

Цей наслідок випливає з теореми 1.3 та зауваження 1.5.

Зауваження 1.6. Нехай H_m – многочлен Ерміта степеня m, де m – парне натуральне число. Враховуючи, що в умовах теореми 1.4

$$b_{\lambda m}=\operatorname{Var}\left(\sum_{q\in\lambda}H_m\left(X_q\right)mes(q)\right),$$

отримуємо еквівалентність наступних чотирьох умов:

1) $v(F,\,\lambda)\to c$ у середньому квадратичному при $|\lambda|\to 0$;
2) $v(G,\,\lambda)\to 0$ у середньому квадратичному при $|\lambda|\to 0$;
3) $v(H_m,\,\lambda)\to 0$ у середньому квадратичному при $|\lambda|\to 0$;
4) $b_{\lambda m}\to 0$ при $|\lambda|\to 0$.

Нехай $e^{(k)}, 1\le k\le d$ – стандартний базис в R^d, E_k – підпростір в R^d, породжений вектором $e^{(k)}$, $P_k : R^d\to E_k$ – проектор на підпростір E_k. Нехай, далі,

$$\rho_1(A,\,B)=\inf_{x\in A,\,y\in B}|x-y|\ -$$

відстань між множинами $A\subset R, B\subset R$ на прямій. Для множин $C\subset R^d$, $D\subset R^d$ покладемо

$$\sigma(C,\,D)=\min_{1\le k\le d}\rho_1(P_kC,\,P_kD).$$

Теорема 1.6. *Нехай функція* $F\in H$, $c=EF(Y)$; $G(x)=F(x)-c, x\in R$ *і виконуються наступні умови:*

1) існують додатні сталі L, β*, функція* $\varphi:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$*, неперервна і монотонна на* $(0,+\infty)$*,* $\varphi(0+)=0$*, такі, що для довільних* d*-вимірних паралелепіпедів* $q,\ q'\subset T$ *,* $\sigma(q,\ q')>0$ *виконується нерівність*

$$|r(q\times q';\ A\otimes A)|\le\frac{L(mes(q)\,mes(q'))^{\beta}}{\varphi(\sigma(q,\ q'))};$$

2) існують додатні сталі C, α *такі, що для довільного* d*-вимірного паралелепіпеда* $q\subset T$ *виконується нерівність*

$$r(q\times q;\ A\otimes A)\ge C\,(mes(q))^{\alpha}\ ;$$

3) $\beta>\frac{\alpha}{2}$.

Тоді $v(F,\lambda)\to c$ *у середньому квадратичному при* $|\lambda|\to 0$.

*Доведення***.** Покладемо

$$b'_{\lambda k}=\sum_{q,q'\in\lambda}\left|E\left(X_q X_{q'}\right)\right|^{k}\ mes(q)\,mes(q'),\ \ k\ge 1.$$

Нехай m – ранг Ерміта функції G. Зауважимо, що для всіх $k\ge m$, $0\le b'_{\lambda k}\le b'_{\lambda m}$. Тому із збіжності

$$b'_{\lambda m}\to 0\ \text{ при }\ |\lambda|\to 0 \tag{1.30}$$

випливає, що $\sup\limits_{k\in M_G} b'_{\lambda k}\to 0$ при $|\lambda|\to 0$ і, внаслідок теореми 1.4, $v(F,\ \lambda)\to c$ у середньому квадратичному при $|\lambda|\to 0$.

Доведемо збіжність (1.30). Нехай $\varepsilon>0$. Для розбиття λ покладемо

$$A(\lambda)=\left\{(q,\ q')\in\lambda^2\,\middle|\,\sigma(q,\ q')\ge\varepsilon\right\},\ \ B(\lambda)=\lambda^2\setminus A(\lambda).$$

Оскільки $|\lambda|\to 0$, то, не втрачаючи загальності, можна вважати, що $|\lambda|<\varepsilon$. Для $(q,q')\in B(\lambda)$ декартовий добуток $q\times q'$ включається хоча б до однієї з наступних множин:

$$M_1 = \left\{ (t,s) \in [0,1]^{2d} : \left| t_1 - s_1 \right| \le 3\varepsilon \right\}, \;\; M_2 = \left\{ (t,s) \in [0,1]^{2d} : \left| t_2 - s_2 \right| \le 3\varepsilon \right\},$$

$$\dots \qquad \dots \qquad \dots$$

$$M_d = \left\{ (t,s) \in [0,1]^{2d} : \left| t_d - s_d \right| \le 3\varepsilon \right\}.$$

Тоді

$$\bigcup_{(q,q') \in B(\lambda)} q \times q' \subset \bigcup_{1 \le k \le d} M_k \, ,$$

і тому

$$mes_{2d} \left(\bigcup_{(q,q') \in B(\lambda)} q \times q' \right) \le \sum_{k=1}^{d} mes_{2d}(M_k) < c(1)\varepsilon \, ,$$

де mes_{2d} – міра Лебега в R^{2d}, $c(1)$ – додатна стала, яка не залежить від ε. Розіб’ємо суму $\sum_{q,q' \in \lambda} \dots$ на дві суми: $\sum_{(q,q') \in A(\lambda)} \dots$ та $\sum_{(q,q') \in B(\lambda)} \dots$. Оцінимо кожну з цих сум. Для першої суми маємо:

$$\sum_{(q,q') \in A(\lambda)} \left| \frac{r(q \times q'; \, A \otimes A)}{\sqrt{r(q \times q; \, A \otimes A)} \sqrt{r(q' \times q'; \, A \otimes A)}} \right|^m mes(q)\, mes(q') \le$$

$$\le \sum_{(q,q') \in A(\lambda)} \left| \frac{L \;\; (mes(q)\, mes(q'))^{\alpha}}{C \;\; (mes(q)\, mes(q'))^{\alpha/2} \varphi(\varepsilon)} \right|^m mes(q)\, mes(q').$$

Далі, $\exists \delta > 0, \, \forall \lambda, \, |\lambda| < \delta, \, \forall q \in \lambda \;\; L^m C^{-m} \, (mes(q))^{2\beta - \alpha} < \varepsilon \varphi^m(\varepsilon)$. Для таких розбиттів λ

$$\sum_{(q,q') \in A(\lambda)} \left| \frac{r(q \times q'; \, A \otimes A)}{\sqrt{r(q \times q; \, A \otimes A)} \sqrt{r(q' \times q'; \, A \otimes A)}} \right|^m mes(q)\, mes(q') < \varepsilon.$$

Внаслідок нерівності Коші-Буняковського,

$$\left| r(q \times q'; \, A \otimes A) \right| \le \sqrt{r(q \times q; \, A \otimes A)} \, \sqrt{r(q' \times q'; \, A \otimes A)},$$

і тому

$$\sum_{(q,q')\in B(\lambda)}\left|\frac{r(q\times q';\, A\otimes A)}{\sqrt{r(q\times q;\, A\otimes A)}\sqrt{r(q'\times q';\, A\otimes A)}}\right|^m mes(q)\, mes(q')\le$$

$$\le mes_{2d}\left(\bigcup_{(q,q')\in B(\lambda)} q\times q'\right)\le c(1)\varepsilon.$$

Таким чином, $b'_{\lambda m}\to 0$ при $|\lambda|\to 0$. □

Приклад 1.9. Гауссове випадкове поле $W(t)=W(t_1,\dots,t_d)$, $t_i\ge 0$, $1\le i\le d$ з нульовим математичним сподіванням і коваріаційною функцією

$$r(s,\, t)=\min(s_1,\, t_1)\min(s_2,\, t_2)\dots\min(s_d,\, t_d)$$

називають *вінеровським полем* або *полем Ченцова* [56].

Нехай матриця $A=\left(a^{(1)},\, a^{(2)},\, \dots,\, a^{(d)}\right)$, де вектор $a^{(i)}$, $1\le i\le d$ має порядок $p_i\ge 1$. Доведемо, що прирости поля Ченцова, породжені матрицею A на паралелепіпедах без спільних внутрішніх точок, незалежні. Нехай паралелепіпед $q=[t,\, t+h]\subset[0,\,+\infty)^d$ та $q'=[s,\, s+h']\subset[0,\,+\infty)^d$ не мають спільних внутрішніх точок. Тоді хоча б при одному значенні індексу $i\in\{1,\, 2,\, \dots,\, d\}$ відрізки $[t_i,\, t_i+h_i]$ та $[s_i,\, s_i+h'_i]$ не мають спільних внутрішніх точок і тому випадкові величини $w\left([t_i,\, t_i+h_i],\, a^{(i)}\right)$ та $w\left([s_i,\, s_i+h'_i],\, a^{(i)}\right)$, де w – стандартний вінерівський процес, незалежні. Покладемо $\delta_i=\dfrac{h_i}{p_i}$, $\delta'=\dfrac{h'_i}{p_i}$, $1\le i\le d$. Знайдемо кореляцію випадкових величин $W(q,\, A)$ та $W(q',\, A)$:

$$E(W(q,\, A)W(q',\, A))=\sum_{k_1,j_1=0}^{p_1}\dots\sum_{k_d,j_d=0}^{p_d} a_{k_1}{}^{(1)}\dots a_{k_d}{}^{(d)} a_{j_1}{}^{(1)}\dots a_{j_d}{}^{(d)}\times$$

$$\times\min(t_1+k_1\delta_1,\, s_1+j_1\delta'_1)\dots\min(t_d+k_d\delta_d,\, s_d+j_d\delta'_d)=$$

$$=\prod_{j=1}^{d} E\left(w\left([t_j,\, t_j+h_j],\, a^{(j)}\right)w\left([s_j,\, s_j+h'_j],\, a^{(j)}\right)\right)=0,$$

оскільки i -тий множник у цьому добутку дорівнює нулеві.

Підрахуємо дисперсію випадкової величини $W(q,\, A)$:

$$EW^2(q,\, A) = \prod_{i=1}^{d} a_{k_i}^{(i)} a_{j_i}^{(i)} \min(k_i\,, j_i)\delta_i = \prod_{i=1}^{d} \frac{1}{p_i} \sum_{k=1}^{p_i} \left(b_k^{(i)}\right)^2 mes(q),$$

де $b_1^{(i)} = a_1^{(i)} + a_2^{(i)} + \ldots + a_{p_i}^{(i)}$, $b_2^{(i)} = a_2^{(i)} + a_3^{(i)} + \ldots + a_{p_i}^{(i)}, \ldots, b_{p_i}^{(i)} = a_{p_i}^{(i)}$, $1 \le i \le d$.

Таким чином, перша умова теореми 1.6 виконується для $\alpha = 1$ та сталої

$$C = \prod_{i=1}^{d} \frac{1}{p_i} \sum_{k=1}^{p_i} \left(b_k^{(i)}\right)^2 . \tag{1.31}$$

Друга умова теореми виконується для довільних додатних значень показника β, оскільки $r(q \times q';\, A \otimes A) = 0$ для паралелепіпедів $q,\, q'$ без спільних внутрішніх точок. Отже, внаслідок теореми 1.6, $v(F,\, \lambda) \to c$ у середньому квадратичному при $|\lambda| \to 0$. Зокрема, для $F(x) = x^2,\ x \in R$

$$\sum_{q \in \lambda} W^2(q,\, A) \to C$$

у середньому квадратичному при $|\lambda| \to 0$, де стала *C* визначена рівністю (1.31).

Дослідимо збіжність бакстерівських сум для послідовності рівномірних розбиттів бруса $[0,1]^d$. Нехай $\{b(n)\colon\, n \ge 1\}$ – послідовність, яка приймає натуральні значення і прямує до $+\infty$. Для кожного натурального числа $n \ge 1$ символом $\mu(n)$ позначимо рівномірне розбиття одиничного d-вимірного паралелепіпеда $[0,1]^d$ на $b^d(n)$ конгруентних d-вимірних прямокутних паралелепіпедів; $\{\mu(n)\colon n \ge 1\}$ – послідовність рівномірних розбиттів одиничного d-вимірного паралелепіпеда $[0,1]^d$.

З теорем 1.1, 1.2 та зауваження 1.3 випливає наступна теорема.

Теорема 1.7. *Нехай функція* $F \in H, c = EF(Y)$; $G(x) = F(x) - c, x \in R$, *ранг Ерміта функції* G *дорівнює* m; $\{\mu(n) : n \geq 1\}$ – *послідовність рівномірних розбиттів бруса* $[0, 1]^d$. *Тоді:*

1) якщо $\sum_{p,q \in \mu(n)} \left| E\left(X_p X_q\right) \right|^m = o\left(b^{2d}(n)\right), n \to +\infty$, *то* $v(F, \mu(n)) \to c$ *у середньому квадратичному при* $n \to +\infty$;

2) якщо ряд із загальним членом $\frac{1}{b^{2d}(n)} \sum_{p,q \in \mu(n)} \left| E\left(X_p X_q\right) \right|^m, n \geq 1$ *збігається, то* $v(F, \mu(n)) \to c$ *з імовірністю одиниця при* $n \to +\infty$.

Теорема 1.8. *Нехай функція* $F \in H$, $c = EF(Y)$; $G(x) = F(x) - c$, $x \in R$, *ранг Ерміта функції* G *дорівнює* m; $\{\mu(n) : n \geq 1\}$ – *послідовність рівномірних розбиттів* $[0, 1]^d$; p – *порядок матриці* A *і виконуються наступні умови:*

1) існують невід'ємні сталі $L, \tau_1, \ldots, \tau_d$, *такі, що для довільного* $h > 0$ *при* $|t_i - s_i| > 2h,\ 1 \leq i \leq d$ *виконується нерівність*

$$\left| E\left(X([t, t+y], A) X([s, s+y], A)\right) \right| \leq \frac{Lh^{2p}}{|t_i - s_i|^{\tau_1} \ldots |t_d - s_d|^{\tau_d}},$$

де $y = (h, \ldots, h) \in R^d$;

2) існують додатні сталі C_1, α *такі, що для всіх* $t \in [0, 1]^d$

$$EX^2([t, t+y], A) \geq C_1 h^\alpha;$$

3) нехай серед чисел $m\tau_1, m\tau_2, \ldots, m\tau_d$ *рівно* k *менші одиниці і*

$$k + m\left(\alpha + \sum_{m\tau_i \geq 1} \tau_i - 2p\right) < d.$$

Тоді $v(F, \mu(n)) \to c$ *у середньому квадратичному при* $n \to +\infty$. *При* $b(n) = 2^n, n \geq 1$, $v(F, \mu(n)) \to c$ *з імовірністю одиниця при* $n \to +\infty$.

Доведення. Перенумеруємо паралелепіпеди розбиття $\mu(n)$ за допомогою мультиіндексу

$$l=(l_1,\ldots,l_d)\in D(n)=\{l=(l_1,\ldots,l_d)\mid 0\le l_i\le b(n)-1,\ 1\le i\le d\},$$

поклавши

$$q(l)=\left[\frac{l_1}{b(n)},\frac{l_1+1}{b(n)}\right]\times\ldots\times\left[\frac{l_d}{b(n)},\frac{l_d+1}{b(n)}\right],\quad l\in D(n).$$

Тоді $\mu(n)=\{q(l)\mid l\in D(n)\}$. Внаслідок теореми 1.7, для доведення першого твердження достатньо перевірити, що

$$\frac{1}{b^{2d}(n)}\sum_{k,\,j\in D(n)}\left|E\left(X_{q(k)}X_{q(j)}\right)\right|^m\to 0\quad\text{при }n\to+\infty. \tag{1.32}$$

Покладемо

$$A(n)=\{(k,\,j)\mid k,\,j\in D(n)\,|\,k_i-j_i|\ge 3,\,1\le i\le d\},$$

$$B(n)=(D(n)\times D(n))\setminus A(n).$$

Розіб'ємо суму $\sum\limits_{k,\,j\in D(n)}\ldots$ на дві суми:

$$\sum_{k,j\in D(n)}\ldots=\sum_{(k,j)\in A(n)}\ldots+\sum_{(k,j)\in B(n)}\ldots\,.$$

Число доданків другої суми дорівнює $O\left(b^{2d-1}(n)\right)$ при $n\to+\infty,$ а кожний доданок, внаслідок нерівності Коші–Буняковського, не перевищує одиницю. Тому

$$\sum_{(k,j)\in B(n)}=O\left(b^{2d-1}(n)\right)\quad\text{при }n\to+\infty. \tag{1.33}$$

Для першої суми маємо наступну оцінку:

$$\sum_{(k,j)\in A(n)}\left|E\left(X_{q(k)}X_{q(j)}\right)\right|^m\le\left(\frac{L}{C_1}\right)^m(b(n))^{(\alpha+\tau_1+\ldots+\tau_d-2p)m+d}\prod_{i=1}^{d}\left(\sum_{l=2}^{b(n)}l^{-m\tau_i}\right).$$

При $m\tau_i > 1$ ряд із загальним членом $l^{-m\tau_i}$, $l \geq 1$ збігається. При $m\tau_i = 1$ $\sum_{l=2}^{b(n)} l^{-1} = O(\ln(b(n)))$, $n \to \infty$, а при $m\tau_i < 1$: $\sum_{l=2}^{b(n)} l^{-1} = O\left((b(n))^{1-m\tau_i}\right)$, $n \to \infty$. З урахуванням цих співвідношень отримуємо, що

$$\sum_{(k,j)\in A(n)} \left|E\left(X_{q(k)} X_{q(j)}\right)\right|^m = O\left(\ln^d(b(n))(b(n))^{k+\left(\alpha + \sum_{m\tau_i \geq 1} \tau_i - 2p\right)m+d} \right), \; n \to \infty. \quad (1.34)$$

Із відношень підпорядкованості (1.33), (1.34) та умови 3) випливає (1.32) і перше твердження теореми доведено. Далі, внаслідок відношень підпорядкованості (1.33), (1.34) та умови 3), при $b(n) = 2^n$, $n \geq 1$ ряд із загальним членом $\frac{1}{b^{2d}(n)} \sum_{(k,j)\in D(n)} \left|E\left(X_{q(k)} X_{q(j)}\right)\right|^m, n \geq 1$ – збігається, звідки випливає друге твердження теореми. □

Наслідок 1.4. *Нехай функція* $F \in H$, $c = EF(Y)$; $G(x) = F(x) - c, x \in R$; $\{\mu(n) : n \geq 1\}$ *– послідовність рівномірних розбиттів* $[0, 1]^d$; p *– порядок матриці* A *і виконуються наступні умови:*

1) існують невід'ємні сталі L, θ, *такі, що для довільного* $h > 0$ *при* $|t_i - s_i| > 2h, \; 1 \leq i \leq d$ *виконується нерівність*

$$\left|E\left(X\left([t, t+y], A\right) X\left([s, s+y], A\right)\right)\right| \leq \frac{Lh^{2p}}{\|t-s\|^\theta},$$

де $y = (h, \ldots, h) \in R^d$;

2) існують додатні сталі C_1, α *такі, що для всіх* $t \in [0, 1]^d$

$$EX^2\left([t, t+y], A\right) \geq C_1 h^\alpha;$$

3) $\alpha < 2p$ *і* $\alpha + \theta < 2p + d$.

Тоді $\nu(F, \mu(n)) \to c$ *у середньому квадратичному при* $n \to +\infty$. *При* $b(n) = 2^n, n \geq 1$ $\nu(F, \mu(n)) \to c$ *з імовірністю одиниця при* $n \to +\infty$.

*Доведення***.** Внаслідок нерівності між середнім арифметичним та середнім квадратичним,

$$\sqrt[d]{|t_i - s_i|\ldots|t_d - s_d|} \le \sqrt{\frac{1}{d}((t_1 - s_1)^2 + \ldots + (t_d - s_d)^2)} = \frac{1}{\sqrt{d}}\|t - s\| \ ,$$

звідки

$$\prod_{i=1}^{d}|t_i - s_i|^{\frac{\theta}{d}} \le \left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right)^d \|t - s\|^{\theta}.$$

Тому при $\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_d = \dfrac{\theta}{d}$ виконується перша умова теореми 1.8.

Перевіримо третю умову теореми 1.8 при $m = 1$. Якщо $\dfrac{\theta}{d} < 1$, то $k = d$ і третя умова теореми 1.8 виконується, оскільки $\alpha - 2p < 0$. Якщо $\dfrac{\theta}{d} \ge 1$, то $k = 0$ і третя умова теореми 1.8 виконується, оскільки $\alpha + \theta - 2p < d$. З доведення теореми 1.8 випливає, що

$$\frac{1}{b^{2d}(n)}\sum_{k,j\in D(n)}\left|E\left(X_{q(k)}X_{q(j)}\right)\right| \to 0 \ \text{ при } \ n \to +\infty.$$

При $b(n) = 2^n$, $n \ge 1$ ряд із загальним членом

$$\frac{1}{b^{2d}(n)}\sum_{k,j\in D(n)}\left|E\left(X_{q(k)}X_{q(j)}\right)\right|, \ n \ge 1$$

збіжний. Враховуючи, що кожний доданок під знаком суми не перевищує одиницю, отримуємо, що

$$\frac{1}{b^{2d}(n)}\sum_{k,j\in D(n)}\left|E\left(X_{q(k)}X_{q(j)}\right)\right|^m \to 0 \ \text{ при } \ n \to +\infty$$

і при $b(n) = 2^n, n \ge 1$ ряд із загальним членом

$$\frac{1}{b^{2d}(n)}\sum_{k,j\in D(n)}\left|E\left(X_{q(k)}X_{q(j)}\right)\right|^m , \ n \ge 1$$

збіжний, де $m \geq 1$ – ранг Ерміта функції G. □

Наслідок 1.5. *Нехай* $F(x)=|x|^{\gamma}, x \in R, \gamma > 0$. *Нехай, далі, існує додатна функція* $u(t),\ t \in [0,1]^d$ *така, що для деякого* $\alpha > 0$

$$\frac{E\left(X\left([t,\,t+y],\,A\right)\right)^2}{h^{\alpha}} \to u(t) \tag{1.35}$$

рівномірно на $[0,1]^d$ *при* $h \to 0+$, *де* $y=(h,h,\ldots,h) \in R^d$, *і виконані умови 1), 3) наслідку 1.2 або умови 1), 3) теореми 1.8 при* $m=2$. *Тоді*

$$S(F,\,\mu(n)) = (b(n))^{\frac{\alpha\gamma}{2}-d} \sum_{q \in \mu(n)} |X(q,\,A)|^{\gamma} \to \sqrt{\frac{2^{\gamma}}{\pi}}\,\Gamma\!\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) \int_{[0,1]^d} u^{\frac{\gamma}{2}}(t)\,dt$$

у середньому квадратичному при $n \to \infty$.

*Доведення***.** Для випадкової величини Y із стандартним гауссовим розподілом $E|Y|^{\gamma} = \sqrt{\frac{2^{\gamma}}{\pi}}\,\Gamma\!\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$. Завдяки рівномірній збіжності в (1.35) та неперервності в середньому квадратичному випадкового поля X, функція u неперервна на паралелепіпеді $I=[0,1]^d$ і

$$ES(F,\,\mu(n)) \to \sqrt{\frac{2^{\gamma}}{\pi}}\,\Gamma\!\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) \int_I u^{\frac{\gamma}{2}}(t)\,dt\,,\ n \to \infty.$$

Збіжність до нуля дисперсії $\mathrm{Var}\, S(F,\,\mu(n))$ при $n \to \infty$ доводиться так само як у теоремі 1.8. □

Зауваження 1.7. Нехай d-вимірна матриця A задана набором векторів $a^{(i)} = \left(a_0^{(i)},\ldots.,a_{p_i}^{(i)}\right),\ 1 \leq i \leq d$, де вектор $a^{(i)}$ має порядок p_i, $p = p_1 + \ldots + p_d$. Нехай, далі, $r \in C^{(2p)}(q \times q')$, де

$$q=[t_1,\,t_1+h]\times\ldots\times[t_d,\,t_d+h],\ \ q'=[s_1,\,s_1+h]\times\ldots\times[s_d,\,s_d+h] \subset [0,1]^d.$$

З леми 1.3 та означення приросту, побудованого за допомогою матриці A, випливає, що приріст $r(q \times q'; A \otimes A)$ допускає зображення у вигляді $2p$ кратного інтеграла від мішаної похідної $2p$-го порядку

$$\frac{\partial^{2p} r(t,\ s)}{\partial t_1^{\,p_1} \ldots \partial t_d^{\,p_d} \partial s_1^{\,p_1} \ldots \partial s_d^{\,p_d}}$$

по деякій вимірній підмножині $2p$-вимірного паралелепіпеда

$$[t_1, t_1 + h]^{p_1} \times \ldots \times [t_d, t_d + h]^{p_d} \times [s_1, s_1 + h]^{p_1} \times \ldots \times [s_d, s_d + h]^{p_d} .$$

Із зауваження 1.7, наслідку 1.3 та теореми 1.8 випливає наступний наслідок.

Наслідок 1.6. *Нехай* $F(x) = |x|^\gamma,\ x \in R,\ \gamma > 0;$ $\{\mu(n) : n \geq 1\}$ *– послідовність рівномірних розбиттів бруса* $[0, 1]^d$*; матриця* A *така, як у зауваженні 1.7 і виконуються наступні умови :*

1) коваріаційна функція r – $2p$ *раз неперервно диференційована на множині* $V = \{(s, t) \mid s, t \in [0, 1]^d,\ s_i \neq t_i,\ 1 \leq i \leq d\}$ *і для деяких невід'ємних сталих* $L, \tau_1, \ldots, \tau_d$ *для* $(s, t) \in V$ *виконується нерівність*

$$\left| D_{p,\, p} r(s, t) \right| \leq L \prod_{i=1}^{d} |s_i - t_i|^{-\tau_i} \ ;$$

2) існує додатна функція $u(t),\ t \in [0, 1]^d$ *така, що для деякого* $\alpha > 0$

$$\frac{E(X([t, t + y], A))^2}{h^\alpha} \to u(t)$$

рівномірно на $[0, 1]^d$ *при* $h \to 0+$*, де* $y = (h, h, \ldots, h) \in R^d$*;*

3) нехай серед чисел $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_d$ *рівно* k *менші одиниці і*

$$k + \left(\alpha + \sum_{\tau_i \geq 1} \tau_i - 2p \right) < d \ .$$

Тоді

$$S(F,\ \mu(n)) = (b(n))^{\frac{\alpha\gamma}{2}-d} \sum_{q\in\mu(n)} |X(q,\ A)|^{\gamma} \to \sqrt{\frac{2^{\gamma}}{\pi}}\Gamma\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) \int_{[0,1]^d} u^{\frac{\gamma}{2}}(t)dt$$

у середньому квадратичному при $n\to\infty$. *При* $b(n)=2^n$, $n\ge 1$

$$S(F,\ \mu(n)) \to \sqrt{\frac{2^{\gamma}}{\pi}}\Gamma\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) \int_{[0,1]^d} u^{\frac{\gamma}{2}}(t)dt$$

з імовірністю одиниця при $n\to+\infty$.

Нерівність (1.35) між середнім геометричним та середнім квадратичним чисел $|s_i - t_i|,\ 1\le i\le d$ дозволяє отримати з попереднього наслідку

Наслідок 1.7. *Нехай* $F(x)=|x|^{\gamma},\ x\in R,\ \gamma>0;\ \{\mu(n): n\ge 1\}$ *– послідовність рівномірних розбиттів бруса* $[0,1]^d$*; матриця* A *така, як у зауваженні 1.7 і виконуються наступні умови :*

1) коваріаційна функція r – $2p$ *раз неперервно диференційована на множині* $V=\left\{(s,t)\,|\,s,\ t\in[0,1]^d,\ s_i\ne t_i,\ 1\le i\le d\right\}$ *і для деяких невід'ємних сталих* L,θ *для* $(s,\ t)\in V$ *виконується нерівність*

$$\left|D_{p,\ p}r(s,\ t)\right| \le L\|s-t\|^{-\theta};$$

2) існує додатна функція $u(t),\ t\in[0,1]^d$ *така, що для деякого* $\alpha>0$

$$\frac{E(X([t,\ t+y],\ A))^2}{h^{\alpha}} \to u(t)$$

рівномірно на $[0,1]^d$ *при* $h\to 0+$, *де* $y=(h,h,\dots,h)\in R^d$;

3) $\alpha<2p$ *і* $\alpha+\theta<2p+d$.

Тоді

$$S(F,\ \mu(n)) = (b(n))^{\frac{\alpha\gamma}{2}-d} \sum_{q\in\mu(n)} |X(q,\ A)|^{\gamma} \to \sqrt{\frac{2^{\gamma}}{\pi}}\Gamma\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) \int_{[0,1]^d} u^{\frac{\gamma}{2}}(t)dt$$

у середньому квадратичному при $n \to \infty$. *При* $b(n) = 2^n, n \geq 1$

$$S(F,\ \mu(n)) \to \sqrt{\frac{2^{\gamma}}{\pi}}\Gamma\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) \int_{[0,1]^d} u^{\frac{\gamma}{2}}(t)dt$$

з імовірністю одиниця при $n \to +\infty$.

Приклад 1.10. Нехай $W(t),\ t \in [0,1]^d$ – випадкове поле Ченцова (приклад 1.9), матриця A задана рівністю (1.4). Тоді умови наслідку 1.5 виконуються при $L=0,\ \theta=0;\ \alpha=d,\ p=d;\ u(t)=1,\ t\in[0,1]^d$. Внаслідок наслідку 1.5,

$$S(F,\ \mu(n)) = (b(n))^{\left(\frac{\gamma}{2}-1\right)d} \sum_{q\in\mu(n)} |W(q,\ A)|^{\gamma} \to \sqrt{\frac{2^{\gamma}}{\pi}}\Gamma\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$$

у середньому квадратичному при $n \to \infty$. При цьому

$$\mathrm{Var}\, S(F,\ \mu(n)) = \frac{1}{b^d(n)} \frac{2^{\gamma}}{\sqrt{\pi}} \left(\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\right)^2.$$

Приклад 1.11. Нехай $X(t),\ t \in R^d$ – гауссове випадкове поле з нульовим математичним сподіванням і коваріаційною функцією

$$r(s,\ t) = \frac{c}{2}\left(\|s\|^{\beta} + \|t\|^{\beta} - \|s-t\|^{\beta}\right),\quad s,\ t \in R^d\ , \tag{1.36}$$

де $\|\cdot\|$ – евклідова норма в R^d, $c>0,\ 0<\beta<2$. Таке випадкове поле називають *багатопараметричним дробовим броунівським рухом*. Його, зокрема, застосовують у моделях статистичної гідродинаміки [45]. Приклад застосування теореми бакстерівського типу для такого поля розглядали С.М. Краснитський [22] та Т.Кавада [93].

Нехай d - вимірна матриця задана рівністю (1.1) і має порядок $p \geq 1$. Покажемо, що прирости багатопараметричного броунівського руху X, побудовані за допомогою матриці A, однорідні. Нехай

$$y^{(i)} = \left(h_1^{(i)},\ h_2^{(i)}, \ldots, h_d^{\ (i)}\right),\ i = 1, 2;\ \delta_j^{(i)} = \frac{h_j^{(i)}}{\max\left(p_j, 1\right)},\ 1 \leq j \leq d\ .$$

Тоді для $s, t \in R^d$

$$E\left(X\left(\left[s,\ s + y^{(1)}\right],\ A\right)X\left(\left[t,\ t + y^{(2)}\right],\ A\right)\right) =$$

$$= \sum_{i_1, j_1 = 0}^{p_1} \ldots \sum_{i_d, j_d = 0}^{p_d} a_{i_1 \ldots i_d} a_{j_1 \ldots j_d} E\left(X\left(s + i \circ \delta^{(1)}\right) X\left(t + j \circ \delta^{(2)}\right)\right) =$$

$$-\frac{c}{2} \sum_{i_1, j_1 = 0}^{p_1} \ldots \sum_{i_d, j_d = 0}^{p_d} a_{i_1 \ldots i_d} a_{j_1 \ldots j_d} \left\| s - t + i \circ \delta^{(1)} - j \circ \delta^{(2)} \right\|^{\beta},$$

де $i \circ \delta^{(1)} = \left(i_1 \delta_1^{(1)}, \ldots, i_d \delta_d^{(1)}\right)$, $\quad j \circ \delta^{(1)} = \left(j_1 \delta_1^{(1)}, \ldots, j_d \delta_d^{(1)}\right)$. Таким чином, прирости однорідні.

Нехай, далі, d-вимірна матриця A – така, як у зауваженні 1.7. Перевіримо умови наслідку 1.5.

Нехай $f(x) = \left(x^2 + a\right)^{\frac{\beta}{2}}$, $x \in R,\ a > 0$. Неважко бачити, що похідна $2p$-го порядку функції f є лінійною комбінацією функцій

$$\left(x^2 + a\right)^{-p + \frac{\beta}{2}},\ x^2\left(x^2 + a\right)^{-p - 1 + \frac{\beta}{2}}, \ldots, x^{2p}\left(x^2 + a\right)^{-2p + \frac{\beta}{2}}.$$

Тому для $p = p_1 + p_2 + \ldots + p_d$

$$\frac{\partial^{2p}\left(x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + \ldots + x_d^{\ 2}\right)^{\frac{\beta}{2}}}{\partial x_1^{\ 2p_1} \partial x_2^{\ 2p_2} \ldots \partial x_d^{\ 2p_d}} =$$

$$=\sum_{i_1=0}^{p_1}\ldots\sum_{i_d=0}^{p_d}C_{i_1\ldots i_d}x_1^{2i_1}\ldots x_d^{2p_d}\left(x_1^2+\ldots+x_d^2\right)^{-p-i_1-\ldots-i_d+\frac{\beta}{2}},$$

де $C_{i_1\ldots i_d}$, $0\le i_j\le p_j$, $1\le j\le d$ – деякі дійсні коефіцієнти. Але для $1\le j\le d$. має місце нерівність $x_j^{2i_j}\le\left(x_1^2+\ldots+x_d^2\right)^{i_j}$, $1\le j\le d$. Тому існує така стала $L>0$, що

$$\left|\frac{\partial^{2p}\left(x_1^2+\ldots+x_d^2\right)^{\frac{\beta}{2}}}{\partial x_1^{2p_1}\ldots\partial x_d^{2p_d}}\right|\le L\|x\|^{-2p+\beta},$$

де $x=\left(x_1,\ldots,x_d\right)\in R^d$, $x\ne 0$. Ясно, що тоді

$$\left|\frac{\partial^{2p}r(s,t)}{\partial s_1^{p_1}..\partial s_d^{p_d}\partial t_1^{p_1}..\partial t_d^{p_d}}\right|\le L\|s-t\|^{-2p+\beta}$$

при $s\ne t$. Таким чином, умова 1) наслідку 1.5 виконується для $\theta=2p-\beta$. Далі,

$$EX^2([0,y],A)=-\frac{c}{2}\sum_{i_1,j_1=0}^{p_1}\ldots\sum_{i_d,j_d=0}^{p_d}a_{i_1\ldots i_d}a_{j_1\ldots j_d}\parallel i\circ\delta-j\circ\delta\parallel^{\beta}h^{\beta},$$

де $y=(h,\ldots,h)\in R^d$, $h>0$, $i\circ\delta=(i_1\delta_1,\ldots,i_d\delta_d)$, $\delta_k=\dfrac{1}{\max\left(p_k,1\right)}, 1\le k\le d$.

Отже, друга умова наслідку 1.5 виконується для $\alpha=\beta$ та функції

$$u(t)=-\frac{c}{2}\sum_{i_1,j_1=0}^{p_1}\ldots\sum_{i_d,j_d=0}^{p_d}a_{i_1\ldots i_d}a_{j_1\ldots j_d}\parallel i\circ\delta-j\circ\delta\parallel^{\beta}.$$

Символом $c(\beta,A)$ позначимо сталу у правій частині останньої рівності. При $\alpha=\beta$ і $\theta=2p-\beta$ третя умова наслідку 1.5 виконується. За наслідком 1.5, для довільного $\gamma>0$

$$(b(n))^{-d+\frac{\beta\gamma}{2}}\sum_{q\in\mu(n)}\left|X(q,A)\right|^{\gamma}\to\sqrt{\frac{2^{\gamma}}{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\left(c(\beta,A)\right)^{\frac{\gamma}{2}}$$

у середньому квадратичному при $n \to \infty$. Зокрема, при $\gamma = \dfrac{2d}{\beta}$ нормуючий множник перед знаком суми дорівнює одиниці і ми отримуємо, що

$$\sum_{q \in \mu(n)} \left| X(q, A) \right|^{\frac{2d}{\beta}} \to \frac{2^{\frac{d}{\beta}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{d}{\beta} + \frac{1}{2} \right) \left(c(\beta, A) \right)^{\frac{d}{\beta}}$$

у середньому квадратичному при $n \to \infty$.

При $\beta = 1$ багатопараметричний дробовий броунівський рух називають *багатопараметричним броунівським рухом*. Для цього випадкового поля

$$\sum_{q \in \mu(n)} \left| X(q, A) \right|^{2d} \to (2d - 1)!! \left(c(1, A) \right)^{d}$$

у середньому квадратичному при $n \to \infty$.

Для $\beta(n) = 2^n$, $n \ge 1$ у цьому прикладі поряд із збіжністю у середньому квадратичному має місце збіжність з імовірністю одиниця. Вперше результат про збіжність майже напевно до детермінованої сталої послідовності бакстерівських сум

$$\left\{ \sum_{q \in \mu(n)} \left| X(q, A) \right|^{2d} : n \ge 1 \right\}$$

для багатопараметричного броунівського руху, матриці A з прикладу 1.1 при $\beta(n) = 2^n$,$n \ge 1$ отримав С. М. Берман [64] . П. Т. Стрейт [111] знайшов значення цієї сталої.

Зауваження 1.8. Для матриці A з прикладу 1.1

$$c(\beta, A) = -\frac{c}{2} \sum_{i_1, j_1 = 0}^{1} \ldots \sum_{i_d, j_d = 0}^{1} \| \, i - j \, \|^{\beta} = -2^{d-1} c \sum_{k=1}^{d} (-1)^k \binom{d}{k} k^{\frac{\beta}{2}} ,$$

де $i = (i_1, \ldots, i_d)$, $j = (j_1, \ldots, j_d)$.

Приклад 1.12. Нехай випадкове поле X таке ж, як і у прикладі 1.11. Для матриці A з прикладу 1.2 приріст

$$X([t,\, t+y],\, A)=X(t+y)-X(t)$$

має порядок $p=1$. Перевіримо виконання умов наслідку 1.5.

$$E(X(t+y)-X(t))(X(s+y)-X(s))=\frac{c}{2}(g(v+y)+g(v-y)-2g(v)),$$

де $g(v)=\|v\|^{\beta}$, $v=t-s, y=(h,\ \ldots,\ h)\in R^d$, $h>0$. Нехай $|v_i|\ge 3h,\ 1\le i\le d$. Застосуємо формулу Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа для функції g у точці v:

$$|g(v+y)+g(v-y)-2g(v)|=\frac{1}{2}\left|\sum_{i,j=0}^{d}\left(D_{ij}^2 g(v+\tau_1 y)+D_{ij}^d g(v-\tau_2 y)\right)\right| h^2 .$$

Тут $\tau_1,\, \tau_2 \in (0,\, 1)$,

$$D_{ii}^2 g(v)=\beta\|v\|^{\beta-2}+2\beta\left(\frac{\beta}{2}-1\right)v_i^{\ 2}\|v\|^{\beta-4},\ \ D_{ij}^2 g(v)=2v_i v_j\beta\left(\frac{\beta}{2}-1\right)\|v\|^{\beta-4}.$$

Оскільки

$$\sup_{\tau\in(0,1)}\sup_{h>0}\sup_{|v_i|\ge 3h,1\le i\le d}\frac{\sqrt{v_1^{\ 2}+\ldots+v_d^{\ 2}}}{\sqrt{(v_1+\tau h)^2+\ldots+(v_d+\tau h)^2}}\le$$

$$\le\sup_{h>0}\sup_{|v_i|\ge 3h,1\le i\le d}\frac{\sqrt{v_1^{\ 2}+\ldots+v_d^{\ 2}}}{\sqrt{(|v_1|-h)^2+\ldots+(|v_d|-h)^2}}\le 2\,,$$

то для деякої сталої $L>0$ і $k=1{,}2$

$$\left|\sum_{1\le i,j\le d}D_{ij}^2(v+\tau_k y)\right|\le\frac{L}{\|v\|^{2-\beta}}.$$

Таким чином, перша умова наслідку 1.5 виконується при $\theta=2-\beta$. Далі, $E(X(t+y)-X(t))^2=d^{\frac{\beta}{2}}h^{\beta}$, де $y=(h,\ldots,h)\in R^d$, $h>0$. Тому друга умова наслідку 1.5 виконується для $\alpha=\beta$ та $u(t)=d^{\frac{\beta}{2}}$, $t\in[0,1]^d$. Третя умова наслідку 1.5 також справджується. За наслідком 1.5,

$$(b(n))^{-d+\frac{\beta\gamma}{2}} \sum_{q\in\mu(n)} \left|X(q, A)\right|^{\gamma} \to \sqrt{\frac{2^{\gamma}}{\pi}}\, \Gamma\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) d^{\frac{\beta\gamma}{4}}$$

у середньому квадратичному при $n \to \infty$.

Приклад 1.13. *Дробовим броунівським рухом* з параметром Хюрста $H \in (0, 1)$ називається гауссовий випадковий процес $B_H(t),\ t \in R$ з нульовим математичним сподіванням та коваріаційною функцією

$$r(s, t) = E(B_H(s)B_H(t)) = \frac{1}{2}\left(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |s-t|^{2H} \right), \quad s, t \in R.$$

Випадкове гауссове поле з попереднього прикладу можна розглядати як узагальнення дробового броунівського руху на багатовимірний випадок. Вивченням питання розширення дробового броунівського руху на багатопараметричний простір займались А. С. Монін та А. М. Яглом [45], З. Чісельський та А. Камонт [70], називаючи цей об’єкт дробовим броунівським випадковим полем Леві.

Ще одне узагальнення можна отримати наступним чином. Нехай $H = (H_1, \ldots, H_d) \in (0, 1)^d$. Функція

$$r(s, t) = \frac{1}{2^d} \prod_{i=1}^{d} \left(|s_i|^{2H_i} + |t_i|^{2H_i} - |s_i - t_i|^{2H_i} \right), \tag{1.37}$$

де $s = (s_1, \ldots, s_d),\ t = (t_1, \ldots, t_d) \in R^d$ додатньо визначена і тому існує гауссове випадкове поле з нульовим середнім значенням і такою коваріаційною функцією. Будемо називати це поле *дробовим вінеровським полем* $B_H(t), t = (t_1, \ldots, t_d) \in R^d$ з d-вимірним параметром Хюрста $H = (H_1, \ldots, H_d) \in$ $\in (0,1)^d$. У статті А. Камонт [91] це випадкове поле називається *дробовим анізотропним вінеровським полем*. Зауважимо, що для $H = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right) \in R^d$ воно є випадковим полем Ченцова.

Нехай d-вимірна матриця A така, як у зауваженні 1.7, вектор $a^{(i)}$ має порядок $p_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq d$; $p = p_1 + \ldots + p_d$ – порядок матриці A. Перевіримо умови наслідку 1.4. Коваріаційна функція (1.37) $2p$ раз неперервно диференційована при $s_i \neq t_i,\ 1 \leq i \leq d$ та існує стала $L > 0$, така, що

$$\left| \frac{\partial^{2p} r(s,t)}{\partial s_1^{\ p_1} \ldots \partial s_d^{\ p_d} \partial t_1^{\ p_1} \ldots \partial t_d^{\ p_d}} \right| \leq L \prod_{i=1,\ p_i>0}^{d} \left| s_i - t_i \right|^{-2p_i + 2H_i}.$$

Таким чином, перша умова наслідку 1.8 виконується при

$$\tau_i = \begin{cases} 2p_i - 2H_i,\ p_i > 0 \\ 0,\ p_i = 0 \end{cases},\ 1 \leq i \leq d.$$

Далі,

$$E\left(X\left([t, t+y], A\right)\right)^2 = \sum_{i_1, j_1 = 0}^{p_1} \ldots \sum_{i_d, j_d = 0}^{p_d} a_{i_1}^{(1)} \ldots a_{i_d}^{(d)} a_{j_1}^{(1)} \ldots a_{j_d}^{(d)} r\left(t + i \circ \delta,\ t + j \circ \delta\right) =$$

$$= \frac{1}{2^d} \prod_{i=1}^{d} \sum_{i_k, j_k = 0}^{p_k} a_{i_k}^{(k)} a_{j_k}^{(k)} \left(\left| t_k + i_k \delta_k \right|^{2H_k} + \left| t_k + j_k \delta_k \right|^{2H_k} - \left| \frac{i_k - j_k}{p_k} \right|^{2H_k} h^{2H_k} \right) =$$

$$= \prod_{k=1,\ p_k>0}^{d} \left(\frac{-1}{2} \sum_{i_k, j_k = 0}^{p_k} a_{i_k}^{(k)} a_{j_k}^{(k)} \left| \frac{i_k - j_k}{p_k} \right|^{2H_k} h^{2H_k} \prod_{k=1,\ p_k=0}^{d} t_k^{\ 2H_k} \right),$$

де $i = (i_1, \ldots, i_d),\ j = (j_1, \ldots, j_d), y = (h, \ldots, h) \in R^d,\ h > 0,\quad \delta_k = h / \max(p_k, 1)$, $1 \leq k \leq d$. Отже, друга умова наслідку 1.4 справджується при $\alpha = 2 \sum_{k=1,\ p_k>0}^{d} H_k$ та

$$u(t) = \prod_{k=1,\ p_k>0} \left\{ \frac{-1}{2} \sum_{i_k, j_k = 0}^{p_k} a_{i_k}^{(k)} a_{j_k}^{(k)} \left| \frac{i_k - j_k}{p_k} \right|^{2H_k} \right\} \prod_{k=1,\ p_k=0}^{d} t_k^{\ 2H_k} =$$

$$= c(H, A) \prod_{k=1,\ p_k=0}^{d} t_k^{\ 2H_k},\ t \in [0,1]^d.$$

Третя умова також виконана, оскільки

$$2\sum_{\substack{k=1,\,p_k>0,\\ \tau_k<1}}^{d} H_k+2\sum_{\substack{k=1,\,p_i>0,\\ \tau_k\ge 1}}^{d}\left(p_i-H_i\right)<2\sum_{i=1,\,p_i>0}^{d} p_i\,.$$

Таким чином, із наслідку 1.7 випливає, що

$$\left(b(n)\right)^{-d+\frac{\alpha\gamma}{2}}\sum_{q\in\mu(n)}\left|X\left(q,\,A\right)\right|^{\gamma}\to$$

$$\to\sqrt{\frac{2^{\gamma}}{\pi}}\Gamma\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\left(c\left(H,\,A\right)\right)^{\gamma/2}\int\limits_{[0,1]^d}\left(\prod_{i=1,\,p_i=0}^{d} t_i^{\,2H_i}\right)^{\gamma/2} dt_1\ldots dt_d$$

у середньому квадратичному при $n\to\infty$.

Зокрема, для приросту, побудованого за допомогою матриці (1.4),

$$u(t)=c(H,\,A)=1,\; t\in[0,\,1]^d\,.$$

Для приросту вздовж першої координатної вісі

$$a^{(1)}=(1,1),\,a^{(2)}=\ldots=\quad a^{(d)}=1,\;\; u(t)=\prod_{i=2}^{d} t_i^{2H_i}\,,\,c(H,\,A)=1.$$

Отже,

$$\left(b(n)\right)^{-d+\gamma H_1}\sum_{q\in\mu(n)}\left|\,X\left(q,\,A\right)\,\right|^{\gamma}\to\sqrt{\frac{2^{\gamma}}{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\int\limits_{[0,1]^d} t_2^{\,\gamma H_1}\ldots t_d^{\,\gamma H_d}\,dt_1\ldots dt_d\,=$$

$$=\sqrt{\frac{2^{\gamma}}{\pi}}\Gamma\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\frac{1}{\left(\gamma H_2+1\right)\ldots\left(\gamma H_d+1\right)}$$

у середньому квадратичному при $n\to\infty$.

Наступний приклад показує, що в деяких випадках шляхом підвищення порядку приростів можна досягти збіжності бакстерівських сум до детермінованої сталої.

Приклад 1.14. Спектральній щільності $f(\lambda)=4\big/\left(1+\lambda^2\right)^2$ відповідає [54, с. 18] коваріаційна функція $r(t)=\left(1+|t|\right)e^{-|t|}\,,\,t\in R$. Нехай $X(t),\;t\in R$ –

стаціонарний гауссовий процес із нульовим математичним сподіванням та коваріаційною функцією $r(t), t \in R$. Для цього процесу виконуються умови наслідку 1.4 при $d=1, \gamma=2, A=(1,-2,\ 1),\ \ p=2, \tau_1=0,\ \ \alpha=3, u(t)=1/3,\ \ t \in [0,1]$, і тому

$$n^2 \sum_{k=0}^{n-1} \left(X\left(\frac{k}{n}\right) - 2X\left(\frac{k+0{,}5}{n}\right) + X\left(\frac{k+1}{n}\right) \right)^2 \to \frac{1}{3}$$

у середньому квадратичному при $n \to \infty$.

Однак, для приростів першого порядку послідовність бакстерівських сум

$$S_n = n \sum_{k=0}^{n-1} \left(X\left(\frac{k+1}{n}\right) - X\left(\frac{k}{n}\right) \right)^2, n \geq 1$$

не збігається до детермінованої сталої у середньому квадратичному. Дійсно,

$$E(S_n - ES_n)^2 = 2n^2 \sum_{k,j=0}^{n-1} \left(E\left(X\left(\frac{k+1}{n}\right) - X\left(\frac{k}{n}\right) \right)\left(X\left(\frac{j+1}{n}\right) - X\left(\frac{j}{n}\right) \right) \right)^2 \geq$$

$$= 4n^3 \sum_{l=1}^{n-1} \left(2r\left(\frac{l}{n}\right) - r\left(\frac{l+1}{n}\right) - r\left(\frac{l-1}{n}\right) \right)^2 \left(1 - \frac{l}{n} \right) \to 4\int_0^1 (r''(x))^2 (1-x)dx > 0,\ n \to \infty.$$

1.4. Збіжність бакстерівських сум для сумісно строго субгауссових випадкових полів

Строго субгауссові випадкові вектори та сумісно строго субгауссові випадкові процеси описані у главі 7 монографії В. В. Булдигіна і Ю. В.Козаченка [10]. Там же отримані теореми Леві-Бакстера для сумісно строго субгауссових випадкових процесів.

Означення 1.4. *Випадковий вектор $\xi : \Omega \to R^n$ називається строго субгауссовим, якщо для всіх $u \in R^n$ виконується нерівність*

$$E\exp\{(u,\xi)\}\le\exp\left\{\frac{1}{2}(Bu,u)\right\},$$

де $B=E\left(\xi\xi^t\right)$ *– коваріаційна матриця випадкового вектора – стовпця* ξ *(верхній індекс* t *означає транспонування).*

Сукупність строго субгауссових *n*-вимірних векторів позначають символом $SSub\left(\Omega,R^n\right)$. Відмітимо, що строго субгауссовий випадковий вектор є субгауссовим. Центрований гауссовий випадковий вектор є строго субгауссовим.

Означення 1.5. *Випадкове поле* $\{X(t)\colon t\in T\}$ *називається сумісно строго субгауссовим, якщо для довільного натурального числа* n *та довільних* $t_1,t_2,\ldots,t_n\in T$ *випадковий вектор* $(X(t_1),\ldots,X(t_n))$ *є строго субгауссовим.*

Сумісно строго субгауссове поле є центрованим [10]. Довільне гауссове випадкове поле з нульовим середнім значенням є строго субгауссовим. З леми 1.7 глави 7 [10] випливає, що сумісно строго субгауссове випадкове поле має строго субгауссові прирости, побудовані за допомогою матриці *A* з означення 1.1.

Нехай

$$\left\{X_{nj}:1\le j\le a(n)\right\},\ n\ge 1 \tag{1.38}$$

– послідовність серій випадкових величин, які у кожній серії мають сумісний строго субгауссовий розподіл; $B_n=E\left(X_nX_n{}^t\right)$ – коваріаційна матриця випадкового вектора $X_n=\left(X_{n1},\ldots,X_{na(n)}\right)^t$;

$$\sigma_{nk}^2=EX_{nk}^2,\ \chi_{nk}=\sigma_{nk}^4-\frac{1}{3}EX_{nk}^4,\ 1\le k\le a(n);\ S_n=\sum_{k=1}^{a(n)}X_{nk}^2.$$

Дослідження збіжності до детермінованої сталої послідовності випадкових величин $\{S_n:n\ge 1\}$ грунтується на такій теоремі.

Теорема 1.9. [10, с. 223] *Нехай для послідовності серій (1.38) виконуються наступні умови:*

1) $tr\ B_n^2 \to 0$ *при* $n \to \infty$ *, де символ* tr *означає слід матриці*

2) $a_n \sum_{k=1}^{a(n)} \chi_{nk} \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Тоді $\operatorname{Var} S_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Нехай $\{X(t): t \in T\}$ – сумісно строго субгауссове випадкове поле, $I = [0,1]^d \subset T$, T – відкрита множина в R^d; $r(s,t) = EX(s)X(t), s,t \in T$ – коваріаційна функція цього випадкового поля. Нехай, далі $\{\mu(n): n \geq 1\}$ – послідовність рівномірних розбиттів одиничного d-вимірного паралелепіпеда I; розбиття $\mu(n)$ складається з $b^d(n)$ конгруентних d-вимірних паралелепіпедів, $b(n)$ – натуральне число, $n \geq 1$. Нагадаємо, що символом $X(q;A)$ ми позначаємо приріст випадкового поля X, побудований за допомогою матриці *A*.

Теорема 1.10. *Нехай* $\{X(t): t \in T\}$ *– сумісно строго субгауссове випадкове поле і для деякого показника* $\alpha \in R$ *і матриці* A *з означення 1.1 виконуються наступні умови:*

1) $(b(n))^{-\alpha} \sum_{q \in \mu(n)} r(q \times q; A \otimes A) \to c \in R$ *при* $n \to \infty$;

2) $V_n^{(1)} = (b(n))^{-2\alpha} \sum_{q,q' \in \mu(n)} (E(X(q,A)X(q',A)))^2 \to 0$ *при* $n \to \infty$;

3) $V_n^{(2)} = (b(n))^{d-2\alpha} \sum_{q \in \mu(n)} \left(\left(EX^2(q,A)\right)^2 - \frac{1}{3} EX^4(q;A) \right) \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Тоді

$$L_n = (b(n))^{-\alpha} \sum_{q \in \mu(n)} X^2(q;A) \to c$$

у середньому квадратичному при $n \to \infty$*. Якщо ряд із загальним членом* $V_n^{(i)}$, $n \geq 1$*, збіжний,* $i = 1,2$ *, то* $L_n \to c$ *з імовірністю одиниця при* $n \to \infty$.

Доведення. Розглянемо послідовність серій випадкових величин

$$\{X(q,A): q\in\mu(n)\},\ n\geq 1.$$

Внаслідок леми 1.5 [10, Гл. 7], у кожній серії сім'я випадкових величин має строго субгауссовий розподіл. З нерівності (3) леми 2.1 [10, с. 222] випливає оцінка

$$\operatorname{Var} S_n \leq 2V_n^{(1)} + V_n^{(2)},\ n\geq 1. \tag{1.39}$$

Умова 1) означає, що $E S_n \to c,\ n\to\infty$. З нерівності (1.39) та умов 2), 3) випливає, що $\operatorname{Var} S_n \to 0,\ n\to\infty$ і перше твердження теореми доведено.

Якщо ряд із загальним членом $V_n^{(i)},\ n\geq 1,$ збіжний, $i=1,2$, то і ряд із загальним членом $\operatorname{Var} S_n,\ n\geq 1$ збіжний, звідки випливає [41, с. 24], що $S_n - ES_n \to 0$ з імовірністю одиниця при $n\to\infty$. Враховуючи, що $E S_n \to c$, $n\to\infty$, отримуємо друге твердження теореми. □

Теорема 1.11. *Нехай* $\{X(t): t\in T\}$ *– сумісно строго субгауссове неперервне у середньому квадратичному випадкове поле; A – матриця, яка задає приріст* p *-го порядку і виконуються наступні умови:*

1) існує додатна функція $u(t),\ t\in[0,1]^d$ *така, що для деякого* $\alpha>0$

$$\frac{E(X([t,t+y],A))^2}{h^\alpha}\to u(t)$$

рівномірно на $[0,1]^d$ *при* $h\to 0+$, *де* $y=(h,h,\ldots,h)\in R^d$;

2) існують невід'ємні сталі $L,\tau_1,\ldots,\tau_d$, *такі, що для довільного* $h>0$ *при* $|t_i-s_i|>2h,\ 1\leq i\leq d$ *виконується нерівність*

$$|E(X([t,t+y],A)X([s,s+y],A))|\leq \frac{Lh^{2p}}{|t_i-s_i|^{\tau_1}\ldots|t_d-s_d|^{\tau_d}},$$

де $y=(h,\ldots,h)\in R^d$;

3) нехай серед чисел $2\tau_1, 2\tau_2,\ldots,2\tau_d$ *рівно* k *менші одиниці і*

$$k+2\left(\alpha+\sum_{2\tau_i\ge 1}\tau_i-2p\right)<d\ ;$$

$$\left(EX^2([t,t+y],A)\right)^2-\frac{1}{3}EX^4([t,t+y],A)=o\left(h^{2\alpha}\right),\ \ h\to 0+$$

рівномірно відносно $t\in[0,1]^d$ *. Тоді*

$$S_n=(b(n))^{\alpha-d}\sum_{q\in\mu(n)}X^2(q,A)\to\int_{[0,1]^d}u(t)dt$$

у середньому квадратичному при $n\to\infty$.

Доведення. Як і у доведенні наслідку 1.3 переконуємося, що

$$ES_n=(b(n))^{\alpha-d}\sum_{q\in\mu(n)}EX^2(q,A)\to\int_{[0,1]^d}u(t)dt,\ \ n\to\infty. \tag{1.40}$$

З нерівності (3) леми 2.1 [10, с.222] випливає нерівність

$$\mathrm{Var}\ S_n\le 2V_n^{(1)}+V_n^{(2)},\ n\ge 1,$$

де

$$V_n^{(1)}=(b(n))^{2(\alpha-d)}\sum_{q,q'\in\mu(n)}\left(EX(q,A)X(q',A)\right)^2,$$

$$V_n^{(2)}=(b(n))^{d+2(\alpha-d)}\sum_{q\in\mu(n)}\left(\left(EX^2(q,A)\right)^2-\frac{1}{3}EX^4(q,A)\right).$$

Збіжність до нуля послідовності $\{V_n^{(1)}:n\ge 1\}$ доводиться так само, як збіжність до нуля послідовності дисперсій у теоремі 1.8 при $F(x)=x^2, x\in R$ для гауссового випадкового поля. Нескінченна малість послідовності $\{V_n^{(2)}:n\ge 1\}$ випливає з умови 4):

$$\left|V_n^{(2)}\right|\le (b(n))^{d+2(\alpha-d)}o\left((b(n))^{-2\alpha}\right)(b(n))^d\to 0,\ \ n\to\infty\ .$$

Отже, $\mathrm{Var}\,S_n\to 0,\ n\to\infty$. Враховуючи співвідношення (1.40), отримуємо твердження теореми. □

1.5. Збіжність бакстерівських сум для випадкових полів на жорданових множинах

Для випадкового процесу відрізок є основною природною параметричною множиною. При переході до випадкових полів ситуація істотно змінюється. Наприклад, для двопараметричного випадкового поля множиною зміни параметра може бути не тільки прямокутник, але й такі множини як еліпс, трапеція та інші. Кільце підмножин простору R^d, вимірних у розумінні Жордана, виявляється достатньо широкою сім'єю множин для застосувань.

Нехай G – відкрита підмножина евклідового простору R^d; $\{X(t), t \in G\}$ – неперервне в середньому квадратичному випадкове поле з нульовим математичним сподіванням та коваріаційною функцією

$$r(s, t) = E(X(s)X(t));\ s, t \in G.$$

Надалі припускаємо, що це випадкове поле має скінченний момент четвертого порядку на множині G. Для $s, t, u, v \in G$ покладемо

$$k(s, t, u, v) = E(X(s)X(t)X(u)X(v)) - E(X(s)X(t))E(X(u)X(v)).$$

Для невід'ємного числа n розглянемо розбиття n-го порядку

$$\Omega_n = \left\{ \prod_{i=1}^{d} \left[\frac{n_i}{2^n}, \frac{n_i + 1}{2^n} \right] \middle| \, n_i \in Z, 1 \le i \le d \right\}$$

евклідового простору R^d. Для замкненої вимірної за Жорданом підмножини $F \subset G$ покладемо

$$F_n = \{ q \in \Omega_n \mid q \subset F \}.$$

Теорема 1.12. *Нехай* $\{X(t), t \in G\}$ *– неперервне в середньому квадратичному випадкове поле з нульовим математичним сподіванням і для деякого додатного числа* α *існує рівномірна відносно* $t = (t_1, t_2, \ldots, t_d) \in F$ *границя*

$$\lim_{h\to 0}\frac{E\left(X\left(\left[t_1, t_1+h\right]\times\ldots\times\left[t_d, t_d+h\right], A\right)\right)^2}{h^{\alpha}} = u(t)\cdot \qquad (1.41)$$

Тоді умова

$$\sigma_n = 2^{-2dn\left(1-\frac{\alpha}{d}\right)} \sum_{p,q\in F_n} k\left(q\times q\times p\times p;\ A\otimes A\otimes A\otimes A\right)\to 0 \qquad (1.42)$$

при $n\to\infty$ *є необхідною й достатньою для збіжності*

$$S_n(X,F) = 2^{-dn\left(1-\frac{\alpha}{d}\right)} \sum_{q\in F_n} X^2(q, A)\to \int_F u(t)dt \qquad (1.43)$$

у середньому квадратичному при $n\to\infty$.

Доведення. З умови (1.41) випливає, що $ES_n(X, F)\to \int_F u(t)dt$ при $n\to\infty$. Оскільки $\mathrm{Var}S_n(X, F) = \sigma_n$, то твердження (1.42) та (1.43) рівносильні. □

Зауваження 1.9. Якщо виконується умова (1.41) і ряд із загальним членом σ_n, $n\ge 1$ збіжний, то

$$S_n(X,F) = 2^{-dn\left(1-\frac{\alpha}{d}\right)} \sum_{q\in F_n} X^2(q, A)\to \int_F u(t)dt$$

з імовірністю одиниця при $n\to\infty$. Це випливає з твердження на с. 24 монографії [41].

Приклад 1.15. Нехай $\{w_1(t_1), t_1\ge 0\}$, $\{w_2(t_2), t_2\ge 0\}$ – незалежні випадкові процеси стандартного броунівського руху,

$$\{X(t_1, t_2) = w_1(t_1)w_2(t_2) \mid t_1\ge 0, t_2\ge 0\},$$

$$A = \left\{a_i b_j \mid a_i, b_j\in R, 0\le i\le p_1, 0\le j\le p_2;\ p_1,\ p_2\ge 1\right\},$$

де вектори $a=\left(a_0, a_1, \ldots, a_{p_1}\right)$, $b=\left(b_0, b_1, \ldots, b_{p_2}\right)$ мають порядки p_1 та p_2 відповідно. Нехай, далі F – компактна, вимірна у розумінні Жордана підмножина першого квадранта $[0, +\infty)^2$ з додатною мірою Жордана.

Для перевірки умов теореми 1.11 застосуємо формулу Ісерліса для математичного сподівання добутку випадкових величин X_1, X_2, X_3, X_4, які мають сумісний гауссовий розподіл з нульовим середнім значенням [14, с. 29]:

$$E\left(X_1X_2X_3X_4\right)=E\left(X_1X_2\right)E\left(X_3X_4\right)+$$
$$+E\left(X_1X_3\right)E\left(X_2X_4\right)+E\left(X_1X_4\right)E\left(X_2X_3\right). \qquad (1.44)$$

Неважко переконатися, що для цього прикладу $\alpha=1$ та

$$u\left(t_1, t_2\right)=c=\frac{1}{p_1p_2}\sum_{i,\ j=0}^{p_1}a_ia_j\min\left(i,\ j\right)\sum_{i,\ j=0}^{p_2}b_ib_j\min\left(i,\ j\right),\ \left(t_1, t_2\right)\in F.$$

За допомогою формули (1.44) для $s=\left(s_1, s_2\right)$, $t=\left(t_1, t_2\right)$, $u=\left(u_1, u_2\right)$, $v=\left(v_1, v_2\right)\in F$ отримуємо:

$$k\left(s, t, u, v\right)=\min\left(s_1, t_1\right)\min\left(u_1, v_1\right)\cdot\left(\min\left(s_2,\ u_2\right)\min\left(t_2, v_2\right)+\right.$$
$$+\min\left(s_2,v_2\right)\min\left(t_2, u_2\right)\Big)+\min\left(s_1, u_1\right)\min\left(t_1, v_1\right)\cdot\left(\min\left(s_2, t_2\right)\min\left(u_2, v_2\right)+\right.$$
$$+\min\left(s_2, u_2\right)\min\left(t_2, v_2\right)+\min\left(s_2, v_2\right)\min\left(t_2, u_2\right)\Big)+$$
$$+\min\left(s_1, v_1\right)\min\left(t_1, u_1\right)\cdot\left(\min\left(s_2, t_2\right)\min\left(u_2, v_2\right)+\right.$$
$$\left.+\min\left(s_2, v_2\right)\min\left(t_2, u_2\right)+\min\left(s_2, u_2\right)\min\left(t_2, v_2\right)\right).$$

З цієї формули видно, що для паралелепіпедів $p, q\in F_n$, проекції яких на кожну координатну вісь не співпадають, справедлива рівність

$$k(q\times q\times p\times p,\ A\otimes A\otimes A\otimes A)=0.$$

Тому число доданків, відмінних від нуля, у сумі σ_n підпорядковане 2^{3n} при $n\to\infty$. При цьому кожний відмінний від нуля доданок є $O(2^{-4n})$ при $n\to\infty$.

Таким чином, $\sigma_n = O(2^{-n}), n \to \infty$. Ряд із загальним членом $\sigma_n, n \ge 1$ збігається, і, внаслідок теореми 1.11 та зауваження 1.9,

$$S_n(X, F) \to c\, mes(F)$$

у середньому квадратичному та з імовірністю одиниця $n \to \infty$. Тут $mes(F)$ – міра Жордана множини F.

Для гауссового випадкового поля $\{X(t),\ t \in G\}$ з нульовим математичним сподіванням функція $k(s,t,u,v),\ s,t,u,v \in G$ за допомогою формули (1.44) виражається через коваріаційну функцію цього поля:

$$k(s,\, t,\, u,\, v) = r(s,\, u) r(t,\, v) + r(s,\, v) r(t,\, u).$$

Тому з теореми 1.1 та зауваження 1.9 випливає

Теорема 1.13. *Нехай для неперервного в середньому квадратичному гауссового випадкового поля* $\{X(t),\ t \in G\}$ *з нульовим математичним сподіванням виконується співвідношення (1.41). Тоді умова*

$$\tau_n = 2^{-2dn\left(1-\frac{\alpha}{d}\right)} \sum_{q,\ p \in F_n} r^2(q \times p,\ A \otimes A) \to 0$$

при $n \to \infty$ *є необхідною й достатньою для збіжності*

$$S_n(X, F) = 2^{-dn\left(1-\frac{\alpha}{d}\right)} \sum_{q \in F_n} X^2(q, A) \to \int_F u(t)dt \tag{1.45}$$

у середньому квадратичному при $n \to \infty$. *Якщо ряд із загальним членом* $\tau_n,\ n \ge 1$ *збігається, то збіжність у співвідношенні (1.45) має місце з імовірністю одиниця.*

Приклад 1.16. Нехай у прикладі 1.13 $d = 2$; $\gamma = 2$; $b(n) = 2^n$, $n \ge 1$. Матриця A така ж як і у прикладі 1.15. Тоді умова (1.41) виконується для $\alpha = H_1 + H_2$ та

$$u(s_1, s_2) = C(A) = \frac{1}{4} p_1^{-2H_1} p_2^{-2H_2} \sum_{i_1, i_2 = 0}^{p_1} a_{i_1} a_{i_2} \, | i_1 - i_2 |^{2H_1} \sum_{j_1, j_2 = 0}^{p_2} b_{j_1} b_{j_2} \, | j_1 - j_2 |^{2H_2} . \quad (1.46)$$

Не втрачаючи загальності, достатньо перевірити виконання умов теореми 1.12 для $F = [0, 1]^2$. Але це зроблено у прикладі 1.13. Причому, оскільки $b(n) = 2^n$, $n \ge 1$, то ряд із загальним членом τ_n, $n \ge 1$ збігається. Тому, внаслідок теореми 1.12, для довільної жорданової підмножини F двовимірного евклідового простору

$$S_n(X, F) = 2^{-dn\left(1 - \frac{\alpha}{d}\right)} \sum_{q \in F_n} X^2(q, A) \to C(A) \; mes(F)$$

у середньому квадратичному та з імовірністю одиниця при $n \to \infty$, де стала $C(A)$ визначена у рівності (1.46). За допомогою вибору матриці A, яка задає приріст, можна досягти входження до сталої $C(A)$ параметрів H_1, H_2 розглядуваного випадкового поля. Так, якщо

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

то $C(A_1) = 1$. Для векторів $a = (1, -2, 1)$ та $b = (-1, 1)$ матриця

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$C(A_2) = 4 - 2^{2H_1}$. Для векторів $a = (-1, 1)$ та $b = (1, -2, 1)$ матриця

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$C(A_3) = 4 - 2^{2H_2}$. Таким чином,

$$\frac{\sum\limits_{q\in F_n} X^2(q,\, A_2)}{\sum\limits_{q\in F_n} X^2(q,\, A_1)} \to 4-2^{2H_1}, \qquad \frac{\sum\limits_{q\in F_n} X^2(q,\, A_3)}{\sum\limits_{q\in F_n} X^2(q,\, A_1)} \to 4-2^{2H_2}$$

з імовірністю одиниця при $n \to \infty$. Ці співвідношення дають можливість побудувати сильно консзистентну оцінку векторного параметра (H_1, H_2) за спостереженнями гауссового випадкового поля X на дискретній підмножині точок довільної вимірної за Жорданом множини $F \subset R^2$ з додатною мірою.

1.6. Теорема Леві-Бакстера для векторного гауссового випадкового поля

Доведення основного результату цього підрозділу базується на такій лемі.

Лема 1.6. *Нехай*

$$\left\{X_{nj} : 1 \le j \le a(n)\right\},\ n \ge 1$$

– послідовність серій випадкових величин, які у кожній серії мають сумісний гауссовий розподіл з нульовим математичним сподіванням та коваріаційною матрицею

$$B_n = \{r_n(i,\ j) : 1 \le i,\ j \le a(n)\},$$

$a(n) \to \infty$ *при* $n \to \infty$. *Нехай, далі,*

$$A_n = \{a_n(i,\ j) : 1 \le i,\ j \le a(n)\},\ n \ge 1$$

– послідовність дійсних симетричних матриць і виконані наступні відношення підпорядкованості:

$$\max\{|\lambda_i|,\ 1 \le i \le a(n)\} = o\left(\frac{tr(B_n A_n)}{\ln n}\right),\quad n \to \infty \tag{1.47}$$

$$tr\left(B_n A_n\right)^2 = o\left(\frac{\left(tr\left(B_n A_n\right)\right)^2}{\ln n}\right), \quad n \to \infty, \tag{1.48}$$

де $\{\lambda_i \mid 1 \le i \le a(n)\}$ *– власні числа матриці* $B_n A_n$, *символ* tr *означає слід матриці. Тоді*

$$\frac{X_n{}^t A_n X_n}{tr\left(B_n A_n\right)} \to 1$$

з імовірністю одиниця при $n \to \infty$, *де* $X_n = \left(X_{n1}, \ldots, X_{na(n)}\right)^t$, *верхній індекс* t *означає транспонування.*

*Доведення***.** Зауважимо, що

$$E\left(X_n{}^t A_n X_n\right) = tr\left(B_n A_n\right).$$

Нехай U_n – ортогональна матриця, яка зводить матрицю B_n до діагональної форми:

$$U_n B_n U_n{}^t = D_n,$$

де D_n – діагональна матриця. Покладемо

$$Y_n = U_n X_n.$$

Знайдемо коваріаційну матрицю гауссового вектора Y_n :

$$E\left(Y_n Y_n{}^t\right) = E\left(U_n X_n X_n{}^t U_n{}^t\right) = U_n B_n U_n{}^t = D_n.$$

Отже, Y_n – гауссовий вектор з незалежними компонентами. Перейдемо до вектора

$$Z_n = D_n^{-\frac{1}{2}} Y_n$$

з нульовим математичним сподіванням та одиничною коваріаційною матрицею. Далі,

$$X_n{}^t A_n X_n = Y_n{}^t U_n A_n U_n{}^t Y_n = Z_n{}^t D_n^{\frac{1}{2}} U_n A_n U_n{}^t D_n^{\frac{1}{2}} Z_n.$$

Матриця

$$K_n = D_n^{\frac{1}{2}} U_n A_n U_n{}^t D_n^{\frac{1}{2}}$$

симетрична і подібна матриці $B_n A_n$. Внаслідок експоненціальної оцінки для інтеграла імовірностей квадратичної форми від незалежних гауссових випадкових величин [88], для довільного $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left\{\frac{Z_n{}^t K_n Z_n}{trK_n} - 1 \ge \varepsilon\right\}\right) \le \exp\left(-\min\left\{\frac{C_1 \varepsilon |trK_n|}{\|K_n\|},\ \frac{C_2 \varepsilon^2 (trK_n)^2}{trK_n{}^2}\right\}\right),$$

де $\|K_n\|$ позначає норму матриці K_n як оператора $R^{a(n)} \to R^{a(n)}$; C_1, C_2 – додатні сталі. Така ж оцінка має місце для імовірності

$$P\left(\left\{\frac{Z_n{}^t (-K_n) Z_n}{trK_n} + 1 \ge \varepsilon\right\}\right).$$

Отже,

$$P\left(\left\{\left|\frac{Z_n{}^t K_n Z_n}{trK_n} - 1\right| \ge \varepsilon\right\}\right) \le 2\exp\left(-\min\left\{\frac{C_1 \varepsilon |trK_n|}{\|K_n\|},\ \frac{C_2 \varepsilon^2 (trK_n)^2}{trK_n{}^2}\right\}\right).$$

Матриця K_n симетрична і

$$\|K_n\| = \max\{|\lambda_i| \mid 1 \le i \le a(n)\},$$

де $\{\lambda_i \mid 1 \le i \le a(n)\}$ – множина власних чисел матриці K_n . Оскільки матриця K_n подібна матриці $B_n A_n$, то їх власні числа співпадають. З умов (1.47) та (1.48) леми випливає, що

$$\|K_n\| = o\left(\frac{tr\, K_n}{\ln n}\right) \quad \text{і} \quad tr\, K_n{}^2 = o\left(\frac{(tr\, K_n)^2}{\ln n}\right)$$

при $n \to \infty$. Покладемо

$$\|K_n\| = \frac{\varepsilon_n |tr\, K_n|}{\ln n} \quad \text{і} \quad tr\, K_n{}^2 = \frac{\delta_n (tr\, K_n)^2}{\ln n},\ n \ge 1,$$

де $\{\varepsilon_n : n \geq 1\}$, $\{\delta_n : n \geq 1\}$ – збіжні до нуля послідовності додатних чисел. Тоді, для достатньо великих n, виконується нерівність

$$P\left(\left\{\left|\frac{Z_n{}^t K_n Z_n}{trK_n} - 1\right| \geq \varepsilon\right\}\right) \leq \frac{2}{n^2}.$$

Отже, ряд із загальним членом

$$P\left(\left\{\left|\frac{Z_n{}^t K_n Z_n}{trK_n} - 1\right| \geq \varepsilon\right\}\right), \ n \geq 1$$

збіжний для довільного $\varepsilon > 0$. Розглянемо збіжну до нуля послідовність додатних чисел $\{\varepsilon^{(k)} : k \geq 1\}$. Для кожного натурального числа k ряд із загальним членом

$$P\left(\left\{\left|\frac{Z_n{}^t K_n Z_n}{trK_n} - 1\right| \geq \varepsilon^{(k)}\right\}\right), \ n \geq 1$$

збігається. Внаслідок леми Бореля-Кантеллі, існує множина імовірності нуль Ω_k така, що для всіх $\omega \in \Omega \setminus \Omega_k$ існує таке натуральне число $N_k(\omega)$, що для всіх натуральних чисел $n \geq N_k(\omega)$ виконується нерівність

$$\left|\frac{Z_n{}^t K_n Z_n}{trK_n} - 1\right| < \varepsilon^{(k)}.$$

Таким чином, на множині $\Omega \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$ повної імовірності

$$\frac{Z_n{}^t K_n Z_n}{trK_n} \to 1$$

при $n \to \infty$. □

Приклад 1.17. Нехай $A_n = B_n$, $n \geq 1$ і $\ln n = o(a(n))$ при $n \to \infty$. Внаслідок леми 1.6,

$$\frac{X_n{}^t A_n X_n}{a(n)} \to 1$$

з імовірністю одиниця при $n \to \infty$.

Нехай $X(t) = (X_1(t),\, X_2(t)),\ t \in R^d$ – векторне гауссове випадкове поле з нульовим математичним сподіванням та коваріаційною матрицею

$$\{E(X_i(t)X_j(s)) = r_{ij}(t,\, s);\, i,\, j = 1,\, 2\},\, t,\, s \in R^d .$$

Нехай, далі, $\lambda_n^{(k)} = \{0 = t_0{}^{(n)} < t_1{}^{(n)} < \ldots < t_{c(n)-1} < t_{c(n)}{}^{(n)} = 1\},\ 1 \le k \le d$ – розбиття відрізка [0,1] k-тої координатної вісі простору R^d; λ_n – розбиття одиничного бруса $[0,1]^d$ породжене розбиттями $\lambda_n^{(1)},\ \lambda_n^{(2)},\, \ldots,\, \lambda_n^{(d)}$. Розбиття λ_n складається з $(c(n))^d$ паралелепіпедів:

$$\lambda_n = \left\{ \left[t_{k(1)}{}^{(n)}, t_{k(1)+1}{}^{(n)} \right] \times \ldots \times \left[t_{k(d)}{}^{(n)}, t_{k(d)+1}{}^{(n)} \right] \middle| 0 \le k(i) \le c(n) - 1, 1 \le i \le d \right\}.$$

Покладемо

$$d(\lambda_n^{(1)}) = \max\{t_{k+1}{}^{(n)} - t_k{}^{(n)} \mid 0 \le k \le c(n) - 1\},$$

$$p(\lambda_n^{(1)}) = \min\{t_{k+1}{}^{(n)} - t_k{}^{(n)} \mid 0 \le k \le c(n) - 1\}.$$

Через $mes(q)$ позначимо лебегову міру в R^d паралелепіпеда q.

Нехай d-вимірна матриця A задана набором векторів $a^{(i)} = (a_0{}^{(i)},\, \ldots,\, a_{p_i}{}^{(i)}),\ 1 \le i \le d$, в якому вектор $a^{(i)}$ має порядок p_i, $p = p_1 + \ldots + p_d$.

Покладемо

$$S_n(X) = \sum_{q \in \lambda_n} \frac{X_1(q,\, A) X_2(q,\, A)}{r_{12}(q \times q,\, A \otimes A)} mes(q).$$

Теорема 1.14. *Нехай* $X(t)=(X_1(t),\ X_2(t)),\quad t\in[0,\ 1]^d$ *неперервне у середньому квадратичному векторне гауссове випадкове поле з нульовим математичним сподіванням і виконуються наступні умови:*

1) коваріаційні функції $r_{kl};\ k,l=1,2$ *–* $2p$ *раз неперервно диференційовані на множині* $V=\{(t,\ s)|t,\ s\in[0,1]^d\ ;\ t\neq s\}$ *і для деяких невід'ємних сталих* L,γ*, для* $(t,\ s)\in V$ *виконується нерівність*

$$\max\left\{\left|\frac{\partial^{2p}r_{kl}(t,s)}{\partial t_1^{\alpha_1}..\partial t_d^{\alpha_d}\partial s_1^{\alpha_1}..\partial s_d^{\alpha_d}}\right|\ \Big|\ \alpha_i\geq 0,1\leq i\leq d,\alpha_1+...+\alpha_d=p\right\}\leq L\|t-s\|^{-\gamma},\tag{1.48}$$

де $\|\cdot\|$ *– евклідова норма в* R^d*;*

2) для деяких додатних сталих C_1, C_2, α, ψ*, для довільного паралелепіпеда* $q=[t,\ t+h]\subset[0,\ 1]^d$ *виконуються нерівності*

$$|r_{kl}(q\times q,\ A\otimes A)|\geq C_1\|h\|^{\alpha},\tag{1.50}$$

$$|r_{kl}(q\times q,\ A\otimes A)|\leq C_2\|h\|^{\psi};\tag{1.51}$$

3) $\dfrac{d\left(\lambda_n^{(1)}\right)}{p\left(\lambda_n^{(1)}\right)}=O(1), n\to\infty$;

4) $\left(d\left(\lambda_n^{(1)}\right)\right)^{d+\psi-\alpha}=o\left(\dfrac{1}{\ln n}\right), n\to\infty$ *і при* $0\leq\gamma<d$ *виконується співвідношення*

$$\exp\left(\min(2p-\alpha,\ 4p-d-2\alpha)\ln d\left(\lambda_n^{(1)}\right)\right)=o\left(\frac{1}{\ln n}\right),\ n\to\infty;$$

при $\gamma=d$ *виконується співвідношення*

$$\left(d\left(\lambda_n^{(1)}\right)\right)^{2p-\alpha}\left|\ln d\left(\lambda_n^{(1)}\right)\right|+\left(d\left(\lambda_n^{(1)}\right)\right)^{4p-d-2\alpha}\ln^2 d\left(\lambda_n^{(1)}\right)=o\left(\frac{1}{\ln n}\right),n\to\infty;$$

при $\gamma>d$ *виконується співвідношення*

$$\exp\left(\min\left(2p+d-\gamma-\alpha,\ 4p+d-2\gamma-2\alpha\right)\ln d\left(\lambda_n^{(1)}\right)\right)=o\left(\frac{1}{\ln n}\right),\ n\to\infty\cdot$$

Тоді $S_n(X)\to 1$ *з імовірністю одиниця при* $n\to\infty$.

Доведення. Розбиття λ_n бруса $[0,\ 1]^d$ запишемо у вигляді

$$\lambda_n=\left\{q_{i(1)\ldots.i(d)}=\left[t_{i(1)},\ t_{i(1)+1}\right]\times\ldots\times\left[t_{i(d)},\ t_{i(d)+1}\right]\middle|\,0\le i(1),\ \ldots,\ i(d)\le c(n)-1\right\}.$$

Впорядкуємо паралелепіпеди $q_{i(1)\ldots.i(d)}$, $0\le i(1),\ \ldots,\ i(d)\le c(n)-1$ так, щоб індекси цих паралелепіпедів утворювали набір послідовних цілих чисел від 0 до $(c(n)-1)\ldots(c(n)-1)=(c(n))^d-1$ у системі числення з основою $c(n)$. Покладемо

$$\eta_n{}^t=\Big(X_1(q_{0\ldots0},\ A)\sqrt{mes(q_{0\ldots0})},\ \ldots.X_1\big(q_{(c(n)-1)\ldots(c(n)-1)},\ A\big)\sqrt{mes(q_{(c(n)-1)\ldots(c(n)-1)})},$$

$$X_2(q_{0\ldots0},\ A)\sqrt{mes(q_{0\ldots0})},\ \ldots.,\ X_2\big(q_{(c(n)-1)\ldots(c(n)-1)},\ A\big)\sqrt{mes(q_{(c(n)-1)\ldots(c(n)-1)})}\Big).$$

Компоненти випадкового вектора η_n мають сумісний гауссовий розподіл з нульовим математичним сподіванням. Коваріаційна матриця цього вектора має вигляд

$$E\left(\eta_n\eta_n^t\right)=B_n=\{R_{kl}:k,\ l=1,\ 2\},$$

де $R_{kl}=\left\{r_{kl}\left(q_{i(1)\ldots.i(d)}\times q_{j(1)\ldots.\,j(d)},\ A\otimes A\right)\sqrt{mes(q_{i(1)\ldots.i(d)})mes(q_{j(1)\ldots.\,j(d)})}\right\}$, $0\le i(1),\ldots,$ $i(d),\ j(1),\ \ldots,\ j(d)\le c(n)-1$.

Випадкову величину $S_n(X)$ можна подати у вигляді

$$S_n(X)=\eta_n^tA_n\eta_n,$$

де $A_n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & D\\ D & 0\end{pmatrix}$, D – діагональна матриця,

$$D=diag\left\{\left(r_{12}\left(q_{i(1)\ldots.i(d)}\times q_{i(1)\ldots.i(d)},\ A\otimes A\right)\right)^{-1}\right\},\ \ 0\le i(1),\ \ldots,\ i(d)\le c(n)-1.$$

З доведення леми 1.6 випливає, що матриця $B_n A_n$ подібна симетричній матриці. Нехай 1 Λ_n – сукупність власних чисел матриці $B_n A_n$. Тоді

$$\max_{\lambda \in \Lambda_n} |\lambda| = \|B_n A_n\| \le \|B_n\| \cdot \|A_n\|.$$

Застосуємо наслідок теореми Гершгоріна [43, гл. 3, п. 2.2.1], у якому встановлюються межі для абсолютної величини власного значення матриці.

Лема 2.7. *Абсолютна величина власного значення комплексної квадратної матриці* $A = \left\{ a_{ij} \, : \, i, \, j = 1, \dots, n \right\}$ *не перевищує* $\min(R, T)$, *де* $R = \max\{R_i : 1 \le i \le n\}$, $T = \max\{T_j : 1 \le j \le n\}$; R_i *та* T_j *позначають відповідно суми абсолютних величин елементів* i *-го рядка та* j *-го стовпчика матриці* A

.

Продовжимо доведення теореми. Внаслідок леми 1.7,

$$\|B_n\| \le \max_{q \in \lambda_n} \left\{ \sum_{k, \, l = 1}^{2} \sum_{p \in \lambda_n} |r_{kl}(q \times p, \, A \otimes A)| \sqrt{mes(q) mes(p)} \right\}.$$

У просторі R^d розглянемо норму

$$\|t\|_m = \max_{1 \le i \le d} |t_i| \, , \, t = (t_1, \dots, t_d) \in R^d \, .$$

Ця норма еквівалентна евклідовій нормі $\| \cdot \|$ у R^d. Тому в умовах теореми можна замінити евклідову норму $\| \cdot \|$ нормою $\| \cdot \|_m$. Для фіксованого мультиіндексу $i = (i(1), \dots, i(d)), \quad 0 \le i(1), \dots, i(d) \le c(n) - 1$ у сумі

$$\sum_{k, \, l = 1}^{2} \sum_{j(1), \dots, \, j(d) = 0}^{c(n) - 1} \left| r_{kl} \left(q_{i(1) \dots i(d)} \times q_{j(1) \dots j(d)} \, , \, A \otimes A \right) \sqrt{mes(q_{i(1) \dots i(d)}) mes(q_{j(1) \dots j(d)})} \right| \tag{1.52}$$

виділимо доданки, для яких

$$\| \, i - j \, \|_m \le 1. \tag{1.53}$$

Число мультиіндексів j, які при фіксованому мультиіндексу i задовольняють умову (1.53), не перевищує 3^d. Внаслідок нерівності Коші-Буняковського,

$$\left| r_{kl}\left(q_{i(1)\dots i(d)} \times q_{j(1)\dots j(d)},\, A\otimes A\right)\right| \le$$

$$\le \sqrt{r_{kk}(q_{i(1)\dots i(d)} \times q_{i(1)\dots i(d)},\, A\otimes A) r_{ll}(q_{j(1)\dots j(d)} \times q_{j(1)\dots j(d)},\, A\otimes A)}\,.$$

З умови (1.51) отримуємо наступне відношення підпорядкованості:

$$\sum_{j\in M}\sum_{k,\,l=1}^{2}\left| r_{kl}\left(q_{i(1)\dots i(d)} \times q_{j(1)\dots j(d)},\, A\otimes A\right)\sqrt{mes(q_{i(1)\dots i(d)})mes(q_{j(1)\dots j(d)})}\right| =$$

$$= O\left(\left(d\left(\lambda_n^{(1)}\right)\right)^{d+\psi}\right),\ n\to\infty, \qquad (1.54)$$

де $M = \left\{ j = \left(j(1),\, \dots,\, j(d)\right) \mid \|i-j\| \le 1\right\}$.

Для натурального числа k кількість розв’язків рівняння $\|x\|_m = k$ у просторі Z^d не перевищує $2^{3d}k^{d-1}$. З умови 1) випливає, що при $\|i-j\|_m > 1,\ k,l = 1,2$ виконується нерівність

$$\left| r_{kl}\left(q_{i(1)\dots i(d)} \times q_{j(1)\dots j(d)},\, A\otimes A\right)\right| \le \frac{L}{\left(\|i-j\|_m - 1\right)^{\gamma}}\left(d\left(\lambda_n^{(1)}\right)\right)^{2p-\gamma}.$$

Тому

$$\sum_{k,\,l=1}^{2}\ \sum_{j(1),\,\dots,\,j(d)=0,\ j\notin M}^{c(n)-1}\left| r_{kl}\left(q_{i(1)\dots i(d)} \times q_{j(1)\dots j(d)},\, A\otimes A\right)\times\sqrt{mes(q_{i(1)\dots i(d)})mes(q_{j(1)\dots j(d)})}\right| =$$

$$= O\left(\left(d\left(\lambda_n^{(1)}\right)\right)^{2p+d-\gamma}\right)\cdot \sum_{j(1),\dots,j(d)=0}^{c(n)-1}\left(\|i-j\|_m - 1\right)^{-\gamma} = O\left(\left(d\left(\lambda_n^{(1)}\right)\right)^{2p+d-\gamma}\right)\cdot \sum_{k=1}^{c(n)} k^{d-1-\gamma}\,.$$

Враховуючи умову 3), отримуємо:

$$\sum_{k=1}^{c(n)} k^{d-1-\gamma} = \begin{cases} O\left(\left(d(\lambda_n^{(1)})\right)^{\gamma-d}\right), & 0\le\gamma<d, \\ O\left(\left|\ln d(\lambda_n^{(1)})\right|\right), & \gamma = d, \\ O(1), & \gamma > d. \end{cases}$$

Таким чином, із співвідношення (1.54) випливає, що

$$\| B_n \| = \begin{cases} O\left(\left(d(\lambda_n^{(1)})\right)^{d+\psi} + \left(d(\lambda_n^{(1)})\right)^{2p} \right), & 0 \le \gamma < d, \\ O\left(\left(d(\lambda_n^{(1)})\right)^{d+\psi} + \left(d(\lambda_n^{(1)})\right)^{2p} \left|\ln d(\lambda_n^{(1)})\right| \right), & \gamma = d, \\ O\left(\left(d(\lambda_n^{(1)})\right)^{d+\psi} + \left(d(\lambda_n^{(1)})\right)^{2p+d-\gamma} \right), & \gamma > d. \end{cases} \tag{1.55}$$

Неважко бачити, що

$$\| A_n \| = O\left(\left(d(\lambda_n^{(1)})\right)^{-\alpha} \right) \tag{1.56}$$

Далі,

$$tr(B_n A_n)^2 = \sum_{\lambda \in \Delta_n} \lambda^2 \le 2 \max\{\lambda^2 \mid \lambda \in \Lambda_n\} (c(n))^d \ .$$

Із останньої нерівності та співвідношень (1.55), (1.56) отримуємо, що

$$tr(B_n A_n)^2 = \begin{cases} O\left(\left(d(\lambda_n^{(1)})\right)^{d+2(\psi-\alpha)} + \left(d(\lambda_n^{(1)})\right)^{4p-d-2\alpha} \right), & 0 \le \gamma < d, \\ O\left(\left(d(\lambda_n^{(1)})\right)^{d+2(\psi-\alpha)} + \left(d(\lambda_n^{(1)})\right)^{4p-d-2\alpha} \ln^2 d\left(\lambda_n^{(1)}\right) \right), & \gamma = d, \\ O\left(\left(d(\lambda_n^{(1)})\right)^{d+2(\psi-\alpha)} + \left(d(\lambda_n^{(1)})\right)^{4p+d-2\gamma-2\alpha} \right), & \gamma > d. \end{cases}$$

З умови 4) та рівності $tr(B_n A_n) = 1$ випливає, що виконуються умови леми 1.6, внаслідок якої $S_n(X) \to 1$ з імовірністю одиниця при $n \to \infty$. □

Приклад 2.18. Нехай $V(t),\ Y(t),\ Z(t),\ t \in [0, 1]^d$, $d \ge 2$ – незалежні гауссові випадкові поля з нульовим математичним сподіванням та коваріаційною функцією

$$r(s, t) = \frac{1}{2}(\| s \| + \| t \| - \| s - t \|),\ s, t \in [0,\ 1]^d \ .$$

Покладемо $X_1(t) = V(t) + Y(t),\ X_2(t) = Z(t) + Y(t),\ t \in [0, 1]^d$. Тоді

$$r_{kk}(s, t) = 2r(s, t),\ k = 1, 2; \quad r_{12}(s, t) = r(s, t) \ .$$

Для приросту, заданого матрицею з прикладу 1.1, $p = d$. З прикладу 1.11 випливає, що $\gamma = 2d - 1$. Неважко бачити, що $\alpha = \psi = 1$. Таким чином, при

$$\left(d\left(\lambda_n^{(1)}\right)\right)^d = o\left(\frac{1}{\ln n}\right), \quad n \to \infty,$$

внаслідок теореми 1.14, $S_n(X) \to 1$ з імовірністю одиниця при $n \to \infty$.

Для скалярного гауссового процесу $X(t),\ t \in [0, 1]$ із теореми 1.14 випливає наступний наслідок.

Наслідок 1.8. *Нехай* $X(t),\ t \in [0, 1]$ *– неперервний у середньому квадратичному гауссовий випадковий процес з нульовим математичним сподіванням і виконуються наступні умови:*

1) коваріаційна функція r *цього процесу* $2p$ *раз неперервно диференційована на множині* $V = \{(t, s) \in [0, 1]^2 \mid t \neq s\}$ *і для деяких невід'ємних сталих* $L,\ \gamma$ *для* $(t, s) \in V$ *виконується нерівність*

$$\left|\frac{\partial^{2p} r(t, s)}{\partial t^p \partial s^p}\right| \leq \frac{L}{|t - s|^\gamma};$$

2) для деяких додатних сталих $C_1, C_2, \alpha,\ \psi$ *для довільного відрізка* $q = [t, t + h] \subset [0, 1]$ *виконуються нерівності*

$$C_1 h^\alpha \leq |r(q \times q,\ A \otimes A)| \leq C_2 h^\psi;$$

3) $\dfrac{d(\lambda_n)}{p(\lambda_n)} = O(1),\ n \to \infty$;

4) $(d(\lambda_n))^{1+\psi-\alpha} = o\left(\dfrac{1}{\ln n}\right),\ n \to \infty$ *і при* $0 \leq \gamma < 1$ *виконується співвідношення* $(d(\lambda_n))^{\min(2p-\alpha,\, 4p-1-2\alpha)} = o\left(\dfrac{1}{\ln n}\right),\ n \to \infty;$ *при* $\gamma = 1$ *виконується співвідношення*

$$(d(\lambda_n))^{2p-\alpha} |\ln d(\lambda_n)| + (d(\lambda_n))^{4p-1-2\alpha} \ln^2 d(\lambda_n) = o\left(\frac{1}{\ln n}\right),\ n \to \infty;$$

при $\gamma > 1$ *виконується співвідношення*

$$\left(d\left(\lambda_n\right)\right)^{\min\left(2p+1-\gamma-\alpha,\, 4p+1-2\gamma-2\alpha\right)} = o\left(\frac{1}{\ln n}\right), \quad n \to \infty \ .$$

Тоді

$$S_n\left(X\right) = \sum_{q \in \lambda_n} \frac{X^2\left(q,\ A\right)}{r\left(q \times q,\ A \otimes A\right)} mes\left(q\right) \to 1$$

з імовірністю одиниця при $n \to \infty$.

Для доведення достатньо покласти у теоремі 1.14 $d = 1$ і $X_1 = X_2 = X$.

РОЗДІЛ 2. БАКСТЕРІВСЬКІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ КЛАСУ *K*

У цьому розділі умова гауссовості у теоремах бакстерівського типу для випадкових функцій замінена певними нерівностями для моментів четвертого порядку приростів. Для цього попередньо за допомогою нерівностей для моментів четвертого порядку визначається певна сім'я двовимірних випадкових векторів (сім'я K). Визначаються також випадкові процеси та поля класу K і для них встановлюються граничні теореми бакстерівського типу.

2.1. Двовимірні випадкові вектори сім'ї K

Нехай (Ω, F, P) – імовірнісний простір.

Означення 2.1. *Кажуть, що двовимірний випадковий вектор* $(\xi,\eta)\in L_4(\Omega)\times L_4(\Omega)$ *має властивість* K, *якщо*

1) $E\xi = E\eta = 0$;

2) $E\xi^4 \le 3\left(E\xi^2\right)^2, E\eta^4 \le 3\left(E\eta^2\right)^2$;

3) $E(\xi+\eta)^4 \le 3\left(E(\xi+\eta)^2\right)^2,\ E(\xi-\eta)^4 \le 3\left(E(\xi-\eta)^2\right)^2$.

Сім'ю всіх двовимірних векторів із властивістю K позначимо літерою K. Через K_1 позначимо множину всіх тих векторів сім'ї K, для яких у вимогах 2), 3) означення 2.1 справджуються рівності. Сім'я двовимірних випадкових векторів K_1 є підсім'єю сім'ї K.

Приклад 2.1. Гауссовий двовимірний випадковий вектор з нульовим середнім належить сім'ї K_1.

Лема 2.1. *Нехай* $\xi_1, \xi_2 \in L_4(\Omega)$ *– незалежні центровані випадкові величини такі, що*

$$E\xi_i^4 \le 3\left(E\xi_i^2\right)^2, \; i = 1, 2. \tag{2.1}$$

Тоді випадковий вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ *належить сім'ї* K.

Доведення. Використовуючи незалежність та центрованість випадкових величин ξ_1, ξ_2, маємо:

$$E(\xi_1 \pm \xi_2)^4 = E\xi_1^4 + 6E\xi_1^2 E\xi_2^2 + E\xi_2^4,$$

$$\left(E(\xi_1 \pm \xi_2)^2\right)^2 = \left(E\xi_1^2 + E\xi_2^2\right)^2 = \left(E\xi_1^2\right)^2 + 2E\xi_1^2 E\xi_2^2 + \left(E\xi_2^2\right)^2.$$

Тоді

$$E(\xi_1 \pm \xi_2)^4 \le 3\left(\left(E\xi_1^2\right)^2 + 2E\xi_1^2 E\xi_2^2 + \left(E\xi_2^2\right)^2\right) = 3\left(E(\xi_1 \pm \xi_2)^2\right)^2.$$

Отже, випадковий вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ належить сім'ї K. □

Зауваження 2.1. Нехай виконуються умови леми 1.6 та $E\xi_i^4 = 3\left(E\xi_i^2\right)^2$, $i = 1, 2$. Тоді випадковий вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ належить сім'ї K_1.

Приклад 2.2. Нехай випадкові величини ξ_1, ξ_2 – незалежні та рівномірно розподілені на відрізку $[-a, a]$. Тоді випадковий вектор $(\xi_1, \xi_2) \in K$. Дійсно, $E\xi_i = 0, i = 1, 2$;

$$E\xi_i^2 = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} x^2 dx = \frac{1}{a}\int_0^a x^2 dx = \frac{a^2}{3}, \; E\xi_i^4 = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} x^4 dx = \frac{1}{a}\int_0^a x^4 dx = \frac{a^4}{5};$$

$$E\xi_i^4 = \frac{a^4}{5} \le 3 \cdot \left(\frac{a^2}{3}\right)^2 = \frac{a^4}{3} = 3\left(E\xi_i^2\right)^2, \; i = 1, 2.$$

Отже, внаслідок леми 2.1, $(\xi_1, \xi_2) \in K$.

Лема 2.2. *Нехай* $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ *і* $\eta=(\eta_1,\eta_2)$ *– незалежні випадкові вектори, які належать до сім'ї* K. *Тоді випадковий вектор* $\xi+\eta$ *належить до сім'ї* K.

Доведення. Із незалежності та центрованості випадкових величин ξ та η випливає, що:

$$E(\xi\pm\eta)^4=E\big((\xi_1+\eta_1)\pm(\xi_2+\eta_2)\big)^4=E\big((\xi_1\pm\xi_2)+(\eta_1\pm\eta_2)\big)^4=$$

$$=E(\xi_1\pm\xi_2)^4+6E(\xi_1\pm\xi_2)^2E(\eta_1\pm\eta_2)^2+E(\eta_1\pm\eta_2)^4$$

та

$$\left(E(\xi\pm\eta)^2\right)^2=\left(E\Big((\xi_1+\eta_1)\pm(\xi_2+\eta_2)\Big)^2\right)^2=\left(E\Big((\xi_1\pm\xi_2)+(\eta_1\pm\eta_2)\Big)^2\right)^2=$$

$$=\left(E\Big(\xi_1\pm\xi_2\Big)^2\right)^2+2E\Big(\xi_1\pm\xi_2\Big)^2E\Big(\eta_1\pm\eta_2\Big)^2+\left(E\Big(\eta_1\pm\eta_2\Big)^2\right)^2.$$

Оскільки випадкові вектори ξ,η належать сім'ї K, то

$$E(\xi_1\pm\xi_2)^4\le 3\Big(E(\xi_1\pm\xi_2)^2\Big)^2,\ E(\eta_1\pm\eta_2)^4\le 3\Big(E(\eta_1\pm\eta_2)^2\Big)^2,$$

звідки

$$E\big((\xi_1+\eta_1)\pm(\xi_2+\eta_2)\big)^4\le 3\Big(E\big((\xi_1+\eta_1)\pm(\xi_2+\eta_2)\big)^2\Big)^2.$$

Отже, випадковий вектор $\xi+\eta$ належить сім'ї векторів K. □

Зауваження 2.2. Лема 2.2 залишається правильною при заміні сім'ї K на сім'ю K_1.

Лема 2.3. *Нехай* ξ *– випадкова величина така, що* $E\xi=0$, $E\xi^4\le 3\big(E\xi^2\big)^2$. *Тоді для довільних дійсних чисел* α,β *вектор* $(\alpha\xi,\beta\xi)$ *належить сім'ї* K.

Доведення. Маємо

$$E(\alpha\xi\pm\beta\xi)^4=(\alpha\pm\beta)^4E\xi^4\le 3(\alpha\pm\beta)^4\Big(E\xi^2\Big)^2=3\Big(E(\alpha\xi\pm\beta\xi)^2\Big)^2. \qquad \square$$

Зауваження 2.3. Нехай ξ – випадкова величина така, що $E\xi = 0$, $E\xi^4 = 3\left(E\xi^2\right)^2$. Тоді для довільних дійсних чисел α, β вектор $(\alpha\xi, \beta\xi)$ належить сім'ї K_1.

Наслідок 2.1. *Нехай* $\xi^{(1)},\ldots,\xi^{(n)} \in K$ *– незалежні випадкові вектори. Тоді для довільних* $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathrm{R}$ *випадковий вектор* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi^{(i)}$ *належить сім'ї* K.

Зауваження 2.4. Твердження наслідку 2.1 залишиться правильним при заміні сім'ї K на сім'ю K_1.

Приклад 2.3. Симетрична строго субгауссова випадкова величина [9] ξ задовольняє нерівність $E\xi^4 \le 3\left(E\xi^2\right)^2$. Дійсно, за означенням строго субгауссової випадкової величини, для довільного $\lambda \in \mathrm{R}$ виконується нерівність

$$Ee^{\lambda\xi} \le e^{\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}, \text{ де } \sigma^2 = E\xi^2.$$

З цієї нерівності випливає, що

$$E\left(1 + \lambda\xi + \frac{\lambda^2\xi^2}{2!} + \frac{\lambda^3\xi^3}{3!} + \frac{\lambda^4\xi^4}{4!} + \ldots\right) \le 1 + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} + \frac{\sigma^4\lambda^4}{4\cdot 2!} + \ldots,$$

$$1 + \frac{\lambda^2 E\xi^2}{2!} + \frac{\lambda^4 E\xi^4}{4!} + \ldots \le 1 + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} + \frac{\sigma^4\lambda^4}{8} + \ldots,$$

звідки

$$E\xi^4 \le 4!\frac{\sigma^4}{8} = 3\left(E\xi^2\right)^2. \qquad (2.2)$$

Нехай ξ_1, ξ_2 – симетричні, строго субгауссові незалежні випадкові величини. Внаслідок нерівності (2.2) та леми 2.1, вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ належить сім'ї K.

Наступний приклад показує, що компоненти випадкового вектора сім'ї K необов'язково мають експоненційні моменти.

Приклад 2.4. Нехай ξ – випадкова величина з щільністю

$$f(x)=\begin{cases} 0, & |x|<1, \\ \dfrac{s-1}{2|x|^s}, & |x|\geq 1, \end{cases} \tag{2.3}$$

де $s \geq 3+\sqrt{6}$. Випадкова величина ξ має нульове середнє та задовольняє нерівність

$$E\xi^4 \leq 3\left(E\xi^2\right)^2. \tag{2.4}$$

Справді,

$$E\xi^4 = \frac{s-1}{2}\cdot 2\int_1^\infty \frac{x^4}{x^s}dx = \frac{s-1}{s-5},\ E\xi^2 = \frac{s-1}{2}\cdot 2\int_1^\infty \frac{x^2}{x^s}dx = \frac{s-1}{s-3}.$$

Якщо $s \geq 3+\sqrt{6}$, то нерівність (2.4) виконується. Нехай ξ_1,ξ_2 –незалежні однаково розподілені випадкові величини із щільністю (2.3). Тоді, за лемою 2.1, випадковий вектор $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ належить сім'ї K.

2.2. Бакстерівські теореми для випадкових процесів класу K

Означення 2.3. *Випадковий процес $X(t), t\in[0,1]$ називається випадковим процесом класу K, якщо для довільних $0\leq s\leq t\leq u\leq v\leq 1$, випадковий вектор (ξ,η), де $\xi = X(t)-X(s)$, $\eta = X(v)-X(u)$, належить сім'ї K.*

Якщо випадковий вектор (ξ,η) належить сім'ї K_1, то випадковий процес $X(t)$ називається *процесом класу* K_1.

Приклад 2.5. Гауссовий випадковий процес з нульовим середнім є прикладом випадкового процесу класу K_1.

Лема 2.4. *Нехай випадковий вектор* (ξ,η) *належить сім'ї* K. *Тоді виконується наступна нерівність:*

$$E\left(\xi^2\eta^2\right)\le 2(E\xi\eta)^2+E\xi^2E\eta^2+\frac{1}{2}\left(\left(E\xi^2\right)^2-\frac{1}{3}E\xi^4\right)+\frac{1}{2}\left(\left(E\eta^2\right)^2-\frac{1}{3}E\eta^4\right). \tag{2.5}$$

Доведення. З означення 2.1 випливають такі нерівності:

$$E\left(\xi^4+4\xi\eta^3+6\xi^2\eta^2+4\xi^3\eta+\eta^4\right)\le 3\left(E\xi^2+2E\xi\eta+E\eta^2\right)^2,$$

$$E\left(\xi^4-4\xi\eta^3+6\xi^2\eta^2-4\xi^3\eta+\eta^4\right)\le 3\left(E\xi^2-2E\xi\eta+E\eta^2\right)^2.$$

Помножимо обидві нерівності на $\frac{1}{2}$ та додамо:

$$E\left(\xi^4+6\xi^2\eta^2+\eta^4\right)\le 3\left(\left(E\xi^2\right)^2+4\left(E\xi\eta\right)^2+\left(E\eta^2\right)^2+2E\xi^2E\eta^2\right).$$

Отримана нерівність еквівалентна нерівності (2.5). □

Нехай

$$\lambda=\left\{0=t_0^{(\lambda)},t_1^{(\lambda)},\ldots,t_{N(\lambda)}^{(\lambda)}=1\right\}$$

– розбиття відрізку [0,1], а $N(\lambda)$ – кількість проміжків цього розбиття. Покладемо

$$d(\lambda)=\max_{1\le i\le N(\lambda)}\left(t_i^{(\lambda)}-t_{i-1}^{(\lambda)}\right)$$

та

$$X_i^{(\lambda)}=X\left(t_i^{(\lambda)}\right)-X\left(t_{i-1}^{(\lambda)}\right),1\le i\le N(\lambda).$$

Теорема 2.1. *Нехай* $\{X(t), t\in[0,1]\}$ *– випадковий процес класу* K *та виконуються наступні умови:*

$$\sum_{i,j=1}^{N(\lambda)}\left(EX_i^{(\lambda)}X_j^{(\lambda)}\right)^2 \to 0,\, d(\lambda)\to 0\,,$$

$$N(\lambda)\sum_{i=1}^{N(\lambda)}\left(\left(E\left(X_i^{(\lambda)}\right)^2\right)^2-\frac{1}{3}E\left(X_i^{(\lambda)}\right)^4\right)\to 0,\, d(\lambda)\to 0\,.$$

Тоді

$$\sum_{i=1}^{N(\lambda)}\left(X_i^{(\lambda)}\right)^2-\sum_{i=1}^{N(\lambda)}E\left(X_i^{(\lambda)}\right)^2\to 0$$

у середньому квадратичному при $d(\lambda)\to 0$.

Доведення. Обчислимо

$$\Delta(\lambda):=E\left(\sum_{i=1}^{N(\lambda)}\left(X_i^{(\lambda)}\right)^2-\sum_{i=1}^{N(\lambda)}E\left(X_i^{(\lambda)}\right)^2\right)^2=$$

$$=E\sum_{i,j=1}^{N(\lambda)}\left(\left(X_i^{(\lambda)}\right)^2-E\left(X_i^{(\lambda)}\right)^2\right)\left(\left(X_j^{(\lambda)}\right)^2-E\left(X_j^{(\lambda)}\right)^2\right)=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{N(\lambda)}\left(E\left(X_i^{(\lambda)}\right)^2\left(X_j^{(\lambda)}\right)^2-E\left(X_i^{(\lambda)}\right)^2E\left(X_j^{(\lambda)}\right)^2\right).$$

Внаслідок леми 2.4,

$$\Delta(\lambda)\le\sum_{i,j=1}^{N(\lambda)}\left(2\left(EX_i^{(\lambda)}X_j^{(\lambda)}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\left(E\left(X_i^{(\lambda)}\right)^2\right)^2-\frac{1}{3}E\left(X_i^{(\lambda)}\right)^4\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\left(E\left(X_j^{(\lambda)}\right)^2\right)^2-\frac{1}{3}E\left(X_j^{(\lambda)}\right)^4\right)\right)=2\sum_{i,j=1}^{N(\lambda)}\left(EX_i^{(\lambda)}X_j^{(\lambda)}\right)^2+$$

$$+N(\lambda)\sum_{i=1}^{N(\lambda)}\left(\left(E\left(X_i^{(\lambda)}\right)^2\right)^2-\frac{1}{3}E\left(X_i^{(\lambda)}\right)^4\right).$$

Із умов теореми випливає, що $\Delta(\lambda) \to 0$. □

Теорема 2.2. *Нехай виконуються умови теореми 2.1 та існує така стала c, така що*

$$\sum_{i=1}^{N(\lambda)} E\left(X_i^{(\lambda)}\right)^2 \to c,\ d(\lambda) \to 0.$$

Тоді $\sum_{i=1}^{N(\lambda)} \left(X_i^{(\lambda)}\right)^2 \to c$ у середньому квадратичному при $d(\lambda) \to 0$.

Ця теорема випливає з теореми 2.1 та властивостей збіжності у середньому квадратичному.

Нехай $(m(n)) \subset \{1,2,3,\ldots\}$; $m(n) \to \infty, n \to \infty$ і

$$\lambda_n = \left\{0, \frac{1}{m(n)}, \ldots, \frac{m(n)-1}{m(n)}, 1\right\},\ n \ge 1,$$

– розбиття відрізку $[0,1]$,

$$X_i = X\left(\frac{i}{m(n)}\right) - X\left(\frac{i-1}{m(n)}\right), 1 \le i \le m(n).$$

Теорема 2.3. *Нехай* $\{X(t), t \in [0,1]\}$ *– випадковий процес з приростами класу* K *та* (α_n) *– послідовність додатних чисел,* $\alpha_n \to 0$. *Нехай виконуються наступні умови:*

1) $\sum_{i,j=1}^{m(n)} \left(EX_i X_j\right)^2 = O(\alpha_n), n \to \infty$,

2) $m(n)\sum_{i=1}^{m(n)} \left(\left(E(X_i)^2\right)^2 - \frac{1}{3}E(X_i)^4\right) = O(\alpha_n), n \to \infty$.

Тоді

$$S_n = \sum_{i=1}^{m(n)} (X_i)^2 - \sum_{i=1}^{m(n)} E(X_i)^2 \to 0$$

у середньому квадратичному при $n \to \infty$. *Якщо ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$, *то* $S_n \to 0$ *з ймовірністю одиниця при* $n \to \infty$.

Доведення. Внаслідок теореми 2.1, $S_n \to 0$ у середньому квадратичному при $n \to \infty$. З доведення теореми 2.1 випливає, що

$$\mathrm{Var} S_n = E\left(\sum_{i=1}^{m(n)} (X_i)^2 - \sum_{i=1}^{m(n)} E(X_i)^2 \right)^2 = O(\alpha_n), n \to \infty .$$

Внаслідок збіжності ряду із загальним членом α_n, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var} S_n$ збігається, тому $S_n - ES_n \to 0$ з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$. Зауважимо, що $ES_n = 0, n \geq 1$. □

Теорема 2.4. *Нехай* $\{X(t), t \in [0,1]\}$ *– випадковий процес з приростами класу* K *та* (α_n) *– послідовність додатних чисел,* $\alpha_n \to 0$. *Нехай виконуються наступні умови:*

1) $\sum_{i,j=1}^{m(n)} (EX_i X_j)^2 = O(\alpha_n), n \to \infty,$

2) $\forall s,t \in [0,1]$: $E\Big(X(t) - X(s) \Big)^4 = 3\left(E\Big(X(t) - X(s) \Big)^2 \right)^2.$

Тоді

$$S_n = \sum_{i=1}^{m(n)} (X_i)^2 - \sum_{i=1}^{m(n)} E(X_i)^2 \to 0$$

у середньому квадратичному при $n \to \infty$. *Якщо ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$, *то* $S_n \to 0$ *з ймовірністю одиниця при* $n \to \infty$.

Доведення. Із умови 2) теореми 2.4 випливає, що

$$E\left(X_i^2 \right)^2 = \frac{1}{3} EX_i^4, 1 \leq i \leq m(n).$$

Тоді умова 2) теореми 2.3 виконується. Отже, ця теорема є наслідком теореми 2.3. □

Теорема 2.5. *Нехай виконуються умови теореми 2.4 та існує стала с, така що*

$$\sum_{i=1}^{m(n)} E(X_i)^2 \to c, n \to \infty.$$

Тоді $\widetilde{S}_n = \sum_{i=1}^{m(n)} X_i^2 \to c$ *у середньому квадратичному при* $n \to \infty$. *Якщо ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$, *то* $\widetilde{S}_n \to c$ *з ймовірністю одиниця при* $n \to \infty$.

Доведення аналогічне доведенню теореми 2.3.

Приклад 2.6. Нехай $\{\xi_n, n \ge 0\}$ – послідовність незалежних та однаково розподілених випадкових величин з щільністю (2.2) і $s = 3 + \sqrt{6}$. У цьому випадку

$$E\xi_n^4 = 3\left(E\xi_n^2\right)^2, n \ge 0.$$

Функції $\varphi_n(t) = \sqrt{2}\sin(n+1/2)\pi t, n = 0,1,2,\ldots$, є власними функціями ядра $r(t,s) = \min(t,s), t,s \in [0,1]$ з власними значеннями

$$\lambda_n = \frac{1}{(n+1/2)^2 \pi^2}, \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

Нехай

$$X(t) = \sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{6}} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \frac{\sin(n+1/2)\pi\, t}{(n+1/2)\pi}, t \in [0,1]. \qquad (2.6)$$

Для всіх $t \in [0,1]$ цей ряд збігається у середньому порядку 4.

Із наслідку 2.1 та зауваження 2.4 випливає, що випадковий процес

$$X(t) = \sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{6}} \sum_{k=0}^{n} \xi_k \frac{\sin(k+1/2)\pi\, t}{(k+1/2)\pi}, t \in [0,1]$$

належить класу K_1. Після граничного переходу у відповідних нерівностях отримаємо, що й випадковий процес (2.6) належить класу K_1. Перевіримо виконання умов теореми 2.4.

Випадковий процес (2.6) має нульове математичне сподівання та коваріаційну функцію

$$r(t,s) = EX(t)X(s) = \min(t,s),\, t,s \in [0,1].$$

Таким чином, для всіх $i, j \in \{1,2,\ldots,m(n)\}$

$$EX_i^2 = E\left(X\left(\frac{i}{m(n)}\right) - X\left(\frac{i-1}{m(n)}\right)\right)^2 = \frac{1}{m(n)},$$

$$EX_iX_j = E\left(X\left(\frac{i}{m(n)}\right) - X\left(\frac{i-1}{m(n)}\right)\right)\left(X\left(\frac{j}{m(n)}\right) - X\left(\frac{j-1}{m(n)}\right)\right) = 0,\, i \neq j.$$

Отже,

$$\sum_{i,j=1}^{m(n)} \left(EX_iX_j\right)^2 = \frac{1}{m(n)},\, n \geq 1.$$

Для $t,s \in [0,1]$ покладемо $\alpha_n = \sqrt{3-\sqrt{6}}\left(\varphi_n(t) - \varphi_n(s)\right), n \geq 0$. Оскільки, $E\xi_n^4 = 3\left(E\xi_n^2\right)^2, n \geq 0$, то

$$E\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\xi_n\right)^4 = 3\left(E\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\xi_n\right)^2\right)^2,$$

звідки отримаємо

$$E\left(X(t) - X(s)\right)^4 = 3\left(E\left(X(t) - X(s)\right)^2\right)^2.$$

Далі, $\sum_{i=1}^{m(n)} EX_i^2 = 1, n \geq 1$, а з теореми 2.5 випливає, що $\tilde{S}_n = \sum_{i=1}^{m(n)} X_i^2 \to 1$ у середньому квадратичному при $n \to \infty$. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m(n)}$ – збігається, то $\tilde{S}_n \to 1$ з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$.

2.3. Одна умова сингулярності мір для випадкових процесів класу K

Нехай $\{X(t), t \in [0,1]\}$ та $\{Y(t), t \in [0,1]\}$ – випадкові процеси класу K, Ξ – деякий простір дійснозначних функцій, визначених на відрізку [0,1] з σ-алгеброю циліндричних множин $\mathfrak{I}$. Реалізації випадкових процесів X та Y належать до цього простору з ймовірністю одиниця. Нехай m_X та m_Y – міри на σ-алгебрі $\mathfrak{I}$, що породжені випадковими процесами X та Y відповідно.

Теорема 2.6. *Нехай $\{X(t), t \in [0,1]\}$ та $\{Y(t), t \in [0,1]\}$– випадкові процеси з приростами класу K задовольняють умови теореми 2.5. Крім того, нехай*

$$\sum_{i=1}^{m(n)} E(X_i)^2 \to c_1, \sum_{i=1}^{m(n)} E(Y_i)^2 \to c_2, n \to \infty,$$

$c_1 \neq c_2$ та ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ – збіжний. Тоді міри m_X та m_Y – сингулярні.

Доведення. Внаслідок теореми 2.5, маємо

$$\sum_{i=1}^{m(n)} E(X_i)^2 \to c_1, \sum_{i=1}^{m(n)} E(Y_i)^2 \to c_2, n \to \infty$$

з ймовірністю одиниця. Покладемо для $i = 1, 2$

$$A_i = \left\{ Z \in \Xi : \sum_{i=1}^{m(n)} \left(Z\left(\frac{i}{m(n)}\right) - Z\left(\frac{i-1}{m(n)}\right) \right)^2 \to c_i, n \to \infty \right\}.$$

Оскільки $c_1 \neq c_2$, то $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Але $m_X(A_1)=1, m_Y(A_2)=1$. Це доводить сингулярність мір m_X та m_Y. □

2.4. Теореми бакстерівського типу для випадкових полів класу K

Означення 2.4. *Нехай* $X(t), t \in [0,1]^m$ *– випадкове поле,* $\Pi = [t_1, t_1 + h_1] \times \times \ldots \times [t_m, t_m + h_m] \subset [0,1]^m$, $t = (t_1, \ldots, t_m)$, $h = (h_1, \ldots, h_m)$, $h_i > 0$, $1 \leq i \leq m$. *Приростом випадкового поля* $X(t), t \in [0,1]^m$ *на паралелепіпеді* Π *називається випадкова величина*

$$X_\Pi = \sum_{i(1),\ldots,i(m)=0}^{1} (-1)^{i(1)+\ldots+i(m)} X\left(t_1 + i(1)h_1, \ldots, t_m + i(m)h_m\right).$$

Означення 2.5. *Випадкове поле* $X(t), t \in [0,1]^m$ *з нульовим середнім значенням називається випадковим полем класу* K *(відповідно* K_1*), якщо для довільних паралелепіпедів* $P, Q \in [0,1]^m$ *без спільних внутрішніх точок, випадковий вектор* (X_P, X_Q) *належить сім'ї векторів* K *(відповідно* K_1*).*

Приклад 2.7. Нехай $\varphi_i : [0,1]^m \to [0,1], i \geq 1$ – послідовність борелівських функцій та $(\xi_i), i \geq 1$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, що

1) $E\xi_i = 0, i \geq 1$;

2) $E\xi_i^4 \leq 3\left(E\xi_i^2\right)^2, i \geq 1$.

Припустимо, що для всіх $t \in [0,1]^m$ ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \varphi_i(t)$ збіжний у просторі $L_4(\Omega)$. Тоді випадкове поле

$$X(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\varphi_i(t),\ t\in[0,1]^m \tag{2.7}$$

є випадковим полем з приростами класу K. Справді, для приростів $\xi=X_P, \eta=X_Q$, де паралелепіпеди P, Q не мають спільних внутрішніх точок, випадкова величина $\xi+\eta$ є рядом виду

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i \text{, де } \alpha_i=(\varphi_i)_P+(\varphi_i)_Q, i\geq 1,$$

який збігається в середньому порядку 4. Для довільного натурального n із умови незалежності випадкових величин $\xi_i, i\geq 1$ та наслідку 2.1 маємо

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i\right)^4\leq 3\left(E\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i\right)^2\right)^2.$$

Перейдемо в цій нерівності до границі при $n\to\infty$ і отримаємо:

$$E\left(\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i\right)^4\leq 3\left(E\left(\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i\right)^2\right)^2,$$

звідки випливає, що випадкове поле (2.7) є полем класу K. Якщо випадкові величини $\xi_i, i\geq 1$ задовольняють умову $E\xi_i^4=3\left(E\xi_i^2\right)^2, i\geq 1$, тоді поле (2.7) є випадковим полем класу K_1.

Нехай $X(t), t\in[0,1]^m$ – випадкове поле, $a_n\subset \mathrm{N}$ – зростаюча послідовність, $\lambda_n=\{Q\}$ – розбиття $[0,1]^m$ на $(a_n)^m$ конгруентних паралелепіпедів, $n\geq 1$,

$$W_n=\sum_{Q\in\lambda_n}X_Q^2, n\geq 1$$

– послідовність бакстерівських сум.

Теорема 2.7. *Нехай* $X(t), t \in [0,1]^m$ *– центроване випадкове поле з приростами класу* K *та виконуються наступні умови:*

1) $V_n^{(1)} = \sum_{P,Q \in \lambda_n} (EX_P X_Q)^2 \to 0, n \to \infty$*;*

2) $V_n^{(2)} = a_n^m \sum_{Q \in \lambda_n} \left(\left(EX_Q^2 \right)^2 - \frac{1}{3} EX_Q^4 \right) \to 0, n \to \infty$.

Тоді $W_n - EW_n \to 0$ *в середньому квадратичному при* $n \to \infty$.

Доведення. Обчислимо дисперсію випадкової величини W_n:

$$\operatorname{Var} W_n = E\left(\sum_{Q \in \lambda_n} \left(X_Q^2 - EX_Q^2 \right) \right)^2 = E\left(\left(\sum_{Q \in \lambda_n} \left(X_Q^2 - EX_Q^2 \right) \right) \right.$$

$$\left. \times \left(\sum_{P \in \lambda_n} \left(X_P^2 - EX_P^2 \right) \right) \right) = \sum_{P,Q \in \lambda_n} \left(E\left(X_P^2 X_Q^2 \right) - EX_P^2 EX_Q^2 \right).$$

Внаслідок леми 2.4 та умов теореми одержимо, що

$$\operatorname{Var} W_n \le \sum_{P,Q \in \lambda_n} \left(2(EX_P X_Q)^2 + \frac{1}{2} \left(\left(E(X_P)^2 \right)^2 - \frac{1}{3} E(X_P)^4 \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left(\left(E(X_Q)^2 \right)^2 - \frac{1}{3} E(X_Q)^4 \right) \right) \to 0, n \to \infty.$$

Звідки випливає збіжність $W_n - EW_n \to 0$ у середньому квадратичному при $n \to \infty$. □

Теорема 2.8. *Нехай виконуються умови теореми 2.7 та ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(V_n^{(1)} + V_n^{(2)} \right)$ *– збігається. Тоді* $W_n - EW_n \to 0$ *з ймовірністю одиниця при* $n \to \infty$.

*Доведення***.** З доведення теореми 2.7 одержимо, що $\mathrm{Var}\,W_n \le 2V_n^{(1)} + V_n^{(2)}$, $n \ge 1$. Тому із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(V_n^{(1)} + V_n^{(2)}\right)$ випливає, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Var}\,W_n$ збіжний. Тоді $W_n - EW_n \to 0$ [41, с. 24] з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$.□

Теорема 2.9. *Нехай виконуються умови теореми 2.7 та* $EW_n \to c, c \in \mathrm{R}$ *при* $n \to \infty$. *Тоді* $S_n \to c$ *з ймовірністю одиниця при* $n \to \infty$.

РОЗДІЛ 3. ФУНКЦІОНАЛЬНА ЦЕНТРАЛЬНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА ДЛЯ БАКСТЕРІВСЬКИХ СУМ ГАУССОВИХ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ

У цьому розділі розглядаються послідовності східчастих випадкових функцій, побудованих за допомогою бакстерівських сум гауссових випадкових полів. Знайдені умови слабкої збіжності у просторі Скорохода $D\left([0,\,1]^d\right)$ цієї послідовності випадкових функцій до багатопараметричного броунівського руху – поля Ченцова. Доведено функціональну центральну граничну теорему для послідовності випадкових полів, побудованих за допомогою нормованих сум нелінійних функцій для послідовності мультиіндексних серій випадкових величин, які у кожній серії мають сумісний гауссовий розподіл з нульовим математичним сподіванням. Доводиться слабка збіжність скінченновимірних розподілів цієї послідовності випадкових полів до скінченновимірних розподілів випадкового поля Ченцова. Також встановлюється функціональна гранична теорема у просторі Скорохода $D\left([0,\,1]^d\right)$ для послідовності східчастих випадкових процесів, побудованих за допомогою нелінійних функцій та a-приростів випадкового процесу дробового броунівського руху. Доводиться центральна гранична теорему для послідовності сум, побудованих за допомогою нелінійної функції та A-приростів гауссового поля для матриці A.

3.1. Слабка збіжність скінченновимірних розподілів

Нехай

$$\left\{X_{ni}\,:\; i=\left(i_1,i_2,\ldots,i_d\right),\;\; 1\le i_k \le n,\, 1\le k \le d\right\},\; n\ge 1$$

– послідовність серій випадкових величин, які у кожній серії мають сумісний гауссовий розподіл з нульовим математичним сподіванням та $2d$- вимірною кореляційною матрицею

$$B_n = \left\{ r_n(i,\ j) = E(X_{ni} X_{nj}) : i,\ j \in A(n) \right\},\ r_n(i,i) = 1,\ i \in A(n), n \ge 1,$$

де $A(n) = \{ i \mid i = (i_1, i_2, ..., i_d),\ 1 \le i_k \le n,\ 1 \le k \le d \}$.

Нехай, далі, функція $G \in H = L_2\left(R,\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{x^2}{2} \right\} dx \right)$ має ранг Ерміта $m \ge 1$. Для точки $t = (t_1, t_2, ..., t_d) \in Q = [0,1]^d$ покладемо

$$A(n,t) = \{ i \mid i = (i_1, i_2, ..., i_d),\ 1 \le i_k \le [nt_k],\ 1 \le k \le d \},$$

де $[x]$ – ціла частина дійсного числа x – найбільше ціле число, що не перевищує x;

$$d_n^2 = \mathrm{Var} \sum_{i \in A(n)} G(X_{ni});\ S_n(t) = \sum_{i \in A(n,t)} G(X_{ni}),\ \ t \in Q.$$

В останній формулі сума по порожній множині індексів дорівнює нулеві.

У просторі Скорохода $D([0,1]^d)$ (означення і властивості цього простору при $d \ge 2$ наведені, наприклад, у статті [65]) розглянемо послідовність випадкових функцій

$$V_n(t) = \frac{1}{d_n} S_n(t),\ t \in Q,\ \ n \ge 1.$$

Нехай $W(t),\ t \in Q$ – гауссове випадкове поле Ченцова (приклад 1.9), W – міра, породжена цим полем у просторі Скорохода $D([0,1]^d)$. Виявляється, що за деяких умов $V_n \xrightarrow{D} W$, тобто послідовність розподілів випадкових функцій $\{V_n(t),\ t \in Q,\ \ n \ge 1\}$ слабко збігається у просторі Скорохода $D([0,1]^d)$ до міри W у цьому просторі.

Нехай A – d-вимірна матриця з прикладу 1.1, $q_1, q_2, ..., q_k \subset Q$ – довільний набір d-вимірних паралелепіпедів без спільних внутрішніх точок. Зазначимо, що прирости поля Ченцова $W(q_1, A), W(q_2, A), \ldots, W(q_k, A)$ є незалежними випадковими гауссовими величинами з нульовими математичними сподіваннями та дисперсіями $mes_d(q_1), mes_d(q_2),\ldots, mes_d(q_k)$, де mes_d – лебегова міра у просторі R^d.

У наступній теоремі наведені умови слабкої збіжності скінченновимірних розподілів випадкових функцій $\{V_n(t),\ t\in Q,\ n\geq 1\}$ до скінченновимірних розподілів поля Ченцова.

Теорема 3.1. *Нехай функція* G *належить простору Гільберта* $L_2\left(R,\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dx\right)$, *має ранг Ерміта* $m\geq 2$ *і виконуються наступні умови:*

1) $\sup\limits_{v\in A(n)}\sum\limits_{j\in A(n)}\left|r_n^m(v,\ j)\right| = O(1),\quad n\to\infty;$

2) для кожного $k\in\{1,\ \ldots,\ m-1\}$

$$\sup_{v\in A(n)}\sum_{j\in A(n)}\left|r_n^k(v,\ j)\right| = o\left(n^{d(m-k)/m}\right), n\to\infty;$$

3) для довільних паралелепіпедів $B_1,\ B_2\subset Q$ *без спільних внутрішніх точок, для довільних* $i,k\in\{1,\ 2\}$ *та натурального числа* $l\geq m$ *існує скінченна границя*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^d}\sum_{u\in b(i)}\sum_{v\in B(k)}r_n^l(u,v) = mes_d(B_i)\sigma_l\delta_{ki},$$

де $B(i)=\left\{j\in Z^d \mid \frac{j}{n}\in B_i\right\}$, $i=1,\ 2,\ \sigma_l\in R,\ \delta_{ki}$ *– символ Кронекера, рівний одиниці при* $k=i$ *та нулю при* $k\neq i$;

4) $\inf\limits_{N\geq m}\sum\limits_{l=m}^{N}\frac{J^2(l)}{l!}\sigma_l > 0.$

Тоді існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^d}d_n^2 = \sum_{l=m}^{\infty}\frac{J^2(l)}{l!}\sigma_l \tag{3.1}$$

і скінченновимірні розподіли випадкових полів $\{V_n(t),\ t\in Q,\ n\geq 1\}$ *слабко збігаються до скінченновимірних розподілів поля Ченцова* $\{W(t),\ t\in Q\}$.

Доведення. Спочатку доведемо твердження теореми для функції

$$G_N(x)=\sum_{l=m}^{N}\frac{J(l)}{l!}H_l(x) \tag{3.2}$$

– проекції функції G на підпростір, породжений многочленами Ерміта $H_m,\ldots,H_N$. Покладемо

$$d_{N,n}^2=\mathrm{Var}\sum_{i\in A(n)}G_N(X_{ni}),\ n\geq 1; \tag{3.3}$$

$$S_{N,n}(t)=\sum_{i\in A(n,t)}G_N(X_{ni}),\ t\in Q,\ n\geq 1; \tag{3.4}$$

$$V_{N,n}(t)=\frac{1}{d_{N,n}}S_{N,n}(t), t\in Q,\ n\geq 1. \tag{3.5}$$

Для доведення співвідношення (3.1) застосуємо наступну формулу: для випадкового гауссового вектора (X,Y) з нульовим математичним сподіванням, $EX^2=EY^2=1,\ E(XY)=r$

$$E(H_k(X)H_l(Y))=\delta_{kl}r^l l!, \tag{3.6}$$

де δ_{kl} – символ Кронекера, $k\geq 1, l\geq 1$.

З формули (3.6) випливає, що

$$d_{N,n}^2=\mathrm{Var}\sum_{j\in A(n)}G_N(X_{nj})=\sum_{i\in A(n)}\sum_{j\in A(n)}E\left(G_N(X_{ni})G_N(X_{nj})\right)=$$

$$=\sum_{l=m}^{N}\frac{J^2(l)}{l!}\sum_{i,j\in A(n)}r_n^l(i,j).$$

Внаслідок умови 3), існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^d}d_{N,n}^2=\sum_{l=m}^{N}\frac{J^2(l)}{l!}\sigma_l. \tag{3.7}$$

Лема 3.1. *Нехай* $\{a_{Nn} : N \ge 1, n \ge 1\}, \{b_N : N \ge 1\}, \{c_n : n \ge 1\}$ *–послідовності дійсних чисел,* a *– дійсне число і виконуються наступні умови:*

1) $\forall N \ge 1:\ a_{Nn} \to b_N,\quad n \to \infty$*;*

2) $\sup_{n\ge1} |a_{Nn} - c_n| \to 0,\ N \to \infty$*;*

3) $b_N \to a$ *при* $N \to \infty$*.*

Тоді $c_n \to a$ *при* $n \to \infty$*.*

Доведення леми. З умови 3) леми випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists M_1 \ge 1\ \ \forall N \ge M_1\ :\ |b_N - a| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Внаслідок умови 2) леми,

$$\exists M_2 \ge 1\ \ \forall N \ge M_2\ \ \forall n \ge 1\ :\ |a_{Nn} - c_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Покладемо $M = \max\{M_1, M_2\}$ і використаємо умову 1) леми:

$$\exists n_0 \ge 1\ \ \forall n \ge n_0\ :\ |a_{Mn} - b_M| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Нарешті, $\forall n \ge n_0$ маємо:

$$|c_n - a| \le |c_n - a_{Mn}| + |a_{Mn} - b_M| + |b_M - a| < \varepsilon.$$

Тому $\lim_{n\to\infty} c_n = a$. □

Застосуємо лему 3.1 для

$$a_{Nn} = \frac{1}{n^d} d_{Nn}^2\ ;\ b_N = \sum_{l=m}^{N} \frac{J^2(l)}{l!}\sigma_l\ ;\ c_n = \frac{1}{n^d} d_n^2 = \frac{1}{n^d} \sum_{l=m}^{\infty} \sum_{i,j \in A(n)} r_n^l(i,j).$$

З умови 1) теореми випливає обмеженість послідовності

$$\frac{1}{n^d} \sum_{i,j \in A(n)} \left| r_n^m(i,j) \right|,\ n \ge 1.$$

Оскільки для довільного натурального числа $l \ge m$

$$\frac{1}{n^d}\sum_{i,j\in A(n)}\left|r_n^l(i,j)\right| \le \frac{1}{n^d}\sum_{i,j\in A(n)}\left|r_n^m(i,j)\right|, n\ge 1,$$

то, внаслідок умови 1) теореми,

$$\sup_{l,n\ge 1}\frac{1}{n^d}\sum_{i,j\in A(n)}\left|r_n^l(i,j)\right| < +\infty. \qquad (3.8)$$

Отже, $\sup_{l\ge 1}|\sigma_l| < +\infty$ і ряд $\sum_{l=m}^{\infty}\frac{J^2}{l!}\sigma_l$ збіжний. Умови 1) і 3) леми 3.1, очевидно, виконані. Умова 2) цієї леми також виконується, оскільки

$$\sup_{n\ge 1}\left|\sum_{l=m}^{N}\frac{J^2(l)}{l!}\frac{1}{n^d}\sum_{i,j\in A(n)} r_n^l(i,j) - \sum_{l=m}^{N}\frac{J^2(l)}{l!}\frac{1}{n^d}\sum_{i,j\in A(n)} r_n^l(i,j)\right| =$$

$$= \sup_{n\ge 1}\left|\sum_{l=N+1}^{\infty}\frac{J^2(l)}{l!}\frac{1}{n^d}\sum_{i,j\in A(n)} r_n^l(i,j)\right| \to 0 \text{ при } N\to\infty$$

внаслідок збіжності ряду $\sum_{l=1}^{\infty}\frac{J^2(l)}{l!}$ та співвідношення (3.8). Отже, рівність (3.1) справджується.

Для доведення слабкої збіжності скінченновимірних розподілів послідовності випадкових функцій $\left\{V_{N,n}(t), t\in Q : n\ge 1\right\}$ до відповідних скінченновимірних розподілів випадкового поля Ченцова $\{W(t), t\in Q\}$ застосуємо прийом Крамера-Уолда [5, с. 75] і встановимо збіжність моментів. З леми 1.4 випливає, що замість лінійної комбінації значень випадкових полів $V_{N,n}(\cdot)$ у точках d-вимірного паралелепіпеда Q можна розглянути лінійну комбінацію A-приростів цих полів на d-вимірних паралелепіпедах, підмножинах паралелепіпеда Q, без спільних внутрішніх точок, де матриця A визначена рівністю (1.4).

Нехай $\{B_1, B_2, ..., B_\nu\}$ – довільний набір d-вимірних паралелепіпедів без спільних внутрішніх точок, що є підмножинами паралелепіпеда Q, $\{b_1, b_2, ..., b_\nu\} \subset R$. Покладемо

$$Z_{N,n} = \sum_{i=1}^{\nu} b_i V_{N,n}(B_i, A), \tag{3.9}$$

$$Z = \sum_{i=1}^{\nu} b_i W(B_i, A). \tag{3.10}$$

Для незалежних нормально розподілених випадкових величин $Y_1, Y_2, ..., Y_\nu$ з нульовими математичними сподіваннями та одиничними дисперсіями

$$E(b_1 Y_1 + b_2 Y_2 + ... + b_\nu Y_\nu)^p = 0,$$

якщо p – непарне натуральне число і

$$E(b_1 Y_1 + b_2 Y_2 + ... + b_\nu Y_\nu)^p = (p-1)!!\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_\nu^2\right)^{p/2}$$

для парного натурального числа p. Тому $EZ^p = 0$ для непарних натуральних p та

$$EZ^p = (p-1)!!\left(b_1^2 mes_d(B_1) + b_2^2 mes_d(B_2) + ... + b_\nu^2 mes_d(B_\nu)\right)^{p/2}$$

для парних натуральних p.

Покажемо, що

$$EZ_{N,n}^p \to EZ^p, \ n \to \infty \tag{3.11}$$

для всіх натуральних p. Маємо:

$$EZ_{N,n}^p = \frac{1}{d_{N,n}^p} E(b_1 S_{N,n}(B_1, A) + b_2 S_{N,n}(B_2, A) + ... + b_\nu S_{N,n}(B_\nu, A))^p =$$

$$= \frac{1}{d_{N,n}^p} \sum_{i(1)=1}^{\nu} ... \sum_{i(p)=1}^{\nu} b_{i(1)} b_{i(2)} ... b_{i(p)} E\left(S_{N,n}(B_{i(1)}, A) ... S_{N,n}(B_{i(p)}, A)\right).$$

Зафіксуємо мультиіндекс $i=(i(1),i(2),\dots,i(p)),\ 1\le i(k)\le\nu,\ k=1,2,\dots,p$ і розглянемо математичне сподівання

$$E\left(S_{N,n}\left(B_{i(1)},A\right)\dots S_{N,n}\left(B_{i(p)},A\right)\right)=$$

$$=\sum_{l(1)=m}^{N}\dots\sum_{l(p)=m}^{N}\frac{J(l(1))}{l(1)!}\dots\frac{J(l(p))}{l(p)!}\sum_{j(1)\in B(i(1))}\dots\sum_{j(p)\in B(i(p))}E\left(H_{l(1)}\left(X_{nj(1)}\right)\dots H_{l(p)}\left(X_{nj(p)}\right)\right),$$

де $B(i)=\left\{j=(j(1),j(2),\dots,j(d))\,\middle|\,\frac{j}{n}\in B_i\right\},1\le i\le\nu$.

Для математичного сподівання добутку многочленів Ерміта від гауссових випадкових величин застосуємо діаграмну формулу [67, 115].

Означення 3.1. *Діаграмою порядку* $l=(l(1),\dots,l(p))$ *називається неорієнтований граф* D *з* $l(1)+l(2)+\dots+l(p)$ *вершинами, якщо:*

1) множина V *вершин графа* D *має вигляд*

$$V=\bigcup_{j=1}^{p}L_j,$$

де $L_j=\{(j,l)|1\le l\le l(j)\},1\le j\le p$ (L_j *– порожня множина при* $l(j)=0$)*;*

2) кожна вершина має порядок, що дорівнює 1;

3) ребра з'єднують тільки вершини різних рівнів, тобто для довільного ребра $((j(s),l(s)),(j(t),l(t)))$ *графа* D *виконується нерівність* $j(s)\ne j(t)$.

Символом $Gr(l(1),l(2),\dots,l(p))$ позначимо множину всіх діаграм порядку $(l(1),l(2),\dots,l(p))$, а через $D(E)$ – множину всіх ребер діаграми D.

Лема 3.2 (діаграмна формула). *Нехай* $(X_1,X_2,\dots,X_p)$ *– гауссовий вектор з нульовим математичним сподіванням,* $EX_j^2=1,\ E(X_jX_k)=r(j,k),\quad j,k=1,\dots,p$. *Тоді для многочленів Ерміта* $H_{l(1)},\dots,H_{l(p)}$ *має місце формула*

$$E\left(H_{l(1)}(X_1)\dots H_{l(p)}(X_p)\right)=\sum_{D\in Gr(l(1),\dots l(p))}\prod_{w\in D(E)}r(di(w),ds(w)),\qquad(3.12)$$

де $di(w)$, $ds(w)$ – номери рівнів, на яких знаходяться вершини, що з'єднуються ребром $w \in D(E)$, $di(w) < ds(w)$.

Доведення цього твердження можна знайти, наприклад у статті [115], лема 3.2.

Діаграма $D \in Gr(l(1),\dots,l(p))$ називається регулярною, якщо множину рівнів цієї діаграми можна розбити на пари таким чином, щоб ребра діаграми D не з'єднували вершини рівнів різних пар. Діаграма $D \in Gr(l(1),\dots,l(p))$, яка не є регулярною, називається нерегулярною.

Продовжимо доведення співвідношення (3.11). Маємо:

$$EZ_{N,n}^{p} = \frac{1}{d_{N,n}^{p}} \sum_{i(1)=1}^{\nu} \dots \sum_{i(p)=1}^{\nu} b_{i(1)} \dots b_{i(p)} \sum_{l(1)=m}^{N} \dots \sum_{l(p)=m}^{N} \frac{J(l(1))}{l(1)!} \dots \frac{J(l(p))}{l(p)!} \times$$

$$\times \sum_{j(1) \in B(i(1))} \dots \sum_{j(p) \in B(i(p))} \sum_{D \in Gr(l(1),\dots,l(p))} \prod_{w \in D(E)} r_n\big(j(di(w)), j(ds(w))\big).$$

Для фіксованих значень мультиіндексів $i = (i(1),\dots i(p))$, $l = (l(1),\dots,l(p))$ та фіксованої діаграми $D \in Gr(l(1),\dots,l(p))$ розглянемо вираз

$$T_n(i,l,D) = \frac{1}{d_{N,n}^{p}} \sum_{j(1) \in B(i(1))} \dots \sum_{j(p) \in B(i(p))} \prod_{w \in D(E)} r_n\big(j(di(w)), j(ds(w))\big). \quad (3.13)$$

Лема 3.3. *Нехай виконуються умови теореми 3.1 і* $D \in Gr(l(1),\dots,l(p))$ *– нерегулярна діаграма. Тоді для всіх мультиіндексів*

$$i = (i(1),\dots,i(p)),\ 1 \le i(s) \le \nu,\ 1 \le s \le p\ \ T_n(i,l,D) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Доведення цієї леми проведемо аналогічно доведенню твердження про границю для нерегулярних діаграм у статті [67], с. 435, 436. У статті [67] обґрунтовано, що для доведення леми достатньо розглянути випадок нерегулярної діаграми $D \in Gr(l(1),\dots,l(p))$ з упорядкованим набором рівнів: $l(1) \le l(2) \le \dots \le l(p)$. Для зручності вважатимемо, що рівень $s+1$ знаходиться над рівнем s, $s = 1,2,\dots,p-1$. Для діаграми $D \in Gr(l(1),\dots,l(p))$ визначимо функцію

$$K_D:\{1,2,\dots,p\}\to\{0,1,2,\dots\}$$

наступним чином: $K_D(j)$ – число ребер діаграми D, таких що $di(w)=j$, тобто кількість усіх тих ребер діаграми D, нижня вершина яких належить рівню j. Для фіксованих мультиіндексів $i=(i(1),..,i(p)),\ m\le l(s)\le N$ та $l=(l(1),l(2),\dots,l(p)),\ m\le l(s)\le N,\ s=1,2,\dots,p$ фіксованої діаграми $D\in Gr(l(1),\dots,l(p))$ виконується нерівність

$$|T_n(i,l,D)|\le\frac{1}{d_{N,n}^{p}}\sum_{j(1)\in D(i(1))}\dots\sum_{j(p)\in B(i(p))}\prod_{s=1}^{p}\prod_{w\in D(E),di(w)=s}|r_n(j(s),j(ds(w)))|,$$

де добуток по порожній множині приймається рівним одиниці. Для рівня s, такого що $K_D(s)\ge 1$, має місце нерівність

$$\prod_{w\in D(E),di(w)=s}|r_n(j(s),j(ds(w)))|\le\frac{1}{K_D(s)}\sum_{w\in D(E),di(w)=s}|r_n(j(s),j(ds(w)))|^{K_D(s)}.$$

Нехай $A=\{s\in\{1,2,\dots p\}|K_D(s)>0\},\ x=p-card(A)$. Тоді

$$T_n(i,l,D)=O\left(n^{-pd/2}\sum_{j(1)\in A(n)}\dots\sum_{j(p)\in A(n)}\prod_{s\in A}\sup_{v\in A(n)}\sum_{u\in A(n)}|r_n(u,v)|^{K_D(s)}n^{xd}\right),\ n\to\infty.$$

Для оцінки величини виразу $\sum_{u\in A(n)}|r_n(u,v)|^{K_D(s)}$ при $0<K_D(s)<l(s)$ застосуємо нерівність Гельдера:

$$\sum_{u\in A(n)}|r_n(u,v)|^{K_D(s)}\le\left(n^d\right)^{(l(s)-K_D(s))/l(s)}\left(\sum_{u\in A(n)}|r_n(u,v)|^{l(s)}\right)^{K_D(s)/l(s)}.$$

Зауважимо, що остання нерівність залишається правильною і при $K_D(s)=l(s)$. Покладемо $g(s)=\dfrac{K_D(s)}{l(s)},s=1,2,\dots,p.$ Оскільки $l(s)\ge m,\ \ s=1,2,\dots,p$, то, внаслідок умови 1) теореми, виконується відношення підпорядкованості

$$\sup_{v\in A(n)}\sum_{u\in A(n)}|r_n(u,v)|^{l(s)}=O(1),\ n\to\infty.$$

Тому

$$T_n(i,l,D)=O\left(\exp\left(d\left(\frac{p}{2}-\sum_{s=1}^{p}\frac{K_D(s)}{l(s)}\right)\log n\right)\right),\ n\to\infty.$$

Якщо ж для деякого $s\in\{1,2,\ldots,p\}$, $0<K_D(s)<l(s)$, то має місце відношення нехтування:

$$T_n(i,l,D)=o\left(\exp\left(d\left(\frac{p}{2}-\sum_{s=1}^{p}\frac{K_D(s)}{l(s)}\right)\log n\right)\right),\ n\to\infty.$$

Дійсно, якщо $m\le K_D(s)<l(s)$, то

$$\sup_{v\in A(n)}\sum_{u\in A(n)}|r_n(u,v)|^{K_D(s)}=O(1)=o\left(\exp\left(d\left(1-\frac{K_D(s)}{l(s)}\right)\log n\right)\right),\ n\to\infty.$$

При $1\le K_D(s)<m$, внаслідок умови 2) теореми,

$$\sup_{v\in A(n)}\sum_{u\in A(n)}|r_n(u,v)|^{K_D(s)}=o\left(\exp\left(d\left(1-\frac{K_D(s)}{m}\right)\log n\right)\right)=$$

$$=o\left(\exp\left(d\left(1-\frac{K_D(s)}{l(s)}\right)\log n\right)\right),\ n\to\infty.$$

Таким чином, виконується співвідношення (2.19) статті [67]. Далі повторюються міркування, викладені на с. 436 роботи [67]. □

Продовжимо доведення теореми. Внаслідок леми 3.3, ненульовий внесок до границі $\lim\limits_{n\to\infty}EZ_{N,n}^{p}$ можуть зробити лише регулярні діаграми. Для непарного числа рівнів p всі діаграми є нерегулярними і тому в цьому випадку $EZ_{N,n}^{p}\to 0,\ n\to\infty.$

Нехай $Grr(l(1),l(2),\ldots,l(p))$ – множина всіх регулярних діаграм з $p=2q$ рівнями, $l(s)$ – число вершин на s-тому рівні, $1\le s\le p$. Знайдемо границю

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j(1)\in B(i(1))}\cdots\sum_{j(p)\in B(i(p))}\ \sum_{D\in Grr(l(1),\ldots,l(p))}\prod_{w\in D(E)}r_n(j(di(w)),j(ds(w))).$$

Для фіксованої діаграми $D \in Grr(l(1), \ldots, l(p))$ визначимо пари рівнів $(\lambda(1), \lambda(2)), (\lambda(3), \lambda(4)), \ldots, (\lambda(p-1), \lambda(p))$, де $(\lambda(1), \lambda(2), \ldots, \lambda(p))$ – перестановка набору чисел $1, 2, \ldots, p$ така, що ребра регулярної діаграми D проходять лише між рівнями $\lambda(2s-1)$ та $\lambda(2s)$, $s = 1, 2, \ldots, q$. Число вершин кожного з рівнів $\lambda(2s-1)$, $\lambda(2s)$ (вони мають однакове число вершин) позначимо через $t(s)$, $s = 1, 2, \ldots, q$. Тоді

$$T_n(i, l, D) = d_{N,n}^{-2q} \prod_{s=1}^{q} \left(\sum_{u \in B(i(\lambda(2s-1)))} \sum_{v \in B(i(\lambda(2s)))} r_n^{t(s)}(u, v) \right).$$

Для діаграми D визначимо два класи мультиіндексів:

$$KR(D) = \{ i = (i(1), \ldots, i(p)) | 1 \le i(t) \le \nu, t = 1, \ldots, p; \exists s \in \{1, \ldots, q\} : i(\lambda(2s-1)) \ne i(\lambda(2s)) \},$$

$$SR(D) = \{ i = (i(1), \ldots, i(p)) | 1 \le i(t) \le \nu, t = 1, \ldots, p; \forall s \in \{1, \ldots, q\} : i(\lambda(2s-1)) = i(\lambda(2s)) \}$$

Оскільки $t(s) \ge m$, $s = 1, 2, \ldots, q$, то, внаслідок умови 3) теореми та співвідношення (3.7), для довільного $i \in KR(D)$ виконується рівність

$$\lim_{n \to \infty} T_n(i, l, D) = 0 \qquad (3.14)$$

і для довільного $i \in SR(D)$ має місце співвідношення

$$\lim_{n \to \infty} T_n(i, l, D) = \frac{1}{\Delta_N^q} \prod_{s=1}^{q} \sigma_{t(s)} mes_d \left(B_{i(\lambda(2s-1))} \right), \qquad (3.15)$$

де $\Delta_N = \sum_{k=m}^{N} \frac{J^2(k)}{k!} \sigma_k$.

Тому для фіксованого мультиіндексу $l = (l(1), \ldots, l(p))$ та фіксованої діаграми $D \in Grr(l(1), \ldots, l(p))$ маємо:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i(1)=1}^{\nu} \ldots \sum_{i(p)=1}^{\nu} K(i, l) T_n(i, l, D) =$$

$$= \frac{1}{\Delta_N^q} \left(\prod_{s=1}^{q} \frac{J^2(l(\lambda(2s-1)))}{(l(\lambda(2s-1))!)^2} \sigma_{l(\lambda(2s-1))} \right) \sum_{i \in SR(D)} \prod_{s=1}^{q} b_{i(\lambda(2s-1))}^2 mes_d \left(B_{i(\lambda(2s-1))} \right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta_N^q} \left(\prod_{s=1}^{q} \frac{J^2(l(\lambda(2s-1)))}{(l(\lambda(2s-1))!)^2} \sigma_{l(\lambda(2s-1))} \right) \left(b_1^2 mes_d (B_1) + \ldots + b_\nu^2 mes_d (B_\nu) \right)^q .$$

Комбінаторний підрахунок числа регулярних діаграм, проведений у статті [67, с. 434], та застосування поліноміальної формули приводять до рівності

$$\sum_{l \in C(m,N)} \sum_{D \in Grr(l(1),\ldots,l(p))} \prod_{s=1}^{q} \frac{J^2(l(\lambda(2s-1)))}{(l(\lambda(2s-1))!)^2} \sigma_{l(\lambda(2s-1))} = (2q-1)!!\Delta_N^q ,$$

де $C(m,N)$ – множина всіх тих мультиіндексів $l = (l(1),\ldots,l(p))$ таких, що $m \le l(k) \le N,\ k = 1,2,\ldots,p$, а множина $Grr(l(1),\ldots,l(p))$ непорожня.

Отже, для парного натурального числа p виконується рівність

$$\lim_{n\to\infty} EZ_{N,n}^p = (p-1)!!\left(b_1^2 mes_d (B_1) + \ldots + b_\nu^2 mes_d (B_n) \right)^q = EZ^p .$$

Таким чином, $Z_{N,n} \xrightarrow{D} Z$ при $n \to \infty$ і слабка збіжність скінченновимірних розподілів послідовності випадкових полів $\left\{ V_{N,n}(t), t \in Q : n \ge 1 \right\}$ до скінченновимірних розподілів поля Ченцова $\{W(t), t \in Q\}$ доведена.

Покладемо $Z_n = \sum_{i=1}^{\nu} b_i V_n(B_i, A)$. Із теореми 4.2 книги [5] випливає

Лема 3.4. *Нехай для кожного* $N \ge m$ $Z_{N,n} \xrightarrow{D} Z$ *при* $n \to \infty$ *і для довільного* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{N\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P\left\{ \left| Z_{N,n} - Z_n \right| \ge \varepsilon \right\} = 0.$$

Тоді

$$Z_n \xrightarrow{D} Z \text{ при } n \to \infty . \tag{3.16}$$

Внаслідок нерівності Чебишова,

$$P\left\{\left|Z_{N,n}-Z_n\right|\ge\varepsilon\right\}\le\frac{E\left(Z_{N,n}-Z_n\right)^2}{\varepsilon^2}, \qquad (3.17)$$

де $N\ge m,\ n\ge 1$.

Тому для доведення збіжності (3.16) достатньо переконатися, що

$$\lim_{N\to\infty}\limsup_{n\to\infty} E\left|Z_{N,n}-Z_n\right|^2=0. \qquad (3.18)$$

Маємо:

$$E\left(Z_{N,n}-Z_n\right)^2=E\left(\frac{1}{d_{N,n}}\sum_{i=1}^{\nu}b_i\,S_{N,n}\left(B_i,A\right)-\frac{1}{d_n}\sum_{i=1}^{\nu}b_i\,S_n\left(B_i,A\right)\right)^2=$$

$$=E\left(\sum_{i=1}^{\nu}b_i\left(\frac{S_{N,n}\left(B_i,A\right)}{d_{N,n}}-\frac{S_n\left(B_i,A\right)}{d_n}\right)\right)^2.$$

Для суми під знаком математичного сподівання застосуємо нерівність Коші-Буняковського:

$$\left(\sum_{i=1}^{\nu}b_i\left(\frac{S_{N,n}\left(B_i,A\right)}{d_{N,n}}-\frac{S_n\left(B_i,A\right)}{d_n}\right)\right)^2\le\sum_{i=1}^{\nu}b_i^2\sum_{i=1}^{\nu}\left(\frac{S_{N,n}\left(B_i,A\right)}{d_{N,n}}-\frac{S_n\left(B_i,A\right)}{d_n}\right)^2.$$

Для кожного $i\in\{1,2,\ldots,\nu\}$ існує границя

$$\lim_{n\to\infty}E\left(\frac{S_{N,n}\left(B_i,A\right)}{d_{N,n}}-\frac{S_n\left(B_i,A\right)}{d_n}\right)^2=$$

$$\lim_{n\to\infty}E\left(\frac{S_{N,n}^2\left(B_i,A\right)}{d_{N.n}^2}-2\frac{S_{N,n}\left(B_i,A\right)S_n\left(B_i,A\right)}{d_{N,n}d_n}+\frac{S_n^2\left(B_i,A\right)}{d_n^2}\right)=$$

$$=\left(\sum_{l=m}^{N}\frac{J^2(l)}{l!}\sigma_l\right)^{-1}\sum_{l=m}^{N}\frac{J^2(l)}{l!}\sigma_l\,mes_d\left(B_i\right)-2\left(\sqrt{\sum_{l=m}^{N}\frac{J^2(l)}{l!}\sigma_l\sum_{l=m}^{\infty}\frac{J^2(l)}{l!}\sigma_l}\right)^{-1}\times$$

$$\times \sum_{l=m}^{N} \frac{J^2(l)}{l!}\sigma_l mes_d(B_i) + \left(\sum_{l=m}^{\infty} \frac{J^2(l)}{l!}\sigma_l\right)^{-1} \sum_{l=m}^{\infty} \frac{J^2(l)}{l!}\sigma_l mes_d(B_i) =$$

$$= 2mes_d(B_i)\left(1 - \sqrt{\sum_{l=m}^{N} \frac{J^2(l)}{l!}\sigma_l}\left(\sqrt{\sum_{l=m}^{\infty} \frac{J^2(l)}{l!}\sigma_l}\right)^{-1}\right).$$

Із рівності

$$\lim_{N\to\infty}\left(1 - \sqrt{\sum_{l=m}^{N} \frac{J^2(l)}{l!}\sigma_l}\left(\sqrt{\sum_{l=m}^{\infty} \frac{J^2(l)}{l!}\sigma_l}\right)^{-1}\right) = 0$$

випливає співвідношення (3.18) та твердження теореми. □

Приклад 3.1. Нехай $Y(n), n \in Z$ – стаціонарна гауссова послідовність з нульовим середнім значенням і кореляційною функцією $\rho(n), n \in Z, \rho(0) = 1.$ Припустимо, що для деяких сталих $\alpha \in (0, 2)$ і $c \in R$ виконується співвідношення

$$\rho(n) = \frac{c}{n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+0,75}}\right),\ n \to \infty. \qquad (3.19)$$

Припущенню (3.19) задовольняє, наприклад, кореляційна функція

$$\rho_H(n) = \frac{1}{2}\left(|n+1|^{2H} + \left|n - 1^{2H}\right| - 2|n|^{2H}\right),\ n \in Z,$$

де $H \in (0, 1)$, при $\alpha = 2 - 2H$. Покладемо

$$X_{nj} = \frac{Y(j) - Y(j-1)}{\sqrt{\delta}},\ 1 \le j \le n,$$

де $\delta = 2(1 - \rho(1))$, і розглянемо послідовність серій

$$\{X_{ni} \,|\, 1 \le i \le n\},\ n \ge 1 \qquad (3.20)$$

випадкових величин, які у кожній серії мають сумісний гауссовий розподіл з нульовим математичним сподіванням та кореляційною матрицею $\{r_n(i, j) \,|\, 1 \le i, j \le n\}$, де

$$r_n(i,\ j) = \frac{1}{\delta} E\big((Y(i) - Y(i-1))(Y(j) - Y(j-1))\big) =$$

$$= \frac{1}{\delta}\big(2\rho(j-i) - \rho(j-i+1) - \rho(j-i-1)\big). \qquad (3.21)$$

Нехай, далі

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} H_2(X_{ni}),$$

де H_2 – многочлен Ерміта степеня 2. Тоді

$$d_n^2 = \mathrm{Var}\, S_n = 2\sum_{i,j=1}^{n} r_n^2(i,j) =$$

$$= 2\left(n + 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \big(2\rho(j-i) - \rho(j-i-1) - \rho(j-i+1)\big)^2 \right).$$

Перевіримо умови теореми 3.1 для послідовності серій (3.20), $G = H_2,\ d = 1,\ m = 2$.

Перевірка умови 1).

$$\sup_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} r_n^2(i,j) = \frac{1}{\delta^2} \sup_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \big(2\rho(j-i) - \rho(j-i-1) - \rho(j-i+1)\big)^2 \le$$

$$\le \frac{2}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n-1} \big(2\rho(k) - \rho(k-1) - \rho(k+1)\big)^2 .$$

З умови (1.19), шляхом застосування формули Маклорена для функції $(1+x)^a,\ x > -1$ та ознаки порівняння збіжності рядів, отримуємо збіжність ряду із загальним членом

$$\big(2\rho(n) - \rho(n-1) - \rho(n+1)\big)^2,\ n \ge 1. \qquad (3.22)$$

Тому $\sup\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n} r_n^2(i,j)=O(1),$ при $n\to\infty$. Виконання умови 1) теореми 3.1 перевірено.

Для перевірки виконання умови 2) теореми 4.1 достатньо довести, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sup_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|r_n(i,j)|=0. \qquad (3.23)$$

Як і при перевірці умови 1),

$$\sup_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|r_n(i,j)|\le\frac{2}{\delta}\sum_{k=0}^{n-1}|2\rho(k)-\rho(k-1)-\rho(k+1)|.$$

Покажемо, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}|2\rho(k)-\rho(k-1)-\rho(k+1)|=0. \qquad (3.24)$$

Очевидно, з рівності (3.24) випливає рівність (3.23). Для доведення рівності (3.24) застосуємо теорему Штольца:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|2\rho(n)-\rho(n-1)-\rho(n+1)|}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}|2\rho(n)-\rho(n-1)-\rho(n+1)|\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)=0.$$

Остання рівність випливає з припущення (3.19) та формули Маклорена для функції $(1+x)^a$, $x>-1$. Виконання умови 2) теореми 3.1 перевірено.

Перевірка умови 3). Нехай відрізки $B_1, B_2\subset[0,1]$ без спільних внутрішніх точок, $B(n,i)=\left\{j\in Z\,\middle|\,\frac{j}{n}\in B_i\right\}$, $i=1,2$. Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i\in B(n,1)}\sum\limits_{j\in B(n,1)} r_n^2(i,j)$.

Нехай $B(n,1)=\{c_1(n),c_1(n)+1,\dots,c_2(n)\}$, $c(n)=c_2(n)-c_1(n)$, $n\ge1$. Зрозуміло, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c(n)}{n}=mes(B_1),$$

де mes – міра Лебега на прямій. Далі,

$$\frac{1}{n}\sum_{i,\,j=c_1(n)}^{c_2(n)} r_n^2(i,\,j)=\frac{1}{n\delta^2}\sum_{i,\,j=c_1(n)}^{c_2(n)}\left(2\rho(j-i)-\rho(j-i-1)-\rho(j-i+1)\right)^2=$$

$$=\frac{1}{n\delta^2}\left(\sum_{\substack{i,\,j=c_1(n)\\ i=j}}^{c_2(n)}\delta^2+2\sum_{\substack{i,\,j=c_1(n)\\ i<j}}^{c_2(n)}\left(2\rho(j-i)-\rho(j-i-1)-\rho(j-i+1)\right)^2\right)=$$

$$=\frac{1}{n\delta^2}\left((c(n)+1)\delta^2+2\sum_{k=1}^{c(n)}\left(c(n)-(k-1)\right)\left(2\rho(k)-\rho(k-1)-\rho(k+1)\right)^2\right)=$$

$$=\frac{c(n)+1}{n}+\frac{2c(n)}{n\delta^2}\sum_{k=1}^{c(n)}\left(1-\frac{k-1}{c(n)}\right)\left(2\rho(k)-\rho(k-1)-\rho(k+1)\right)^2 .$$

Лема 3.5. *Нехай* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *– абсолютно збіжний ряд. Тоді*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)a_k=\sum_{k=1}^{\infty}a_k . \qquad (3.25)$$

Доведення. Покладемо

$$a_k^{(n)}=\begin{cases}\left(1-\dfrac{k-1}{n}\right)a_k,\ 1\le k\le n,\\ \quad 0,\quad k>n.\end{cases}$$

Тоді для кожного $k\ge 1$ $a_k^{(n)}\to a_k$ при $n\to\infty$. Далі,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)a_k=\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{(n)}\ \text{ і }\ \sup_{n\ge 1}\left|\sum_{k=N}^{\infty}a_k^{(n)}\right|\le\sum_{k=N}^{\infty}|a_k|\to 0,\ N\to\infty .$$

Отже, має місце рівність (3.25). □

Внаслідок леми 3.5 та збіжності ряду із загальним членом (3.22),

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{c(n)}\left(1-\frac{k-1}{c(n)}\right)\left(2\rho(k)-\rho(k-1)-\rho(k+1)\right)^2=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(2\rho(k)-\rho(k-1)-\rho(k+1)\right)^2 \overset{def}{=} \sigma_2 .$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i,\,j\in B(1)} r_n^2(i,j)=\left(1+\frac{2\sigma_2}{\delta^2}\right) mes(B_1).$$

Аналогічно доводиться, що для $l>2$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i,\,j\in B(1)} r_n^l(i,j)=\left(1+\frac{2\sigma_l}{\delta^2}\right) mes(B_1),$$

де $\sigma_l=\sum_{k=1}^{\infty}\left(2\rho(k)-\rho(k-1)-\rho(k+1)\right)^l$.

Для перевірки умови 3) залишилося довести, що для довільного $l\ge 2$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i\in B(1)}\ \sum_{j\in B(2)} r_n^l(i,j)=0 . \tag{3.26}$$

Нехай відрізок B_2 лежить правіше відрізка B_1. Тоді

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i\in B(1)}\ \sum_{j\in B(2)} r_n^l(i,j)\right|\le\frac{1}{n}\left(1+\sum_{k=1}^{n}k\left|2\rho(k)-\rho(k-1)-\rho(k+1)\right|^l\right)\to 0,\ n\to\infty . \tag{3.27}$$

Для доведення збіжності в (3.27) застосуємо теорему Штольца:

$$\lim_{n\to\infty} n\left|2\rho(k)-\rho(k-1)-\rho(k+1)\right|^l=0$$

внаслідок припущення (3.19). Отже, має місце рівність (3.26). Умову 3) теореми 3.1 перевірено. Умова 4) теореми 3.1, очевидно, виконується.

Із теореми 3.1 випливає, зокрема, що послідовність випадкових величин

$$\frac{1}{d_n}\sum_{k=1}^{n}H_2\left(Y(k)-Y(k-1)\right),\ \ n\ge 1$$

асимптотично нормальна з середнім нуль і дисперсією одиниця.

3.2. Щільність послідовності мір та збіжність у просторі Скорохода $D([0,1]^d)$

Нехай для довільного натурального числа n $\mathrm{V_n}$ – імовірнісна міра у просторі Скорохода $D([0,1]^d)$, породжена випадковим полем $V_n(t)$, $t \in Q$, W – імовірнісна міра, породжена у цьому просторі полем Ченцова $W(t)$, $t \in Q$. Теорема 3.2, у якій стверджується слабка збіжність послідовності ймовірнісних мір $\{\mathrm{V_n} : n \geq 1\}$ до імовірнісної міри W, містить додаткові умови на нелінійну функцію G. Для формулювання цих умов нам знадобиться означення 3.2 статті [115] для $\varepsilon = 1$.

Означення 3.2 [115, с. 209] *Нехай* $p \geq 2$, X *– гауссова стандартна випадкова величина, функції* $G_1, G_2, \ldots, G_p$ *такі, що* $EG_j^2(X) < \infty$, $j = 1,2,\ldots, p$; $J_j(k) = E\Big(G_j(X) H_k(X) \Big), k \geq 0$. *Кажуть, що набір функцій* $\Big\{G_1, G_2, \ldots, G_p\Big\}$ *належить класу* Γ_p, *якщо:*

1) для довільного гауссового вектора $\Big(X_1, X_2, \ldots, X_p\Big)$ *виконується рівність*

$$E\Big(G_1(X_1) \ldots G_p(X_p) \Big) =$$

$$= \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{k \in M(q)} \frac{J_1\Big(k(1)\Big)}{k(1)!} \ldots \frac{J_p\Big(k(p)\Big)}{k(p)!} E\Big(H_{k(1)}(X_1) \ldots H_{k(p)}(X_p) \Big),$$

де $M(q) = \{k = (k(1), \ldots, k(p)) | 0 \leq k(i) \leq q,\ i = 1,2,\ldots,p; k(1) + \ldots + k(p) = 2q\}$;

2) $\displaystyle\sum_{q=0}^{\infty} \sum_{k \in M(q)} \left| \frac{J_1(k(1))}{k(1)!} \ldots \frac{J_p(k(p))}{k(p)!} E\big(H_{k(1)}(X_1) \ldots H_{k(p)}(X_p)\big) \right| < \infty.$

Запис $G \in \Gamma_p$ означає, що $\left\{G_1, G_2, \ldots, G_p\right\} \in \Gamma_p$, де $G_1 = \ldots = G_p = G$.

Зауваження 3.1. Достатні умови належності класу знаходимо у твердженні 3.1 статті [115]: якщо збігається ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} |J(k)| \sqrt{\frac{(p-1)^k}{k!}} < \infty, \tag{3.28}$$

де $J(k), k \geq 0$ – коефіцієнти Ерміта функції G, то $G \in \Gamma_p$. Умова (3.28) виконується, наприклад, для многочлена. У статті [115] можна знайти інші приклади функцій, для яких виконується умова (3.28).

Теорема 3.2. *Нехай виконані умови теореми 3.1, функція* $G \in \Gamma_4 \cap \Gamma_3$, $\left(G, G, G^2\right) \in \Gamma_3$. *Тоді* $V_n \xrightarrow{D} W,\ n \to \infty$, *тобто послідовність розподілів випадкових полів* $\{V_n(t),\ t \in Q : n \geq 1\}$ *у просторі* Скорохода $D\left([0,1]^d\right)$ *слабко збіжна до розподілу* W *, породженого полем Ченцова* $\{W(t),\ t \in Q\}$.

Доведення. У теоремі 3.1 доведена слабка збіжність скінченновимірних розподілів послідовності випадкових полів $\{V_n(t),\ t \in Q : n \geq 1\}$ до відповідних скінченновимірних розподілів поля Ченцова $\{W(t),\ t \in Q\}$. Таким чином, для доведення твердження теореми 3.2 достатньо встановити щільність послідовності імовірнісних мір $\{V_n : n \geq 1\}$ у просторі Скорохода $D\left([0,1]^d\right)$.

Лема 3.6. *Нехай існує стала* $K \in R$ *така, що для довільного* d *-вимірного паралелепіпеда* $B \subset Q$, *для всіх натуральних чисел* n *виконується нерівність*

$$EV_n^4(B, A) \leq K\, mes_d^2(B). \tag{3.29}$$

Тоді послідовність мір $\{V_n : n \geq 1\}$ *у* $D\left([0,1]^d\right)$ *щільна.*

Доведення леми 3.6. З теореми 3 статті [65] випливає наступна ознака щільності: якщо існує стала $C \in R$ така, що для довільних суміжних d-вимірних паралелепіпедів $B_1,\ B_2 \subset Q$ виконується нерівність

$$E\left(V_n^2(B_1, A) V_n^2(B_2, A)\right) \leq C\, mes_d(B_1)\, mes_d(B_2), \tag{3.30}$$

то послідовність мір $\{V_n : n \geq 1\}$ у $D\left([0,1]^d\right)$ щільна. До лівої частини нерівності (3.30) застосуємо нерівність Коші-Буняковського:

$$E\left(V_n^2(B_1, A)V_n^2(B_2, A)\right) \leq \sqrt{EV_n^4(B_1, A)EV_n^4(B_2, A)}. \qquad (3.31)$$

З нерівностей (3.31) та (3.29) випливає нерівність (3.30) при $C = K$. □

Лема 3.7. *Нехай виконуються умови теореми 3.2. Тоді існує стала* $K \in R$ *така, що для всіх натуральних чисел n, для довільного* d*-вимірного паралелепіпеда* $B \subset Q$ *виконується нерівність (3.29).*

Для доведення цієї леми застосуємо метод, розвинутий у статті [115] для випадку стаціонарного гауссового процесу. Введемо необхідні для дальшого викладу поняття.

Для $p \geq 1$ символом A_p позначимо множину всіх мультиграфів з p вершинами без петель. Множину ребер мультиграфа A будемо також задавати набором пар $\left\{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_q, j_q)\right\}$, де $i_s,\ j_s \in \{1, 2, \ldots, p\},\ i_s \neq j_s,\ 1 \leq s \leq q.$

Пара (i_s, j_s) відповідає інцидентному з вершинами $i_s,\ j_s$ ребру. Функцію $g : \mathrm{A}_p \to R$ визначимо наступним чином. Для мультиграфа $A \in \mathrm{A}_p$ покладемо

$$g(A) = \prod_{u \in KV} \frac{1}{v_u!},$$

де KV – сукупність всіх двоелементних підмножин набору $\{1,2,\ldots,p\}$; v_u – число всіх тих ребер, що з'єднують вершини з пари *u*.

Через $k(i)$ позначимо степінь вершини i, $1 \leq i \leq p$, а через $\mathrm{A}(k(1), k_2(2), \ldots, k(p))$ – сукупність всіх тих мультиграфів із A_p, вершини яких мають степені $k(1), k(2), \ldots, k(p)$.

Гауссовий вектор $\left(X_1, X_2, \ldots, X_p\right)$ такий, що $EX_i = 0,\ EX_i^2 = 1, 1 \leq i \leq p$, назвемо *1-стандартним*.

Лема 3.8 (твердження 4.1 [115] для $\varepsilon = 1$). *Нехай* $p \ge 2$, X *– стандартна гауссова випадкова величина,* $EG_j^2(X) < +\infty$, $1 \le j \le p$; $J_j(K) = E\left(G_j(X)H_k(X)\right)$, $k \ge 0, 1 \le j \le p$. *Тоді* $\left(G_1, G_2, \ldots, G_p\right) \in \Gamma_p$ *в тому і тільки в тому випадку, коли:*

1) для довільного 1-стандартного гауссового вектора $\left(X_1, X_2, \ldots, X_p\right)$

$$E\left(G_1(X_1)\ldots G_p\left(X_p\right)\right) = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{k \in M(q)} J_1(k(1))\ldots J_p(K(p)) \sum_{A \in \mathrm{A}(k(1),\ldots,k(p))} g(A)R(A), \qquad (3.32)$$

де

$$M(q) = \{k = (k(1),\ldots,k(p)) \mid k(1) + \ldots + k(p) = 2q, 0 \le k(i) \le q, i = 1,2,\ldots,p\};$$

$$R(A) = r(i(1), j(1))r(i(2), j(2))\ldots r(i(q), j(q)),$$

$$r\left(i(s), j(s)\right) = E\left(X_{i(s)} X_{j(s)}\right), \; s = 1,2,\ldots,q;$$

$$(i(1), j(1)), (i(2), j(2)), \ldots, (i(q), j(q))$$

– набір пар вершин мультиграфа A *(* $R(A) = 1$, *якщо мультиграф* A *не має ребер).*

2) $\sum_{q=0}^{\infty} \sum_{k \in M(q)} \left|J_1(k(1))\ldots J_p(k(p))\right| \sum_{A \in \mathrm{A}(k(1),\ldots,k(p))} g(A) < \infty$.

Для мультиграфа A символами $V(A)$ та $E(A)$ відповідно позначимо множину вершин і множину ребер мультиграфа A. Через $cmp(A)$ позначимо кількість всіх зв'язних складових мультиграфа A. *Рангом* мультиграфа A називається число $r(A) = card(V(A)) - cmp(A)$. *Циклічним числом* графа A називається $ts(A) = card(E(A)) - r(A)$. Граф F називається *лісом*, якщо $ts(F) = 0$. Зв'язний ліс називається *деревом*.

Лема 3.9. [115, с. 217] *Нехай мультиграф* $A \in \mathrm{A}_p$, $p \ge 2$, α *вершин якого мають порядок не менше* $m \ge 1$. *Тоді існують* m *лісів* F_i, $1 \le i \le m$, *попарно без спільних ребер,* $\bigcup_{i=1}^{m} E(F_i) \subset E(A)$, *таких що* $\forall i \in \{1,2,\ldots,m\}$

$$card(E(F_i)) = \begin{cases} [\alpha/2], & 1 \le i \le [m/2], \\ \alpha - [\alpha/2], & [m/2]+1 \le i \le m, \end{cases}$$

де $[x], x \in R$ *означає цілу частину дійсного числа x – найбільше ціле число серед всіх тих цілих чисел, що не перевищують числа x.*

Зауваження 4.2. [115, с. 217] Має місце рівність

$$\sum_{i=1}^{m} card(E(F_i)) = m\alpha - \left[\frac{m\alpha}{2}\right]. \qquad (3.33)$$

Для d-вимірного паралелепіпеда $B \subset Q$ покладемо

$$B(n) = \left\{ i = (i_1, i_2, \ldots, i_d) \middle| i_s \in Z, 1 \le s \le d, \frac{i}{n} \in B \right\}.$$

Нехай n, p – натуральні числа, мультиіндекси $u(1), u(2), \ldots, u(p) \in B(n)$. Для кожного мультиграфа $A \in \mathrm{A}_p$ з q ребрами і набором пар $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_q, j_q)$ покладемо

$$R_n((u(1), u(2), \ldots, u(p)), A) = \prod_{s=1}^{q} r_n(u(i_s), u(j_s)). \qquad (3.34)$$

Якщо мультиграф A не має ребер, то покладемо $R_n((u(1), \ldots, u(p)), A) = 1$.

Через $\mathrm{T}(p)$ позначимо множину всіх дерев в A_p. Наступна лема аналогічна лемі 4.3 статті [115].

Лема 3.10. *Для всіх натуральних чисел* m, n, p *виконується нерівність*

$$\sup_{T \in \mathrm{T}(p)} \sum_{u(1) \in B(n)} \cdots \sum_{u(p) \in B(n)} \left| R_n^m((u(1), \ldots, u(p)), T) \right| \le$$

$$\le card\,(B(n))\left(\sup_{u\in A(n)}\sum_{v\in A(n)}\left|r_n^m(u,v)\right|\right)^{p-1}. \qquad (3.35)$$

Доведення. Нехай $T\in \mathrm{T}(p)$ – дерево. Міркування, викладені у доведенні леми 4.3 [115] приводять до рівності

$$\sum_{u(1)\in B(n)}\cdots\sum_{u(p)\in B(n)}\left|R_n^m((u(1),\ldots,u(p)),T)\right| = \sum_{u(1)\in B(n)}\sum_{u(2)\in B(n)}\left|r_n^m(u(2),u(j(2)))\right|\times$$

$$\times\sum_{u(3)\in B(n)}\left|r_n^m(u(3),u(j(3)))\right| \ \cdots \sum_{u(p)\in B(n)}\left|r_n^m(u(p),u(j(p)))\right|,$$

де $(i,\, j(i))$, $j(i)<i$ – кінці i -го ребра, $i=2,\ldots,p$.

Для довільного $v\in A(n)$

$$\sum_{u\in B(n)}\left|r_n^m(u,v)\right|\le \sup_{v\in A(n)}\sum_{u\in A(n)}\left|r_n^m(u,v)\right|.$$

Отже,

$$\sum_{u(1)\in B(n)}\cdots\sum_{u(p)\in B(n)}\left|R_n^m((u(1),\ldots,u(p)),T)\right|\le$$

$$\le\sum_{u(1)\in B(n)}\prod_{i=2}^{p}\left(\sup_{u\in A(n)}\sum_{v\in A(n)}\left|r_n^m(u,v)\right|\right)=card\,(B(n))\left(\sup_{u\in A(n)}\sum_{v\in A(n)}\left|r_n^m(u,v)\right|\right)^{p-1}.$$

□

Символом $\mathrm{M}(p,q;\,\alpha,\,m)$ позначимо множину всіх тих мультиграфів із A_p, що мають q ребер і α вершин, $0\le\alpha\le p$, з порядком не меншим натурального числа m.

Наступна лема аналогічна лемі 4.4 статті [115].

Лема 3.11. *Нехай* $m\ge 1$, $p\ge 2$, $0\le\alpha\le p$, $q\ge m\alpha-[m\alpha/2]$. *Тоді*

$$\sup_{A\in \mathrm{M}(p,q;\,\alpha,m)}\sum_{u(1)\in B(n)}\cdots\sum_{u(p)\in B(n)}\left|R_n((u(1),\ldots,u(p)),A)\right|\le$$

$$\le \left(card\left(B(n)\right)\right)^{p-\frac{\alpha}{2}} \left(\sup_{u\in A(n)} \sum_{v\in A(n)} \left| r_n^m(u,v) \right| \right)^{\frac{\alpha}{2}} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{card\left(B(n)\right)} \sup_{u\in A(n)} \sum_{v\in A(n)} \left| r_n^m(u,v) \right| \right)^{\frac{1}{m}\left(\frac{m\alpha}{2}-\left[\frac{m\alpha}{2}\right]\right)}.$$

Доведення леми 3.11 аналогічне доведенню леми 4.4 [115]. Нехай мультиграф $A \in \mathrm{M}(p,q;\,\alpha,m)$, $V(A)=V$, $E(A)=E$. Із леми 3.9 випливає, що існують m лісів F_i, $V(F_i)=V$, $E(F_i)=E_i$, $1\le i\le m$ таких, що множини ребер $E_1,\ldots,E_m$ попарно не перетинаються, $\bigcup_{i=1}^{m} E_i \subset E$. Внаслідок рівності (3.33), $\sum_{i=1}^{m} card(E_i) = m\alpha - \left[\frac{m\alpha}{2}\right]$. Нехай c_i число компонент F_i, $1\le i\le m$. Оскільки $c_i = p - r(F_i)$, $1\le i\le m$ та $\sum_{i=1}^{m} r(F_i) = \sum_{i=1}^{m} card(E_i)$, ($r(F_i) = card(E_i)$ за означенням лісу), то

$$\sum_{i=1}^{m} c_i = mp - m\alpha + \left[\frac{m\alpha}{2}\right].$$

Розглянемо мультиграф $B = \bigcup_{i=1}^{m} F_i$, $V(B)=V$, $E(B) = \bigcup_{i=1}^{m} E_i \subset E$. Далі,

$$card(E) - card\left(\bigcup_{i=1}^{m} E_i\right) = q - \sum_{i=1}^{m} card(E_i) = q - \left(m\alpha - \left[\frac{m\alpha}{2}\right]\right)$$

і тому

$$\left| R_n\left(\left(u(1),\ldots,u(p)\right), A\right)\right| \le \left(\sup_{u,v\in A(n)} \left| r_n(u,v) \right| \right)^{q-\left(m\alpha-\left[\frac{m\alpha}{2}\right]\right)} \times$$

$$\times \left| R_n\left(\left(u(1),\ldots,u(p)\right), \bigcup_{i=1}^{m} F_i \right)\right|, \qquad (3.36)$$

для всіх $u(1),\ldots,u(p)\in B(n)$. Зауважимо, що $\sup\limits_{u,v\in A(n)}|r_n(u,v)|=1$. Внаслідок узагальненої нерівності Гельдера,

$$\sum_{u(1)\in B(n)}\cdots\sum_{u(p)\in B(n)}\left|R_n\left((u(1),\ldots,u(p)),\bigcup_{i=1}^{m}F_i\right)\right|\le$$

$$\le\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{u(1)\in B(n)}\cdots\sum_{u(p)\in B(n)}\left|R_n^m((u(1),\ldots,u(p)),F_i)\right|\right)^{\frac{1}{m}}. \qquad (3.37)$$

Кожний з лісів F_i $1\le i\le m$ має p вершин і c_i зв'язних складових $T_{ij},1\le j\le c_i$. Нехай p_{ij} – число вершин графа T_{ij}. Зрозуміло, що $\sum\limits_{j=1}^{c_i}p_{ij}=p$ для всіх $i=1,\ldots,m$. Зв'язні складові $T_{ij},1\le j\le c_i$ мають множини вершин і множини ребер, що попарно не перетинаються. Отже,

$$\sum_{u(1)\in B(n)}\cdots\sum_{u(p)\in B(n)}\left|R_n^m((u(1),\ldots,u(p)),F_i)\right|=$$

$$=\prod_{j=1}^{c_i}\left(\sum_{u(1)\in B(n)}\cdots\sum_{u(p_{ij})\in B(n)}\left|R_n^m((u(1),\ldots,u(p)),T_{ij})\right|\right).$$

Відмітимо, що $T_{ij}\in\mathrm{T}(p_{ij})$ і застосуємо лему 3.10:

$$\sup_{T\in\mathrm{T}(p_{ij})}\sum_{u(1)\in B(n)}\cdots\sum_{u(p)\in B(n)}\left|R_n((u(1),\ldots,u(p)),T)\right|\le$$

$$\le card(B(n))\left(\sup_{v\in A(n)}\sum_{u\in A(n)}\left|r_n^m(u,v)\right|\right)^{p_{ij}-1}.$$

Таким чином,

$$\sum_{u(1)\in B(n)}\cdots\sum_{u(p)\in B(n)}\left|R_n\left((u(1),\ldots,u(p)),\bigcup_{i=1}^{m}F_i\right)\right|\le$$

$$\le \left(\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{c_i} \sup_{T \in \mathrm{T}(p_{ij})} \left(\sum_{u(1)\in B(n)} \dots \sum_{u(p_{ij})\in B(n)} \left| R_n^m \left(\left(u(1), \dots, u(p) \right), T_{ij} \right) \right| \right) \right)^{\frac{1}{m}} =$$

$$= \left(\left(card\left(B(n)\right)\right)^{mp - m\alpha + \left[\frac{m\alpha}{2}\right]} \left(\sup_{v\in A(n)} \sum_{u\in A(n)} \left| r_n^m(u,v) \right| \right)^{m\alpha - \left[\frac{m\alpha}{2}\right]} \right)^{\frac{1}{m}} =$$

$$= \left(\left(card\left(B(n)\right)\right)^{p - \frac{\alpha}{2}} \left(\sup_{v\in A(n)} \sum_{u\in A(n)} \left| r_n^m(u,v) \right| \right)^{\frac{\alpha}{2}} \right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{card\left(B(n)\right)} \sup_{v\in A(n)} \sum_{u\in A(n)} \left| r_n^m(u,v) \right| \right)^{\frac{1}{m}\left(\frac{m\alpha}{2} - \left[\frac{m\alpha}{2}\right] \right)} .$$

□

Лема 3.12. *Нехай* $m \ge 1$, $p \ge 2$; X *– стандартна гауссова випадкова величина, функції* $G_1, \dots, G_p$ *такі, що* $EG_j^2(X) < +\infty$, $1 \le j \le p$ *та* $\left(G_1, G_2, \dots, G_p \right) \in \Gamma_p$. *Нехай, далі, для деякого* α, $0 \le \alpha \le p$ *функції* $G_1, \dots, G_\alpha$ *мають ранг Ерміта не менший* m. *Тоді існує стала* K*, яка залежить лише від* p *та функцій* $G_1, \dots, G_p$*, така, що* $\forall n \ge 1$

$$\sum_{u(1)\in B(n)} \dots \sum_{u(p)\in B(n)} \left| E\left(G_1\left(X_{nu(1)} \right) \dots G_p\left(X_{nu(p)} \right) \right) \right| \le$$

$$\le K \left(card\left(B(n)\right)\right)^{p-\alpha/2} \left(\sup_{v\in A(n)} \sum_{u\in A(n)} \left| r_n^m(u,v) \right| \right)^{\frac{1}{m}\left(\frac{m\alpha}{2} - \left[\frac{m\alpha}{2}\right] \right)} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{card\left(B(n)\right)} \sup_{v\in A(n)} \sum_{u\in A(n)} \left| r_n^m(u,v) \right| \right)^{\frac{1}{m}\left(\frac{m\alpha}{2} - \left[\frac{m\alpha}{2}\right] \right)} . \qquad (3.38)$$

Ця лема аналогічна лемі 4.5 статті [115].

Доведення. Нехай $J_j(k) = E\left(G_j(X)H_k(X)\right), k \geq 0, \quad j = 1,\dots,p$. Внаслідок леми 3.8, враховуючи, що функції $G_1,\dots,G_\alpha$ мають ранг Ерміта не менший *m*, маємо

$$\sum_{u(1)\in B(n)} \dots \sum_{u(p)\in B(n)} \left| E\left(G_1\left(X_{nu(1)} \right) \dots G_p\left(X_{nu(p)} \right) \right) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{q=m\alpha-[m\alpha/2]}^{\infty} \sum_{k\in M(q;m,\alpha)} \left| J_1(k(1)) \dots J_p(k(p)) \right| \left(\sum_{A\in \mathrm{A}(k(1),\dots,k(p))} g(A) \right) \times$$

$$\times \left(\sup_{A\in \mathrm{M}(p,q;\alpha,m)} \sum_{u(1)\in B(n)} \dots \sum_{u(p)\in B(n)} \left| R_n((u(1),\dots,u(p)), A) \right| \right), \tag{3.39}$$

де $M(q;m,\alpha) = \{k = (k(1),\dots,k(p)) | m \leq k(1), \dots, k(\alpha) \leq q, \quad 0 \leq k(\alpha+1),\dots,k(p) \leq q,$ $k(1) + \dots + k(p) = 2q\}$.

Далі, внаслідок леми 3.11, отримуємо нерівність (3.38), в якій можна покласти

$$K = \sum_{q=m\alpha-[m\alpha/2]}^{\infty} \sum_{k\in M(q)} \left| J_1(k(1)) \dots J_p(k(p)) \right| \sum_{A\in \mathrm{A}(k(1),\dots,k(p))} g(A),$$

причому $K \in R$ завдяки твердженню 2) леми 4.8. □

Лема 3.13. *Нехай виконуються умови теореми 3.2. Тоді існує стала* $K = K(G)$, *така, що для всіх натуральних чисел* n *виконується нерівність*

$$E\left(\sum_{i\in B(n)} G(X_{ni}) \right)^4 \leq K\, card^2(B(n)).$$

Доведення. Впорядкуємо довільним чином множину $B(n)$.

Не втрачаючи загальності, можна вважати, що $B(n) = \{s | 1 \leq s \leq N\}$, де $N = card(B(n))$. Якщо мультиіндекс $i \in B(n)$ має номер s то покладемо

$X_{ns} = X_{ni}$. Ясно, що $\sum_{i \in B(n)} G(X_{ni}) = \sum_{s=1}^{N} G(X_{ns})$. Внаслідок поліноміальної формули маємо:

$$E\left(\sum_{s=1}^{N} G(X_{ns})\right)^4 = \sum_{s=1}^{N} G^4(X_{ns}) +$$

$$+4 \sum_{1 \le s(1) < s(2) \le N} \left(E\left(G^3\left(X_{ns(1)}\right)G\left(X_{ns(2)}\right) + G\left(X_{ns(1)}\right)G^3\left(X_{ns(2)}\right)\right)\right) +$$

$$+6 \sum_{1 \le s(1) < s(2) \le N} E\left(G^2\left(X_{ns(1)}\right)G^2\left(X_{ns(2)}\right)\right) +$$

$$+12 \sum_{1 \le s(1) < s(2) < s(3) \le N} E\left(G^2\left(X_{ns(1)}\right)G\left(X_{ns(2)}\right)G\left(X_{ns(3)}\right)\right) +$$

$$+12 \sum_{1 \le s(1) < s(2) < s(3) \le N} E\left(G\left(X_{ns(1)}\right)G^2\left(X_{ns(2)}\right)G\left(X_{ns(3)}\right)\right) +$$

$$+12 \sum_{1 \le s(1) < s(2) < s(3) \le N} E\left(G\left(X_{ns(1)}\right)G\left(X_{ns(2)}\right)G^2\left(X_{ns(3)}\right)\right) +$$

$$+24 \sum_{1 \le s(1) < s(2) < s(3) < s(4) \le N} E\left(G\left(X_{ns(1)}\right)G\left(X_{ns(2)}\right)G\left(X_{ns(3)}\right)G\left(X_{ns(4)}\right)\right). \qquad (3.40)$$

Для оцінки $E\left(G^3\left(X_{ns(1)}\right)G\left(X_{ns(2)}\right)\right)$ застосуємо нерівність Гельдера з показниками 4/3, 4:

$$\left|E\left(G^3\left(X_{ns(1)}\right)G\left(X_{ns(2)}\right)\right)\right| \le \left(EG^4\left(X_{ns(1)}\right)\right)^{3/4}\left(EG^4\left(X_{ns(2)}\right)\right)^{1/4} = EG^4(X). \quad (3.41)$$

З нерівності Коші-Буняковського випливає, що

$$E\left(G^2\left(X_{ns(1)}\right)G^2\left(X_{ns(2)}\right)\right) \le \left(EG^4\left(X_{ns(1)}\right)\right)^{1/2}\left(EG^4\left(X_{ns(2)}\right)\right)^{1/2} = EG^4(X). \quad (3.42)$$

У співвідношеннях (3.41), (3.42) X – стандартна гауссова випадкова величина, $s(1), s(2) \in \{1, \ldots, N\}, s(1) \ne s(2)$. Кількість доданків у сумах $\sum_{s=1}^{N} \ldots$ та

$\sum\limits_{1 \le s(1) < s(2) \le N}^{N} \ldots$ підпорядковане N^2 при $N \to \infty$. Враховуючи нерівності (3.41) і (3.42), отримуємо, що $\exists\, C_1 > 0\ \forall n \ge 1$:

$$\sum_{s=1}^{N} G^4(X_{ns}) + 4 \sum_{1 \le s(1) < s(2) \le N} \left(E\left(G^3\left(X_{ns(1)}\right) G\left(X_{ns(2)}\right) + G\left(X_{ns(1)}\right) G^3\left(X_{ns(2)}\right) \right) \right) +$$

$$+ 6 \sum_{1 \le s(1) < s(2) \le N} E\left(G^2\left(X_{ns(1)}\right) G^2\left(X_{ns(2)}\right) \right) \le C_1 N^2. \qquad (3.43)$$

Далі,

$$\left| \sum_{1 \le s(1) < s(2) < s(3) \le N} E\left(G^2\left(X_{ns(1)}\right) G\left(X_{ns(2)}\right) G\left(X_{ns(3)}\right) \right) \right| = O\left(N^2\right),\ N \to \infty \qquad (3.44)$$

внаслідок леми 3.12 для функцій G, G, G^2 та умови 1) теореми 3.1 $(\alpha = 2)$.

Для $\alpha = 4$ лема 3.12 для функцій G, G, G, G та умова 1) теореми 3.1 дозволяють отримати співвідношення

$$\left| \sum_{1 \le s(1) < s(2) < s(3) < s(4) \le N} E\left(G\left(X_{ns(1)}\right) G\left(X_{ns(2)}\right) G\left(X_{ns(3)}\right) G\left(X_{ns(4)}\right) \right) \right| = O\left(N^2\right),\ N \to \infty. \qquad (3.45)$$

Із співвідношень (3.43) – (3.45) та рівності (3.40) випливає твердження леми 3.13. □

Оскільки

$$V_n(B, A) = \frac{1}{d_n} \sum_{i \in B(n)} G(X_{ni})$$

і

$$\frac{card\ B(n)}{n^d} \to mes_d(B),\ \ n \to \infty,$$

то, враховуючи рівність (3.1), отримуємо твердження леми 3.7. Лему 3.7, а отже й теорему 3.2, доведено. □

3.3. Функціональна гранична теорема для бакстерівських сум дробового броунівського руху

Нехай $\{X(t)|t \geq 0\}$ – випадковий процес дробового броунівського руху з нульовим математичним сподіванням та коваріаційною функцією

$$r(t,s) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right),\ t,s \geq 0,$$

де $H \in (0,1)$.

Збіжність за розподілом нормованих бакстерівських сум для стаціонарного гауссового випадкового процесу досліджувалась у роботі [87]. У статті [107] отримана функціональна центральна гранична теорема для бакстерівських сум гауссового випадкового процесу, кореляційна функція якого $r(t,s), t,s \in R$ має обмежену мішану похідну другого порядку на множині $\{(t,s)|t \neq s\}$. Зауважимо, що дробовий броунівський рух при $H \neq \frac{1}{2}$ не задовольняє цю умову.

Нехай для кожного натурального числа n

$$\lambda_n = \left\{\left[0,\frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right],\ \ldots, \left[\frac{n-1}{n},1\right]\right\}$$

– рівномірне розбиття відрізка $[0,1]$ з кроком $\frac{1}{n}$; $A = (a_0, a_1, \ldots, a_p)$ – вектор p – го порядку; $X_{nj} = X\left(\left[\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}\right], A\right)$ – A-приріст випадкового процесу X на відрізку $\left[\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}\right], 1 \leq j \leq n$. Зауважимо, що

$$EX_{nj} = 0, \quad \mathrm{Var}\ X_{nj} = r\left(\left[\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}\right]^2, A \otimes A\right).$$

У просторі Скорохода $D([0,1])$ функцій без розривів другого роду розглянемо послідовність випадкових процесів

$$S_n(t = \frac{1}{d_n}\sum_{j=1}^{[nt]} G\left(\frac{X_{nj}}{\sqrt{\operatorname{var} X_{nj}}}\right), t \in [0,1];\ n \ge 1,$$

де $G \in L_2\left(R, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dx\right)$, $d_n^2 = \operatorname{var}\left(\sum_{j=1}^{n} G\left(\frac{X_{nj}}{\sqrt{\operatorname{var} X_{nj}}}\right)\right)$.

Теорема 3.3. *Нехай функція* $G \in L_2\left(R, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dx\right)$ *має ранг Ерміта* $m \ge 2$*, задовольняє умовам теореми 3.2 і виконуються наступні умови:*

1) $2H < 2p - \frac{1}{m}$*;*

2) $\inf\limits_{N \ge m} \sum\limits_{l=m}^{N} \frac{J^2(l)}{l!}\sigma_l > 0,$ *де* $J(l), l \ge m$ *– коефіцієнти Чебишова-Ерміта функції* G *,*

$$\sigma_l = \frac{(-1)^l}{2^l C_1^l}\sum_{j=2}^{\infty} b^l(j),\ l \ge m,$$

$$C_1 = -\frac{1}{2}\sum_{i(1)=0}^{p}\sum_{i(2)=0}^{p} a_{i(1)}a_{i(2)}\left|i(1) - i(2)\right|^{2H}\frac{1}{p^{2H}}, \tag{3.46}$$

$$b(j) = \sum_{i(1)=0}^{p}\sum_{i(2)=0}^{p} a_{i(1)}a_{i(2)}\left|j - 1 + \frac{i(1) - i(2)}{p}\right|^{2H},\ j \ge 2. \tag{3.47}$$

Тоді послідовність розподілів випадкових процесів $\{S_n(t) | t \in [0,1]\}, n \ge 1$ *слабко збіжна у просторі Скорохода* $D([0,1])$ *функцій без розривів другого роду до розподілу* W *, породженого стандартним броунівським рухом* $\{w(t) | t \in [0,1]\}$.

Доведення полягає у перевірці умов теореми 3.1 для послідовності серій випадкових величин

$$\left\{ \frac{X_{nj}}{\sqrt{\operatorname{var} X_{nj}}} \mid 1 \le j \le n \right\},\ n \ge 1 \cdot$$

У цьому випадку

$$r_n(i, j) = \frac{r\left(\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right], A \otimes A\right)}{r\left(\left[0, \frac{1}{n}\right] \times \left[0, \frac{1}{n}\right], A \otimes A\right)},\ 1 \le i, j \le n.$$

Зауважимо, що

$$r\left(\left[0, \frac{1}{n}\right] \times \left[0, \frac{1}{n}\right], A \otimes A\right) = -\frac{1}{2} \sum_{i(1)=0}^{p} \sum_{i(2)=0}^{p} a_{i(1)} a_{i(2)} |i(1) - i(2)|^{2H} \frac{1}{n^{2H} p^{2H}}.$$

Таким чином,

$$r\left(\left[0, \frac{1}{n}\right] \times \left[0, \frac{1}{n}\right], A \otimes A\right) = \frac{C_1}{n^{2H}},$$

де стала C_1 визначена в рівності (3.46). Для перевірки умови 1) теореми 3.1 достатньо довести обмеженість послідовності

$$\sum_{j=1}^{n} \left| r_n^m(1, j) \right|,\ n \ge 1. \tag{3.48}$$

За означенням приросту,

$$r_n(1, j) = r\left(\left[0, \frac{1}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right], A \otimes A\right) \frac{n^{2H}}{C_1} =$$

$$= \sum_{i(1)=0}^{p} \sum_{i(2)=0}^{p} a_{i(1)} a_{i(2)} r\left(i_1 h, \frac{j-1}{n} + i(2) h\right) \frac{n^{2H}}{C_1},$$

де $h = 1/(pn)$. В силу наслідку 3.2, існує така стала $C_2 > 0$, що для всіх $j \in \{3, \ldots, n\},\ n \ge 3$ виконуються співвідношення

$$|r_n(1,j)| \le C_2\, h^{2p} \sup\left\{\left|\frac{\partial^{2p} r(s,t)}{\partial s^p \partial t^p}\right| \,\middle|\, 0 \le s \le \frac{1}{n},\ \frac{j-1}{n} \le t \le \frac{j}{n}\right\} \cdot \frac{n^{2H}}{C_1} =$$

$$= C_2 h^{2p}\, 2H|2H-1|\ldots|2H-2p+1| \times$$

$$\times \sup\left\{|t-s|^{2H-2p} \,\middle|\, 0 \le s \le \frac{1}{n},\ \frac{j-1}{n} \le t \le \frac{j}{n}\right\} \cdot \frac{n^{2H}}{C_1} \le$$

$$\le C_3 n^{-2p}\, \frac{n^{2p-2H}}{(j-2)^{2p-2H}} \frac{n^{2H}}{C_1},$$

де $C_3 = C_2\, p^{-2p}\, 2H|2H-1|\ldots|2H-2p+1|$. Таким чином, збіжність ряду

$$\sum_{j=3}^{\infty} \frac{1}{(j-2)^{(2p-2H)m}} \tag{3.49}$$

є достатньою умовою обмеженості послідовності (3.48). В свою чергу, узагальнений гармонічний ряд (3.49) збігається тоді й тільки тоді, коли $H < p - 1/(2m)$. Отже, внаслідок першої умови теореми 3.1, умова 1) теореми 3.1 виконується.

Перевірка виконання другої умови теореми 3.1 зводиться до перевірки співвідношення

$$\sum_{j=3}^{n} \frac{1}{(j-2)^{(2p-2H)k}} = o\left(n^{(m-k)/m}\right),\ n \to \infty \tag{3.50}$$

для $k \in \{1,2,\ldots,m-1\}$. Якщо $(2p-2H)k > 1$, то ряд у лівій частині рівності (3.50) збігається і тому співвідношення (3.50) виконується. При $(2p-2H)k = 1$ відношення нехтування (3.50) також виконується, оскільки для довільного додатного a має місце наступне відношення o-маленьке: $\ln n = o\left(n^{(m-k)/m}\right),\ n \to \infty$. Нехай тепер $(2p-2H)k < 1$. У цьому випадку відношення нехтування (3.50) виконується тоді й тільки тоді, коли $1 - (2p-2H)k < (m-k)/m$. Остання нерівність справедлива при $H < p - 1/(2m)$. Отже, умова 2) теореми 3.1 виконується.

Перейдемо до перевірки третьої умови теореми 3.1. Спочатку дослідимо випадок, коли множини B_1 і B_2 співпадають. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що $B_1 = B_2 = [0,\alpha]$ для деякого фіксованого числа $\alpha \in (0,1]$. Доведемо існування скінченної границі

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{[\alpha n]} r_n^l(i,j) = \alpha \sigma_l .$$

Маємо:

$$\sum_{i,j=1}^{[\alpha n]} r_n^l(i,j) = [\alpha n] + 2\big(([\alpha n]-1) r_n^l(1,2) + ([\alpha n]-2) r_n^l(1,3) + \ldots +$$

$$+ 1 \cdot r_n^l(1,[\alpha n])\big) = [\alpha n]\left(1 + 2\left(\left(1 - \frac{1}{[\alpha n]}\right) r_n^l(1,2) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(1 - \frac{2}{[\alpha n]}\right) r_n^l(1,3) + \ldots + \frac{1}{[\alpha n]} r_n^l(1,[\alpha n])\right)\right).$$

Зауважимо, що $\lim\limits_{n\to\infty} [\alpha n]/n = \alpha$ і переконаємося, що існує скінченна границя

$$\sigma_l = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=2}^{[\alpha n]} \left(1 - \frac{j-1}{[\alpha n]}\right) r_n^l(1,j) .$$

За означенням A-приросту,

$$r_n(1,j) = -\frac{1}{2C_1} b(j), \quad j \ge 2 ,$$

де C_1, $b(j)$ визначені в рівностях (3.46), (3.47). Доведемо, що з умов теореми 3.3 випливає абсолютна збіжність ряду із загальним членом $b^l(j)$ для довільного $l \ge m$. Дійсно,

$$b(j+1) = j^{2H} \sum_{i(i)=0}^{p} \sum_{i(2)=0}^{p} a_{i(1)} a_{i(2)} \left|1 + (i(1) - i(2))/(pj)\right|^{2H}, \quad j \ge 1.$$

Враховуючи, що величина

$$\sum_{i(i)=0}^{p} \sum_{i(2)=0}^{p} a_{i(1)} a_{i(2)} \left|1 + \left(i(1) - i(2)\right)/\left(pj\right)\right|^{2H}$$

є приростом $2p$-го порядку функції $\left|1+t\right|^{2H}, t \in R$ на відрізку $\left[-1/j, 1/j\right]$, отримуємо співвідношення підпорядкованості

$$b(j+1) = O\left(\frac{1}{j^{2p-2H}}\right), \; j \to \infty .$$

При виконанні умов теореми 3.3, при $l \ge m$ ряд із загальним членом $b^l(j), \; j \ge 2$ абсолютно збіжний. Отже, існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=2}^{[\alpha n]} \left(1 - \frac{j-1}{[\alpha n]}\right) r_n^l(1, j) = \frac{(-1)^l}{2^l C_1^{\,l}} \sum_{j=2}^{\infty} b^l(j).$$

Нехай тепер множини B_1, B_2 не перетинаються. Доведемо, що для довільного $\alpha \in (0,1)$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=[\alpha n]}^{n} \left(n - (j-1)\right) \left|r_n^l(1, j)\right| \to 0, \; n \to \infty . \qquad (3.51)$$

Із цього співвідношення випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{u \in B(1)} \sum_{v \in B(2)} r_n^l(u, v) = 0.$$

Збіжність до нуля у (3.51) має місце внаслідок нерівності

$$\frac{1}{n} \sum_{j=[\alpha n]}^{n} \left(n - (j-1)\right) \left|r_n^l(1, j)\right| \le \sum_{j=[\alpha n]}^{\infty} \left|r_n^l(1, j)\right| = \frac{1}{2C_1} \sum_{j=[\alpha n]}^{\infty} \left|b^l(j)\right|$$

та абсолютної збіжності ряду із загальним членом $b^l(j)$. Таким чином, умова 3) теореми 3.3 виконується при

$$\sigma_l = \frac{(-1)^l}{2^l C_1^l} \sum_{j=2}^{\infty} b^l(j), \, l \ge m.$$

Четверта умова теореми 3.1 випливає з умови 2) теореми 3.3. Отже, внаслідок теореми 3.2, твердження теореми 3.3 виконується. □

При $A=(1,-2,1)$, $G=H_2$ із теореми 3.3 випливає наступний наслідок.

Наслідок 3.1. *Нехай*

$$S_n(t)=\frac{1}{d_n}\sum_{j=1}^{[nt]}\left(\frac{n^{2H}X_{kj}^2}{C(H)}-1\right),\ t\in[0,1],$$

де $X_{kj}=X\left(\frac{j-1}{n}\right)-2X\left(\frac{j-1}{n}+\frac{1}{2n}\right)+X\left(\frac{j}{n}\right)$, $C(H)=\frac{4}{2^{2H}}-1$.

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{d_n}{\sqrt{n}\sigma_2}=1$, *де* $\sigma_2^2=\frac{1}{4C^2(H)}\sum_{j=2}^{\infty}b^2(j)$,

$$b(j)=6(j-1)^{2H}-4(j-1{,}5)^{2H}-4(j-0{,}5)^{2H}+(j-2)^{2H}+j^{2H},$$

і послідовність розподілів випадкових процесів $\{S_n(t)|t\in[0,1]\}$, $n\geq 1$ *слабко збіжна у просторі Скорохода* $D([0,1])$ *функцій без розривів другого роду до розподілу* W *, породженого стандартним броунівським рухом* $\{w(t)|t\in[0,1]\}$.

Зокрема, при $t=1$ отримуємо наступне твердження.

Наслідок 3.2. *Послідовність випадкових величин*

$$S_n=\sqrt{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{n^{2H-1}}{C(H)}\left(X\left(\frac{j-1}{n}\right)-2X\left(\frac{j-1}{n}+\frac{1}{2n}\right)+X\left(\frac{j}{n}\right)\right)^2-1\right)$$

асимптотично нормальна із середнім нуль і дисперсією σ_2^2.

3.4. Функціональна центральна гранична теорема для бакстерівських сум гауссових випадкових полів

Нехай $X(t), t\in R^d$, $d\geq 2$ – гауссове випадкове поле з нульовим математичним сподіванням та кореляційною функцією $r(t,s)$; $A-$ d-вимірна матриця з прикладу 1.1, яка задає приріст $X(q,A)$ порядку d випадкового поля X на d -вимірному паралелепіпеді $q \subset R^d$. Функція $G \in L_2\left(R, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dx\right)$.

Через λ_n позначимо рівномірне розбиття одиничного d-вимірного паралелепіпеда $[0,1]^d$

$$\lambda_n = \{q(k) | k = (k_1,\ldots,k_d),\ 0 \le k_i \le n-1,\ 1 \le i \le d\},$$

де $q(k) = \left[\frac{k_1}{n}, \frac{k_1+1}{n}\right] \times \ldots \times \left[\frac{k_d}{n}, \frac{k_d+1}{n}\right]$.

Розглянемо послідовність східчастих випадкових полів

$$S_n(t) = \sum_{i \in A(n,t)} G\left(\frac{X(q(i),A)}{\sqrt{\operatorname{var} X(q(i),A)}}\right),\ t = (t_1,\ldots,t_d) \in [0,1]^d,$$

де $A(n,t) = \{i = (i_1,\ldots,i_d) | 0 \le i_k \le [nt_k] - 1, 1 \le k \le d,\ t = (t_1,\ldots,t_d)\}$.

Нехай, далі, $d_n^2 = \operatorname{var} S_n(1)$,

$$V_n(t) = \frac{1}{d_n} S_n(t),\ t \in [0,1]^d,\ n \ge 1.$$

Зауважимо, що в правій частині рівності (3.52) n^d доданків.

Означення 3.3. *Неперервне в середньому квадратичному випадкове поле $X(t), t \in R^d$ називається випадковим полем з однорідними A-приростами, якщо для довільних $a, b \in R^d$ з додатними координатами існує функція $f \in C(R^d)$ така, що*

$$E(X([t-a,t],A)X([s-b,s],A)) = f(t-s),\ t,s \in R^d.$$

Наприклад, випадкове поле з нульовим математичним сподіванням і кореляційною функцією (1.36) є випадковим полем з однорідними A-приростами, де A – d-вимірна матриця, визначена рівністю (1.4).

Теорема 3.4. *Нехай* $X(t), t \in R^d$, $d \geq 2$ – *гауссове випадкове поле з однорідними* A*-приростами, нульовим математичним сподіванням, кореляційною функцією* $r(t,s)$, *функція* G *має ранг Ерміта* m *і виконуються наступні умови:*

1) кореляційна функція $r(t,s)$ – $2d$ *раз неперервно диференційовна при* $t \neq s$ *і для деякого показника* $\theta \in R$, *сталої* $L > 0$ *має місце нерівність*

$$\left| \frac{\partial^{2d} r(t,s)}{\partial t_1 .. \partial t_d \partial s_1 .. \partial s_d} \right| \leq \frac{L}{\|t-s\|^{\theta}},$$

де $\|\cdot\|$ – *евклідова норма в* R^d;

2) для деяких показника $\alpha > 0$ *і додатної сталої* C, *для довільного паралелепіпеда* $q = [(0,\ldots,0), (h,\ldots,h)]$, $h > 0$ *виконується нерівність*

$$E(X(q,A))^2 \geq Ch^{\alpha};$$

3) $\theta > \dfrac{d}{m}$ *і* $\alpha \leq 2d - \theta$;

4) для довільних $t, s \in [0,+\infty)^d$ *існує скінченна границя*

$$\lim_{h \to 0+} \frac{r([ht, ht+y] \times [hs, hs+y], A \otimes A)}{r([0,y]^2, A \otimes A)} =: g(t-s),$$

де $y = (h,\ldots,h) \in R^d$;

5) $\inf\limits_{N \geq m} \sum\limits_{l=m}^{N} \dfrac{J^2(l)}{l!} \sigma_l > 0$,

де $J(l) = EG(Y) H_l(Y), l \geq m$; Y – *стандартна гауссова випадкова величина;* $\sigma_l = 1 + \sum\limits_{\|k\| \geq 1} g^l(k), l \geq m$.

Тоді скінченновимірні розподіли випадкових полів $\left\{ V_n(t),\ t \in [0,1]^d,\ n \geq 1 \right\}$ *слабко збігаються до скінченновимірних розподілів поля Ченцова* $\left\{ W_n(t),\ t \in [0,1]^d \right\}$.

*Доведення***.** Покладемо

$$X_{nj}=\frac{X\left(q(j),A\right)}{\sqrt{\operatorname{var}X\left(q(j),A\right)}},\ j\in A(n),\, n\geq 1,$$

де $A(n)=\{j=(j_1,\ldots,j_d)|\,0\leq j_k\leq n-1, 1\leq k\leq d\}$; $r_n(i,j)=E\left(X_{ni}X_{nj}\right),\ i,j\in A(n)$, $n\geq 1$.

Покажемо, що

$$\sup_{i\in A(n)}\sum_{j\in A(n)}\left|r_n^m(i,j)\right|=O(1),\ n\to\infty, \tag{3.53}$$

і зауважимо, що із цього співвідношення випливає умова 1) теореми 3.1. Для фіксованого мультиіндексу $i\in A(n)$ покладемо

$$As(n,i)=\left\{j\in A(n)|\max_{1\leq k\leq d}\left|i_k-j_k\right|\geq 2\right\}.$$

Оскільки для довільного мультиіндексу $i\in A(n)$ число елементів множини $A(n)\setminus As(n,i)$ не перевищує 3^d, то для доведення відношення підпорядкованості (3.53) достатньо переконатися, що

$$\sup_{i\in A(n)}\sum_{j\in As(n,i)}\left|r_n^m(i,j)\right|=O(1),\ n\to\infty. \tag{3.54}$$

Скористаємося рівністю

$$r_n(i,j)=\frac{r\left(q(i)\times q(j),A\otimes A\right)}{\sqrt{r\left(q(i)\times q(i),\,A\otimes A\right)}\sqrt{r\left(q(j)\times q(j),\,A\otimes A\right)}},\ i,j\in A(n).$$

В силу наслідку 1.2 та умови 1), існує додатна стала C_1, така, що для довільних мультиіндексів $i\in A(n),\ j\in As(n,i),\ n\geq 3$ виконується нерівність

$$\left|r\left(q(i)\times q(j),A\otimes A\right)\right|\leq\frac{C_1 n^{\theta}}{n^{2d}\left\|i-j\right\|^{\theta}}=\frac{C_1}{\left\|i-j\right\|^{\theta}}n^{\theta-2d}.$$

Враховуючи умову 2), для цих же мультиіндексів $i,\,j$ отримуємо нерівність

$$|r_n(i,j)| \le \frac{C_1}{C}\frac{1}{\|i-j\|^{\theta}} n^{\alpha+\theta-2d}. \qquad 3(.55)$$

Тому

$$\sup_{i\in A(n)} \sum_{j\in As(n,i)} \left|r_n^m(i,j)\right| \le \frac{2C_1}{C} n^{m(\alpha+\theta-2d)} \sum_{j\in As(0,n)} \frac{1}{\|j\|^{m\theta}}.$$

При $\theta > \dfrac{d}{m}$ кратний ряд $\sum_{\|j\|\ge 1} \dfrac{1}{\|j\|^{m\theta}}$ збігається. Тому з умови $\alpha \le 2d-\theta$ випливає відношення підпорядкованості (3.54). Перейдемо до перевірки умови 3) теореми 3.1. Нехай d - вимірні паралелепіпеди $B_1, B_2 \subset [0,1]^d$ не мають спільних внутрішніх точок. Покажемо, що для $l \ge m$

$$\frac{1}{n^d} \sum_{i\in B(1,n)} \sum_{j\in B(2,n)} \left|r_n^l(i,j)\right| \to 0,\ n\to\infty, \qquad (3.56)$$

де $B(k,n) = \left\{ i \in A(n) \middle| \frac{i}{n} \in B_k \right\},\ k = 1,2$.

Оскільки d - вимірні паралелепіпеди $B_1, B_2 \subset [0,1]^d$ не мають спільних внутрішніх точок, то існує послідовність $\{b(n): n \ge 1\}$, $b(n) \to +\infty$, така, щодля $i \in B(1,n),\ j \in B(2,n)$ виконується нерівність $\|i-j\| \ge b(n)$. Покладемо $L(n) = \{(i,j) | i,j \in A(n), \|i-j\| \ge b(n)\}$. Внаслідок нерівності (3.55), маємо :

$$\frac{1}{n^d} \sum_{i\in B(1,n)} \sum_{j\in B(2,n)} \left|r_n^l(i,j)\right| \le \frac{1}{n^d}\frac{C_1}{C} n^{(\alpha+\theta-2d)l} \sum_{(i,j)\in L(n)} \frac{1}{\|i-j\|^{l\theta}} = o(1), n\to\infty,$$

оскільки кратний ряд $\sum_{\|k\|\ge 1} \dfrac{1}{\|k\|^{l\theta}}$ збігається. Нехай тепер $B_1 = B_2 = B$.

Не втрачаючи загальності, можна вважати, що $B = [0,a_1]\times\ldots\times[0,a_d]$. Оскільки випадкове поле X має однорідні A-прирости, то можна покласти

$$r_n(i,j) =: \rho_n(i-j),\ i,j \in A(n).$$

Покладемо $B(n)=\left\{i\in A(n)\middle|\frac{i}{n}\in B\right\}$. Далі, при $l\geq m$

$$\frac{1}{n^d}\sum_{i\in B(n)}\sum_{j\in B(n)}r_n^l(i,j)=\frac{1}{n^d}\sum_{i\in B(n)}\sum_{j\in B(n)}\rho_n^l(i-j)=$$

$$=\frac{card\,B(n)}{n^d}\rho_n(0)+\sum_{k\in Ls(n)}\left(\frac{[a_1n]}{n}-\frac{|k_1|}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{[a_dn]}{n}-\frac{|k_d|}{n}\right)\rho_n^l(k),$$

де $Ls(n)=\{i-j\,|\,i,j\in B(n),\,i\neq j\}$.

Із нерівності (3.55) випливає, що існує додатна стала C_2, така, що для всіх $k\in\left\{i-j|i,j\in A(n),\max\limits_{1\leq s\leq d}|i_s-j_s|\geq 2\right\}$ має місце нерівність

$$|\rho_n(k)|\leq C_2\frac{1}{\|k\|^{\theta}}.$$

Оскільки для довільного $l\geq m$, внаслідок умови 3), $l\theta>d$, то кратний ряд $\sum\limits_{\|k\|\geq 1}\frac{1}{\|k\|^{l\theta}}$ збігається. Далі, внаслідок умови 4), для довільного $k\in Z^d$ існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{[a_1\,n]}{n}-\frac{|k_1|}{n}\right)\times\ldots\times\left(\frac{[a_d\,n]}{n}-\frac{|k_d|}{n}\right)\rho_n^l=a_1\cdot\ldots\cdot a_d\,g^l(k),$$

де l – натуральне число, $l\geq m$. Таким чином, існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^d}\sum_{i,\,j\in B(n)}r_n^l(i,j)=mes_d(B)\left(1+\sum_{\|k\|\geq 1}g^l(k)\right)$$

і умова 3) теореми 3.1 виконується при $\sigma_l=1+\sum\limits_{\|k\|\geq 1}g^l(k)$. З умови 5) теореми 3.4 випливає умова 4) теореми 3.3. Отже, умови теореми 3.1 виконані, і, внаслідок теореми 3.1 має місце твердження теореми 3.4. □

Наслідок 4.3. *Нехай виконуються умови теореми 3.4. Тоді послідовність випадкових величин* $V_n(1), n \geq 1$ *асимптотично нормальна із середнім нуль та дисперсією одиниця.*

Теорема 3.5. *Нехай випадкове поле* X *і функція* $G \in L_2\left(R, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx\right)$ *задовольняють умовам теореми 3.4 і, крім того, функція* G *задовольняє умовам теореми 3.2. Тоді послідовність розподілів у просторі Скорохода* $D\left([0,1]^d\right)$ *випадкових полів* $\left\{V_n(t), t \in [0,1]^d : n \geq 1\right\}$ *слабко збігається до розподілу випадкового поля Ченцова* $W(t), t \in [0,1]^d$.

Це твердження випливає з теорем 3.1 і 3.2 та теореми 3.4.

Приклад 4.4. Нехай $X(t), t \in R^d$ – багатопараметричний дробовий броунівський рух – гауссове випадкове поле з нульовим математичним сподіванням і кореляційною функцією (1.36) (приклад 1.11), $G(x) = H_2(x) = x^2 - 1$. Це випадкове поле задовольняє умовам теореми 3.4 при $\alpha = \beta, \theta = 2d - \beta, m = 2$. Дійсно, багатопараметричний дробовий броунівський рух – випадкове поле з однорідними *A*-приростами, умова 1) теореми 3.4 перевірена у прикладі 2.11. Там же знаходимо, що для $q = [t, t + y]$, де $t = (t_1, \ldots, t_d), t + y = (t_1 + h, \ldots, t_d + h), h > 0$, справджується рівність $EX^2(q, A) = c(\beta, A) h^\beta$, де стала $c(\beta, A)$ визначена у зауваженні 1.8. Таким чином, друга умова теореми 3.4 виконується при $\alpha = \beta$. Умова 3) теореми 3.4 також виконується, оскільки $2d - \beta > d/2$ при $\beta \in (0,2)$ і $d \geq 2$ та $\beta + \theta = 2d$. Перейдемо до перевірки умови 4) теореми 3.4. Нехай $t, s \in [0, +\infty)^d$, $y = (h, \ldots, h) \in R^d$, $h > 0$. Тоді

$$r\left([ht, ht + y] \times [hs, hs + y], A \otimes A\right) =$$

$$= -\frac{c}{2} \sum_{i(1), \ldots, i(d) = 0}^{1} \; \sum_{j(1), \ldots, j(d) = 0}^{1} (-1)^{|i| + |j|} \|t - s + i - j\|^\beta ,$$

де $i=(i(1),\ldots,i(d)),\ j=(j(1),\ldots,j(d));\ |i|=i(1)+\ldots+i(d),\ |j|=j(1)+\ldots+j(d).$

Отже, умова 4) теореми 3.4 виконується для

$$g(t-s)=-\frac{c}{2c(\beta,A)}\sum_{i(1),\ldots,i(d)=0}^{1}\ \sum_{j(1),\ldots,j(d)=0}^{1}(-1)^{|i|+|j|}\|t-s+i-j\|^{\beta}.$$

Далі, $\sigma_2=1+\sum_{\|k\|\ge 1}g^2(k)$ і умова 5) теореми 3.4, очевидно, виконується. Зауважимо, що, внаслідок теореми 3.1, $\operatorname{Var} S_n \sim 2n^d\sigma_2,\ n\to\infty$.

В силу наслідку 3.3, послідовність випадкових величин

$$\sqrt{n^d}\,\frac{n^{\beta-d}\sum_{i\in A(n)}X^2(q(i),A)-c(\beta,A)}{c(\beta,A)\sqrt{2\sigma_2}}$$

асимптотично нормальна із середнім нуль і дисперсією одиниця.

РОЗДІЛ 4. ОЦІНЮВАННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ЛІНІЙНИХ ТРЕНДІВ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ

У цьому розділі досліджується задача оцінювання за допомогою бакстерівських статистик коефіцієнтів лінійного тренда (під лінійним трендом ми розуміємо лінійну комбінацію) випадкових полів за спостереженнями у присутності заважаючого випадкового поля. Будуються неасимптотичні довірчі області для коефіцієнтів тренда. Наводяться приклади застосування одержаних результатів.

4.1. Постановка задачі оцінювання та припущення

Нехай $X_1(t),\ X_2(t),\dots,\ X_m(t),\ \eta(t)$, де $t=(t_1,t_2,\dots,t_m)\in[0,1]^m$ – незалежні однорідні гауссові випадкові поля з нульовими середніми та коваріаційними функціями $r_j(t),\ 1\le j\le m,\ r_\eta(t),\ t\in[0,1]^m$ відповідно. Розглянемо випадкове поле

$$Y(t)=\theta_1X_1(t)+\theta_2X_2(t)+\ldots+\theta_mX_m(t)+\eta(t),\ t\in[0,1]^m, \qquad (4.1)$$

що є сумою лінійного тренда $\theta_1X_1(t)+\theta_2X_2(t)+\ldots+\theta_mX_m(t)$ з коефіцієнтами $\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_m$ та заважаючого випадкового поля $\eta(t)$. За спостереженнями випадкового поля $Y(t),\ t\in[0,1]^m$ у точках

$$\left\{\left(\underbrace{1,\dots,1,}_{i-1}\frac{k}{a_n},1,\dots,1\right),0\le k\le a_n,1\le i\le m\right\},$$

де $a_n\in\mathrm{N}$, $n\ge1$; $a_n\to\infty$ при $n\to\infty$, потрібно оцінити невідомі коефіцієнти тренда $\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_m\in[0,d]$, де $d>0$ – фіксована відома стала. Вектор $\theta=(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_m)\in[0,d]^d$ назвемо параметром тренда. Надалі припустимо, що для довільного $\alpha > 0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-\alpha}$ збігається, а коваріаційні функції $r_j(t), 1 \le j \le m, r_\eta(t), t \in [0,1]^m$ задовольняють наступні умови:

(A1) існують сталі $c_{ji} > 0$, $q_{ji} > 0$, $\delta_{ji} > 0$, $H_{ji} \in (0,1)$, $1 \le j, i \le m$; $H_{ii} < H_{ji}$, $1 \le j, i \le m,\ j \ne i$, такі, що для всіх $h \in (0,1)$:

$$\left| r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},0,1,\ldots,1\right) - r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},h,1,\ldots,1\right) - c_{ji} h^{2H_{ji}} \right| \le q_{ji} h^{2H_{ji}+\delta_{ji}};$$

(A2) існують сталі $L_{ji} > 0, 1 \le j, i \le m, \tau \in (0,1)$ такі, що:

$$\left| \frac{\partial^2 r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\tau,1,\ldots,1\right)}{\partial \tau^2} \right| \le \frac{L_{ji}}{\tau^{2-2H_{ji}}};$$

(A3) існують сталі $\beta_i > 2H_{ii}$ та $b_i > 0, 1 \le i \le m$ такі, що для всіх $h \in (0,1)$:

$$\left| r_\eta\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},0,1,\ldots,1\right) - r_\eta\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},h,1,\ldots,1\right) \right| \le b_i h^{\beta_i}, \ 1 \le i \le m.$$

4.2. Консистентна оцінка коефіцієнтів лінійного тренда

Для випадкового поля $Y(t), t \in [0,1]^m$ розглянемо такі послідовності бакстерівських сум $\widehat{S}_n^{(i)}(Y), 1 \le i \le m$:

$$\widehat{S}_n^{(i)}(Y) = a_n^{2H_{ii}-1} \sum_{k=1}^{a_n} \left(Y\left(\underbrace{1,\ldots,1,}_{i-1} \frac{k}{a_n},1,\ldots,1 \right) - Y\left(\underbrace{1,\ldots,1,}_{i-1} \frac{k-1}{a_n},1,\ldots,1 \right) \right)^2 ; n \geq 1.$$

Покладемо:

$$\Delta_{(i)} X_{k,n}^{(j)} = X_j\left(\underbrace{1,\ldots,1,}_{i-1} \frac{k}{a_n},1,\ldots,1 \right) - X_j\left(\underbrace{1,\ldots,1,}_{i-1} \frac{k-1}{a_n},1,\ldots,1 \right), 1 \leq i, j \leq m,$$

$$\Delta_{(i)} \eta_{k,n} = \eta\left(\underbrace{1,\ldots,1,}_{i-1} \frac{k}{a_n},1,\ldots,1 \right) - \eta\left(\underbrace{1,\ldots,1,}_{i-1} \frac{k-1}{a_n},1,\ldots,1 \right), 1 \leq i \leq m,$$

$$\Delta_{(i)} Y_{k,n} = Y\left(\underbrace{1,\ldots,1,}_{i-1} \frac{k}{a_n},1,\ldots,1 \right) - Y\left(\underbrace{1,\ldots,1,}_{i-1} \frac{k-1}{a_n},1,\ldots,1 \right), 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq a_n.$$

Теорема 4.1. *Нехай виконуються припущення (А1)-(А3). Тоді статистика*

$$\widehat{\theta}_n = \left(\widehat{\theta}_n^{(1)}, \widehat{\theta}_n^{(2)}, \ldots, \widehat{\theta}_n^{(m)} \right) = \left(\sqrt{\frac{\widehat{S}_n^{(1)}(Y)}{2c_{1,1}}}, \sqrt{\frac{\widehat{S}_n^{(2)}(Y)}{2c_{2,2}}}, \ldots, \sqrt{\frac{\widehat{S}_n^{(m)}(Y)}{2c_{m,m}}} \right)$$

є сильно консистентною оцінкою параметра тренда $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)$ *за спостереженнями випадкового поля (4.1).*

Доведення. Обчислимо математичне сподівання бакстерівських сум $\widehat{S}_n^{(i)}(Y)$, $1 \leq i \leq m$:

$$E\widehat{S}_n^{(i)}(Y) = a_n^{2H_{ii}-1} \sum_{k=1}^{a_n} E\left(Y\left(\underbrace{1,\ldots,1,}_{i-1} \frac{k}{a_n},1,\ldots,1 \right) - Y\left(\underbrace{1,\ldots,1,}_{i-1} \frac{k-1}{a_n},1,\ldots,1 \right) \right)^2 =$$

$$= a_n^{2H_{ii}-1} \sum_{k=1}^{a_n} E\left(\theta_1 \Delta_{(i)} X_{k,n}^{(1)} + \theta_2 \Delta_{(i)} X_{k,n}^{(2)} + \ldots + \theta_m \Delta_{(i)} X_{k,n}^{(m)} + \Delta_{(i)} \eta_{k,n} \right)^2 =$$

$$= a_n^{2H_{ii}-1} \sum_{k=1}^{a_n} \left(\theta_1^2 E\left(\Delta_{(i)} X_{k,n}^{(1)} \right)^2 + \theta_2^2 E\left(\Delta_{(i)} X_{k,n}^{(2)} \right)^2 + \ldots + \theta_m^2 E\left(\Delta_{(i)} X_{k,n}^{(m)} \right)^2 + \right.$$

$$+E\left(\Delta_{(i)}\eta_{k,n}\right)^2\Big)=a_n^{2H_{ii}-1}\sum_{k=1}^{a_n}\left(2\theta_1^2\left(r_1\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},0,1,\ldots,1\right)-r_1\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{1}{a_n},1,\ldots,1\right)\right)+\right.$$

$$+2\theta_2^2\left(r_2\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},0,1,\ldots,1\right)-r_2\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{1}{a_n},1,\ldots,1\right)\right)+\ldots+2\theta_m^2\left(r_m\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},0,1,\ldots,1\right)-\right.$$

$$\left.-r_m\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{1}{a_n},1,\ldots,1\right)\right)+2\left(r_\eta\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},0,1,\ldots,1\right)-r_\eta\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{1}{a_n},1,\ldots,1\right)\right).$$

Далі, внаслідок умов (A1), (A3), одержимо:

$$a_n^{2H_{ii}-1}\theta_i^2\sum_{k=1}^{a_n}E\left(\Delta_{(i)}X_{k,n}^{(i)}\right)^2=2\theta_i^2 a_n^{2H_{ii}}\left(r_i\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},0,1,\ldots,1\right)-\right.$$

$$\left.-r_i\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{1}{a_n},1,\ldots,1\right)\right)\to 2c_{i,i}\,\theta_i^2\,,n\to\infty,1\le i\le m;$$

$$a_n^{2H_{ii}-1}\theta_j^2\sum_{k=1}^{a_n}E\left(\Delta_{(i)}X_{k,n}^{(j)}\right)^2=2\theta_j^2 a_n^{2H_{ii}}\left(r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},0,1,\ldots,1\right)-\right.$$

$$\left.-r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{1}{a_n},1,\ldots,1\right)\right)\le\frac{2\theta_j^2\left(c_{j,i}+q_{j,i}\right)}{a_n^{2H_{ji}-2H_{ii}}}\to 0,\,n\to\infty,1\le i,\,j\le m,\;j\ne i\,,$$

$$a_n^{2H_{ii}-1}\sum_{k=1}^{a_n}E\left(\Delta_{(i)}\eta_{k,n}\right)^2=2a_n^{2H_{ii}}\left(r_\eta\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},0,1,\ldots,1\right)-r_\eta\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{1}{a_n},1,\ldots,1\right)\right)\le$$

$$\le\frac{2b_i}{a_n^{\beta_i-2H_{ii}}}\to 0,n\to\infty,1\le i\le m.$$

Отже, $E\widehat{S}_n^{(i)}(Y)\to 2c_{i,i}\theta_i^2\,,n\to\infty,1\le i\le m$.

За допомогою формули Ісерліса (1.44) для обчислення математичного сподівання добутку випадкових величин, які мають сумісний гауссовий розподіл з нульовим середнім значенням для отримаємо, що

$$E\left(\widehat{S}_n^{(i)}(Y)\right)^2 = a_n^{2(2H_{ii}-1)} E\left(\sum_{k=1}^{a_n}\left(\Delta_{(i)}Y_{k,n}\right)^2\right)^2 = a_n^{2(2H_{ii}-1)}\sum_{k,l=1}^{a_n} E\left(\left(\Delta_{(i)}Y_{k,n}\right)^2 \times\right.$$

$$\left.\times\left(\Delta_{(i)}Y_{l,n}\right)^2\right) = a_n^{2(2H_{ii}-1)}\sum_{k,l=1}^{a_n}\left(E\left(\Delta_{(i)}Y_{k,n}\right)^2 E\left(\Delta_{(i)}Y_{l,n}\right)^2 + 2\left(E\Delta_{(i)}Y_{k,n}\Delta_{(i)}Y_{l,n}\right)^2\right);$$

$$\operatorname{Var}\widehat{S}_n^{(i)}(Y) = E\left(\widehat{S}_n^{(i)}(Y)\right)^2 - \left(E\widehat{S}_n^{(i)}(Y)\right)^2 = a_n^{2(2H_{ii}-1)}\sum_{k,l=1}^{a_n}\left(E\left(\Delta_{(i)}Y_{k,n}\right)^2 E\left(\Delta_{(i)}Y_{l,n}\right)^2 +\right.$$

$$\left.+\,2\left(E\Delta_{(i)}Y_{k,n}\Delta_{(i)}Y_{l,n}\right)^2\right) - a_n^{2(2H_{ii}-1)}\left(\sum_{k=1}^{a_n} E\left(\Delta_{(i)}Y_{k,n}\right)^2\right)^2 =$$

$$= 2a_n^{2(2H_{ii}-1)}\sum_{k,l=1}^{a_n}\left(E\Delta_{(i)}Y_{k,n}\Delta_{(i)}Y_{l,n}\right)^2 =$$

$$= 2a_n^{2(2H_{ii}-1)}\left(\sum_{k=1}^{a_n}\left(E\left(\Delta_{(i)}Y_{k,n}\right)^2\right) + 2\sum_{\substack{k,l=1\\k<l}}^{a_n}\left(E\Delta_{(i)}Y_{k,n}\Delta_{(i)}Y_{l,n}\right)^2\right), 1\le i\le m. \qquad (4.2)$$

Оцінимо зверху вирази для $E\left(\Delta_{(i)}Y_{k,n}\right)^2$ та $\left(E\left(\Delta_{(i)}Y_{k,n}\Delta_{(i)}Y_{l,n}\right)\right)^2$, $1\le i\le m$.

Для цього зробимо наступні перетворення:

$$E\left(\Delta_{(i)}Y_{k,n}\right)^2 = E\left(\theta_1\Delta_{(i)}X_{k,n}^{(1)} + \theta_2\Delta_{(i)}X_{k,n}^{(2)} + \ldots + \theta_m\Delta_{(i)}X_{k,n}^{(m)} + \Delta_{(i)}\eta_{k,n}\right)^2 =$$

$$= E\left(\theta_1^2\left(\Delta_{(i)}X_{k,n}^{(1)}\right)^2 + \theta_2^2\left(\Delta_{(i)}X_{k,n}^{(2)}\right)^2 + \ldots + \theta_m^2\left(\Delta_{(i)}X_{k,n}^{(m)}\right)^2 + \left(\Delta_{(i)}\eta_{k,n}\right)^2\right).$$

З умов (A1), (A3) випливає, що для $1\le j,i\le m$

$$E\left(\Delta_{(i)}X_{k,n}^{(j)}\right)^2 = 2\left(r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},0,1,\ldots,1\right) - r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{1}{a_n},1,\ldots,1\right)\right) \le \frac{2\left(c_{j,i}+q_{j,i}\right)}{a_n^{2H_{ji}}},$$

$$E\left(\Delta_{(i)}\eta_{k,n}\right)^2 = 2\left(r_\eta\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},0,1,\ldots,1\right) - r_\eta\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{1}{a_n},1,\ldots,1\right)\right) \le \frac{2b_i}{a_n^{\beta_i}}.$$

Нижче застосуємо нерівність $(a_1+\ldots+a_m)^2 \le m\left(a_1^2+\ldots+a_m^2\right)$, яка має місце для довільних дійсних $a_i, 1\le i\le m$:

$$a_n^{2(2H_{ii}-1)}\sum_{k=1}^{a_n}\left(E\left(\Delta_{(i)}Y_{k,n}\right)^2\right)^2 \le a_n^{2(2H_{ii}-1)}a_n\left(\theta_1^2\frac{2\left(c_{1,i}+q_{1,i}\right)}{a_n^{2H_{1i}}}+\right.$$

$$\left.+\theta_2^2\frac{2\left(c_{2,i}+q_{2,i}\right)}{a_n^{2H_{2i}}}+\ldots+\theta_m^2\frac{2\left(c_{m,i}+q_{m,i}\right)}{a_n^{2H_{mi}}}+\frac{2b_i}{a_n^{\beta_i}}\right)^2 \le$$

$$\le 4(m+1)\cdot a_n^{4H_{ii}-1}\left(\theta_1^4\frac{\left(c_{1,i}+q_{1,i}\right)^2}{a_n^{4H_{1i}}}+\theta_2^4\frac{\left(c_{2,i}+q_{2,i}\right)^2}{a_n^{4H_{2i}}}+\ldots+\theta_m^4\frac{\left(c_{1,i}+q_{m,i}\right)^2}{a_n^{4H_{mi}}}+\right.$$

$$\left.+\frac{b_i^2}{a_n^{2\beta_i}}\right) = 4(m+1)\left(\theta_1^4\frac{\left(c_{1,i}+q_{1,i}\right)^2}{a_n}+\theta_2^4\frac{\left(c_{2,i}+q_{2,i}\right)^2}{a_n^{4H_{2i}-4H_{ii}+1}}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\theta_m^4\frac{\left(c_{m,1}+q_{m,1}\right)^2}{a_n^{4H_{mi}-4H_{ii}+1}}+\frac{b_i^2}{a_n^{2\beta_i-4H_{ii}+1}}\right), 1\le i\le m. \qquad (4.3)$$

При $k<l, 1\le k,l\le m$ отримаємо

$$E\left(\Delta_{(i)}Y_{k,n}\Delta_{(i)}Y_{l,n}\right) = E\left(\theta_1\Delta_{(i)}X_{k,n}^{(1)}+\theta_2\Delta_{(i)}X_{k,n}^{(2)}+\ldots+\theta_m\Delta_{(i)}X_{k,n}^{(m)}+\Delta_{(i)}\eta_{k,n}\right)\times$$

$$\times\left(\theta_1\Delta_{(i)}X_{l,n}^{(1)}+\theta_2\Delta_{(i)}X_{l,n}^{(2)}+\ldots+\theta_m\Delta_{(i)}X_{l,n}^{(m)}+\Delta_{(i)}\eta_{l,n}\right)=$$

$$=\theta_1^2E\left(\Delta_{(i)}X_{k,n}^{(1)}\Delta_{(i)}X_{l,n}^{(1)}\right)+\theta_2^2E\left(\Delta_{(i)}X_{k,n}^{(2)}\Delta_{(i)}X_{l,n}^{(2)}\right)+\ldots+$$

$$+\theta_m^2E\left(\Delta_{(i)}X_{k,n}^{(m)}\Delta_{(i)}X_{l,n}^{(m)}\right)+E\left(\Delta_{(i)}\eta_{k,n}\Delta_{(i)}\eta_{l,n}\right);$$

$$\left(E\left(\Delta_{(i)}Y_{k,n}\Delta_{(i)}Y_{l,n}\right)\right)^2 \le (m+1)\left(\theta_1^4\left(E\left(\Delta_{(i)}X_{k,n}^{(1)}\Delta_{(i)}X_{l,n}^{(1)}\right)\right)^2 +\right.$$

$$+\theta_2^4\left(E\left(\Delta_{(i)}X_{k,n}^{(2)}\Delta_{(i)}X_{l,n}^{(2)}\right)\right)^2 + \ldots + \theta_m^4\left(E\left(\Delta_{(i)}X_{k,n}^{(m)}\Delta_{(i)}X_{l,n}^{(m)}\right)\right)^2 +$$

$$\left. +\left(E\left(\Delta_{(i)}\eta_{k,n}\Delta_{(i)}\eta_{l,n}\right)\right)^2\right). \qquad (4.4)$$

Вираз $\left(E\left(\Delta_{(i)}\eta_{k,n}\Delta_{(i)}\eta_{l,n}\right)\right)^2, 1\le i\le m$ оцінимо за допомогою нерівності Коші-Буняковського та припущення (А3):

$$\left(E\left(\Delta_{(i)}\eta_{k,n}\Delta_{(i)}\eta_{l,n}\right)\right)^2 \le E\left(\Delta_{(i)}\eta_{k,n}\right)^2 E\left(\Delta_{(i)}\eta_{l,n}\right)^2 \le \frac{4b_i^2}{a_n^{2\beta_i}}, 1\le i\le m.$$

Тоді відповідні складові дисперсії $\mathrm{Var}\widehat{S}_n^{(i)}(Y), 1\le i\le m$ оцінюються так:

$$2a_n^{2(2H_{ii}-1)}\cdot 2\sum_{\substack{k,l=1,\\ k<l}}^{a_n}(m+1)E\left(\Delta_{(i)}\eta_{k,n}\right)^2 E\left(\Delta_{(i)}\eta_{l,n}\right)^2 \le 4(m+1)\cdot a_n^{2(2H_{ii}-1)}\times$$

$$\times\frac{a_n(a_n-1)}{2}\frac{4b_i^2}{a_n^{2\beta_i}} = 8(m+1)\cdot a_n^{2(2H_{ii}-\beta_i)}b_i^2\,\frac{a_n-1}{a_n}. \qquad (4.5)$$

Внаслідок однорідності гауссових випадкових полів $X_j(t), t\in[0,1]^m, 1\le j\le m$ одержимо:

$$\left(E\left(\Delta_{(i)}X_{k,n}^{(j)}\Delta_{(i)}X_{l,n}^{(j)}\right)\right)^2 = \left(r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1,}_{i-1}\frac{l-k-1}{a_n},1,\ldots,1\right)+\right.$$

$$+r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{l-k+1}{a_n},1,\ldots,1\right)-2r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{l-k}{a_n},1,\ldots,1\right)\Bigg)^2 .$$

Введемо заміну: $l-k=p, 1\le p\le a_n-1$. Вираз

$$r_{p.n}^{(j)}=r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{p-1}{a_n},1,\ldots,1\right)+r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{p+1}{a_n},1,\ldots,1\right)-$$

$$-2r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{p}{a_n},1,\ldots,1\right)$$

є приростом другого порядку функції $r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\cdot,1,\ldots,1\right),1\le j\le m$ на відрізку $\left[\frac{p-1}{a_n},\frac{p+1}{a_n}\right]$. Тому існує $\tau_{p,n}=\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\tau_{p,n}^{(i)},1,\ldots,1\right)\in\left(\frac{p-1}{a_n},\frac{p+1}{a_n}\right)$:

$$r_{p,n}^{(j)}=r_j''\left(\tau_{p,n}\right)\cdot\frac{1}{a_n^2},1\le j\le m .$$

При цьому одержимо:

$$4\cdot a_n^{2\left(2H_{ii}-1\right)}\left((m+1)\theta_1^4\sum_{\substack{k,l=1,\\k<l}}^{a_n}\left(E\left(\Delta_{(i)}X_{k,n}^{(1)}\Delta_{(i)}X_{l,n}^{(1)}\right)\right)^2+\ldots+\left(m+1\right)\theta_m^4\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{\substack{k,l=1,\\k<l}}^{a_n}\left(E\left(\Delta_{(i)}X_{k,n}^{(m)}\Delta_{(i)}X_{l,n}^{(m)}\right)\right)^2\right)=4\left(m+1\right)\cdot a_n^{2\left(2H_{ii}-1\right)}\left(\theta_1^4\sum_{p=1}^{a_n-1}\left(a_n-p\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(r_{p,n}^{(1)}\right)^2+\ldots+\theta_m^4\sum_{g=1}^{a_n-1}\left(a_n-p\right)\left(r_{p,n}^{(m)}\right)^2\right)=4(m+1)\cdot a_n^{2\left(2H_{ii}-1\right)}\left(\theta_1^4\times\right.$$

$$\times\left(\left(a_n-1\right)\left(r_{1,n}^{(1)}\right)^2+\sum_{p=2}^{a_n-1}\left(a_n-p\right)\left(r_{p,n}^{(1)}\right)^2\right)+\ldots+\theta_m^4\left(\left(a_n-1\right)\left(r_{1,n}^{(m)}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=2}^{a_n-1}\left(a_n-p\right)\left(r_{p,n}^{(m)}\right)^2\right)\Bigg). \qquad (4.6)$$

Оцінимо зверху величину $\left(r_{1,n}^{(j)}\right)^2, 1\le j\le m$, використовуючи припущення (A1) та нерівність $(a+b)^2\le 2\left(a^2+b^2\right)$:

$$\left(r_{1,n}^{(j)}\right)^2=\left(r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},0,1,\ldots,1\right)+r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{2}{a_n},1,\ldots,1\right)-2r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{1}{a_n},1,\ldots,1\right)\right)^2\le$$

$$\le\left|\left(r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},0,1,\ldots,1\right)-r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{1}{a_n},1,\ldots,1\right)\right)-\left(r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{2}{a_n},1,\ldots,1\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{1}{a_n},1,\ldots,1\right)\right)\right|^2\le 2\left(r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},0,1,\ldots,1\right)-r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{1}{a_n},1,\ldots,1\right)\right)^2+$$

$$+\left(r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{2}{a_n},1,\ldots,1\right)-r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{1}{a_n},1,\ldots,1\right)\right)^2\le 2\left(\left(c_{j,i}+q_{j,i}\right)\frac{1}{a_n^{2H_{ji}}}\right)^2+$$

$$+2\left|r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{2}{a_n},1,\ldots,1\right)-r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},0,1,\ldots,1\right)+r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},0,1,\ldots,1\right)-\right.$$

$$\left.-r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{1}{a_n},1,\ldots,1\right)\right|^2\le 2\left(c_{j,i}+q_{j,i}\right)^2\frac{1}{a_n^{4H_{ji}}}+4\left(\left(r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{2}{a_n},1,\ldots,1\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},0,1,\ldots,1\right)\right)^2+\left(r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},0,1,\ldots,1\right)-r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{1}{a_n},1,\ldots,1\right)\right)^2\right)\le$$

$$\leq 2\left(c_{j,i}+q_{j,i}\right)^2\frac{1}{a_n^{4H_{ji}}}+4\left(c_{j,i}+q_{j,i}\right)^2\frac{1}{a_n^{4H_{ji}}}+4\left(c_{j,i}+q_{j,i}\right)^2\frac{2^{4H_{ji}}}{a_n^{4H_{ji}}}=$$

$$=2\left(c_{j,i}+q_{j,i}\right)^2\frac{1}{a_n^{4H_{ji}}}\left(3+2^{4H_{ji}+1}\right),1\leq j,i\leq m. \qquad (4.7)$$

Далі, з припущення (A2) маємо для $1\leq j,i\leq m$:

$$4(m+1)\cdot a_n^{2\left(2H_{ii}-1\right)}\theta_j^4\sum_{p=2}^{a_n-1}\left(a_n-p\right)\left(r_{p,n}^{(j)}\right)^2\leq 4(m+1)\cdot a_n^{2\left(2H_{ii}-1\right)}\theta_j^4\sum_{p=2}^{a_n-1}\left(a_n-p\right)\times$$

$$\times\left(\frac{L_{j,i}}{\left(\tau_{p,n}^{(j)}\right)^{2-2H_{ji}}}\frac{1}{a_n^2}\right)^2\leq 4\left(m+1\right)\theta_j^4 a_n^{2\left(2H_{ii}-1\right)}a_n\sum_{p=2}^{a_n-1}\frac{L_{j,i}^2}{\left(\dfrac{p-1}{a_n}\right)^{2(2-2H_{ji})}}\frac{1}{a_n^4}=$$

$$=4(m+1)\theta_j^4 a_n^{2\left(2H_{ii}-1\right)}a_n\sum_{p=2}^{a_n-1}\frac{L_{j,i}^2 a_n^{-4H_{ji}}}{(p-1)^{2(2-2H_{ji})}}. \qquad (4.8)$$

Для $H_{ji}<\dfrac{3}{4}$ одержимо, що $\displaystyle\sum_{p=1}^{a_n-1}\frac{1}{p^{2(2-2H_{ji})}}<\zeta\left(2\left(2-2H_{ji}\right)\right)$, де $\zeta\left(s\right)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}, s>1$. При $H_{ji}=\dfrac{3}{4}$ маємо $\displaystyle\sum_{p=1}^{a_n-1}\frac{1}{p}\leq 1+\int_1^{a_n}\frac{dx}{x}=1+\ln a_n$, а при $H_{ji}\in\left(\dfrac{3}{4},1\right)$: $\displaystyle\sum_{p=1}^{a_n-1}\frac{1}{p^{2(2-2H_{ji})}}\leq 1+\int_1^{a_n}\frac{dx}{x^{2(2-2H_{ji})}}=1+\frac{a_n^{4H_{ji}-3}}{4H_{ji}-3}$. Отже, для оцінки сум, що входять в нерівність (4.8) маємо:

$$\sum_{p=1}^{a_n-1}\frac{1}{p^{2(2-2H_{ji})}}\leq\omega_{ij},\ 1\leq i,j\leq m,$$

де

$$\omega_{ij} = \begin{cases} \zeta\left(2\left(2-2H_{ji}\right)\right), H_{ji} \in \left(0, \frac{3}{4}\right), \\ 1+\log a_n, \quad H_{ji} = \frac{3}{4}, \\ 1+\frac{a_n^{4H_{ji}-3}}{4H_{ji}-3}, \quad H_{ji} \in \left(\frac{3}{4}, 1\right). \end{cases} \tag{4.9}$$

Тоді, з останньої рівності випливає, що

$$4(m+1)\theta_j^4 L_{j,i}^2 a_n^{4H_{ii}-4H_{ji}-1} \sum_{p=2}^{a_n-1} \frac{1}{(p-1)^{2(2-2H_{ji})}} \le$$

$$\le 4(m+1)\theta_j^4 L_{j,i}^2 a_n^{4H_{ii}-4H_{ji}-1} \omega_{ij}. \tag{4.10}$$

Отже, з нерівностей (4.6)-(4.10) випливає, що

$$4 \cdot a_n^{2(2H_{ii}-1)}(m+1)\theta_j^4 \sum_{\substack{k,l=1, \\ k<l}}^{a_n} \left(E\left(\Delta_{(i)} X_{k,n}^{(j)} \Delta_{(i)} X_{l,n}^{(j)} \right) \right)^2 = 4(m+1) \cdot a_n^{2(2H_{ii}-1)} \times$$

$$\times \left(\theta_j^4 \left(\left(a_n - 1\right)\left(r_{1,n}^{(j)} \right)^2 + \sum_{p=2}^{a_n-1} \left(a_n - p\right)\left(r_{l,n}^{(j)} \right)^2 \right) \right) \le 4(m+1) \cdot a_n^{2(2H_{ii}-1)} \times$$

$$\times \left(2\theta_i^4 \left(c_{j,i} + q_{j,i} \right)^2 \frac{1}{a_n^{4H_{ji}}} \left(3 + 2^{4H_{ji}+1} \right) + a_n \sum_{p=2}^{a_n-1} \frac{L_{j,i}^2 a_n^{-4H_{ji}}}{(p-1)^{2(2-2H_{ji})}} \right) \le$$

$$\le 8(m+1)\theta_i^4 \left(c_{j,i} + q_{j,i} \right)^2 a_n^{4H_{ii}-4H_{ji}-1} \left(3 + 2^{4H_{ji}+1} \right) +$$

$$+ 4(m+1)\theta_j^4 L_{j,i}^2 a_n^{4H_{ii}-4H_{ji}-1} \omega_{ij}. \tag{4.11}$$

Враховуючи співвідношення (4.2)-(4.3), (4.5)-(4.6), (4.10) та те, що $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m) \in [0, d]^m$, одержимо наступну оцінку зверху для $\mathrm{Var}\widehat{S}_n^{(i)}(Y), 1 \le i \le m$:

$$\mathrm{Var}\widehat{S}_n^{(i)}(Y) \le 8(m+1)\left(\sum_{j=1}^{m} d^4 \frac{\left(c_{j,i}+q_{j,i}\right)^2}{a_n^{4H_{ji}-4H_{ii}+1}} + \frac{b_i^2}{a_n^{2\beta_i-4H_{ii}+1}}\right) + 8(m+1)\times$$

$$\times a_n^{2\left(2H_{ii}-\beta_i\right)} b_i^2 \frac{a_n-1}{a_n} + 8(m+1)d^4 \sum_{j=1}^{m} a_n^{4H_{ii}-4H_{ji}-1}\left(3+2^{4H_{ji}+1}\right)\times$$

$$\times\left(c_{j,i}+q_{j,i}\right)^2 + 4(m+1)d^4 \sum_{j=1}^{m} L_{j,i}^2 a_n^{4H_{ii}-4H_{ji}-1}\omega_{ij}\,. \qquad (4.12)$$

Таким чином, $\mathrm{Var}\widehat{S}_n^{(i)}(Y) \to 0, 1 \le i \le m, n \to \infty$.

Праву частину нерівності (4.12) позначимо через $v_n^{(i)}$.

З припущення про збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-\alpha}$ для будь-якого $\alpha > 0$ випливає, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}\widehat{S}_n^{(i)}(Y)$, $1 \le i \le m$ збігається. Тому $\widehat{S}_n^{(i)}(Y) \to 2c_{i,i}\theta_i^2, n \to \infty$ з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$ [41, с. 24]. Звідси випливає, що для $1 \le i \le m$ з ймовірністю одиниця

$$\sqrt{\widehat{S}_n^{(i)}(Y)} \to \sqrt{2c_{i,i}\theta_i^2}, n \to \infty.$$

Тоді, статистика $\widehat{\theta}_n^{(i)} = \sqrt{\frac{\widehat{S}_n^{(i)}(Y)}{2c_{i,i}}}$ є сильно консистентною оцінкою параметра $\theta_i, i = \overline{1,m}$, а статистика $\widehat{\theta}_n = \left(\widehat{\theta}_n^{(1)}, \widehat{\theta}_n^{(2)}, \ldots, \widehat{\theta}_n^{(m)}\right)$ є сильно консистентною оцінкою параметра $\theta = \left(\theta_1, \ldots, \theta_m\right)$. □

З теореми 4.1 для випадку $m = 1$ випливає такий наслідок.

Наслідок 4.1. *Нехай в точках* $\left\{\frac{k}{a_n}, 0 \le k \le a_n, n \ge 1\right\}$ *спостерігається випадковий процес*

$$X(t) = \theta\xi(t) + \eta(t),\ t \in [0,1], \qquad (4.13)$$

де $\xi(t),\eta(t),t\in[0,1]$ *– незалежні стаціонарні гауссові випадкові процеси з нульовим середнім та коваріаційними функціями* $r_1(t),r_2(t),\ t\in[0,1]$, $\theta\in[0,d]$, $d>0$ *і виконуються наступні припущення:*

(I) існують сталі $c>0,a\ge 0,H\in(0,1),\delta>0$ *такі, що*

$$\left|1-r_1(h)-ch^{2H}\right|\le ah^{2H+\delta},h\in(0,1];$$

(II) $r_1\in C^{(2)}(R\setminus\{0\})$ *та існує* $L>0$ *:*

$$\left|r_1''(\tau)\right|\le\frac{L}{\tau^{2-2H}},\tau\in(0,1];$$

(III) існують сталі $\beta>2H$ *та* $b>0$ *такі, що*

$$\left|1-r_2(h)\right|\le bh^{\beta},h\in(0,1].$$

Тоді статистика $\tilde{\theta}_n=\sqrt{\frac{\hat{S}_n(X)}{2c}},n\ge 1$, *де*

$$\hat{S}_n(X)=a_n^{2H-1}\sum_{k=1}^{a_n}\left(X\left(\frac{k}{a_n}\right)-X\left(\frac{k-1}{a_n}\right)\right)^2,n\ge 1$$

є сильно консистентною оцінкою параметра тренда θ *за спостереженням випадкового процесу (4.13).*

4.3. Побудова довірчих областей

Знайдемо тепер довірчі області для параметра тренда $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_m)$ з рівнем довіри $1-p,p\in(0,1)$. Для цього будемо використовувати наступну лему.

Лема 4.1. *Нехай* $A_1,A_2,\ldots,A_m\in F$ *– випадкові події та* $P(A_i)=1-p_i$, $p_i\in(0,1),1\le i\le m$. *Тоді справедлива нерівність:*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right) \geq 1 - p_1 - p_2 - \ldots - p_m.$$

Доведення. Розглянемо наступну ймовірність скінченного перетину подій:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcap_{i=1}^{m} A_i}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{m} \overline{A_i}\right).$$

З властивостей ймовірностей отримаємо

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} \overline{A_i}\right) \leq \sum_{i=1}^{m} P\left(\overline{A_i}\right) = \sum_{i=1}^{m} p_i .$$

Тоді $P\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{m} p_i$. □

Теорема 4.2. *Нехай виконуються припущення (А1)-(А3). Тоді для кожного* $i, 1 \leq i \leq m$ *виконується нерівність:*

$$P\left\{\theta_i \in \left(\sqrt{\alpha_n^{(i)}(p)}, \sqrt{\beta_n^{(i)}(p)}\right)\right\} \geq 1 - p,$$

де

$$\alpha_n^{(i)}(p) = \max\left(0, \frac{\widehat{S}_n^{(i)}(Y) - \gamma_n^{(i)}}{2c_{i,i}}\right), \ \beta_n^{(i)}(p) = \min\left(\frac{\widehat{S}_n^{(i)}(Y) + \gamma_n^{(i)}}{2c_{i,i}}, d^2\right),$$

$$\gamma_n^{(i)} = 2\max\left(u_n^{(i)}, \sqrt{\frac{v_n^{(i)}}{p}}\right),$$

$$u_n^{(i)} = \frac{2q_{i,i}d^2}{a_n^{\delta_{i,i}}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \frac{2d^2\left(c_{j,i} + q_{j,i}\right)}{a_n^{2H_{ji} - 2H_{ii} + \delta_{j,i}}} + \frac{2b_i}{a_n^{\beta_i - 2H_{ii}}}, \ \ 1 \leq i \leq m,$$

$v_n^{(i)}$ *дорівнює правій частині нерівності (4.12).*

Доведення. Спочатку за допомогою припущень (А1) та (А3) оцінимо різницю $\left|E\widehat{S}_n^{(i)}(Y) - 2c_{i,i}\theta_i^2\right|, 1 \leq i \leq m, n \geq 1$:

$$\left|E\widehat{S}_n^{(i)}(Y)-2c_{i,i}\theta_i^2\right|=\left|a_n^{2H_{ii}-1}\sum_{k=1}^{a_n}E\left(\theta_1\Delta_{(i)}X_{k,n}^{(1)}+\ldots+\theta_m\Delta_{(i)}X_{k,n}^{(m)}+\Delta_{(i)}\eta_{k,n}\right)^2-\right.$$

$$\left.-2c_{i,i}\theta_i^2\right|=\left|a_n^{2H_{ii}-1}a_n\left(2\theta_1^2\left(r_1\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},0,1,\ldots,1\right)-r_1\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{1}{a_n},1,\ldots,1\right)\right)+\ldots+\right.\right.$$

$$+2\theta_i^2\left(r_i\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},0,1,\ldots,1\right)-r_i\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{1}{a_n},1,\ldots,1\right)-\frac{c_{i,i}}{a_n^{2H_{ii}}}\right)+\ldots+$$

$$+\ldots+2\theta_m^2\left(r_m\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},0,1,\ldots,1\right)-r_m\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{1}{a_n},1,\ldots,1\right)\right)+$$

$$\left.\left.+2\left(r_\eta\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},0,1,\ldots,1\right)-r_\eta\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{1}{a_n},1,\ldots,1\right)\right)\right)\right|\le$$

$$\le\frac{2q_{i,i}d^2}{a_n^{\delta_{i,i}}}+\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{m}\frac{2d^2\left(c_{j,i}+q_{j,i}\right)}{a_n^{2H_{ji}-2H_{ii}+\delta_{j,i}}}+\frac{2b_i}{a_n^{\beta_i-2H_{ii}}}:=u_n^{(i)},\ 1\le i\le m.$$

Для заданого рівня довіри $1-p, p\in(0,1)$ за допомогою леми 4.1 визначимо додатне число $\gamma_n^{(i)}, 1\le i\le m$ так, щоб виконувалась нерівність $P\left\{\left|\widehat{S}_n^{(i)}(Y)-2c_{i,i}\theta_i^2\right|>\gamma_n^{(i)}\right\}\le p, 1\le i\le m$. Тоді має місце нерівність

$$P\left\{\left|\widehat{S}_n^{(i)}(Y)-2c_{i,i}\theta_i^2\right|>\gamma_n^{(i)}\right\}\le P\left\{\left|\widehat{S}_n^{(i)}(Y)-E\widehat{S}_n^{(i)}(Y)\right|>\frac{\gamma_n^{(i)}}{2}\right\}+I, 1\le i\le m,$$

де

$$I=\begin{cases}1, \left|E\widehat{S}_n^{(i)}(Y)-2c_{i,i}\theta_i^2\right|>\dfrac{\gamma_n^{(i)}}{2},\\ 0, \left|E\widehat{S}_n^{(i)}(Y)-2c_{i,i}\theta_i^2\right|\le\dfrac{\gamma_n^{(i)}}{2}.\end{cases}$$

Внаслідок нерівності Чебишова, одержимо, що

$$P\left\{\left|\widehat{S}_n^{(i)}(Y)-E\widehat{S}_n^{(i)}(Y)\right|>\frac{\gamma_n^{(i)}}{2}\right\}\le\frac{4\mathrm{Var}\widehat{S}_n^{(i)}(Y)}{\left(\gamma_n^{(i)}\right)^2},1\le i\le m\cdot$$

З нерівності $\frac{4\mathrm{Var}\widehat{S}_n^{(i)}(Y)}{\left(\gamma_n^{(i)}\right)^2}\le p$ випливає, що $\gamma_n^{(i)}\ge 2\sqrt{\frac{\mathrm{Var}\widehat{S}_n^{(i)}(Y)}{p}},1\le i\le m$. Отже, можна покласти

$$\gamma_n^{(i)}=2\max\left(u_n^{(i)},\sqrt{\frac{v_n^{(i)}}{p}}\right),1\le i\le m.$$

Отже, нерівності

$$\left|\widehat{S}_n^{(i)}(Y)-2c_{i,\,i}\theta_i^2\right|\le\gamma_n^{(i)},1\le i\le m$$

виконуються з ймовірністю, не меншою рівня довіри $1-p$. □

Зауваження 4.1. Нехай виконуються умови теореми 4.2. Тоді довжина довірчого інтервалу $\left(\sqrt{\alpha_n^{(i)}(p)},\sqrt{\beta_n^{(i)}(p)}\right)$ не перевищує $\sqrt{\frac{\gamma_n^{(i)}}{c_{i,i}}}$.

Доведення. Якщо $\gamma_n^{(i)}<\widehat{S}_n^{(i)}(Y)$ маємо:

$$\sqrt{\beta_n^{(i)}(p)}-\sqrt{\alpha_n^{(i)}(p)}=\sqrt{\frac{\widehat{S}_n^{(i)}(Y)+\gamma_n^{(i)}}{2c_{i,i}}}-\sqrt{\frac{\widehat{S}_n^{(i)}(Y)-\gamma_n^{(i)}}{2c_{i,i}}}=$$

$$=\frac{\dfrac{2\gamma_n^{(i)}}{2c_{i,i}}}{\sqrt{\dfrac{\widehat{S}_n^{(i)}(Y)+\gamma_n^{(i)}}{2c_{i,i}}}+\sqrt{\dfrac{\widehat{S}_n^{(i)}(Y)-\gamma_n^{(i)}}{2c_{i,i}}}}\le\frac{\dfrac{\gamma_n^{(i)}}{c_{i,i}}\sqrt{2c_{i,i}}}{\sqrt{2\gamma_n^{(i)}}}=\sqrt{\frac{\gamma_n^{(i)}}{c_{i,i}}}.$$

Якщо $\widehat{S}_n^{(i)}(Y)\le\gamma_n^{(i)}$, то тоді:

$$\sqrt{\beta_n^{(i)}(p)}-\sqrt{\alpha_n^{(i)}(p)}=\sqrt{\frac{\widehat{S}_n^{(i)}(Y)+\gamma_n^{(i)}}{2c_{i,i}}}-0\le\sqrt{\frac{\gamma_n^{(i)}}{c_{i,i}}}.$$

Наслідок 4.2. *Нехай виконуються умови теореми 4.2. Тоді має місце нерівність:*

$$P\left\{\theta\in\left(\sqrt{\alpha_n^{(1)}(p)},\sqrt{\beta_n^{(1)}(p)}\right)\times\ldots\times\left(\sqrt{\alpha_n^{(m)}(p)},\sqrt{\beta_n^{(m)}(p)}\right)\right\}\geq 1-mp\,.$$

Доведення. Твердження наслідку 4.2 випливає з леми 4.1 та теореми 4.2.□

З теореми 4.2 у випадку $m=1$ випливає наступний наслідок.

Наслідок 4.3. *Нехай виконуються умови наслідку 4.1. Тоді інтервал* $\left(\sqrt{l_n(p)},\sqrt{r_n(p)}\right)$*, де*

$$l_n(p)=\max\left(0,\frac{\widehat{S}_n(X)-\alpha_n}{2c}\right),\ r_n(p)=\min\left(\frac{\widehat{S}_n(X)+\alpha_n}{2c},d^2\right),$$

$$\alpha_n=2\max\left(u_n,\sqrt{\frac{v_n}{p}}\right),\ u_n=2\left(\frac{ad^2}{a_n^{\delta}}+\frac{b}{a_n^{\beta-2H}}\right),$$

$$v_n\leq 16a_n^{-1}\left(d^4(c+a)^2+a_n^{2(2H-\beta)}b^2\right)+32a_n^{2(2H-\beta)}+$$

$$+8d^4L^2a_n^{-1}\begin{cases}\zeta\left(2(2-2H)\right), H\in\left(0,\dfrac{3}{4}\right),\\ \left(1+\ln a_n\right),\quad H=\dfrac{3}{4},\\ \left(1+\dfrac{a_n^{4H-3}}{4H-3}\right), H\in\left(\dfrac{3}{4},1\right),\end{cases}\tag{4.14}$$

є довірчим інтервалом для параметра тренда θ з рівнем довіри $1-p,\ p\in(0,1)$.

За допомогою наслідків 4.1 та 4.3 розглянемо приклади знаходження довірчих інтервалів у випадку оцінювання параметра тренда θ в моделі спостереження (4.13) для деяких випадкових процесів.

Приклад 4.1. Розглянемо модель спостереження (4.13), де $\xi(t),\ t\in\mathrm{R}$ – випадковий процес Орнштейна-Уленбека, тобто випадковий гауссовий процес з нульовим середнім значенням та коваріаційною функцією $r_1(t)=e^{-\gamma|t|},t\in\mathrm{R}$, де $\gamma>0$. Далі, нехай, $a_n=2^n,n\in\mathrm{N}$.

Припущення (I) наслідку 4.1 виконується для $H=\dfrac{1}{2}, c=\gamma, a=\dfrac{\gamma^2}{2}, \delta=1$, оскільки

$$\left|1-r_1(h)-\gamma h\right|=\left|1-e^{-\gamma h}-\gamma h\right|\le\frac{\gamma^2h^2}{2},\ h\in(0,1].$$

Для доведення останньої нерівності введемо допоміжну функцію $\psi(h)=\dfrac{\gamma^2h^2}{2}-1+\gamma h+e^{-\gamma h}, h\in(0,1], \gamma>0$ і покажемо, що вона є зростаючою. Маємо $\psi(0)=0$ та $\psi'(h)=\gamma^2h+\gamma-\gamma e^{-\gamma h}>0$, звідки випливає, що функція $\psi(h), h\in(0,1]$ є зростаючою. Тому $\left|1-e^{-\gamma h}-\gamma h\right|\le\dfrac{\gamma^2h^2}{2},\ h\in(0,1]$.

Припущення (II) виконується для $L=\gamma^2,\ H=\dfrac{1}{2}$:

$$\left|r_1''(\tau)\right|=\left|\gamma^2e^{-\gamma\tau}\right|\le\gamma^2\le\frac{\gamma^2}{\tau},\ \tau\in(0,1].$$

Нехай $\eta(t),\ t\in[0,1]$ – стаціонарний гауссовий випадковий процес з нульовим середнім значенням, коваріаційна функція якого задовольняє умову $\left|1-r_2(h)\right|\le bh^{\beta},\ h\in(0,1]$, де $\beta>\dfrac{3}{2}, b\ge 0$.

Далі, покладемо, що $\gamma=1$ та $H=\dfrac{1}{2}, c=1, \delta=1, a=\dfrac{1}{2}$. Тоді для $d=1, b=1$, $\beta=2, L=1$ одержимо з наслідку 4.3, що $u_n=\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{2}{2^{n(\beta-1)}}$ і при $n\ge 5$:

$$v_n\le\frac{16}{2^n}\left(\frac{9}{4}+\frac{1}{2^{2n(\beta-1)}}\right)+\frac{32}{2^{2n(\beta-1)}}+\frac{8\zeta(2)}{2^n}=\frac{36}{2^n}+\frac{16}{2^{n(2\beta-1)}}+$$

$$+\frac{32}{2^{2n(\beta-1)}}+\frac{4\pi^2}{3\cdot 2^n}\le\frac{49.2}{2^n}+\frac{16}{2^{3n}}+\frac{32}{2^{2n}}=$$

$$=\frac{1}{2^n}\left(49.2+\frac{16}{2^{2n}}+\frac{32}{2^n}\right)\le\frac{51}{2^n}.$$

При $p = 0.1$ маємо

$$\alpha_n = 2\max\left(\frac{1}{2^n} + \frac{2}{2^{n(\beta-1)}}, \sqrt{\frac{510}{2^n}}\right) = \frac{2\sqrt{510}}{\sqrt{2^n}} < \frac{45.2}{\sqrt{2^n}}.$$

Як випливає із зауваження 4.2, довжина довірчого інтервалу не перевищує $\sqrt{\frac{\alpha_n}{c}}$. Тоді для $n = 20$ одержимо $\sqrt{\alpha_{20}} \approx \sqrt{\frac{45.2}{2^{10}}} \approx 0.21$ та $P\left\{\sqrt{l(n)} \le \theta \le \sqrt{r(n)}\right\} \ge 0.9$, де

$$l(n) = \max\left(0, \frac{\widehat{S}_n(X) - \alpha_{20}}{2}\right) = \max\left(0, \frac{\widehat{S}_n(X) - 0.044}{2}\right),$$

$$r(n) = \min\left(\frac{\widehat{S}_n(X) + \alpha_{20}}{2}, 1\right) = \min\left(\frac{\widehat{S}_n(X) + 0.044}{2}, 1\right).$$

РОЗДІЛ 5. ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРА ХЮРСТА ДРОБОВОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ

У цьому розділі побудована сильно консистентна оцінка параметра Хюрста H дробового броунівського руху $B_H(t),\ t \in R$ за спостереженнями випадкового процесу B_H на дискретній підмножині одиничного проміжку. Побудовані інтервали надійності, отримані твердження про швидкість збіжності з імовірністю одиниця. У підрозділі 5.2 за допомогою бакстерівських статистик побудована оцінка параметра коваріаційної функції у негауссовому випадку. Для негауссових випадкових процесів з нульовим середнім значенням коваріаційна функція, на відміну від гауссових випадкових процесів, взагалі кажучи, однозначно не визначає випадковий процес. Наведений приклад негауссового випадкового процесу класу K, коваріаційна функція якого співпадає з коваріаційною функцією дробового броунівського руху.

5.1. Бакстерівська оцінка параметра Хюрста дробового броунівського руху

Гауссовий випадковий процес $B_H(t),\ t \in R$ з нульовим середнім значенням та коваріаційною функцією

$$r(s,t) = \frac{1}{2}\left(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |s-t|^{2H}\right),\quad s,t \in R,$$

де $0 < H < 1$, називається *дробовим броунівським рухом* з параметром Хюрста H.

Нехай для натурального числа p a_p – $(p+1)$-вимірний вектор з прикладу 1.3, $B_H\left([t,t+h],\, a_p\right)$ – a_p –приріст дробового броунівського руху B_H на відрізку $[t,t+h]$, $t\in R$, $h>0$. Нехай

$$\widehat{S}_n^{(p)}=n^{2H-1}S_n^{(p)}=n^{2H-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(B_H\left(\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right],\, a_p\right)\right)^2,\ n\geq 1 \qquad (5.1)$$

– послідовність бакстерівських сум дробового броунівського руху B_H. Покладемо

$$V_p(k,H)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^{p}(-1)^{i+j+1}C_p^iC_p^j\left|k+\frac{i-j}{p}\right|^{2H},\ k\geq 0 \qquad (5.2)$$

Зокрема,

$$V_1(0,H)=1;\quad V_2(0,H)=2^{2-2H}-1; \qquad (5.3)$$

$$V_3(0,H)=\frac{15+3^{2H}-6\cdot 2^{2H}}{3^{2H}}. \qquad (5.4)$$

Безпосередній підрахунок дозволяє отримати наступні формули для математичного сподівання та дисперсії випадкової величини $\widehat{S}_n^{p}$:

$$E\widehat{S}_n^{(p)}=V_p(0,H); \qquad (5.5)$$

$$\operatorname{Var}\widehat{S}_n^{(p)}=\frac{1}{n}\left(2V_p^2(0,H)+4\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)V_p^2(k,H)\right). \qquad (5.6)$$

Лема 5.1. *Для довільних* $p\geq 2$, $H_1, H_2\in[0,1]$, $H_1<H_2$, $n\geq 3$ *виконується нерівність*

$$\operatorname{Var}\widehat{S}_n^{(p)}\leq\frac{1}{n}\left(2M_p(H_1,\, H_2)+\frac{4}{p^2}\zeta(4p-4)\right), \qquad (5.7)$$

де

$$M_p(H_1, H_2) = \sup_{H \in (H_1, H_2)} \left(V_p^2(0, H) + 2V_p^2(1, H) \right), \tag{5.8}$$

$\zeta(\cdot)$ – дзета-функція Рімана.

Доведення. Зауважимо, що для $k \geq 2$ виконується рівність

$$V_p(k, H) = -\frac{1}{2} f([k-1, k+1], a_{2p}),$$

де $f(x) = x^{2H}$, $x > 0$; $a_{2p} = \left(1, -2p, \ldots, (-1)^{i+1} C_{2p}^i, \ldots, 1\right)$.

Далі, існує число $c \in (k-1,\ k+1)$ [57], таке, що

$$\frac{1}{2} f([k-1, k+1], a_{2p}) = f^{(2p)}(c) p^{-2p} =$$

$$= p^{-2p} 2H(2H-1)(2H-2) \cdot \ldots \cdot (2H-2p+1) c^{2H-2p}.$$

Оскільки для довільного числа $H \in (0,1)$ має місце нерівність

$$\left| 2H(2H-1) \cdot \ldots \cdot (2H-2p+1) \right| \leq (2p-1)!,$$

а число $c \in (k-1, k+1)$, то

$$\left| V_p(k, H) \right| \leq (2p-1)!\, p^{-2p} \frac{1}{(k-1)^{2p-2}} < p^{2p-1} p^{-2p} \frac{1}{(k-1)^{2p-2}} = \frac{1}{p(k-1)^{2p-2}}.$$

Враховуючи рівність (5.6), отримуємо твердження леми. □

Лема 5.2. *Для всіх значень параметра $H \in (0, 1)$, для всіх $p \geq 1$*

$$\widehat{S}_n^{(p)} = n^{2H-1} S_n^{(p)} \to V_p(0, H) \tag{5.9}$$

з імовірністю одиниця при $n \to \infty$.

Доведення. Для випадкового процесу $X_1(t) = X_2(t) = B_H(t), t \in [0,1]$ виконуються умови теореми 1.14 при $d = 1$; $\gamma = 2p - 2H$; $\alpha = \psi = 2H$; $d(\lambda_n) = \dfrac{1}{n}, n \geq 1$. Тому, внаслідок цієї теореми, виконується твердження леми 5.2. □

Лема 5.2 дозволяє будувати сильно консистентні оцінки параметра Хюрста H. Нижче ми розглянемо дві з таких оцінок параметра Хюрста H за спостереженнями дробового броунівського руху B_H на дискретній підмножині

$$\left\{ \frac{i}{n} + \frac{j}{pn} \middle| 0 \le i \le n-1, 0 \le j \le p-1,\ n \ge 1 \right\}$$

відрізка $[0, 1]$ і побудуємо інтервали надійності.

Теорема 5.1. *Статистика*

$$H_n^{(1)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\ln S_n^{(1)}}{\ln n}\right),\ n \ge 2 \tag{5.10}$$

є сильно консистентною оцінкою параметра Хюрста H.

Доведення випливає з леми 5.2 при $p = 1$.

Ще одну оцінку параметра Хюрста H отримаємо із збіжності з імовірністю одиниця бакстерівських сум у (5.9) при $p = 2$ і $p = 3$. Дійсно, внаслідок леми 5.2, для довільного $H \in (0, 1)$ має місце збіжність

$$\frac{\widehat{S}_n^{(3)}}{\widehat{S}_n^{(2)}} \to \frac{V_3(0, H)}{V_2(0, H)}$$

з імовірністю одиниця при $n \to \infty$. Функція

$$\theta(H) = \frac{V_3(0, H)}{V_2(0, H)} = \frac{15 + 3^{2H} - 6 \cdot 2^{2H}}{3^{2H} \cdot \left(2^{2-2H} - 1\right)},\ H \in (0,1) \tag{5.11}$$

неперервна і спадна на інтервалі $(0, 1)$, $b_2 := \theta(0+) = \frac{10}{3}$, $b_1 := \theta(1-) = $ $= \frac{8}{3} - \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1{,}08\ldots$ Нехай $H(\theta),\ \theta \in (b_1, b_2)$ – функція, обернена до функції $\theta(H),\ H \in (0, 1)$. Покладемо

$$\theta_n = \frac{S_n^{(3)}}{S_n^{(2)}} = \frac{\widehat{S}_n^{(3)}}{\widehat{S}_n^{(2)}},\ n \ge 1. \tag{5.12}$$

Тоді $\theta_n \to \theta = \theta(H)$ з імовірністю одиниця при $n \to \infty$. З наведених міркувань випливає

Теорема 5.2. *Статистика*

$$H_n^{(2)} = H(\theta_n),\ n \ge 1 \tag{5.13}$$

є сильно консистентною оцінкою параметра Хюрста H.

Перейдемо до побудови інтервалів надійності.

Лема 5.3. (лема 3.1, [10]) *Нехай випадкова величина ξ належить простору Орліча $L_u(\Omega)$, що породжений с-функцією $u(x) = \cosh x - 1,\ x \in R$. Тоді для всіх $x > 0$ виконується нерівність*

$$P\{|\xi| \ge x\} \le \left(u\left(\frac{x}{\|\xi\|_u} \right) \right)^{-1},$$

де $\|\xi\|_u$ – норма Люксембурга випадкової величини ξ у просторі Орліча $L_u(\Omega)$.

Нехай $1-\varepsilon \in (0,1)$ – заданий коефіцієнт довіри. Знайдемо відповідні додатні числа $r_\varepsilon(n)$ та $l_\varepsilon(n)$, такі, що

$$P_H\left\{H > H_n^{(1)} + r_\varepsilon(n)\right\} \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{та} \quad P_H\left\{H < H_n^{(1)} - l_\varepsilon(n)\right\} \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тоді матимемо нерівність

$$P_H\left\{H_n^{(1)} - l_\varepsilon(n) < H < H_n^{(1)} + r_\varepsilon(n)\right\} \ge 1-\varepsilon, \tag{5.14}$$

яка означає, що інтервал $\left(H_n^{(1)} - l_\varepsilon(n),\ H_n^{(1)} + r_\varepsilon(n)\right) \cap (0,1)$ є інтервалом надійності для параметра Хюрста H з коефіцієнтом довіри $1-\varepsilon$. Внаслідок леми 5.3,

$$P_H\left\{H_n^{(1)} + r_\varepsilon(n) < H\right\} = P_H\left\{S_n^{(1)} - ES_n^{(1)} > n^{1-2H} \cdot \left(n^{2r_\varepsilon(n)} - 1\right)\right\} \le$$

$$\leq P_H\left\{\left|S_n^{(1)}-ES_n^{(1)}\right|>n^{1-2H}\cdot\left(n^{2r_\varepsilon(n)}-1\right)\right\}\leq\left(u\left(\frac{n^{1-2H}\left(n^{2r_\varepsilon(n)}-1\right)}{\left\|S_n^{(1)}-ES_n^{(1)}\right\|_u}\right)\right)^{-1}.$$

Далі, застосуємо нерівність між нормою Люксембурга і середньоквадратичною нормою, для випадкової величини $S_n^{(1)}-ES_n^{(1)}$:

$$\left\|S_n^{(1)}-ES_n^{(1)}\right\|_u\leq k_0\sqrt{\operatorname{Var}S_n^{(1)}},$$

де $k_0=\inf\limits_{\tau\in(0;0,5)}\dfrac{\sqrt{2\exp(-\tau)(1-2\tau)^{-0,5}+1}}{\sqrt{2}\tau}=3,47\ldots$ Маємо:

$$P_H\left\{H_n^{(1)}+r_\varepsilon(n)<H\right\}\leq\left(u\left(\frac{n^{1-2H}\left(n^{2r_\varepsilon(n)}-1\right)}{k_0\sqrt{\operatorname{Var}S_n^{(1)}}}\right)\right)^{-1}.$$

Аналогічно,

$$P_H\left\{H<H_n^{(1)}-l_\varepsilon(n)\right\}\leq\left(u\left(\frac{n^{1-2H}\left(1-n^{-2l_\varepsilon(n)}\right)}{k_0\sqrt{\operatorname{Var}S_n^{(1)}}}\right)\right)^{-1}.$$

Для дисперсії випадкової величини $S_n^{(1)}$ має місце нерівність

$$\operatorname{Var}S_n^{(1)}\leq A_n(H)n^{1-4H},$$

де $A_n(H)=2+\sum\limits_{m=1}^{n-1}\left((m-1)^{2H}+(m+1)^{2H}-2m^{2H}\right)^2$. Таким чином,

$$\left(u\left(\frac{n^{1-2H}\left(n^{2r_\varepsilon(n)}-1\right)}{k_0\sqrt{\operatorname{Var}S_n^{(1)}}}\right)\right)^{-1}\leq\left(u\left(\frac{\sqrt{n}\left(n^{2r_\varepsilon(n)}-1\right)}{k_0\sqrt{A_n(H)}}\right)\right)^{-1}.$$

Покладемо

$$\varphi(\varepsilon)=\ln\left(1+\frac{2}{\varepsilon}+\sqrt{\left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)^2-1}\right),\ \varepsilon>0.$$

Із нерівності

$$\left(u\left(\frac{\sqrt{n}\left(n^{2r_\varepsilon(n)}-1\right)}{k_0\sqrt{A_n(H)}}\right)\right)^{-1}\le\frac{\varepsilon}{2}$$

випливає наступна оцінка знизу для $r_\varepsilon(n),\ n\ge 1$:

$$r_\varepsilon(n)\ge\frac{\ln\left(1+\dfrac{k_0\sqrt{A_n(H)}}{\sqrt{n}}\varphi(\varepsilon)\right)}{2\ln n}. \qquad (5.15)$$

Аналогічно,

$$l_\varepsilon(n)\ge-\frac{\ln\left(1-\dfrac{k_0\sqrt{A_n(H)}}{\sqrt{n}}\varphi(\varepsilon)\right)}{2\ln n}.$$

Відмітимо, що мають місце наступні відношення підпорядкованості для послідовності $A_n(H),\ n\ge 1$ при $n\to\infty$:

$$A_n(H)=\begin{cases} O(1),\ H\in(0;\ 0{,}75),\\ O(\ln n),\ H=0{,}75,\\ O\left(n^{4H_0-3}\right),\ H\in(0;H_0],\end{cases}$$

де $H_0\in(0{,}75;\ 1)$.

Із леми 5.3 та наведених вище міркувань випливає

Теорема 5.3. *Нехай* $H_1,\ H_2\in[0{,}1]$ *фіксовані,* $H\in(H_1,\ H_2)$,

$$r_\varepsilon(n)=\frac{\ln\left(1+\dfrac{k_0\sqrt{B_n(H_1,H_2)}}{\sqrt{n}}\varphi(\varepsilon)\right)}{2\ln n},\quad l_\varepsilon(n)=-\frac{\ln\left(1-\dfrac{k_0\sqrt{B_n(H_1,H_2)}}{\sqrt{n}}\varphi(\varepsilon)\right)}{2\ln n}.$$

Тоді інтервал $\left(H_n^{(1)}-l_\varepsilon(n),\ H_n^{(1)}+r_\varepsilon(n)\right)\cap(H_1,H_2)$ *є інтервалом надійності для параметра Хюрста* H *з рівнем довіри* $1-\varepsilon$.

Зауваження 5.1. Для послідовності $\{r_\varepsilon(n):n\ge 1\}$ мають місце наступні відношення підпорядкованості при $n\to\infty$:

$$r_\varepsilon(n)=\begin{cases} O\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}\ln n}\right), & H_2\in(0;\,0{,}75),\\ O\left(\dfrac{1}{\sqrt{n\ln n}}\right), & H_2=0{,}75,\\ O\left(\dfrac{1}{n^{2(1-H_0)}\ln n}\right), & H_2\in(0;H_0]. \end{cases}$$

Такі ж відношення підпорядкованості виконуються для послідовності $\{l_\varepsilon(n): n\ge 1\}$.

Тепер побудуємо інтервал надійності для параметра Хюрста у випадку статистики (5.13).

Лема 5.4. *Нехай* $\{X_k \mid 0\le k\le n\}$, $\{Y_k \mid 0\le k\le n\}$ *– набори сумісно гауссових випадкових величин,* $EX_k=EY_k=0,\ 0\le k\le n;\ EX_k^2=EX_0^2$,

$$EY_k^2=EY_0^2,\ 0\le k\le n;\ S_1=\sum_{k=0}^{n}X_k^2,\ S_2=\sum_{k=0}^{n}Y_k^2;\ \theta=\frac{EX_0^2}{EY_0^2}.$$

Тоді для довільного $\varepsilon>0$ *має місце нерівність*

$$P\left\{\left|\frac{S_1}{S_2}-\theta\right|>\varepsilon\right\}\le\left(u\left(\frac{EQ_1}{k_0\sqrt{\operatorname{Var}Q_1}}\right)\right)^{-1}+\left(u\left(\frac{EQ_2}{k_0\sqrt{\operatorname{Var}Q_2}}\right)\right)^{-1},$$

де $Q_1=(\theta-\varepsilon)S_2-S_1$, $Q_2=S_1-(\theta+\varepsilon)S_2$, $k_0=3{,}47\ldots$.

Доведення. Маємо:

$$P\left\{\left|\frac{S_1}{S_2}-\theta\right|>\varepsilon\right\}=P\{|S_1-\theta S_2|>\varepsilon S_2\}=P\{S_1-\theta S_2<-\varepsilon S_2\}+$$

$$+P\{S_1-\theta S_2>\varepsilon S_2\}=P\{Q_1>0\}+P\{Q_2>0\}.$$

Оцінимо зверху ймовірність $P\{Q_1\ge 0\}$:

$$P\{Q_1\ge 0\}=P\{Q_1-EQ_1\ge -EQ_1\}\le\left(u\left(\frac{EQ_1}{\|Q_1-EQ_1\|_u}\right)\right)^{-1}\le\left(u\left(\frac{EQ_1}{k_0\sqrt{\operatorname{var}Q_1}}\right)\right)^{-1}.$$

Аналогічно оцінюється зверху ймовірність $P\{Q_2\ge 0\}$. □

Статистика θ_n, $n \geq 1$, визначена у рівності (5.12), внаслідок леми 5.2, є сильно консистентною оцінкою параметра $\theta = \theta(H)$, $H \in (0,1)$. За допомогою леми 5.4 побудуємо інтервал надійності для параметра θ, а потім отримаємо інтервал надійності для параметра Хюрста H у випадку статистики $H_n^{(2)}$. Нехай $1-\varepsilon \in (0,1)$ – рівень довіри. Додатне число $m_\varepsilon(n)$ визначимо так, щоб

$$P_H\{|\theta_n - \theta| \geq m_\varepsilon(n)\} \leq \varepsilon. \tag{5.16}$$

У нашому випадку

$$Q_1 = (\theta - m_\varepsilon(n))\widehat{S}_n^{(2)} - \widehat{S}_n^{(3)} \quad \text{та} \quad Q_2 = \widehat{S}_n^{(3)} - (\theta + m_\varepsilon(n))\widehat{S}_n^{(2)}.$$

Для математичних сподівань випадкових величин Q_1, Q_2 маємо:

$$EQ_1 = EQ_2 = -m_\varepsilon(n)V_2(0,H).$$

Для оцінки зверху дисперсій цих випадкових величин застосуємо нерівність $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, $a,b \in R$ та лему 5.1:

$$\operatorname{Var} Q_1 \leq 2(\theta - m_\varepsilon(n))^2 \operatorname{Var} S_n^{(2)} + 2\operatorname{Var} S_n^{(3)} \leq$$

$$\leq \frac{2}{n}(\theta - m_\varepsilon(n))^2(2M_2(H_1,H_2) + \varsigma(4)) + \frac{2}{n}\left(2M_3(H_1,H_2) + \frac{4}{9}\varsigma(8)\right).$$

Аналогічно,

$$\operatorname{Var} Q_2 \leq \frac{2}{n}(\theta + m_\varepsilon(n))^2(2M_2(H_1,H_2) + \varsigma(4)) + \frac{2}{n}\left(2M_3(H_1,H_2) + \frac{4}{9}\varsigma(8)\right).$$

Внаслідок леми 5.4, нерівність (5.16) буде справджуватися, якщо для всіх $H \in (H_1, H_2)$

$$\left(u\left(\frac{m_\varepsilon(n)\sqrt{n}\mathrm{V}_2(0,H)}{k_0\sqrt{2(\theta - m_\varepsilon(n))^2 c_2 + 2c_3}}\right)\right)^{-1} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \tag{5.17}$$

$$\left(u\left(\frac{m_\varepsilon(n)\sqrt{n}\mathrm{V}_2(0,H)}{k_0\sqrt{2(\theta+m_\varepsilon(n))^2c_2+2c_3}}\right)\right)^{-1}\le\frac{\varepsilon}{2}\ , \tag{5.18}$$

де $c_2=2M_2(H_1,H_2)+\varsigma(4),\ c_3=2\left(2M_3(H_1,H_2)+\frac{4}{9}\varsigma(8)\right).$

Зауважимо, що з нерівності (5.18) випливає нерівність (5.17). Нерівність (5.18) рівносильна нерівності

$$\frac{m_\varepsilon(n)\sqrt{n}\mathrm{V}_2(0,H)}{k_0\sqrt{2(\theta+m_\varepsilon(n))^2c_2+2c_3}}\ge\ln\left(1+\frac{2}{\varepsilon}+\sqrt{\left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)^2-1}\right),$$

яка зводиться до квадратної нерівності відносно $m_\varepsilon(n)$. Розв'язуючи цю нерівність та врахувавши, що вона має виконуватися для всіх $H\in(H_1,H_2)$, отримуємо

$$m_\varepsilon(n)=\sup_{H\in(H_1,H_2)}\frac{2\theta(H)l^2(\varepsilon)k_0^2+\sqrt{D}}{nV_2^2(0,H)-2c_2l^2(\varepsilon)k_0^2}\ , \tag{5.19}$$

де $D=4\theta^2c_2^2l^4(\varepsilon)k_0^4+2\left(nV_2^2(0,H)-2c_2l^2(\varepsilon)k_0^2\right)l^2(\varepsilon)k_0^2\left(\theta^2(H)c_2+c_3\right),$

$$l(\varepsilon)=\ln\left(1+\frac{2}{\varepsilon}+\sqrt{\left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)^2-1}\right).$$

Таким чином, має місце

Теорема 5.4. *Нехай* $H_1,\ H_2\in[0,1]$ *фіксовані,* $H_1<H_2,\ H\in(H_1,\ H_2)$. *Тоді інтервал*

$$\left(H\left(\theta_n+m_\varepsilon(n)\right),\ H\left(\theta_n-m_\varepsilon(n)\right)\right)\cap\left(H_1,H_2\right),$$

де $m_\varepsilon(n)$ *обчислюється за формулою (5.19),* $H(\cdot)$ *– функція, обернена до функції (5.11), є інтервалом надійності для параметра Хюрста* H *з рівнем довіри* $1-\varepsilon$.

Зауваження 5.2. Для послідовності $\{m_\varepsilon(n): n \ge 1\}$ виконується наступне відношення підпорядкованості $n \to \infty$:

$$m_\varepsilon(n) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \ n \to \infty.$$

Неважко оцінити швидкість збіжності кожної із статистик $H_n^{(1)}, \ H_n^{(2)}$ до істинного значення параметра Хюрста H. Так, наприклад, для статистики $H_n^{(2)}, \ n \ge 1$ має місце

Теорема 5.5. *Нехай* $H_1, H_2 \in [0,1]$ *фіксовані,* $H_1 < H_2$, $H \in (H_1, H_2)$. *Тоді існує додатна стала* $C(H_1, H_2) > 0$, *та множина* A *ймовірності нуль, такі, що для кожного* $\omega \in \Omega \setminus A$ *існує натуральне число* $N(\omega)$, *таке, що для всіх* $n > N(\omega)$ *виконується нерівність*

$$\left|H_n^{(2)} - H\right| < \frac{C(H_1, H_2)\ln n}{\sqrt{n}}.$$

Доведення. Розглянемо послідовність $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n^2}, n \ge 2$. Для цієї послідовності

$$P_H\left\{H \notin \left(H\left(\theta_n + m_{\varepsilon_n}(n)\right), H\left(\theta_n - m_{\varepsilon_n}(n)\right)\right)\right\} \le \varepsilon_n.$$

Ряд із загальним членом $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n^2}$, $n \ge 2$ збігається і тому, внаслідок леми Бореля-Кантеллі, співвідношення $H \notin \left(H\left(\theta_n + m_{\varepsilon_n}(n)\right), H\left(\theta_n - m_{\varepsilon_n}(n)\right)\right)$ з імовірністю одиниця виконується не більш ніж для скінченного числа номерів. З рівності (5.19) випливає, що

$$m_{\varepsilon_n}(n) = O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right), \ \ n \to \infty.$$

□

5.2. Бакстерівська оцінка параметра коваріаційної функції одного випадкового процесу у негауссовому випадку

Нехай $\{\xi_H(t),\ t\in[0,1]\}$ – випадковий процес класу K_1 з нульовим середнім значенням та коваріаційною функцією

$$E\xi_H(t)\xi_H(s)=\frac{1}{2}\left(|t|^{2H}+|s|^{2H}-|t-s|^{2H}\right), t,s\in[0,1], H\in(0,1). \quad (5.20)$$

Нижче наводиться приклад негауссового випадкового процесу класу K з коваріаційною функцією (5.20).

Приклад 5.1. У роботі К. Джапарідзе та Г. ван Цантена [77] було одержано наступний розклад дробового броунівського руху $B_H(t), t\in[0,1]$ з параметром Хюрста $H\in\left(\frac{1}{2},1\right)$:

$$B_H(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(x_n t)}{x_n}X_n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(y_n t)}{y_n}Y_n,\ t\in[0,1],$$

де X_n, Y_n – незалежні послідовності незалежних гауссових випадкових величин таких, що $EX_n=EY_n=0, n\ge 1$; $\operatorname{Var}X_n=2c_H^2 x_n^{-2H}J_{1-H}^{-2}(x_n)$, $\operatorname{Var}Y_n=2c_H^2 y_n^{-2H}J_{-H}^{-2}(y_n)$, $c_H^2=\pi^{-1}\Gamma(1+2H)\sin\pi H$; $J_v, v\ne -1,-2,\ldots$ – функція Бесселя першого роду порядку v; (x_n) – зростаюча послідовність додатних нулів функції Бесселя J_{-H}; (y_n) – зростаюча послідовність додатних нулів функції Бесселя J_{1-H}.

Нехай, далі $(\xi_n),(\eta_n)$ – незалежні послідовності незалежних випадкових величин таких, що

$$E\xi_n=E\eta_n=0,\ E\xi_n^4\le 3\left(E\xi_n^2\right)^2,$$

$$\operatorname{Var}\xi_n=\operatorname{Var}X_n,\ E\eta_n^4\le 3\left(E\eta_n^2\right)^2,\ \operatorname{Var}\eta_n=\operatorname{Var}Y_n,\ n\ge 1.$$

Випадковий процес

$$\xi(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(x_n t)}{x_n}\xi_n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(y_n t)}{y_n}\eta_n,\ t\in[0,1] \qquad (5.21)$$

має нульове середнє значення та коваріаційну функцію

$$E\xi(t)\xi(s)=\frac{1}{2}\left(|t|^{2H}+|s|^{2H}-|t-s|^{2H}\right),\ t,s\in[0,1],\ H\in\left(\frac{1}{2},1\right).$$

Доведемо, що цей випадковий процес є випадковим процесом класу K.

Покажемо, що для довільного $t\in[0,1]$ перший ряд в правій частині рівності (5.21) збігається в просторі $L_4(\Omega)$. Нехай $1\le N<M$. Із нерівності Гельдера для $p=\frac{4}{3}, q=4, \forall\lambda\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$ отримаємо:

$$\left|\sum_{n=N}^{M}\frac{\sin(x_n t)}{x_n}\xi_n\right|\le\sum_{n=N}^{M}\frac{1}{x_n^{1-\lambda}}\frac{|\xi_n|}{x_n^{\lambda}}\le\left(\sum_{n=N}^{M}\frac{1}{x_n^{4(1-\lambda)/3}}\right)^{3/4}\left(\sum_{n=N}^{M}\frac{\xi_n^4}{x_n^{4\lambda}}\right)^{1/4}.$$

Так як для довільного $p>0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n^{1+p}}$ збіжний [77], а $\frac{4}{3}(1-\lambda)>1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n^{4(1-\lambda)/3}}$ збіжний для $\lambda<\frac{1}{4}$. Далі, розглянемо нерівність

$$E\left|\sum_{n=N}^{M}\frac{\sin(x_n t)}{x_n}\xi_n\right|^4\le\left(\sum_{n=N}^{M}\frac{1}{x_n^{4(1-\lambda)/3}}\right)^3 E\left(\sum_{n=N}^{M}\frac{\xi_n^4}{x_n^{4\lambda}}\right).$$

Так як для послідовності випадкових величин (ξ_n) виконується рівність $E\xi_n^4\le 3\left(E\xi_n^2\right)^2$, то

$$E\left(\sum_{n=N}^{M}\frac{\xi_n^4}{x_n^{4\lambda}}\right)\le 3\sum_{n=N}^{M}\frac{\left(E\xi_n^2\right)^2}{x_n^{4\lambda}}\le 3\sum_{n=N}^{M}\frac{4c_H^4}{x_n^{4\lambda+4H}J_{1-H}^4(x_n)}.$$

Оскільки, при $n \to \infty$ нулі x_n функції Бесселя $J_v, v > -1$ такі, що $x_n \to \infty$ [лема 4.1, 77], то із асимптотичного співвідношення для функцій Бесселя J_v першого роду порядку v

$$J_v^2(x) + J_{v+1}^2(x) \sim \frac{2}{\pi x},\ x \to +\infty$$

[116, с. 200], випливає, що $J_{1-H}^2(x_n) \sim \dfrac{2}{\pi x_n}, n \to \infty$. Тоді

$$\frac{1}{x_n^{4\lambda+4H} J_{1-H}^4(x_n)} \sim \frac{\pi^2}{4} \frac{x_n^2}{x_n^{4\lambda+4H}} = \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{x_n^{4\lambda+4H-2}}.$$

При $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ знайдеться таке $\lambda < \frac{1}{4}$, що $4\lambda + 4H - 2 > 1$. Враховуючи, що для довільного $p > 0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^{1+p}} < +\infty$, одержимо збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^{4\lambda+4H} J_{1-H}^4(x_n)}$. Отже, $E\left(\sum_{n=N}^{M} \frac{\sin(x_n t)}{x_n} \xi_n\right)^4 \to 0, N, M \to \infty$, і тому, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x_n t)}{x_n} \xi_n$ збігається в просторі $L_4(\Omega)$. Аналогічно, доводиться збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(y_n t)}{y_n} \eta_n$ в $L_4(\Omega)$.

Доведемо, що випадковий процесс $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x_n t)}{x_n} \xi_n$ є випадковим процесом класу K. Нехай $X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \xi_n, t \in [0,1]$, де $\varphi_n(t) = \frac{\sin(x_n t)}{x_n}, n \ge 1$. Для довільних відрізків $[s,t], [u,v] \subset [0,1]$ без спільних внутрішніх точок покладемо $X_{1,N} = \sum_{n=1}^{N} \rho_n \xi_n$, де $\rho_n = \varphi_n(t) - \varphi_n(s)$, $X_{2,N} = \sum_{n=1}^{N} \tau_n \xi_n$, де $\tau_n = \varphi_n(v) - \varphi_n(u)$, $n \ge 1$.

Покажемо, що виконується умова

$$E\left(X_{1,N} \pm X_{2,N}\right)^4 \le 3\left(E\left(X_{1,N} \pm X_{2,N}\right)^2\right)^2. \tag{5.22}$$

Оскільки $X_{1,N} \pm X_{2,N} = \sum_{n=1}^{N} \mu_n \xi_n$, де $\mu_n = \rho_n \pm \tau_n, 1 \le n \le N$, тоді з умови $E\xi_n^4 \le 3\left(E\xi_n^2\right)^2$ маємо

$$E\left(\sum_{n=1}^{N} \mu_n \xi_n\right)^4 = \sum_{n=1}^{N} \mu_n^4 E\xi_n^4 + 6\sum_{\substack{n,m=1\\ n<m}}^{N} \mu_n^2 \mu_m^2 E\xi_n^2 E\xi_m^2 \le$$

$$\le 3\left(\sum_{n=1}^{N} \mu_n^4 \left(E\xi_n^2\right)^2 + 2\sum_{\substack{n,m=1\\ n<m}}^{N} \mu_n^2 \mu_m^2 E\xi_n^2 E\xi_m^2\right) = 3\left(\sum_{n=1}^{N} \mu_n^2 E\xi_n^2\right)^2 =$$

$$= 3\left(E\left(\sum_{n=1}^{N} \mu_n \xi_n\right)^2\right)^2.$$

Нехай $X_i = \lim_{N\to\infty} X_{i,N}$ в просторі $L_4(\Omega)$, де $i = 1,2$. Після переходу до границі при $N \to \infty$ в співвідношенні (5.22) одержимо

$$E\left(X_1 \pm X_2\right)^4 \le 3\left(E\left(X_1 \pm X_2\right)^2\right)^2.$$

Таким чином, випадковий процес $X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x_n t)}{x_n} \xi_n, \ t \in [0,1]$ є процесом класу K.

Аналогічно, випадковий процес $Y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(y_n t)}{y_n} \eta_n, \ t \in [0,1]$ є процесом класу K. Тоді, випадковий процес $\xi(t) = X(t) + Y(t), t \in [0,1]$ є процесом класу K. Дійсно, для $X_1 = X(t) - X(s)$, $X_2 = X(v) - X(u)$ та $Y_1 = Y(t) - Y(s)$, $Y_2 = Y(v) - Y(u)$, внаслідок леми 2.2, випадковий вектор $\left(X_1 + Y_1, X_2 + Y_2\right)$ належить сім'ї K.

Отже, випадковий процес $\xi(t), t \in [0,1]$ є випадковим процесом класу K.

Зауваження 5.2. Якщо для зазначених на початку прикладу $(\xi_n),(\eta_n)$ – незалежних послідовностей незалежних випадкових величин $E\xi_n^4 = 3\left(E\xi_n^2\right)^2$, $E\eta_n^4 = 3\left(E\eta_n^2\right)^2$, $n \ge 1$, то випадковий процес $\xi(t), t \in [0,1]$ є випадковим процесом класу K_1.

За спостереженнями випадкового процесу $\xi_H(t), t \in [0,1]$ класу K_1 з нульовим середнім значенням та коваріаційною функцією (5.20) у точках

$$\left\{ \frac{k}{a_n}, 0 \le k \le a_n \right\} \cup \left\{ \frac{k+0.5}{a_n}, 0 \le k \le a_n - 1 \right\}, n \ge 1,$$

де $(a_n) \subset \mathrm{N}, a_n \to \infty$ при $n \to \infty$, потрібно побудувати консистентну оцінку параметра H. Припустимо, що для довільного $\alpha > 0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-\alpha}$ – збіжний.

Означення 5.1. *Випадковий процес* $X(t), t \in [0,1]$ *класу* K_1 *називається процесом класу* $K_1^{(2)}$ *якщо для довільних* $0 \le s \le t \le u \le v \le 1$, *випадковий вектор* (ξ_2, η_2), *де* $\xi_2 = X(t) - 2X\left(\frac{t+s}{2}\right) + X(s)$, $\eta_2 = X(v) - 2X\left(\frac{v+u}{2}\right) + X(u)$, *належить сім'ї* K_1.

Надалі припускаємо, що випадковий процес $\xi_H(t), t \in [0,1]$ належить класу $K_1^{(2)}$.

Введемо такі позначення:

$$\xi_{k,n}^{(1)} = \xi_H\left(\frac{k+1}{a_n}\right) - \xi_H\left(\frac{k}{a_n}\right),$$

$$\xi_{k,n}^{(2)} = \xi_H\left(\frac{k+1}{a_n}\right) - 2\xi_H\left(\frac{k+0.5}{a_n}\right) + \xi_H\left(\frac{k}{a_n}\right),\ 0 \le k \le a_n - 1.$$

Розглянемо наступні послідовності бакстерівських сум:

$$S_n^{(i)}=\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(\xi_{k,n}^{(i)}\right)^2,\ \widehat{S}_n^{(i)}=a_n^{2H-1}S_n^{(i)},\ i=1,2,\ n\ge 1\cdot$$

Лема 5.5. *Нехай* $\{\xi_H(t), t\in[0,1]\}$ *– випадковий процесс класу* $K_1^{(2)}$ *з нульовим середнім значенням, коваріаційною функцією (5.9). Тоді для* $H^*\in(0,1)$ *справедлива наступна нерівність:*

$$\sup_{H\in(0,H^*]}\operatorname{Var}\widehat{S}_n^{(1)}\le\begin{cases}\dfrac{2}{a_n}\left(3+2\zeta\left(4-4H^*\right)\right),\ H^*\in\left(0,\dfrac{3}{4}\right),\\ \dfrac{2}{a_n}\left(3+2\left(1+\ln a_n\right)\right),\ H^*=\dfrac{3}{4},\\ \dfrac{2}{a_n}\left(3+2\dfrac{a_n^{4H^*-3}}{4H^*-3}\right),\ H^*\in\left(\dfrac{3}{4},1\right),\end{cases}$$

де $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s},\ s>1.$

Доведення. З властивостей дисперсії випадкових величин маємо:

$$\operatorname{Var}S_n^{(1)}=E\left(S_n^{(1)}-ES_n^{(1)}\right)^2=E\left(\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(\xi_{k,n}^{(1)}\right)^2-\sum_{k=0}^{a_n-1}E\left(\xi_{k,n}^{(1)}\right)^2\right)^2=$$

$$=\sum_{k,j=0}^{a_n-1}\left(E\left(\left(\xi_{k,n}^{(1)}\right)^2\left(\xi_{j,n}^{(1)}\right)^2\right)-E\left(\xi_{k,n}^{(1)}\right)^2E\left(\xi_{j,n}^{(1)}\right)^2\right);$$

та $\operatorname{Var}\widehat{S}_n^{(1)}=a_n^{2(2H-1)}\operatorname{Var}S_n^{(1)}$.

Із леми 2.4 випливає, що для випадкового процесу $X(t), t\in[0,1]$ класу $K_1^{(2)}$ випадкові вектори $(\xi_1,\eta_1),(\xi_2,\eta_2)$ із означення 2.1 задовольняють таку нерівність:

$$E\left(\xi_i^2\eta_i^2\right)\le 2\left(E\left(\xi_i\eta_i\right)\right)^2+E\xi_i^2E\eta_i^2,\ i=1,2. \qquad (5.23)$$

Внаслідок цієї нерівності отримаємо:

$$\operatorname{Var} S_{n,i}^{(1)} \le 2 \sum_{k,j=0}^{a_n-1} \left(E\left(\xi_{k,n}^{(1)} \xi_{j,n}^{(1)} \right) \right)^2 .$$

Далі, обчислимо,

$$E\left(\xi_{k,n}^{(1)}\xi_{j,n}^{(1)}\right) = E\left(\xi_H\left(\frac{k+1}{a_n}\right) - \xi_H\left(\frac{k}{a_n}\right)\right)\left(\xi_H\left(\frac{j+1}{a_n}\right) - \xi_H\left(\frac{j}{a_n}\right)\right) =$$

$$= -\left|\frac{k-j}{a_n}\right|^{2H} + \frac{1}{2}\left|\frac{(k-j)+1}{a_n}\right|^{2H} + \frac{1}{2}\left|\frac{(k-j)-1}{a_n}\right|^{2H}, 0 \le k, j \le a_n - 1. \quad (5.24)$$

Покладемо $k - j = l, 1 \le l \le a_n - 1$ та позначимо

$$z_l := (l+1)^{2H} - 2l^{2H} + (l-1)^{2H}, l \ge 1. \quad (5.25)$$

Тоді, оскільки при $k = j$ маємо $E\left(\xi_{k,n}^{(1)}\right)^2 = a_n^{-2H}$ та $z_1^2 = \left(2^{2H} - 2\right)^2 \le 4$, $H \in (0,1)$, із співвідношень (5.24)-(5.25) випливає

$$\operatorname{Var} S_n^{(1)} \le 2\left(a_n^{1-4H} + \frac{a_n^{-4H}}{2} \sum_{\substack{k,j=0 \\ k<j}}^{a_n-1} z_{j-k}^2 \right) \le 2a_n^{1-4H}\left(1 + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{a_n-1} z_l^2\right) \le$$

$$\le 2a_n^{1-4H}\left(3 + \frac{1}{2}\sum_{l=2}^{a_n-1} z_l^2\right).$$

Так як, z_l є приростом другого порядку функції $f(x) = x^{2H}, x \ge 1$, $H \in (0,1)$ на відрізку $[l-1, l+1]$, тоді з формули для приросту n-го порядку функції $f(x)$ при $n = 2$ [55, с. 244] одержимо, що $z_l = f''(\tau_l) \cdot 1^2 =$ $= 2H(2H-1)\tau_l^{2H-2}$, де $\tau_l \in (l-1, l+1)$.

Оскільки, $\sup\limits_{H \in (0,1)} |2H(2H-1)| = 2$, то при $l - 1 < \tau_l, l \ge 2$ отримаємо

$$z_l^2 \le \frac{4}{(l-1)^{4-4H}}, H \in (0,1).$$

З останньої нерівності випливає, що

$$\operatorname{Var} S_n^{(1)} \le 2a_n^{1-4H}\left(3+\frac{1}{2}\sum_{l=2}^{a_n-1} z_l^2\right) \le 2a_n^{1-4H}\left(3+2\sum_{l=2}^{a_n-1}\frac{1}{(l-1)^{4-4H}}\right).$$

та для $\widehat{S}_n^{(1)} = a_n^{2H-1} S_n^{(1)}$ і $H^* \in (0,1)$ маємо

$$\sup_{H\in\left(0,H^*\right]} \operatorname{Var} \widehat{S}_n^{(1)} \le \frac{2}{a_n}\left(3+2\sum_{l=2}^{a_n-1}\frac{1}{(l-1)^{4-4H}}\right). \qquad (5.26)$$

Для $H^* \in \left(0,\frac{3}{4}\right)$ одержимо $\sum_{l=1}^{a_n-1}\frac{1}{l^{4-4H^*}} \le \zeta\left(4-4H^*\right)$, де $\zeta(\cdot)$ – дзета-функція Рімана. При $H^* = \frac{3}{4}$ маємо $\sum_{l=1}^{a_n-1}\frac{1}{l} \le 1+\ln a_n$, а при $H^* \in \left(\frac{3}{4},1\right)$: $\sum_{l=1}^{a_n-1}\frac{1}{l^{4-4H^*}} \le 1+\frac{a_n^{4H^*-3}}{4H^*-3}$. Отже, з нерівності (5.26) для всіх $H \in \left(0,H^*\right]$, $H^* < 1$ випливає твердження леми. □

Теорема 5.6. *Нехай* $\{\xi_H(t), t\in[0,1]\}$ *– випадковий процес класу* $K_1^{(2)}$ *з нульовим середнім значенням, коваріаційною функцією (5.20). Тоді* $\widehat{S}_n^{(1)} \to 1$ *з ймовірністю одиниця при* $n \to \infty$.

Доведення. Обчислимо спочатку математичне сподівання $\widehat{S}_n^{(1)}$:

$$E\widehat{S}_n^{(1)} = a_n^{2H-1}\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(\xi_{k,n}^{(1)}\right)^2 = a_n^{2H-1}\sum_{k=0}^{a_n-1} E\left(\left(\xi_H\left(\frac{k+1}{a_n}\right)\right)^2 -\right.$$

$$\left. -2\xi_H\left(\frac{k+1}{a_n}\right)\xi_H\left(\frac{k}{a_n}\right)+\left(\xi_H\left(\frac{k}{a_n}\right)\right)^2\right) = a_n^{2H} a_n \frac{1}{a_n^{2H}} = 1. \qquad (5.27)$$

З леми 5.5 та припущення про збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-\alpha}$ для будь-якого $\alpha > 0$ випливає, що для довільного $H \in (0,1)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Var} \widehat{S}_n^{(1)}$ збіжний. Тоді

$\widehat{S}_n^{(1)} - E\widehat{S}_n^{(1)} \to 0$ з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$ [41, с. 24]. Враховуючи співвідношення (5.26), отримаємо твердження теореми. □

Лема 5.6. *Нехай* $\{\xi_H(t), t \in [0,1]\}$ *– випадковий процес класу* $K_1^{(2)}$ *з нульовим середнім значенням, коваріаційною функцією (5.9). Тоді виконується нерівність:*

$$\sup_{H \in (0,1)} \operatorname{Var} \widehat{S}_n^{(2)} \le \frac{\kappa}{a_n},$$

де $\kappa = 19 + \left(\frac{3}{16}\right)^4 \frac{\pi^4}{90}$.

Доведення. Обчислимо дисперсію випадкової величини $S_n^{(2)}$:

$$\operatorname{Var} S_n^{(2)} = E\left(S_n^{(2)} - ES_n^{(2)}\right)^2 = E\left(\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(\xi_{k,n}^{(2)}\right)^2 - \sum_{k=0}^{a_n-1} E\left(\xi_{k,n}^{(2)}\right)^2\right)^2 =$$

$$= \sum_{k,j=0}^{a_n-1}\left(E\left(\left(\xi_{k,n}^{(2)}\right)^2\left(\xi_{j,n}^{(2)}\right)^2\right) - E\left(\xi_{k,n}^{(2)}\right)^2 E\left(\xi_{j,n}^{(2)}\right)^2\right).$$

Як і у доведенні леми 5.5, з нерівності (5.23) одержимо, що

$$\operatorname{Var} S_{n,i}^{(2)} \le 2\sum_{k,j=0}^{a_n-1}\left(E\xi_{k,n}^{(2)}\xi_{j,n}^{(2)}\right)^2.$$

Далі,

$$E\left(\xi_{k,n}^{(2)}\xi_{j,n}^{(2)}\right) = E\left(\xi_H\left(\frac{k+1}{a_n}\right) - 2\xi_H\left(\frac{k+0.5}{a_n}\right) + \xi_H\left(\frac{k}{a_n}\right)\right) \times$$

$$\times\left(\xi_H\left(\frac{j+1}{a_n}\right) - 2\xi_H\left(\frac{j+0.5}{a_n}\right) + \xi_H\left(\frac{j}{a_n}\right)\right) = -3\left|\frac{k-j}{a_n}\right|^{2H} - \frac{1}{2}\left|\frac{(k-j)+1}{a_n}\right|^{2H} +$$

$$+ 2\left|\frac{(k-j)+0.5}{a_n}\right|^{2H} - \frac{1}{2}\left|\frac{(k-j)-1}{a_n}\right|^{2H} + 2\left|\frac{(k-j)-0.5}{a_n}\right|^{2H}. \qquad (5.28)$$

При $k = j$ з попередньої рівності одержимо, що $E\left(\xi_{k,n}^{(2)}\right)^2 = a_n^{-2H}\left(2^{2-2H} - 1\right)$.

Далі, у співвідношенні (5.28) введемо заміну $k - j = l, 1 \le l \le a_n - 1$ та покладемо

$$w_l := 6l^{2H} - 4\left|l + \frac{1}{2}\right|^{2H} + |l+1|^{2H} - 4\left|l - \frac{1}{2}\right|^{2H} + |l-1|^{2H}, \, l \ge 1.$$

Тоді з попередньої рівності отримаємо

$$\operatorname{Var} S_n^{(2)} \le 2\sum_{k,j=0}^{a_n-1}\left(-3\left|\frac{k-j}{a_n}\right|^{2H} + 2\left|\frac{(k-j)+0.5}{a_n}\right|^{2H} - \frac{1}{2}\left|\frac{(k-j)+1}{a_n}\right|^{2H} + \right.$$

$$\left. + 2\left|\frac{(k-j)-0.5}{a_n}\right|^{2H} - \frac{1}{2}\left|\frac{(k-j)-1}{a_n}\right|^{2H}\right)^2 = 2\left(a_n^{1-4H}\left(2^{2-2H} - 1\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{a_n^{-4H}}{2}\sum_{\substack{k,j=1\\k<j}}^{a_n-1} w_{j-k}^2\right) = 2\left(a_n^{1-4H}\left(2^{2-2H} - 1\right)^2 + \frac{a_n^{-4H}}{2}\sum_{l=1}^{a_n-1}(a_n - l)w_l^2\right).$$

При $l = 1$ з виразу для w_l одержимо

$$w_1 = \frac{6 \cdot 2^{2H} - 4 - 4 \cdot 3^{2H} + 2^{4H}}{2^{2H}}.$$

Далі, для дисперсії послідовності бакстерівських сум $S_n^{(2)}$ маємо:

$$\operatorname{Var} S_n^{(2)} \le 2a_n^{1-4H}\left(\left(2^{2-2H} - 1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{6 \cdot 2^{2H} - 4 - 4 \cdot 3^{2H} + 2^{4H}}{2^{2H}}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sum_{l=2}^{a_n-1} w_l^2\right).$$

Оскільки $\sup\limits_{H \in (0,1)}\left(2^{2-2H} - 1\right)^2 = 9$, то

$$\operatorname{Var} S_n^{(2)} \le 2a_n^{1-4H}\left(9 + \frac{c_1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{l=2}^{a_n-1} w_l^2\right), \tag{5.29}$$

де

$$c_1 = \sup_{H\in(0,1)} \left(\frac{6\cdot 2^{2H} - 4 - 4\cdot 3^{2H} + 2^{4H}}{2^{2H}} \right)^2 = 1.$$

Так як, w_l – приріст четвертого порядку функції $f(x) = x^{2H}, x \geq 1, H \in (0,1)$ на відрізку $[l-1, l+1]$, то з формули для приросту n-го порядку функції $f(x)$ при $n = 4$ [55, с. 244] одержимо, що

$$w_l = f^{(4)}\left(\tilde{\theta}_l\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{2H(2H-1)(2H-2)(2H-3)\tilde{\theta}_l^{2H-4}}{2^4},\ \tilde{\theta}_l \in (l-1, l+1).$$

Покладемо

$$c_2 = \sup_{H\in(0,1)} \left| \frac{2H(2H-1)(2H-2)(2H-3)}{2^4} \right|$$

та при $l-1 < \tilde{\theta}_l, l \geq 2$ маємо

$$w_l^2 \leq c_2^2 \frac{1}{(l-1)^{8-4H}}, l \geq 2.$$

З останньої нерівності та нерівності (5.29) випливає наступна оцінка для дисперсії

$$\operatorname{Var} S_n^{(2)} \leq 2a_n^{1-4H} \left(9 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2^2}{2} \sum_{l=2}^{a_n-1} \frac{1}{(l-1)^{8-4H}} \right).$$

Для $H \in (0,1)$ маємо $\sum_{l=2}^{a_n-1} \frac{1}{l^{8-4H}} = \zeta(8-4H) \leq \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, де $\zeta(\cdot)$ – дзета-функція Рімана. Тоді

$$\operatorname{Var} S_n^{(2)} \leq 2a_n^{1-4H} \left(9 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{9}{256}\right)^2 \frac{\pi^4}{90} \right) = a_n^{1-4H}\kappa,$$

де $\kappa = 19 + \left(\frac{3}{16}\right)^4 \frac{\pi^4}{90}$.

Остаточно, для випадкової величини $\widehat{S}_{n,i}^{(2)} = a_n^{2H-1} S_n^{(2)}$ одержимо

$$\sup_{H \in (0,1)} \operatorname{Var} \widehat{S}_n^{(2)} \le \frac{\kappa}{a_n}, \text{ де } \kappa = 19 + \left(\frac{3}{16}\right)^4 \frac{\pi^4}{90}.$$

□

Теорема 5.7. *Нехай* $\{\xi_H(t), t \in [0,1]\}$ *– випадковий процес класу* $K_1^{(2)}$ *з нульовим середнім значенням, коваріаційною функцією (5.20). Тоді* $\widehat{S}_n^{(2)} \to 2^{2-2H} - 1$ *з ймовірністю одиниця при* $n \to \infty$.

Доведення. Знайдемо математичне сподівання випадкової величини $\widehat{S}_n^{(2)}$:

$$E\widehat{S}_n^{(2)} = a_n^{2H-1} \sum_{k=0}^{a_n-1} \left(\xi_{k,n}^{(2)}\right)^2 = a_n^{2H-1} \sum_{k=0}^{a_n-1} E\left(\left(\xi_H\left(\frac{k+1}{a_n}\right)\right)^2 + \right.$$

$$+ 4\left(\xi_H\left(\frac{k+0.5}{a_n}\right)\right)^2 + \left(\xi_H\left(\frac{k}{a_n}\right)\right)^2 - 4\xi_H\left(\frac{k+1}{a_n}\right)\xi_H\left(\frac{k+0.5}{a_n}\right) -$$

$$\left. - 4\xi_H\left(\frac{k+0.5}{a_n}\right)\xi_H\left(\frac{k}{a_n}\right) + 2\xi_H\left(\frac{k+1}{a_n}\right)\xi_H\left(\frac{k}{a_n}\right)\right) =$$

$$= a_n^{2H-1} a_n \left(4\left(\frac{1}{2a_n}\right)^{2H} - \frac{1}{a_n^{2H}}\right) = 2^{2-2H} - 1. \tag{5.30}$$

З леми 5.6 та збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-1}$ випливає, що для довільного $H \in (0,1)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Var} \widehat{S}_n^{(2)}$ збігається. Тому $\widehat{S}_n^{(2)} - E\widehat{S}_n^{(2)} \to 0$ з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$ [41, с. 24]. Враховуючи рівність (5.30), отримаємо твердження теореми. □

Із теорем 5.6 та 5.7 випливає наступний наслідок.

Наслідок 5.1. *Нехай виконуються умови теорем 5.6 та 5.7. Тоді з ймовірністю одиниця*

$$\frac{S_n^{(2)}}{S_n^{(1)}} = \frac{\widehat{S}_n^{(2)}}{\widehat{S}_n^{(1)}} \to 2^{2-2H} - 1,\ H \in (0,1) \qquad (5.31)$$

при $n \to \infty$.

Розглянемо функцію

$$\theta(H) := 2^{2-2H} - 1,\ H \in (0,1). \qquad (5.32)$$

Функція $\theta(H)$ неперервна і спадна на $(0,1)$ така, що $\theta(0+) = 3, \theta(1-) = 0$. Нехай $\varphi(\theta) := 1 - \frac{1}{2}\log_2(\theta + 1),\ \theta \in (0,3)$ – функція, обернена до функції (5.32).

Теорема 5.8. *Нехай виконуються умови теореми 5.7. Тоді статистика*

$$\widehat{H}_n = 1 - \frac{1}{2}\log_2\left(\widehat{\theta}_n + 1\right),\ \text{де}\ \widehat{\theta}_n = \frac{\widehat{S}_n^{(2)}}{\widehat{S}_n^{(1)}},\ n \ge 1,$$

є сильно консистентною оцінкою параметра H.

Доведення. Оскільки функція $\varphi(\theta), \theta \in (0,3)$, обернена до функції (5.32) і неперервна, то із збіжності (5.31) випливає, що $\widehat{H}_n \to H$ з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$. □

Перейдемо до побудови довірчих інтервалів.

Лема 5.7. *Нехай* $\{X_k | 0 \le k \le a_n, a_n \in \mathrm{N}\}$, $\{Y_k | 0 \le k \le a_n, a_n \in \mathrm{N}\}$ *– набори випадкових величин з скінченними моментами 4-го порядку такі, що* $EX_k = EY_k = 0,\ EX_k^2 = EX_0^2,\ EY_k^2 = EY_0^2,\ 0 \le k \le a_n$;

$$S_1 = \sum_{k=0}^{a_n} X_k^2,\ S_2 = \sum_{k=0}^{a_n} Y_k^2,\ \delta = \frac{EX_0^2}{EY_0^2}.$$

Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ *має місце нерівність:*

$$P\left\{\left|\frac{S_1}{S_2} - \delta\right| > \varepsilon\right\} \le \frac{\mathrm{Var}\ Q_1}{(EQ_1)^2} + \frac{\mathrm{Var}\ Q_2}{(EQ_2)^2},$$

де $Q_1 = (\delta - \varepsilon)S_2 - S_1, Q_2 = S_1 - (\delta + \varepsilon)S_2$.

Доведення. Розглянемо наступну ймовірність:

$$P\left\{\left|\frac{S_1}{S_2}-\delta\right|\ge\varepsilon\right\}=P\{|S_1-\delta S_2|\ge\varepsilon S_2\}=P\{S_1-\delta S_2\le-\varepsilon S_2\}+$$

$$+P\{S_1-\delta S_2\ge\varepsilon S_2\}=P\{Q_1\ge 0\}+P\{Q_2\ge 0\}.$$

Зауважимо, що

$$EQ_1=(\delta-\varepsilon)ES_2-ES_1=(\delta-\varepsilon)(a_n+1)EY_0^2-(a_n+1)EX_0^2=$$

$$=-\varepsilon(a_n+1)EY_0^2,$$

а

$$EQ_2=ES_1-(\delta+\varepsilon)ES_2=(a_n+1)EX_0^2-(\delta+\varepsilon)(a_n+1)EY_0^2=$$

$$=-\varepsilon(a_n+1)EY_0^2.$$

Оцінимо зверху ймовірність $P\{Q_1\ge 0\}$ за допомогою нерівності Чебишова:

$$P\{Q_1\ge 0\}=P\{Q_1-EQ_1\ge -EQ_1\}\le P\{|Q_1-EQ_1|\ge -EQ_1\}\le\frac{\mathrm{Var}\,Q_1}{(EQ_1)^2}.$$

Аналогічно оцінюється зверху ймовірність $P\{Q_2\ge 0\}$. □

За допомогою леми 5.7 побудуємо довірчий інтервал для параметра $\theta=2^{2-2H}-1,\ H\in(0,1)$. Нехай $1-p,\ p\in(0,1)$ – заданий рівень довіри. Додатне число $\gamma_n(p)$ визначимо так, щоб виконувалась нерівність:

$$P\left\{\left|\widehat{\theta}_n-\theta\right|\ge\gamma_n(p)\right\}\le 1-p,\ \text{де}\ \widehat{\theta}_n=\frac{\widehat{S}_n^{(2)}}{\widehat{S}_n^{(1)}},\ n\ge 1.$$

Для цього покладемо $Q_1=(\theta-\gamma_n(p))\widehat{S}_n^{(1)}-\widehat{S}_n^{(2)}, Q_2=\widehat{S}_n^{(2)}-(\theta+\gamma_n(p))\widehat{S}_n^{(1)}$, де поки що $\gamma_n(p)$ не визначено. Для математичних сподівань випадкових величин Q_1,Q_2 з рівностей (5.27), (5.29) та теореми 5.8 маємо:

$$EQ_1=(\theta-\gamma_n(p))E\widehat{S}_n^{(1)}-E\widehat{S}_n^{(2)}=E\widehat{S}_n^{(1)}\left(\theta-\gamma_n(p)-\frac{E\widehat{S}_n^{(2)}}{E\widehat{S}_n^{(1)}}\right)=-\gamma_n(p),$$

$$EQ_2 = E\widehat{S}_n^{(2)} - (\theta + \gamma_n(p))E\widehat{S}_n^{(1)} = E\widehat{S}_n^{(1)}\left(\frac{E\widehat{S}_n^{(2)}}{E\widehat{S}_n^{(1)}} - \theta - \gamma_n(p)\right) = -\gamma_n(p).$$

Для дисперсій випадкових величин Q_1, Q_2 за допомогою нерівності $(a+b)^2 \le 2(a^2 + b^2), a, b \in \mathrm{R}$ одержимо наступні оцінки зверху:

$$\mathrm{Var}\, Q_1 \le 2\left((\theta - \gamma_n(p))^2 \mathrm{Var}\widehat{S}_n^{(1)} + \mathrm{Var}\widehat{S}_n^{(2)}\right),$$

$$\mathrm{Var}\, Q_2 \le 2\left((\theta + \gamma_n(p))^2 \mathrm{Var}\widehat{S}_n^{(1)} + \mathrm{Var}\widehat{S}_n^{(2)}\right).$$

Будемо підбирати $\gamma_n(p)$ так, щоб виконувались наступні нерівності:

$$\frac{\mathrm{Var}\, Q_1}{(EQ_1)^2} \le \frac{2(\theta - \gamma_n(p))^2 \mathrm{Var}\widehat{S}_n^{(1)} + 2\mathrm{Var}\widehat{S}_n^{(2)}}{\gamma_n^2(p)} \le \frac{p}{2},$$

$$\frac{\mathrm{Var}\, Q_2}{(EQ_2)^2} \le \frac{2(\theta + \gamma_n(p))\mathrm{Var}\widehat{S}_n^{(1)} + 2\mathrm{Var}\widehat{S}_n^{(2)}}{\gamma_n^2(p)} \le \frac{p}{2}. \qquad (5.33)$$

Для $H^* \in (0,1)$ покладемо

$$\lambda_n := \begin{cases} \dfrac{2}{a_n}\left(3 + 2\zeta\left(4 - 4H^*\right)\right), H^* \in \left(0, \dfrac{3}{4}\right), \\ \dfrac{2}{a_n}\left(3 + 2(1 + \ln a_n)\right), H^* = \dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{2}{a_n}\left(3 + 2\dfrac{a_n^{4H^*-3}}{4H^* - 3}\right), H^* \in \left(\dfrac{3}{4}, 1\right), \end{cases} \qquad (5.34)$$

де $\zeta(\cdot)$ – дзета-функція Рімана, а також

$$\mu_n = \frac{\kappa}{a_n},\ \kappa = 19 + \left(\frac{9}{256}\right)^2 \frac{\pi^4}{90}. \qquad (5.35)$$

З лем 5.6 та 5.7 випливає, що $\sup\limits_{H \in (0, H^*]} \mathrm{Var}\, \widehat{S}_n^{(1)} \le \lambda_n,\ \sup\limits_{H \in (0,1)} \mathrm{Var}\, \widehat{S}_n^{(2)} \le \mu_n$.

При $H \in \left(0, H^*\right],\ \theta \in (0,3)$ нерівність (5.34) є наслідком нерівності:

$$\frac{2(3+\gamma_n(p))^2\lambda_n+2\mu_n}{\gamma_n^2(p)}\le\frac{p}{2}.$$

Розв'яжемо цю нерівність відносно $\gamma_n(p)$ за умови $\frac{p}{4}-\lambda_n>0$, що справджується для достатньо великих $n\in\mathrm{N}$:

$$2(3+\gamma_n(p))^2\lambda_n+2\mu_n\le\frac{p}{2}\gamma_n^2(p),$$

$$\left(\frac{p}{4}-\lambda_n\right)\gamma_n^2(p)-6\lambda_n\gamma_n(p)-(9\lambda_n+\mu_n)\ge 0,$$

$$\gamma_n(p)\ge\frac{6\lambda_n+\sqrt{D_n}}{2\left(\frac{p}{4}-\lambda_n\right)},$$

за умови, що нерівність $D_n=p(9\lambda_n+\mu_n)-4\lambda_n\mu_n\ge 0$ справджується для достатньо великих n, λ_n та μ_n – визначено формулами (5.34) та (5.35) відповідно. Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема 5.9. *Нехай* $\{\xi_H(t),t\in[0,1]\}$ *– випадковий процес класу* $K_1^{(2)}$ *з нульовим середнім значенням, коваріаційною функцією (5.20), а також* $H\in\left(0,H^*\right]$, *де* $H^*\in(0,1)$ *– фіксоване,* $\frac{p}{4}-\lambda_n>0$, $1-p,\ p\in(0,1)$ *– рівень довіри,* λ_n *обчислюється за формулою (5.34). Тоді виконується нерівність:*

$$P\left\{H\in\left(H_{n,l},H_{n,r}\right)\right\}\ge 1-p,$$

де

$$H_{n,l}=\varphi\left(\min\left(\widehat{\theta}_n+\gamma_n(p),3\right)\right),\ H_{n,r}=\varphi\left(\max\left(\theta\left(H^*\right),\widehat{\theta}_n-\gamma_n(p)\right)\right),$$

$$\widehat{\theta}_n = \frac{\widehat{S}_n^{(2)}}{\widehat{S}_n^{(1)}},\ \gamma_n(p) = \frac{6\lambda_n + \sqrt{D_n}}{\frac{p}{4} - \lambda_n},\ D_n = p(9\lambda_n + \mu_n) - 4\lambda_n\mu_n,$$

μ_n *визначено рівністю (5.35),* $\varphi(\theta) = 1 - \frac{1}{2}\log_2(\theta + 1)$, $\theta \in (0,3)$.

РОЗДІЛ 6. ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ

У даному розділі за допомогою бакстерівських статистик отримана консистентна оцінка векторного параметра гауссового випадкового поля певного класу. Побудовані довірчі еліпсоїди. У підрозділі 6.2 метод бакстерівських сум застосовується для оцінювання векторного параметра коваріаційної функції дробового анізотропного вінерівського поля. Побудовані неасимптотичні довірчі області для цього параметра.

6.1. Оцінювання параметрів гауссових випадкових полів

6.1.1. Координатні квадратичні варіації гауссового випадкового поля

Нехай $X = \{X(t), t = (t_1, t_2, \ldots, t_m) \in \mathrm{R}^m\}$ – гауссове однорідне випадкове поле з нульовим математичним сподіванням і коваріаційною функцією $r(t) = EX(0)X(t)$. Для рівномірного розбиття

$$\lambda_n = \left\{0, \frac{1}{a_n}, \ldots, \frac{a_n - 1}{a_n}, 1\right\}$$

з кроком $\frac{1}{a_n}$ відрізка $[0,1]$ j-ї координатної осі, $1 \le j \le m$, розглянемо прирости

$$\Delta_j X_{k,n} = X\left(t^j_{k+1,n}\right) - X\left(t^j_{k,n}\right),$$

де $t^j_{k,n} = \left(0, \ldots, 0, \frac{k}{a_n}, 0, \ldots, 0\right)$ – вектор, який лежить на j-ій координатній осі, $0 \le k \le a_n - 1,\ a_n \in \mathrm{N},\ n \ge 1$. Розглянемо суму квадратів приростів

$$S_{j,n} = \sum_{k=0}^{a_n-1}\left(\Delta_j X_{k,n}\right)^2, \; n \ge 1, \; 1 \le i, j \le m. \qquad (6.1)$$

Нехай коваріаційна функція $r(t), t \in \mathrm{R}^m$ гауссового однорідного випадкового поля X неперервна на одиничному m- вибірному кубі $[0,1]^m$, двічі неперервно диференційована за j-ю змінною при $t_j \ne 0$, причому частинні похідні другого порядку за j-ю змінною обмежені сталою M, $1 \le j \le m$. З формули Тейлора та критерію Коші існування границі функції в точці випливає існування односторонніх границь

$$d_j = \lim_{t_j \to 0+} D_j r\left(0,\ldots,0,t_j,0,\ldots,0\right), \; 1 \le j \le m. \qquad (6.2)$$

Покладемо

$$C_j = -2d_j, \;\; 1 \le j \le m. \qquad (6.3)$$

Зауважимо, що $\left\{X\left(0,\ldots,0,t_j,0,\ldots,0\right), t_j \in \mathrm{R}\right\}$ – гауссвоий стаціонарний випадковий процес. З наслідку 1.8 випливає наступне твердження.

Теорема 6.1. *Нехай* $\left\{X(t), t \in \mathrm{R}^m\right\}$ *– гауссове однорідне випадкове поле з нульовим математичним сподіванням, коваріаційною функцією* $r \in C\left([0,1]^m\right)$ *і виконуються наступні умови*

1) коваріаційна функція двічі неперервно диференційовна за змінною t_j *при* $t_j \ne 0$*, причому* $\sup\left\{D_{jj} r(t) : t \in [0,1]^m, t_j \ne 0\right\} = M < \infty, \; 1 \le j \le m;$

2) $a_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$.

Тоді для довільного $j, 1 \le j \le m$,

$$S_{j,n} \to C_j \qquad (6.4)$$

у середньому квадратичному при $n \to \infty$*, де сталі* C_j *визначені співвідношеннями (6.2), (6.3).*

Зауваження 6.1. Якщо ряд із загальним членом $\frac{1}{a_n}$ збіжний, то збіжність у (6.4) має місце майже напевне. Це випливає із співвідношення $\mathrm{Var} S_{j,n} = O\left(\frac{1}{a_n}\right)$ та леми Бореля-Кантеллі.

Нехай коваріаційна функція $r(t), t \in \mathrm{R}^m$ гауссового однорідного випадкового поля $\{X(t), t \in \mathrm{R}^m\}$ з нульовим середнім задовольняє умови теореми 6.1. Тоді, для довільного $j, 1 \le j \le m$, виконується нерівність

$$\left| r\left(t^{(j)}\right) - r(0) + \beta_j t_j \right| \le M t_j^2 ,$$

де $\beta_j = -d_j$, $t^{(j)} = (0,\ldots,0,t_j,0,\ldots,0)$, $0 \le t_j \le 1$.

Далі, нехай гауссове однорідне випадкове поле $\{X(t), t \in \mathrm{R}^m\}$ спостерігається в точках вигляду $\left\{\frac{k}{n}, 0 \le k \le n\right\}$, $n \ge 1$, координатних осей одиничного m- вимірного куба $[0,1]^m$ застосуємо теорему 1 при $a_n = n$.

Розглянемо статистику

$$\beta_n = 0.5\left(S_{1,n}, S_{2,n}, \ldots, S_{m,n}\right)^t, n \ge 1, \qquad (6.5)$$

де випадкові величини $S_{j,n}$, $1 \le j \le m$, визначені рівністю (6.1). Якщо коваріаційна функція $r(t), t \in \mathrm{R}^m$ гауссового однорідного випадкового поля задовольняє умови теореми 6.1, то $C_j = 2\beta_j$, $1 \le j \le m$, і тому на підставі цієї теореми $\beta_n \to \beta$ у середньому квадратичному при $n \to \infty$. Отже, β_n – консистентна у середньому квадратичному оцінка параметра β.

Лема 6.1. *Нехай коваріаційна функція* $r(t), t \in \mathrm{R}^m$ *гауссового однорідного випадкового поля* $\{X(t), t \in \mathrm{R}^m\}$ *задовольняє умови теореми 6.1. Тоді для довільного* $j, 1 \le j \le m$*, виконуються нерівності*

$$\left|\beta_j - E\beta_{j,n}\right| \le \frac{M}{n}, \tag{6.6}$$

$$\operatorname{Var}\beta_{j,n} \le \frac{\left(6\left(\beta_j + \frac{M}{n}\right)^2 + \frac{M^2}{2n}\right)}{n}. \tag{6.7}$$

Доведення. Позначимо вектор

$$t_n^{(j)} = (0,\ldots,0,1/n,0,\ldots,0) \in \mathrm{R}^m.$$

Тоді, використовуючи рівність (6.5), маємо

$$\left|\beta_j - E\beta_{j,n}\right| = \left|0.5\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\Delta_j X_{k,n}\right)^2 - \beta_j\right)\right| =$$

$$= \left|n\left(r(0) - r\left(t_n^{(j)}\right)\right) - \beta_j\right| = n\left|r(0) - r\left(t_n^{(j)}\right) - \beta_j / n\right| \le M / n.$$

Застосуємо формулу Іcерліса (1.44) для $\xi_1 = \xi_2 = \Delta_j X_{k,n}, \xi_3 = \xi_4 = \Delta_j X_{l,n}$, $0 \le k, l \le n-1$, тоді:

$$\operatorname{Var}\beta_{j,n} = E\left(\beta_{j,n} - E\beta_{j,n}\right)^2 = E\beta_{j,n}^2 - \left(E\beta_{j,n}\right)^2 =$$

$$= 0.5\sum_{k,l=0}^{a_n-1}\left(E\left(\Delta_j X_{k,n}\Delta_j X_{l,n}\right)\right)^2.$$

Отриману суму розіб’ємо на дві суми Σ_1 та Σ_2. До першої суми Σ_1 ввійдуть доданки, для яких $|k-l| \le 1$, а до суми Σ_2 – всі останні доданки. Число доданків першої суми Σ_1 не перевищує $3n$ і тому з рівності (6.6) маємо

$$\Sigma_1 = 0.5\sum_{\substack{k,l=0,\\ |k-l|\le 1}}^{n-1}\left(E\left(\Delta_j X_{k,n}\Delta_j X_{l,n}\right)\right)^2 \le 0.5\sum_{\substack{k,l=0,\\ |k-l|\le 1}}^{n-1} E\left(\Delta_j X_{k,n}\right)^2 E\left(\Delta_j X_{l,n}\right)^2 =$$

$$= 0.5 \sum_{\substack{k,l=0,\\ |k-l|\le 1}}^{n-1} 2\left(r(0) - r\left(t_n^{(j)}\right)\right)^2 \le \frac{6\left(\beta_j + M/n\right)^2}{n}.$$

Далі

$$\Sigma_2 = 0.5 \sum_{\substack{k,l=0,\\ |k-l|>1}}^{n-1} \left(E\left(\Delta_j X_{k,n} \Delta_j X_{l,n}\right)\right)^2 =$$

$$= 0.5 \sum_{\substack{k,l=0,\\ |k-l|>1}}^{n-1} \left(2r\left((k-l)t_n^{(j)}\right) - r\left((k-l+1)t_n^{(j)}\right) - r\left((k-l-1)t_n^{(j)}\right)\right)^2 \le 0.5\left(\frac{M}{n}\right)^2.$$

З нерівностей для Σ_1 та Σ_2 випливає оцінка (6.7). □

6.1.2. Оцінювання параметра гауссового однорідного випадкового поля. Довірчі еліпсоїди

Оцінка розподілу квадратичної форми від гауссових випадкових величин. У роботі [97] наведено наступне означення квадратично гауссового випадкового вектора.

Означення 6.1. [97] *Випадковий вектор* $\zeta = \left(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m\right)^t$ *називається квадратично гауссовим, якщо його компоненти* $\zeta_i, 1 \le i \le m$, *можна подати у вигляді*

$$\zeta_i = \eta^t B_i \eta - E\left(\eta^t B_i \eta\right), \tag{6.8}$$

де η – d*-вимірний гауссовий випадковий вектор,* B_i *– симетрична матриця розміру* $d \times d$, *або компоненти вектора* ζ *є границями у середньому квадратичному випадкових величин вигляду (6.8).*

Відмітимо, що статистика β_n є квадратично гауссовим m-вимірним вектором.

Лема 6.2 [97]. *Нехай* $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m)^t$ *– квадратично гауссовий вектор,* B *– симетрична додатно визначена матриця розміру* $m \times m$, $\eta = \zeta^t B \zeta$. *Тоді для довільного* $x > 2$ *виконується нерівність*

$$P\{\eta/(E\eta) > x\} \le W(x),$$

де

$$W(x) = \left(\frac{e}{4}\right)^{1/8} x^{1/4} \left(\left(\frac{x}{2}\right)^{1/2} - 1\right) \Big/ \operatorname{sh}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{1/2} - 1\right).$$

Нехай K – деяка додатна стала, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)^t \in [0, K]^m$ – параметр, який входить до коваріаційної функції $r(t)$ гауссового однорідного випадкового поля $X(t), t \in \mathrm{R}^m$. Оцінка $\beta_n = 0.5(S_{1,n}, S_{2,n}, \ldots, S_{m,n})^t$ – консистентна у середньому квадратичному оцінка параметра β. Покладемо $Y_n = \beta_n - E\beta_n$. Випадковий вектор Y_n – квадратично гауссовий. Нехай, далі, C – симетрична додатно визначена матриця розміру $m \times m$, $\eta_n = Y_n^t C Y_n$. На підставі леми 6.2 при $x > 2$ виконується нерівність $P\{\eta/(E\eta) > x\} \le W(x)$.

Покладемо $\|s\|_C = \left(s^t C s\right)^{1/2}$, $s \in \mathrm{R}^m$. Ця функція є нормою у просторі R^m. Символом $B_C(s_0, r)$ позначимо замкнену кулю радіуса $r > 0$ з центром у точці $s_0 \in \mathrm{R}^m$ у нормованому просторі $\left(\mathrm{R}^m, \|\cdot\|_C\right)$.

Теорема 6.2. *Нехай* $\{X(t), t \in \mathrm{R}^m\}$ *– гауссове однорідне випадкове поле з нульовим середнім, яке задовольняє умови теореми 1. Тоді статистика* β_n *є консистентною оцінкою параметра* β *і для рівня довіри* $1 - p$ *виконується нерівність*

$$P\{\beta \in B_C(0, r_n) + \beta_n\} \ge 1 - p,$$

де

$$r_n = \left(\|C\|m\right)^{1/2}\left(\left(x_p\left(6\left(K+\frac{M}{n}\right)^2+\frac{M^2}{2n}\right)\right)^{1/2}+\frac{M}{n}\right),$$

x_p *– корінь рівняння* $W(x)=p$, $\|C\| = \left(Tr\left(C^t C\right)^{1/2}\right)$.

Доведення. З леми 6.2 випливає, що для довільного $x>2$ виконується нерівність

$$1-W(x) \le P\{\eta_n/(E\eta_n) \le x\} = P\{\eta_n \le x(E\eta_n)\} =$$

$$= P\left\{Y_n \in B_C\left(0,\left(x\left(E\eta_n\right)\right)^{1/2}\right)\right\} = P\left\{\beta_n \in B_C\left(E\beta_n,\left(x\left(E\eta_n\right)\right)^{1/2}\right)\right\} \le$$

$$\le P\left\{\beta \in B_C\left(\beta_n,\left(x\left(E\eta_n\right)\right)^{1/2}+\left\|\beta-E\beta_n\right\|_C\right)\right\}. \qquad (6.9)$$

Для оцінки величини $E\eta_n$ та $\|\beta-E\beta_n\|_C$ застосуємо лему 6.1 та нерівність $\|s\|_C \le \left(\|C\|\right)^{1/2}\|s\|, s\in \mathrm{R}^m$, де $\|s\|$ – евклідова норма вектора s у просторі R^m:

$$\|\beta-E\beta_n\|_C \le \left(\|C\|m\right)^{1/2}\frac{M}{n}, \qquad (6.10)$$

$$E\eta_n \le \|C\|\frac{m}{n}\left(6\left(K+\frac{M}{n}\right)^2+\frac{M^2}{2n}\right). \qquad (6.11)$$

З ланцюжка нерівностей (6.9) та оцінок (6.10)-(6.11), випливає твердження теореми. □

Зауважимо, що $r_n \sim \left(6x_p\|C\|m/n\right)^{1/2}K, n\to\infty$.

Нехай $C=I$ – одинична матриця розміру $m\times m$. У цьому випадку $\|\cdot\|_C = \|\cdot\|$ – звичайна евклідова норма в R^m,

$$E\eta_n \le \frac{m}{n}\left(6\left(K+\frac{M}{n}\right)^2+\frac{M^2}{2n}\right),\ \|\beta-E\beta_n\|_C \le (m)^{1/2}\frac{M}{n}.$$

З теореми 6.2 випливає така теорема.

Теорема 6.3. *Нехай* $\{X(t), t \in \mathrm{R}^m\}$ *– гауссове однорідне випадкове поле з нульовим середнім, яке задовольняє умови теореми 6.1. Тоді статистика* β_n *– консистентна у середньому квадратичному оцінка параметра* β *і для рівня довіри* $1-p$ *виконується нерівність*

$$P\{\beta \in B(\beta_n, r_n)\} \geq 1-p,$$

де

$$r_n = m\left(\frac{x_p}{n}\right)^{1/2}\left(6\left(K+\frac{M}{n}\right)^2+\frac{M^2}{2n}\right)^{1/2}+\frac{mM}{n},$$

x_p *– корінь рівняння* $W(x)=p$, $B(\cdot,\cdot)$ *– куля у просторі* R^m *з евклідовою нормою.*

Зауважимо, що $r_n \sim \left(6x_p/n\right)^{1/2} Km, n \to \infty$.

Теорема 6.4. *Нехай виконуються умови теореми 6.3. Тоді для довільного* $\delta > 0$ *існує випадковий номер* $n_0 = n_0(\omega) < +\infty$ *майже напевно такий, що з ймовірністю одиниця при* $n > n_0(\omega)$

$$\beta \in B\left(\beta_n, (2+\delta)^{1/2}\alpha_n \ln n\right),$$

де

$$\alpha_n = m\left(6\left(K+\frac{M}{n}\right)^2+\frac{M^2}{2n}\right)^{1/2}+\frac{mM}{n}.$$

Доведення. Дійсно,

$$P\left\{\beta \notin B\left(\beta_n, (2+\delta)^{1/2}\alpha_n \ln n\right)\right\} \leq W(x_n),$$

де $x_n = (2+\delta)^{1/2}\ln^2 n$. Оскільки числовий ряд із загальним членом $W(x_n)$ збіжний, то твердження теореми випливає з леми Бореля-Кантеллі.□

Приклад 6.1. Нехай $\{X(t), t \in \mathrm{R}^m\}$ – гауссове однорідне випадкове поле з нульовим математичним сподіванням, коваріаційною функцією

$$r(t) = \exp\left\{-\sum_{i=1}^{m} \beta_i |t_i|\right\} \prod_{i=1}^{m} \cos(\beta_i t_i), \; t_i \in \mathrm{R}^m,$$

де параметр $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m) \in [0, K]^m$. Це випадкове поле задовольняє умови теореми 6.3, де $M = 2K^2$, $C_j = 2\beta_j$, $1 \le j \le m$. На підставі теореми 6.3 для рівня довіри $1 - p$ маємо

$$P\{\|\beta - \beta_n\| \le r_n\} \ge 1 - p,$$

де

$$r_n = m\left\{\left(\frac{x_p}{n}\right)^{1/2}\left(6\left(K + \frac{2K^2}{n}\right)^2 + \frac{2K^4}{n}\right)^{1/2} + \frac{2K}{n}\right\}.$$

6.2. Бакстерівська оцінка параметра дробового анізотропного вінерівського поля

6.2.1. Сильна консистентність оцінки

Означення 6.2. [91] *Дробовим анізотропним вінерівським полем з m-вимірним параметром* α, *де* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m), 0 < \alpha_i < 1, 1 \le i \le m$, *називається гауссове випадкове поле* $B = \{B^{(\alpha)}(t) : t \in R^m\}$ *з нульовим середнім значенням та коваріаційною функцією:*

$$EB^{(\alpha)}(t)B^{(\alpha)}(s) = \frac{1}{2^m}\prod_{i=1}^{m}\left(|t_i|^{2\alpha_i} + |s_i|^{2\alpha_i} - |t_i - s_i|^{2\alpha_i}\right),$$

де $t = (t_1, \ldots, t_m), s = (s_1, \ldots, s_m) \in R^m$.

Нехай $\left\{B^{(\alpha)}(t): t\in[0,1]^m\right\}$ – дробове анізотропне вінерівське поле з багатовимірним параметром $\alpha=\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_m\right), \alpha_i\in\left(0,\alpha_i^*\right]$, яке спостерігається на ребрах

$$E_i=\left\{\left(t_1,\ldots,t_m\right)\middle| t_1=1,\ldots,t_{i-1}=1, 0\le t_i\le 1, t_{i+1}=1,\ldots,t_m=1\right\}, 1\le i\le m$$

одиничного m-вимірного паралелепіпеда в точках $\left\{\left(\underbrace{1,\ldots,1,}_{i-1}\frac{k}{a_n},1,\ldots,1\right), 0\le k\le a_n, 1\le i\le m\right\}$, де $a_n\in\mathrm{N}, n\ge 1$; $a_n\to\infty$, $n\to\infty$. Величини $\alpha_i^*, 1\le i\le m$ вважаються відомими і належать інтервалу $(0,1)$. Припустимо, що для довільного $\gamma>0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-\gamma}$ – збіжний.

Позначимо через $B_i^{(\alpha)}(t_i), 0\le t_i\le 1, i=\overline{1,m}$ звуження випадкового поля $B^{(\alpha)}(t)$ на ребро E_i, $i=\overline{1,m}$. Цей випадковий процес має наступну коваріаційну функцію:

$$EB_i^{(\alpha)}(t_i)B_i^{(\alpha)}(s_i)=\frac{1}{2}\left(\left|t_i\right|^{2\alpha_i}+\left|s_i\right|^{2\alpha_i}-\left|t_i-s_i\right|^{2\alpha_i}\right).$$

Таким чином, $B_i^{(\alpha)}(t_i)$ є дробовим броунівським рухом з параметром Хюрста α_i, $i=\overline{1,m}$.

Введемо наступне позначення:

$$\Delta B_i^{(\alpha)}\left(\frac{k}{a_n}\right)=B_i^{(\alpha)}\left(\frac{k+1}{a_n}\right)-B_i^{(\alpha)}\left(\frac{k}{a_n}\right), 0\le k\le a_n-1.$$

Розглянемо послідовності бакстерівських сум для $n\ge 1$:

$$\widehat{S}_n^{(i)}(B,\alpha)=\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(B_i^{(\alpha)}\left(\frac{k+1}{a_n}\right)-B_i^{(\alpha)}\left(\frac{k}{a_n}\right)\right)^2, S_n^{(i)}(B,\alpha)=a_n^{2\alpha_i-1}\widehat{S}_n^{(i)}(B,\alpha).$$

Теорема 6.5. *Нехай* $B_i^{(\alpha)}(t_i), i=\overline{1,m}$ *– звуження на ребро* E_i, $i=\overline{1,m}$ *одиничного m-вимірного паралелепіпеда дробового анізотропного вінерівського поля*

$\left\{B^{(\alpha)}(t): t\in[0,1]^m\right\}$ *з m-вимірним параметром* $\alpha=\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_m\right), \alpha_i\in\left(0,\alpha_i^*\right]$, $\alpha_i^*<1$ *. Тоді статистика*

$$\widehat{\alpha}_n^{(i)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\ln\widehat{S}_n^{(i)}(B,\alpha)}{\ln a_n}\right), n\geq 1$$

є сильно консистентною оцінкою параметра $\alpha_i, 1\leq i\leq m$.

Доведення. Обчислимо $E\widehat{S}_n^{(i)}(B,\alpha), 1\leq i\leq m$:

$$E\widehat{S}_n^{(i)}(B,\alpha)=E\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(B_i^{(\alpha)}\left(\frac{k+1}{a_n}\right)-B_i^{(\alpha)}\left(\frac{k}{a_n}\right)\right)^2=$$

$$=E\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(\left(B_i^{(\alpha)}\left(\frac{k+1}{a_n}\right)\right)^2-2B_i^{(\alpha)}\left(\frac{k+1}{a_n}\right)B_i^{(\alpha)}\left(\frac{k}{a_n}\right)+\left(B_i^{(\alpha)}\left(\frac{k}{a_n}\right)\right)^2\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(\left|\frac{k+1}{a_n}\right|^{2\alpha_i}-\left(\left|\frac{k+1}{a_n}\right|^{2\alpha_i}+\left|\frac{k}{a_n}\right|^{2\alpha_i}-\left|\frac{1}{a_n}\right|^{2\alpha_i}\right)+\left|\frac{k}{a_n}\right|^{2\alpha_i}\right)=$$

$$=a_n\frac{1}{a_n^{2\alpha_i}}=a_n^{1-2\alpha_i}. \tag{6.12}$$

З останньої рівності випливає, що $ES_n^{(i)}(B,\alpha)=a_n^{2\alpha_i-1}E\widehat{S}_n^{(i)}(B,\alpha)=1$.

Для знаходження оцінки $\operatorname{Var}\widehat{S}_n^{(i)}(B,\alpha)$ використаємо наступну лему.

Лема 6.3. *Нехай* $B_i^{(\alpha)}(t_i), i=\overline{1,m}$ *– звуження на ребро* E_i, $i=\overline{1,m}$ *одиничного m-вимірного паралелепіпеда дробового анізотропного вінерівського поля* $\left\{B^{(\alpha)}(t): t\in[0,1]^m\right\}$ *з m-вимірним параметром* $\alpha=\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_m\right), \alpha_i\in\left(0,\alpha_i^*\right]$. *Тоді при* $\alpha_i^*\in(0,1)$, $i=\overline{1,m}$ *справедлива наступна нерівність:*

$$\sup_{\alpha\in\left(0,\alpha_i^*\right]} \operatorname{Var} \widehat{S}_n^{(i)}(B,\alpha) \le \begin{cases} \dfrac{2}{a_n}\left(3+2\zeta\left(4-4\alpha_i^*\right)\right), \ \alpha_i^* \in \left(0, \dfrac{3}{4}\right), \\ \dfrac{2}{a_n}\left(3+2\left(1+\ln a_n\right)\right), \ \alpha_i^* = \dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{2}{a_n}\left(3+2\dfrac{a_n^{4\alpha_i^*-3}}{4\alpha_i^*-3}\right), \alpha_i^* \in \left(\dfrac{3}{4}, 1\right), \end{cases}$$

де $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, $s > 1$, $i = \overline{1,m}$.

Доведення. Для обчислення дисперсії послідовності бакстерівських сум $\widehat{S}_n^{(i)}(B,\alpha)$ застосуємо формулу Ісерліса (2.2) для знаходження математичного сподівання добутку випадкових величин, які мають сумісний гауссовий розподіл з нульовим середнім значенням. Тоді

$$\operatorname{Var} \widehat{S}_n^{(i)}(B,\alpha) = E\left(\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(\Delta B_i^{(\alpha)}\left(\frac{k}{a_n}\right)\right)^2\right)^2 - \left(E\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(\Delta B_i^{(\alpha)}\left(\frac{k}{a_n}\right)\right)^2\right)^2 =$$

$$= \sum_{k,j=0}^{a_n-1}\left(E\left(\Delta B_i^{(\alpha)}\left(\frac{k}{a_n}\right)\right)^2 E\left(\Delta B_i^{(\alpha)}\left(\frac{j}{a_n}\right)\right)^2 +\right.$$

$$\left. + 2\left(E\Delta B_i^{(\alpha)}\left(\frac{k}{a_n}\right)\Delta B_i^{(\alpha)}\left(\frac{j}{a_n}\right)\right)^2\right) - \left(E\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(\Delta B_i^{(\alpha)}\left(\frac{k}{a_n}\right)\right)\right)^2 =$$

$$= 2\sum_{k,j=0}^{a_n-1}\left(E\Delta B_i^{(\alpha)}\left(\frac{k}{a_n}\right)\Delta B_i^{(\alpha)}\left(\frac{j}{a_n}\right)\right)^2 = 2\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(E\left(\Delta B_i^{(\alpha)}\left(\frac{k}{a_n}\right)\right)^2\right)^2 +$$

$$+ 4\sum_{\substack{k,j=0\\k>j}}^{a_n-1}\left(E\Delta B_i^{(\alpha)}\left(\frac{k}{a_n}\right)B_i^{(\alpha)}\left(\frac{j}{a_n}\right)\right)^2. \qquad (6.13)$$

Знайдемо спочатку $E\Delta B_i^{(\alpha)}\left(\frac{k}{a_n}\right)\Delta B_i^{(\alpha)}\left(\frac{j}{a_n}\right)$ при $k > j$:

$$E\Delta B_i^{(\alpha)}\left(\frac{k}{a_n}\right)\Delta B_i^{(\alpha)}\left(\frac{j}{a_n}\right)=E\left(B_i^{(\alpha)}\left(\frac{k+1}{a_n}\right)-B_i^{(\alpha)}\left(\frac{k}{a_n}\right)\right)\times$$

$$\times\left(B_i^{(\alpha)}\left(\frac{j+1}{a_n}\right)-B_i^{(\alpha)}\left(\frac{j}{a_n}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\left|\frac{k+1}{a_n}\right|^{2H}+\left|\frac{j+1}{a_n}\right|^{2H}-\left|\frac{k-j}{a_n}\right|^{2H}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\left|\frac{k+1}{a_n}\right|^{2H}+\left|\frac{j}{a_n}\right|^{2H}-\left|\frac{(k-j)+1}{a_n}\right|^{2H}\right)-\frac{1}{2}\left(\left|\frac{k}{a_n}\right|^{2H}+\left|\frac{j+1}{a_n}\right|^{2H}-\right.$$

$$\left.-\left|\frac{(k-j)-1}{a_n}\right|^{2H}\right)+\frac{1}{2}\left(\left|\frac{k}{a_n}\right|^{2H}+\left|\frac{j}{a_n}\right|^{2H}-\left|\frac{k-j}{a_n}\right|^{2H}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{(k-j)-1}{a_n}\right|^{2\alpha_i}-\left|\frac{k-j}{a_n}\right|^{2\alpha_i}+\frac{1}{2}\left|\frac{(k-j)+1}{a_n}\right|^{2\alpha_i}. \qquad (6.14)$$

Далі, зробимо заміну $k-j=l, 1\le l\le a_n-1$ та покладемо

$$v_l:=(l+1)^{2\alpha_i}-2l^{2\alpha_i}+(l-1)^{2\alpha_i},\ l\ge 1,\ i=\overline{1,m}. \qquad (6.15)$$

Звідси із співвідношень (6.12)-(6.15) при $k>j$ отримаємо

$$\mathrm{Var}\ \widehat{S}_n^{(i)}(B,\alpha)=2\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(E\left(\Delta B_i^{(\alpha)}\left(\frac{k}{a_n}\right)\right)^2\right)^2+4\sum_{\substack{k,j=0\\k>j}}^{a_n-1}\left(E\Delta B_i^{(\alpha)}\left(\frac{k}{a_n}\right)B_i^{(\alpha)}\left(\frac{j}{a_n}\right)\right)^2=$$

$$=2\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(a_n^{1-2\alpha_i}\right)^2+4\sum_{\substack{k,j=0\\k>j}}^{a_n-1}\left(\frac{1}{2}\left|\frac{(k-j)-1}{a_n}\right|^{2\alpha_i}-\left|\frac{k-j}{a_n}\right|^{2\alpha_i}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left|\frac{(k-j)+1}{a_n}\right|^{2\alpha_i}\right)^2=2a_n^{1-4\alpha_i}+4\sum_{l=1}^{a_n-1}(a_n-l)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2}\left|\frac{l-1}{a_n}\right|^{2\alpha_i}-\left|\frac{l}{a_n}\right|^{2\alpha_i}+\frac{1}{2}\left|\frac{l+1}{a_n}\right|^{2\alpha_i}\right)^2=$$

$$= 2a_n^{1-4\alpha_i}\left(1+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{a_n-1}\left(1-\frac{l}{a_n}\right)v_l^2\right) \le 2a_n^{1-4\alpha_i}\left(1+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{a_n-1}v_l^2\right).$$

Так як для $l=1$ маємо, що $v_1^2 = \left(2^{2\alpha_i}-2\right)^2 \le 4$ при $\alpha_i \in (0,1)$, $i=\overline{1,m}$, то

$$\text{Var}\,\widehat{S}_n^{(i)}(B,\alpha) \le 2a_n^{1-4\alpha_i}\left(1+\frac{4}{2}+\frac{1}{2}\sum_{l=2}^{a_n-1}v_l^2\right) = 2a_n^{1-4\alpha_i}\left(3+\frac{1}{2}\sum_{l=2}^{a_n-1}v_l^2\right).$$

Оскільки, v_l – приріст другого порядку функції $f(x)=x^{2\alpha_i}$, $x \ge 1$, $\alpha_i \in (0,1)$, $i=\overline{1,m}$ на відрізку $[l-1, l+1]$, то з формули для приросту n-го порядку функції $f(x)$ при $n=2$ [55, с. 244] одержимо, що $v_l = f''(\theta_l)\cdot 1^2 = 2\alpha_i(2\alpha_i-1)\theta_l^{2\alpha_i-2}$, де $\theta_l \in (l-1, l+1)$.

Враховуючи, що $\sup\limits_{\alpha_i\in(0,1)}\left|2\alpha_i(2\alpha_i-1)\right| = 2$, $i=\overline{1,m}$, отримаємо при $l-1<\theta_l, l\ge 2$

$$v_l^2 \le \frac{4}{(l-1)^{4-4\alpha_i}},\ l \ge 2.$$

Тоді

$$\text{Var}\,\widehat{S}_n^{(i)}(B,\alpha) \le 2a_n^{1-4\alpha_i}\left(3+2\sum_{l=2}^{a_n-1}\frac{1}{(l-1)^{4-4\alpha_i}}\right).$$

Звідси для послідовності бакстерівських сум $S_n^{(i)}(B,\alpha) = a_n^{2\alpha_i-1}\widehat{S}_n^{(i)}(B,\alpha)$, $i=\overline{1,m}, n \ge 1$ маємо

$$\text{Var}\,S_n^{(i)}(B,\alpha) \le \frac{2}{a_n}\left(3+2\sum_{l=2}^{a_n-1}\frac{1}{(l-1)^{4-4\alpha_i}}\right)$$

та для $\alpha_i^* \in (0,1)$, $i=\overline{1,m}$

$$\sup_{\alpha_i\in\left(0,\alpha_i^*\right]}\text{Var}\,S_n^{(i)}(B,\alpha) \le \frac{2}{a_n}\left(3+2\sum_{l=2}^{a_n-1}\frac{1}{(l-1)^{4-4\alpha_i^*}}\right). \tag{6.16}$$

Для $\alpha_i^* \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$ одержимо $\sum_{l=1}^{a_n-1} \frac{1}{l^{4-4\alpha_i^*}} \leq \zeta\left(4-4\alpha_i^*\right)$, де $\zeta(\cdot)$ – дзета-функція Рімана. При $\alpha_i^* = \frac{3}{4}$ маємо $\sum_{l=1}^{a_n-1} \frac{1}{l} \leq 1 + \int_1^{a_n} \frac{dx}{x} = 1 + \ln a_n$, а при $\alpha_i^* \in \left(\frac{3}{4}, 1\right)$: $\sum_{l=1}^{a_n-1} \frac{1}{l^{4-4\alpha_i^*}} \leq 1 + \int_1^{a_n} \frac{dx}{x^{4-4\alpha_i^*}} = 1 + \frac{a_n^{4\alpha_i^*-3}}{4\alpha_i^* - 3}$, $i = \overline{1, m}$.

Отже, для всіх $\alpha_i \in \left(0, \alpha_i^*\right], \alpha_i^* < 1, i = \overline{1, m}$ із нерівності (6.16) отримаємо

$$\operatorname{Var} S_n^{(i)}(B, \alpha) \leq C_n\left(\alpha_i^*\right), \tag{6.17}$$

де

$$C_n\left(\alpha_i^*\right) := \begin{cases} \frac{2}{a_n}\left(3 + 2\zeta\left(4 - 4\alpha_i^*\right)\right), \ \alpha_i^* \in \left(0, \frac{3}{4}\right), \\ \frac{2}{a_n}\left(3 + 2\left(1 + \ln a_n\right)\right), \ \alpha_i^* = \frac{3}{4}, \\ \frac{2}{a_n}\left(3 + 2\frac{a_n^{4\alpha_i^*-3}}{4\alpha_i^* - 3}\right), \ \alpha_i^* \in \left(\frac{3}{4}, 1\right). \end{cases} \tag{6.18}$$

З нерівностей (6.17)-(6.18) отримаємо твердження леми. □

З припущення про збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-\gamma}$ для будь-якого $\gamma > 0$ випливає, що для довільних $\alpha_i < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Var} S_n^{(i)}(B, \alpha) < +\infty$, $1 \leq i \leq m$, а тому із [41, с. 24] випливає збіжність $S_n^{(i)}(B, \alpha) - ES_n^{(i)}(B, \alpha) \to 0, n \to \infty$ з ймовірністю одиниця. Звідси отримаємо:

$$a_n^{2\alpha_i - 1} \widehat{S}_n^{(i)}(B, \alpha) \to 1, n \to \infty,$$

$$\left(2\alpha_i - 1\right) + \frac{\ln \widehat{S}_n^{(i)}(B, \alpha)}{\ln a_n} \to 0, n \to \infty,$$

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{\ln \widehat{S}_n^{(i)}(B,\alpha)}{\ln a_n}\right)\to \alpha_i, 1\le i\le m$$

з ймовірністю одиниця при $n\to\infty$.

Отже, статистика

$$\widehat{\alpha}_n^{(i)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\ln \widehat{S}_n^{(i)}(B,\alpha)}{\ln a_n}\right), n\ge 1 \tag{6.19}$$

є сильно консистентною оцінкою параметра $\alpha_i, 1\le i\le m$. □

Наслідок 6.1. *Нехай виконуються умови теореми 6.5. Тоді статистика* $\widehat{\alpha}_n=\left(\widehat{\alpha}_n^{(1)},\ldots,\widehat{\alpha}_n^{(m)}\right)$ *є сильно консистентною оцінкою параметра* $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$.

Доведення. Наслідок випливає безпосередньо з теореми 6.5.□

6.2.2. Неасимптотичні довірчі області

Теорема 6.6. *Нехай* $B_i^{(\alpha)}(t_i), i=\overline{1,m}$ *– звуження на ребро* E_i, $i=\overline{1,m}$ *одиничного m-вимірного паралелепіпеда дробового анізотропного вінерівського поля* $\left\{B^{(\alpha)}(t): t\in[0,1]^m\right\}$ *з m-вимірним параметром* $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m), \alpha_i\in\left(0,\alpha_i^*\right]$. *Тоді при* $\alpha_i^*\in(0,1), i=\overline{1,m}$ *виконується нерівність:*

$$P\left\{\widehat{\alpha}_n^{(i)}-l_i(p)<\alpha_i<\widehat{\alpha}_n^{(i)}+r_i(p)\right\}\ge 1-p,$$

де

$$l_i(p)\ge -\frac{1}{2}\frac{\ln\left(1-\sqrt{\frac{2C_n\left(\alpha_i^*\right)}{p}}\right)}{\ln a_n} \text{ *за умови, що* } \sqrt{\frac{2C_n\left(\alpha_i^*\right)}{p}}<1,$$

$$r_i(p) \geq \frac{1}{2} \frac{\ln\left(\sqrt{\frac{2C_n\left(\alpha_i^*\right)}{p}}+1\right)}{\ln a_n},$$

$C_n\left(\alpha_i^*\right)$ *визначено виразом (6.18),* $\widehat{\alpha}_n^{(i)}$ *– (6.19),* $1-p \in (0,1)$*,* $i=\overline{1,m}$.

Доведення. Нехай $1-p \in (0,1)$ – заданий рівень довіри. Знайдемо числа $l_i(p)>0, r_i(p)>0$ такі, що інтервал $\left(\widehat{\alpha}_n^{(i)} - l_i(p) < \alpha_i < \widehat{\alpha}_n^{(i)} + r_i(p)\right) \cap (0,1)$ буде довірчим інтервалом для параметра α_i, $i=\overline{1,m}$ з рівнем довіри $1-p$.

Розглянемо спочатку нерівність

$$P\left\{\alpha_i > \widehat{\alpha}_n^{(i)} + r_i(p)\right\} \leq \frac{p}{2}.$$

Тоді з вигляду статистики (6.19), виразу (6.12) та $S_n^{(i)}(B,\alpha) = a_n^{2\alpha_i - 1}\widehat{S}_n^{(i)}(B,\alpha), i=\overline{1,m}$ маємо

$$P\left\{\widehat{\alpha}_n^{(i)} + r_i(p) < \alpha_i\right\} = P\left\{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\ln \widehat{S}_n^{(i)}(B,\alpha)}{\ln a_n}\right) + r_i(p) < \alpha_i\right\} =$$

$$= P\left\{\left(1 + 2r_i(p) - 2\alpha_i\right)\ln a_n < \ln \widehat{S}_n^{(i)}(B,\alpha)\right\} =$$

$$= P\left\{\widehat{S}_n^{(i)}(B,\alpha) > a_n^{1+2r_i(p)-2\alpha_i}\right\} = P\left\{\widehat{S}_n^{(i)}(B,\alpha) - E\widehat{S}_n^{(i)}(B,\alpha) >\right.$$

$$\left. > a_n^{1-2\alpha_i}\left(a_n^{2r_i(p)} - 1\right)\right\} = P\left\{S_n^{(i)}(B,\alpha) - ES_n^{(i)}(B,\alpha) > a_n^{2r_i(p)} - 1\right\} \leq$$

$$\leq P\left\{\left|S_n^{(i)}(B,\alpha) - ES_n^{(i)}(B,\alpha)\right| > a_n^{2r_i(p)} - 1\right\} \leq \frac{p}{2}.$$

Зауважимо, що для будь-якого $n \geq 1$ вираз $a_n^{2r_i(p)} - 1 > 0$ при $r_i(p) > 0$. Тоді з нерівності Чебишова та нерівностей (6.16)-(6.17) випливає, що

$$P\left\{\left|S_n^{(i)}(B,\alpha) - ES_n^{(i)}(B,\alpha)\right| > a_n^{2r_i(p)} - 1\right\} \leq \frac{\operatorname{Var} S_n^{(i)}(B,\alpha)}{\left(a_n^{2r_i(p)} - 1\right)^2} \leq \frac{C_n\left(\alpha_i^*\right)}{\left(a_n^{2r_i(p)} - 1\right)^2}.$$

Далі, для $\alpha_i \in \left(0, \alpha_i^*\right], \alpha_i^* < 1,\ i = \overline{1,m}$ визначимо $r_i(p)$ так, щоб

$$P\left\{\widehat{\alpha}_n^{(i)} + r_i(p) < \alpha_i\right\} \le \frac{C_n\left(\alpha_i^*\right)}{\left(a_n^{2r_i(p)} - 1\right)^2} \le \frac{p}{2}.$$

Розв'яжемо останню нерівність відносно $r_i(p)$:

$$\left(a_n^{2r_i(p)} - 1\right)^2 \ge \frac{2C_n\left(\alpha_i^*\right)}{p};$$

$$r_i(p) \ge \frac{1}{2} \frac{\ln\left(\sqrt{\frac{2C_n\left(\alpha_i^*\right)}{p}} + 1\right)}{\ln a_n}. \tag{6.20}$$

Тепер розглянемо нерівність $P\left\{\alpha_i < \widehat{\alpha}_n^{(i)} - l_i(p)\right\} \le \frac{p}{2}$. Аналогічно до попередніх міркувань, отримаємо:

$$P\left\{\alpha_i < \widehat{\alpha}_n^{(i)} - l_i(p)\right\} = P\left\{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\ln \widehat{S}_n^{(i)}(B,\alpha)}{\ln a_n}\right) - \alpha_i > l_i(p)\right\} =$$

$$= P\left\{\left(1 - 2l_i(p) - 2\alpha_i\right)\ln a_n > \ln \widehat{S}_n^{(i)}(B,\alpha)\right\} =$$

$$= P\left\{\widehat{S}_n^{(i)}(B,\alpha) < a_n^{1-2l_i(p)-2\alpha_i}\right\} = P\left\{\widehat{S}_n^{(i)}(B,\alpha) - E\widehat{S}_n^{(i)}(B,\alpha) <\right.$$

$$\left. < a_n^{1-2\alpha_i}\left(a_n^{-2l_i(p)} - 1\right)\right\} = P\left\{S_n^{(i)}(B,\alpha) - ES_n^{(i)}(B,\alpha) < a_n^{-2l_i(p)} - 1\right\} \le$$

$$\le P\left\{\left|S_n^{(i)}(B,\alpha) - ES_n^{(i)}(B,\alpha)\right| > 1 - a_n^{-2l_i(p)}\right\} \le \frac{p}{2}.$$

Зауважимо, що для будь-якого $n \ge 1$ вираз $1 - a_n^{-2l_i(p)} > 0$ при $l_i(p) > 0,\ i = \overline{1,m}$. З нерівності Чебишова та нерівностей (6.16)-(6.17) одержимо

$$P\left\{\left|S_n^{(i)}(B,\alpha) - ES_n^{(i)}(B,\alpha)\right| > 1 - a_n^{-2l_i(p)}\right\} \le \frac{\operatorname{Var} S_n^{(i)}(B,\alpha)}{\left(1 - a_n^{-2l_i(p)}\right)^2} \le$$

$$\le \frac{C_n\left(\alpha_i^*\right)}{\left(1-a_n^{-2l_i(p)}\right)^2} \le \frac{p}{2}.$$

Розв'яжемо останню нерівність відносно $l_i(p),\ i=\overline{1,m}$ за умови, що $1-\sqrt{\dfrac{2C_n\left(\alpha_i^*\right)}{p}}>0$:

$$\left(1-a_n^{-2l_i(p)}\right)^2 \ge \frac{2C_n\left(\alpha_i^*\right)}{p};$$

$$l_i(p) \ge -\frac{1}{2}\frac{\ln\left(1-\sqrt{\dfrac{2C_n\left(\alpha_i^*\right)}{p}}\right)}{\ln a_n}. \qquad (6.21)$$

Нерівність $1-\sqrt{\dfrac{2C_n\left(\alpha_i^*\right)}{p}}>0$ виконується для достатньо великих n, оскільки $C_n\left(\alpha_i^*\right)\to 0$ при $n\to\infty$ внаслідок співвідношення (6.18). □

Наслідок 6.2. *Нехай виконуються умови теореми 6.2. Тоді має місце нерівність:*

$$P\left\{\alpha \in \left(\widehat{\alpha}_n^{(1)} - l_1(p), \widehat{\alpha}_n^{(1)} + r_1(p)\right) \times \ldots \times \left(\widehat{\alpha}_n^{(m)} - l_m(p), \widehat{\alpha}_n^{(m)} + r_m(p)\right)\right\} \ge 1 - mp.$$

Доведення. Розглянемо випадкові події

$$A_i = \left\{\alpha_i \in \left(\widehat{\alpha}_n^{(i)} - l_i(p), \widehat{\alpha}_n^{(i)} + r_i(p)\right)\right\}, 1 \le i \le m,$$

де $\widehat{\alpha}_n^{(i)}$ визначено в (6.19), $r_i(p)$ та $l_i(p)$ – в (6.20) та (6.21) відповідно.

Внаслідок теореми 6.6 одержимо, що

$$P\left\{\alpha \in \left(\widehat{\alpha}^{(1)} - l_1(p), \widehat{\alpha}_n^{(1)} + r_1(p)\right) \times \ldots \times \left(\widehat{\alpha}_n^{(m)} - l_m(p), \widehat{\alpha}_n^{(m)} + r_m(p)\right)\right\} \ge 1 - mp,$$

де $p \in (0,1)$. □

Означення 6.3. [79] *Нехай* $F \subset R^{m+1}$ *– деяка обмежена підмножина і для* $\delta > 0$ $N_\delta(F)$ *– мінімальна кількість множин з діаметром, що не перевищує* δ*, які покривають* F*. Кубічною розмірністю множини* F *називається границя*

$$\dim_b F = \lim_{\delta \to 0+} \frac{\ln N_\delta(F)}{\ln \delta^{-1}},$$

якщо вона існує та скінченна.

Для функції $f : U \to R, U \subset R^d$ її графік позначимо через $\Gamma(f)$, тобто

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in U\}.$$

Теорема 6.7. [91] *Нехай* $B = \{B^{(\alpha)}(t) : t \in R^m\}$ *– дробове анізотропне вінерівське поле з параметром* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $0 < \alpha_i < 1$, $1 \le i \le m$, $\chi = \min(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, I^m *– одиничний куб. Тоді*

$$P\left\{\dim_b \Gamma\left(B^{(\alpha)}\Big|_{I^m} \right) = m + 1 - \chi\right\} = 1$$

де $\Gamma(f)$ *– графік функції* f*.*

Позначимо через $d := m + 1 - \chi$ кубічну розмірність графіка реалізації дробового анізотропного вінерівського поля $B^{(\alpha)}(t), t \in [0,1]^m$.

Якщо покладемо, що

$$\widehat{\alpha}_n^{\min} = \min\left(\widehat{\alpha}_n^{(1)}, \widehat{\alpha}_n^{(2)}, \ldots, \widehat{\alpha}_n^{(m)} \right),$$

де $\widehat{\alpha}_n^{(i)}$ визначено в (6.19), то з теореми 6.7 одержимо, що

$$\widehat{d}_n := m + 1 - \widehat{\alpha}_n^{\min} \to d$$

з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$. Тоді з теореми 6.6 та наслідку 6.2 випливає сильна консистентність оцінки $\widehat{d}_n$ кубічної розмірності графіка реалізації випадкового поля $B^{(\alpha)}(t), t \in [0,1]^m$.

Лема 6.4. *Нехай* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *та* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *– набори дійсних чисел. Тоді справедлива наступна нерівність:*

$$\left|\min(a_1,a_2,\ldots,a_n)-\min(b_1,b_2,\ldots,b_n)\right| \le \max_{1\le i\le n}\left|a_i-b_i\right|. \qquad (6.22)$$

Доведення. Для доведення леми використаємо метод математичної індукції. Перевіримо справедливість нерівності (6.22) для $n=2$. Якщо $\min(a_1,a_2)=a_i$ та $\min(b_1,b_2)=b_i, i=1,2$, то твердження леми очевидне. Нехай тепер $\min(a_1,a_2)=a_1, \min(b_1,b_2)=b_2$ (випадок $\min(a_1,a_2)=a_2, \min(b_1,b_2)=b_1$ розглядається аналогічно). Якщо $a_1\le b_2\le b_1$, то $b_2-a_1\le b_1-a_1$. Якщо $b_2<a_1\le a_2$, то $a_1-b_2\le a_2-b_2$. Отже, нерівність (6.22) при $n=2$ виконується.

Припустимо, що для довільних наборів $a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}$ та $b_1,b_2,\ldots,b_{n-1}$ дійсних чисел нерівність (6.22) справедлива при $n\ge 3$. Доведемо, що тоді нерівність буде виконуватись і для $a_1,a_2,\ldots,a_n$ та $b_1,b_2,\ldots,b_n$:

$$\left|\min(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n)-\min(b_1,b_2,\ldots,b_{n-1},b_n)\right| =$$

$$=\left|\min(a_n,\min(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},))-\min(b_n,\min(b_1,b_2,\ldots,b_{n-1}))\right| \le$$

$$\le \max\left\{|a_n-b_n|,\left|\min(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})-\min(b_1,b_2,\ldots,b_{n-1})\right|\right\}\le$$

$$\le \max\left\{\left|a_n-b_n\right|, \max_{1\le i\le n-1}\left|a_i-b_i\right|\right\} = \max_{1\le i\le n}\left|a_i-b_i\right|.$$

Отже, нерівність (6.22) справедлива для будь-якого n. □

Теорема 6.8. *Нехай* $B_i^{(\alpha)}(t_i), i=\overline{1,m}$ *– звуження на ребро* E_i, $i=\overline{1,m}$ *одиничного m-вимірного паралелепіпеда дробового анізотропного вінерівського поля* $B^{(\alpha)}(t),\ t\in[0,1]^m$ *з m-вимірним параметром* $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m), \alpha_i\in\left(0,\alpha_i^*\right], \alpha_i^*<1$. *Тоді інтервал*

$$\left(\widehat{d}_n - a(p), \widehat{d}_n + a(p)\right),$$

де $a_i(p)=\max\{l_i(p),r_i(p)\}$, $a(p)=\max\limits_{1\le i\le m} a_i(p)$, $l_i(p)$, $r_i(p)$ *визначено співвідношеннями (6.20) та (6.21) відповідно для рівня довіри* $1-p, p\in(0,1)$, *є довірчим* *інтервалом для кубічної розмірності* d *графіка реалізації* $B^{(\alpha)}(t),\ t\in[0,1]^m$ *з рівнем довіри* $1-mp,\ p\in(0,1)$.

Доведення. Доведемо, що для додатного числа $a(p)$ справджується нерівність:

$$P\left\{\left|\widehat{d}_n-d\right|<a(p)\right\}\geq 1-mp. \qquad (6.23)$$

Ця нерівність еквівалентна нерівності $P\left\{\left|\widehat{d}_n-d\right|\geq a(p)\right\}\leq mp$. Тоді враховуючи, що $d:=m+1-\min\limits_{1\leq i\leq m}\alpha_i$, $\widehat{d}_n:=m+1-\widehat{\alpha}_n^{\min}=m+1-\min\limits_{1\leq i\leq m}\widehat{\alpha}_n^{(i)}$, одержимо

$$P\left\{\left|\widehat{d}_n-d\right|\geq a(p)\right\}=P\left\{\left|m+1-\min_{1\leq i\leq m}\alpha_i-m-1+\min_{1\leq i\leq m}\widehat{\alpha}_n^{(i)}\right|\geq a(p)\right\}=$$

$$=P\left\{\left|\min_{1\leq i\leq m}\widehat{\alpha}_n^{(i)}-\min_{1\leq i\leq m}\alpha_i\right|\geq a(p)\right\}.$$

Далі, з леми 6.4 випливає наступна нерівність:

$$P\left\{\left|\min_{1\leq i\leq m}\widehat{\alpha}_n^{(i)}-\min_{1\leq i\leq m}\alpha_i\right|\geq a(p)\right\}\leq P\left\{\max_{1\leq i\leq m}\left|\widehat{\alpha}_n^{(i)}-\alpha_i\right|\geq a(p)\right\}.$$

Отже, з останньої нерівності та умови теореми 6.8 маємо

$$P\left\{\left|\widehat{d}_n-d\right|\geq a(p)\right\}\leq P\left\{\max_{1\leq i\leq m}\left|\widehat{\alpha}_n^{(i)}-\alpha_i\right|\geq a(p)\right\}\leq$$

$$\leq\sum_{i=1}^{m}P\left\{\left|\widehat{\alpha}_n^{(i)}-\alpha_i\right|\geq a(p)\right\}\leq\sum_{i=1}^{m}P\left\{\left|\widehat{\alpha}_n^{(i)}-\alpha_i\right|\geq a_i(p)\right\}\leq mp.$$

Звідси випливає, що виконується нерівність (6.23). □

***Приклад* 6.2.** Нехай $B^{(\alpha)}(t),\ t\in[0,1]^2$ – дробове анізотропне вінерівське поле з параметром $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2),\alpha_i\in\left(0,\alpha_i^*\right],\alpha_i^*<1,\ i=1,2$, яке спостерігається в точках $\left\{\left(\frac{k}{2^n},1\right),\left(1,\frac{k}{2^n}\right),0\leq k\leq 2^n,n\geq 1\right\}$.

Розглянемо послідовність бакстерівських сум для $n \ge 1$:

$$\widehat{S}_n^{(i)}(B,\alpha) = \sum_{k=0}^{2^n-1}\left(B_i^{(\alpha)}\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - B_i^{(\alpha)}\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)^2, \; i = 1,2.$$

За теоремою 6.5 одержимо, що

$$\widehat{\alpha}_n^{(i)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\ln \widehat{S}_n^{(i)}(B,\alpha)}{n \ln 2}\right) \to \alpha_i, 1 \le i \le 2$$

з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$.

Тоді при $m = 2, n = 12$, $p = 0.05$ та $\alpha^* = \left(\alpha_1^*, \alpha_2^*\right) = (0.7, 0.7)$ з теореми 6.6 та співвідношень (6.18)-(6.21) отримаємо:

$$C_n\left(\alpha_i^*\right) = \frac{2}{2^n}\left(3 + 2\zeta\left(4 - 4\alpha_i^*\right)\right) \le \frac{2}{2^{12}}(3 + 2 \cdot 5.59) \le 0.0069,$$

звідки

$$l_i(p) = -\frac{1}{2}\frac{\ln\left(1 - \sqrt{\dfrac{2C_n\left(\alpha_i^*\right)}{0.05}}\right)}{n \ln 2} = -\frac{1}{2}\frac{\ln\left(1 - \sqrt{\dfrac{2 \cdot 0.0069}{0.05}}\right)}{n \ln 2} = 0.0449,$$

$$r_i(p) = \frac{1}{2}\frac{\ln\left(\sqrt{\dfrac{2C_n\left(\alpha_i^*\right)}{0.05}} + 1\right)}{n \ln 2} = \frac{1}{2}\frac{\ln\left(\sqrt{\dfrac{2 \cdot 0.0069}{0.05}} + 1\right)}{n \ln 2} = 0.025, \; 1 \le i \le 2.$$

Отже, має місце наступна нерівність:

$$P\left\{\alpha \in \left(\widehat{\alpha}_n^{(1)} - 0.045, \widehat{\alpha}_n^{(1)} + 0.025\right) \times \left(\widehat{\alpha}_n^{(2)} - 0.045, \widehat{\alpha}_n^{(2)} + 0.025\right)\right\} \ge 0.9,$$

де $\widehat{\alpha}_n^{(i)} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{\ln \widehat{S}_n^{(i)}(B,\alpha)}{n \ln 2}\right), 1 \le i \le 2$.

Знайдемо тепер довірчий інтервал для кубічної розмірності d графіка реалізації дробового анізотропного вінерівського поля $B^{(\alpha)}(t), t \in [0,1]^2$ з параметром $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \alpha_i \in \left(0, \alpha_i^*\right], \alpha_i^* = 0.7, i = 1,2$ для рівня довіри $1 - 2p \in (0,1)$.

З проведених вище обчислень для $l_i(p), r_i(p)$та теореми 6.8 при $m = 2$, $p = 0.05$ отримаємо, що

$$a_i(p) = \max\{l_i(p), r_i(p)\} = \max\{0.045, 0.025\} = 0.045,$$

$$a(p) = \max_{1 \le i \le 2} a_i(p) = \max_{1 \le i \le 2} 0.045 = 0.045.$$

Отже, має місце наступна нерівність:

$$P\left\{d \in \left(\widehat{d}_n - 0.045, \widehat{d}_n + 0.045\right)\right\} \ge 0.9,$$

де $d = m + 1 - \min_{1 \le i \le 2} \alpha_i = 3 - \min_{1 \le i \le 2} \alpha_i$, $\widehat{d}_n = m + 1 - \widehat{\alpha}_n^{\min} = 3 - \min_{1 \le i \le 2} \alpha_n^{(i)}$.

РОЗДІЛ 7. БАКСТЕРІВСЬКІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРА ХЮРСТА У МОДЕЛІ З ПОХИБКАМИ

У цьому розділі бакстерівські статистики застосовуються до інтервального оцінювання параметра Хюрста H дробового броунівського руху за спостереженнями з похибками цього випадкового процесу на дискретній підмножині одиничного інтервалу.

Припустимо, що спостерігаються значення величин $X(0), X\left(\frac{1}{n}\right), \ldots, X(1)$, які відрізняється від справжніх значень дробового броунівського руху $\{B_H(t), t \in \mathrm{R}\}$ в точках $\left\{\frac{k}{n}\middle| 0 \le k \le n, n \ge 1\right\}$, на величину похибки вимірювання $\{\delta_{k,n} | 0 \le k \le n\}$, яка не залежить від значень дробового броунівського руху $\left\{B_H\left(\frac{k}{n}\right)\middle| 0 \le k \le n\right\}$, причому

$$X\left(\frac{k}{n}\right) = B_H\left(\frac{k}{n}\right) + \delta_{k,n}. \tag{7.1}$$

Припустимо, що $\delta_{k,n}$ – незалежні в сукупності однаково розподілені гауссові випадкові величини такі, що $\delta_{k,n} \cong N\left(0, \sigma_n^2\right)$, де $\sigma_n^2 \to 0, n \to \infty$. Також, припустимо, що параметр Хюрста H такий, що $H \le H^* < 1$, де величина H^* – відома.

Введемо наступні позначення:

$$\Delta^{(1)} B_{k,n} = B_H\left(\frac{k+1}{n}\right) - B_H\left(\frac{k}{n}\right),\ \Delta^{(1)} \delta_{k,n} = \delta_{k+1,n} - \delta_{k,n},$$

$$\Delta^{(1)} X_{k,n} = X\left(\frac{k+1}{n}\right) - X\left(\frac{k}{n}\right),\ 0 \le k \le n-1.$$

Розглянемо послідовності бакстерівських сум:

$$S_n^{(1)}(X)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\Delta^{(1)}X_{k,n}\right)^2-2n\sigma_n^2,\ \widehat{S}_n^{(1)}(X)=n^{2H-1}S_n^{(1)}(X),\ n\geq 1.$$

Із леми 5.2 для дробового броунівського руху $\{B_H(t), t\in \mathrm{R}\}$ при $n\to\infty$ та для всіх $H\in(0,1)$, $k=1$, $a_n=n$, має місце збіжність у середньому квадратичному

$$n^{2H-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\Delta^{(1)}B_{k,n}\right)^2\to 1.$$

Лема 7.1. *Нехай* $\{B_H(t), t\in \mathrm{R}\}$ *– дробовий броунівський рух,* $H\in\left(0,H^*\right]\subset(0,1)$ *та має місце рівність (7.1). Тоді виконується нерівність:*

$$\sup_{H\in\left(0,H^*\right]}\mathrm{Var}\widehat{S}_n^{(1)}(X)\leq D\left(H^*,n\right),\tag{7.2}$$

де

$$D\left(H^*,n\right)=\frac{10}{n}+8n^{2H^*-1}\sigma^2+8n^{4H^*-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)\sigma_n^4+$$

$$+\begin{cases}\frac{2}{n}\zeta\left(4-4H^*\right), H^*\in\left(0,\frac{3}{4}\right);\\ \frac{2}{n}(1+\ln n), H^*=\frac{3}{4};\\ \frac{2}{n}\left(1+\frac{n^{4H^*-3}}{4H^*-3}\right), H^*\in\left(\frac{3}{4},1\right).\end{cases}\tag{7.3}$$

$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}, s>1$ *– дзета-функція Рімана.*

Доведення. Обчислимо математичне сподівання та дисперсію випадкової величини $\widehat{S}_n(X)$, $n\geq 1$. Оскільки, дробовий броунівський рух $\{B_H(t), t\in \mathrm{R}\}$ із моделі (7.1) є випадковим процесом із нульовим середнім значенням та однорідними приростами, то для математичного сподівання величини $\widehat{S}_n(X)$ маємо:

$$\mathrm{E}\widehat{S}_n^{(1)}(X) = n^{2H-1}\mathrm{E}S_n^{(1)}(X) = n^{2H-1}\left(E\sum_{k=0}^{n-1}\left(\Delta^{(1)}X_{k,n}\right)^2 - 2n\sigma_n^2 \right) =$$

$$= n^{2H-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} E\left(X\left(\frac{k+1}{n}\right) - X\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2 - 2n\sigma_n^2 \right) =$$

$$= n^{2H-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} E\left(X^2\left(\frac{k+1}{n}\right) - 2X\left(\frac{k+1}{n}\right)X\left(\frac{k}{n}\right) + X^2\left(\frac{k}{n}\right)\right) - 2n\sigma_n^2 \right).$$

Із стохастичної незалежності $\left\{\delta_{k,n} \middle| 0 \le k \le n\right\}$ та величин $\left\{B_H\left(\frac{k}{n}\right), \delta_{k,n} \middle| 0 \le k \le n\right\}$ із попередньої рівності випливає, що

$$\mathrm{E}\widehat{S}_n^{(1)}(X) = n^{2H-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(EB_H^2\left(\frac{1}{n}\right) + E\delta_{k+1,n}^2 - 2E\delta_{k,n}\delta_{k+1,n} + E\delta_{k,n}^2 \right) - \right.$$

$$\left. - 2n\sigma_n^2 \right) = n^{2H-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n^{2H}} + 2\sigma_n^2 \right) - 2n\sigma_n^2 \right) = 1.$$

Далі, перейдемо до обчислення дисперсії випадкової величини $\widehat{S}_n(X)$. Із використанням формули Ісерліса (1.44) та властивостей дисперсії, отримаємо:

$$\mathrm{Var}\widehat{S}_n^{(1)}(X) = \mathrm{Var}\left(n^{2H-1}S_n(X)\right) = n^{4H-2}\mathrm{Var}S_n^{(1)}(X) =$$

$$= n^{4H-2}\left(E\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\Delta^{(1)}X_{k,n}\right)^2 \right)^2 - \left(E\sum_{k=0}^{n-1}\left(\Delta^{(1)}X_{k,n}\right)^2 \right)^2 \right) =$$

$$= 2n^{4H-2}\sum_{k,j=0}^{n-1}\left(E\Delta^{(1)}X_{k,n}\Delta^{(1)}X_{j,n}\right)^2 = 2n^{4H-2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(E\left(\Delta^{(1)}X_{k,n}\right)^2\right)^2 +$$

$$+ 4n^{4H-2}\sum_{\substack{k,j=0 \\ j<k}}^{n-1}\left(E\left(\Delta^{(1)}B_{k,n} + \Delta^{(1)}\delta_{k,n}\right)\left(\Delta^{(1)}B_{j,n} + \Delta^{(1)}\delta_{j,n}\right)\right)^2, \qquad (7.4)$$

Тоді одержимо:

$$E\left(\Delta^{(1)}X_{k,n}\right)^2 = E\left(X^2\left(\frac{k+1}{n}\right) - 2X\left(\frac{k+1}{n}\right)X\left(\frac{k}{n}\right) + X^2\left(\frac{k}{n}\right)\right) =$$

$$= EB_H^2\left(\frac{k+1}{n}\right) + E\delta_{k+1,n}^2 + EB_H^2\left(\frac{k}{n}\right) + E\delta_{k,n}^2 -$$

$$-2E\left(B_H\left(\frac{k+1}{n}\right) + \delta_{k+1,n}\right)\left(B_H\left(\frac{k}{n}\right) + \delta_{k,n}\right) = n^{-2H} + 2\sigma_n^2. \qquad (7.5)$$

З стохастичної незалежності випадкових величин $\Delta^{(1)}B_{k,n}$ та $\Delta^{(1)}\delta_{k,n}$, $0 \le k \le n-1$ отримаємо, що

$$E\left(\Delta^{(1)}B_{k,n} + \Delta^{(1)}\delta_{k,n}\right)\left(\Delta^{(1)}B_{j,n} + \Delta^{(1)}\delta_{j,n}\right) =$$

$$= E\Delta^{(1)}B_{k,n}\Delta^{(1)}B_{j,n} + E\Delta^{(1)}\delta_{k,n}\Delta^{(1)}\delta_{j,n}, k \ne j.$$

Далі, із формули (7.5) маємо

$$E\Delta^{(1)}B_{k,n}\Delta^{(1)}B_{j,n} = E\left(B_H\left(\frac{k+1}{n}\right) - B_H\left(\frac{k}{n}\right)\right)\left(B_H\left(\frac{j+1}{n}\right) - B_H\left(\frac{j}{n}\right)\right) =$$

$$= -\left|\frac{k-j}{n}\right|^{2H} + \frac{1}{2}\left|\frac{(k-j)+1}{n}\right|^{2H} + \frac{1}{2}\left|\frac{(k-j)-1}{n}\right|^{2H}. \qquad (7.6)$$

Тоді з отриманої рівності одержимо:

$$E\Delta^{(1)}X_{k,n}\Delta^{(1)}X_{j,n} = \frac{1}{2}n^{-2H}v_{k-j} + E\Delta\delta_{k,n}\Delta\delta_{j,n},$$

де

$$v_{k-j} = \left|(k-j)+1\right|^{2H} - 2\left|k-j\right|^{2H} + \left|(k-j)-1\right|^{2H}, \ 1 \le k, j \le n-1.$$

Обчислимо математичне сподівання добутку величин $\Delta^{(1)}\delta_{k,n}$ та $\Delta^{(1)}\delta_{j,n}$, які є стохастично незалежними:

$$E\Delta^{(1)}\delta_{k,n}\Delta^{(1)}\delta_{j,n} = E\left(\delta_{k+1,n} - \delta_{k,n}\right)\left(\delta_{j+1,n} - \delta_{j,n}\right) =$$

$$= E\left(\delta_{k+1,n}\delta_{j+1,n} - \delta_{k+1,n}\delta_{j,n} - \delta_{k,n}\delta_{j+1,n} + \delta_{k,n}\delta_{j,n}\right) =$$

$$= \begin{cases} 2\sigma_n^2, k = j; \\ -\sigma_n^2, |k-j| = 1; \\ 0, |k-j| > 1. \end{cases} \tag{7.7}$$

Таким чином, виходячи із співвідношень (7.5)-(7.7) та нерівності $(a+b)^2 \le 2\left(a^2 + b^2\right),\ a,b \in \mathrm{R}$, із рівності (7.4) ми отримаємо, що:

$$\mathrm{Var}\widehat{S}_n^{(1)}(X) = 2n^{4H-2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(n^{-2H} + 2\sigma_n^2\right)^2 + 2\sum_{\substack{k,j=0\\ j<k}}^{n-1}\left(\frac{1}{2}n^{-2H}v_{k-j} +\right.\right.$$

$$\left.\left.+ E\Delta^{(1)}\delta_{k,n}\Delta^{(1)}\delta_{j,n}\right)^2\right) \le 2n^{4H-2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(n^{-4H} + 4n^{-2H}\sigma_n^2 + 4\sigma_n^4\right) +\right.$$

$$\left.+ 4\sum_{k,j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{4}n^{-4H}v_{k-j}^2 + \left(E\Delta^{(1)}\delta_{k,n}\Delta^{(1)}\delta_{j,n}\right)^2\right)\right) = 2\left(\frac{1}{n} + 4n^{2H-1}\sigma_n^2 + 4n^{4H-1}\sigma_n^4\right) +$$

$$+ 8n^{4H-2}\sum_{k-j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{4}n^{-4H}v_{k-j}^2 + \sigma_n^4\right) + 8n^{4H-2}\sum_{k-j>1}^{n-1}\left(\frac{1}{4}n^{-4H}v_{k-j}^2\right) \le$$

$$= \frac{2}{n} + 8n^{2H-1}\sigma_n^2 + 8n^{4H-1}\sigma_n^4 + 8n^{4H-2}(n-1)\sigma_n^4 + \frac{2}{n^2}\sum_{k,j=1}^{n-1}v_{k-j}^2 .$$

Позначимо $k - j = l,\ j < k$ та покладемо:

$$v_l := (l+1)^{2H} - 2l^{2H} + (l-1)^{2H}, 1 \le l \le n-1.$$

Тоді з попередньої нерівності одержимо:

$$\mathrm{Var}\widehat{S}_n^{(1)}(X) \le \frac{2}{n} + 8n^{2H-1}\sigma_n^2 + 8n^{4H-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\sigma_n^4 + \frac{2}{n^2}\sum_{l=1}^{n-1}(n-l)v_l^2 \le$$

$$\le \frac{2}{n} + 8n^{2H-1}\sigma_n^2 + 8n^{4H-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\sigma_n^4 + \frac{2}{n}\sum_{l=1}^{n-1}v_l^2 .$$

Оскільки $v_1^2 = \left(2^{2H} - 2\right)^2 \le 4$ для $H \in (0,1)$, то з попередньої нерівності маємо

$$\operatorname{Var}\widehat{S}_n^{(1)}(X) \le \frac{2}{n} + 8n^{2H-1}\sigma_n^2 + 8n^{4H-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\sigma_n^4 + \frac{2}{n}\left(4 + \sum_{l=2}^{n-1} v_l^2\right).$$

Так як, величина v_l є приростом другого порядку функції $f(x) = x^{2H}, x \ge 1$, $H \in \left(0, H^*\right] \subset (0,1)$ на відрізку $[l-1, l+1]$, то з формули для приросту n-го порядку функції $f(x)$ при $n = 2$ [55, с. 244] одержимо, що

$$v_l = f''(\theta_l) \cdot 1^2 = 2H(2H-1)\theta_l^{2H-2},\ \theta_l \in (l-1, l+1).$$

Отже, має місце наступна нерівність

$$v_l^2 \le \frac{4}{(l-1)^{4-4H}}, l \ge 2.$$

Зауважимо, що

$$\sup_{H \in (0,1)} \left|2H(2H-1)\right| = 2,\ l - 1 < \theta_l, l \ge 2$$

Тому, з наведеного вище отримаємо для випадкової величини $\widehat{S}_n(X)$ справедлива наступна оцінка зверху:

$$\sup_{H \in \left(0, H^*\right]} \operatorname{Var}\widehat{S}_n^{(1)}(X) \le \frac{10}{n} + 8n^{2H^*-1}\sigma_n^2 + 8n^{4H^*-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\sigma_n^4 + \frac{2}{n}\sum_{l=2}^{n-1}\frac{1}{(l-1)^{4-4H^*}}. \tag{7.8}$$

Для $H^* \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$ одержимо $\sum_{l=1}^{n-1}\frac{1}{l^{4-4H^*}} \le \zeta\left(4 - 4H^*\right)$, де $\zeta(\cdot)$ – дзета-функція Рімана. При $H^* = \frac{3}{4}$ маємо $\sum_{l=1}^{n-1}\frac{1}{l} \le 1 + \int_1^n \frac{dx}{x} = 1 + \ln n$, а при $H^* \in \left(\frac{3}{4}, 1\right)$:

$$\sum_{l=1}^{n-1}\frac{1}{l^{4-4H^*}} \le 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^{4-4H^*}} = 1 + \frac{n^{4H^*-3}}{4H^* - 3}.$$

Отже, із нерівності (7.8) для всіх $H \in \left(0, H^*\right], H^* < 1$ випливає твердження леми. □

Нехай нерівність $\left|\widehat{S}_n^{(1)}(X) - 1\right| = \left|n^{2H-1} S_n^{(1)}(X) - 1\right| < \varepsilon$ виконується з великою ймовірністю. Це означає, що тоді нерівність

$$P\left\{ \left|\widehat{S}_n^{(1)}(X) - 1\right| > \varepsilon \right\} \le p \tag{7.9}$$

буде виконуватись з малою ймовірністю $p \in (0, 1)$.

При зроблених припущеннях, з нерівності (7.9) отримаємо наступну подвійну нерівність:

$$1 - \varepsilon < n^{2H-1} S_n^{(1)}(X) < 1 + \varepsilon .$$

Звідси, розв'язавши цю нерівність відносно невідомого параметра $H \in \left(0, H^*\right]$, отримаємо оцінку для нього:

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\ln(1-\varepsilon) - \ln S_n^{(1)}(X)}{\ln n}\right) < H < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\ln(1+\varepsilon) - \ln S_n^{(1)}(X)}{\ln n}\right). \tag{7.10}$$

Знайдемо оцінку для величини ε. Для цього, використовуючи нерівність Чебишова, з нерівності (7.10) отримаємо нерівність:

$$P\left\{ \left|\widehat{S}_n^{(1)}(X) - 1\right| > \varepsilon \right\} \le \frac{\mathrm{Var}\left(\widehat{S}_n^{(1)}(X) - 1\right)}{\varepsilon^2} \le p . \tag{7.11}$$

Далі, застосуємо отриману в лемі 7.1 оцінку зверху для випадкової величини $\mathrm{Var}\widehat{S}_n(X)$. Тоді із співвідношень (7.2), (7.3) та нерівності (7.11) маємо

$$P\left\{ \left|\widehat{S}_n^{(1)}(X) - 1\right| > \varepsilon \right\} \le \frac{\mathrm{E}\left(\widehat{S}_n^{(1)}(X) - 1\right)^2}{\varepsilon^2} \le \frac{D\left(H^*, n\right)}{\varepsilon^2} \le p .$$

Тому має місце нерівність:

$$\varepsilon \geq \sqrt{\frac{D\left(H^{*},n\right)}{p}} \tag{7.12}$$

Отже, при відповідних значеннях величин σ та H, а також при оптимальному числі спостережень n за допомогою нерівності (7.12) знайдено оцінку для величини ε. Тому справедлива наступна теорема.

Теорема 7.1. Нехай $H \in \left(0, H^{*}\right] \subset (0,1)$. Тоді інтервал $\left(I_l(n), I_r(n)\right) \cap (0,1)$ є довірчим інтервалом для параметра Хюрста H з рівнем довіри $1-p \in (0,1)$, де

$$I_l(n)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\ln(1-\varepsilon)-\ln S_n^{(1)}(X)}{\ln n}\right),\ I_r(n)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\ln(1+\varepsilon)-\ln S_n^{(1)}(X)}{\ln n}\right),$$

ε визначено нерівністю (12), $D\left(H^{*},n\right)$ визначено нерівністю (7.3).

Приклад 7.1. Нехай $\{B_H(t), t \in \mathrm{R}\}$ – дробовий броунівський рух з параметром Хюрста $H \in \left(0, H^{*}\right] \subset (0,1)$. Розглянемо наведену модель спостереження (7.2) з похибками вимірювання за значеннями $\{B_H(t), t \in \mathrm{R}\}$.

Аналогічно, при $H^{*}=0.7$ з леми 7.1 та нерівності (7.12) отримаємо, що при $\varepsilon = 0{,}315$ та оптимальному значенні числа спостережень $n = 4008$ довжина довірчого інтервалу для параметра Хюрста H рівна $\Delta I(n) = 0.0395$. А при $H^{*}=0.8$ з леми 7.1 та нерівності (7.12) отримаємо, що при $\varepsilon = 0.707$ та оптимальному значенні числа спостережень $n = 1727$ довжина довірчого інтервалу для параметра Хюрста H рівна $\Delta I(n) = 0.118$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Арак Т. В. О теоремах типа Леви-Бакстера для случайных полей. *Теория вероятн. и ее примен.* 1972. Том 17, вып. 1. С. 153–160.
2. Арато М., Колмогоров А. Н., Синай Я. Г. Об оценке параметров комплексного стационарного гауссовского марковского процесса. *ДАН СССР.* 1962. Том 146, вып 4. С. 747–750.
3. Бесклинская Е. П., Козаченко Ю. В. Сходимость в нормах пространства Орлича и теоремы Леви-Бакстера. *Теория вероятн. и матем. статист.* 1986. Вып. 35. С. 3–6.
4. Бесклинская Е. П., Майборода Р. Е. О скорости сходимости некоторых оценок параметров стационарных гауссовских случайных процессов. *Теория вероятн. и матем. статист.* 1990. Вып. 43. С. 13–19.
5. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М : Наука, 1977. 352 с.
6. Булдигін В. В., Мельник В. М., Шпортюк В. Г. Про теореми Леві-Бакстера для дробових полів. I. *Укр. матем. журн.* 1998. Том 50, №11. С. 1463–1476.
7. Булдигін В. В., Мельник В. М., Шпортюк В. Г. Про теореми Леві-Бакстера для дробових полів. II. *Укр. матем. журн.* 1999. Том 51, №1. С. 12–31.
8. Булдигін В. В., Мельник В. М., Шпортюк В. Г. Про теореми Леві-Бакстера для дробових полів. III. *Укр. матем. журн.* 1999. Том 51, № 2. С. 251–254.
9. Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В. О субгауссовских случайных величинах. *Укр. матем. журн.* 1980. Том 32, № 6. С. 723–730.
10. Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В. Метрические характеристики случайных величин и процессов. Киев : ТВіМС, 1998. 290 с.

11. Вовк Л. Б., Козаченко Ю. В. Про швидкість збіжності в теоремах Леві-Бакстера для деяких класів випадкових процесів. *Теор. ймов. та матем. статистика.* 1992. Вип. 46. С. 25–36.
12. Гладышев Е. Г. Новая предельная теорема для случайных процессов с гауссовскими приращениями. *Теория вероятн. и ее примен*. 1961. Том 1, вып. 6. С. 57–66.
13. Дороговцев А. Я. Теория оценок параметров случайных процессов. Киев : Вища школа, 1982. 192 с.
14. Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А. Гауссовские случайные процессы. М : Наука, 1970. 384 с.
15. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. М : Наука, 1979. 527 с.
16. Ибрамхалилов И. Ш., Скороход А. В. Состоятельные оценки параметров случайных процессов. Киев : Наукова Думка, 1980. 192 с.
17. Иванов А. В., Леоненко Н. Н. Статистический анализ случайных полей. Киев : Вища школа, 1986. 216 с.
18. Козаченко Ю. В., Курченко О. О. Оцінювання параметрів гауссівських однорідних випадкових полів. *Укр. матем. журн.* 2000. Том 52, № 8. С. 1082–1088.
19. Козаченко Ю. В., Стусь О. В. Узагальнені строго передгауссові випадкові процеси. *Теор. ймов. та матем. статистика.* 1998. Вип. 58. С. 61–75.
20. Колмогоров А. Н. Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве. *ДАН СССР.* 1940. Том 26, №2. С. 115–118.
21. Краснитський С. М. О некоторых предельных теоремах для случайных полей с гауссовскими разностями *m*-го порядка. *Теория вероятн. и матем. статистика.* 1971. Вып. 5. С. 71–80.

22. Краснитський С. М. Про одну граничну теорему для випадкового поля М. М.Ченцова. *Вісник Київського ун-ту. Матем. Механ.* 1971. Вип. 13. С. 133–135.
23. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М : Наука, 1971. 432 с.
24. Курченко О. О. Теорема бакстеровского типа для векторного гауссовского случайного поля. *Теория вероятн. и матем. статистика.* 1984. Вып. 30. С. 107–113.
25. Курченко О. О. Некоторые предельные теоремы для случайных процессов. *Теория вероятн. и матем. статистика.* 1989. Вып. 40. С. 51–56.
26. Курченко О. О Нерівності для норми Орліча лінійної форми передгауссівських випадкових величин. *Теор. ймов. та математична статистика.* 1994. Вип. 50. С. 97–100.
27. Курченко О. О. Одна гранична теорема для гауссового поля. *Теор. ймов. та матем. статистика.* 1995. Вип. 53. С. 76–79.
28. Курченко О. О. Варіант теореми Леві-Бакстера для гауссівського випадкового поля. *Вісник Київського ун-ту, сер.: фізико-матем. науки.* 1997. № 1. С. 97–107.
29. Курченко О. О. Збіжність *F*-варіації гауссового випадкового поля. *Теор. ймов. та матем. статистика.* 1999. Вип. 60. С. 98–108.
30. Курченко О. О. Функціональна центральна гранична теорема для бакстерівських сум дробового броунівського руху. *Теор. ймов. та матем. статистика.* 1999. Вип. 61. С. 86–90.
31. Курченко О. О. Центральна гранична теорема для бакстерівських сум гауссівських випадкових полів. *Доповіді НАН України.* 2000. № 3. С. 19–23.
32. Курченко О. О. Збіжність бакстерівських сум для випадкових полів на жорданових множинах. Вісник Київського університету, сер. Фізико-математичні науки. – 2002. – Вип. 5. С. 83–89.

33. Курченко О. О. Збіжність у просторі $D([0,1]^d)$ однієї послідовності випадкових полів. *Теор. ймов. та матем. статистика.* 2001. Вип. 64. С. 82–91.

34. Курченко О. О. Одна сильно консистентна оцінка параметра Хюрста дробового броунівського руху. *Теор. ймов. та матем. статистика.* 2002. Вип. 67. С. 45–54.

35. Курченко О. О. Одна оцінка параметра пам'яті стаціонарної гауссівської випадкової послідовності. *Вісник Київського ун-ту. Матем. Механ.* 2003. Вип. 9–10. С. 53–56.

36. Курченко О. О., Наумов М. Є. Бакстерівський підхід до оцінювання параметра одного гауссівського стаціонарного випадкового процесу. *Вісник Київського ун-ту. Матем. Механ.* 2006. Вип. 16. С. 89–93.

37. Курченко О. О. Теорема бакстерівського типу для строго субгауссових випадкових полів. *Вісник Київського ун-ту. Матем. Механ.* 2009. № 21. С. 35–38.

38. Курченко О. О., Синявська О. О. Бакстерівська оцінка коефіцієнта регресії в одній моделі. *Вісник Київського ун-ту, сер.: фізико-матем. науки*. 2011. № 3. С. 40–45.

39. Курченко О. О. Оцінювання параметра коваріаційної функції одного випадкового поля. *Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Сер. Матем. і інформ.* 2013. Вип. 24, №1. С. 86–91.

40. Курченко О. О. Бакстерівська оцінка в одній негауссовій моделі. *Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Сер. Матем. і інформ.* 2015. Вип. 1 (26). С. 65–74.

41. Ламперти Дж. Случайные процессы. Обзор математической теории. Киев : Вища школа, 1983. 224 с.

42. Майборода Р. Є. Асимптотична нормальність бакстерівських оцінок параметрів нестаціонарних процесів. *Теор. ймов. та матем. статистика.* 1995. Вип. 53. С. 97–102.

43. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М : Наука, 1972. 232 с.
44. Моделі регресії з похибками вимірювання та їх застосування до оцінювання радіаційних ризиків / С. В. Масюк та ін. Київ : ДІА, 2015. 288 с.
45. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. М : Наука, 1965, 1967. Ч. I – II. 639, 720 с.
46. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М : Физматгиз, 1971. 1108 с.
47. Рыжов Ю. М. Предельные распределения некоторых функционалов от стационарного гауссовского процесса. *Теория вероятн. и ее примен*. 1969. Том 14, вып. 2. С. 236–249.
48. Рыжов Ю. М. Новая предельная теорема для гауссовских случайных процессов, обладающих бакстеровским свойством. *Теория случ. проц. –* 1987. Вып. 15. С. 90–97.
49. Рыжов Ю. М. Совместное распределение гауссовского случайного процесса и его квадратической вариации и сходимость некоторых стохастических интегральных сумм. Теория вероятн. и матем. статистика. 1989. Вып. 40. С. 88–99.
50. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. Москва : Наука, 1985. 144 с.
51. Синявська О. О. Бакстерівська оцінка коефіцієнта регресії незалежних гауссівських випадкових полів. *Прикл. статистика. Фін. та актуар. матем.* 2012. № 1. С. 79–88.
52. Синявська О. О. Оцінка параметра Хюрста дробового анізотропного вінерівського поля. *Вісник Київського ун-ту. Матем. Механ*. 2012. № 28. С. 32–35.
53. Синявська О. О. Бакстерівська оцінка невідомого параметра коваріаційної функції у негауссовому випадку. *Теор. ймов. та матем. статистика.* 2013. Вип. 88. С. 155–164.

54. Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов. Москва : Наука, 1970. 392 с.
55. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. Москва : Наука, 1969. 607 с.
56. Ченцов Н. Н. Винеровские случайные поля от нескольких параметров. *ДАН СССР.* 1956. Т. 106. С. 607–609.
57. Шевчук И. А. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. Киев : Наукова Думка, 1992. 224 с.
58. Шкляр Г. А. Об одной теореме типа Леви-Бакстера. *Теория вероятн. и матем. статистика.* 1986. Вып. 34. С. 129–132.
59. Achard S., Coeurjolly J.-F. Discrete variations of the fractional Brownian motion in the presence of outliers and additive noise. *Stat. Surv.* 2010. Vol. 4. P. 117–147.
60. Ayache A., Xiao Y. Asymptotic properties and Hausdorff dimensions of fractional Brownian sheets. *J. Fourier Anal. Appl.* 2005. Vol. 11. P. 407–439.
61. Bardet J. M. Un test d’auto-similarite pour les processus gaussiens a accroissements stationnaires. *C.R. Acad. Sci. Paris.* 1999. Vol. 328. P. 521–526.
62. Baxter G. A strong limit theorem for Gaussian processes. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1956. Vol. 7, no 3. P. 522–527.
63. Beran J. Statistics for long-memory processes. New York : Chapman&Hall/CRC, 1998. 315 p.
64. Berman S. M. A version of the Levy-Baxter theorem for Gaussian processes. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1967. Vol. 18. P. 1051–1055.
65. Bickel P. J., Wichura M. J. Convergence kriteria for multiparameter stochastic processes and some applications. *The Annals of Mathematical Statistics.* 1971. Vol. 42, No 5. P. 1656–1970.
66. Breton J.-C., Nourdin I., Peccati G. Exact confidence intervals for the Hurst parameter of a fractional Brownian motion. *Electronic Journal of Statistics.* 2009. Vol. 3. P. 416–425.

67. Breuer P., Major P. Central limit theorems for non-linear functionals of Gaussian fields. *Journal of Multivariate Analysis.* 1983. Vol. 13. P. 425–441.
68. Carroll R. J. , Ruppert D., Stefanski L. A. Measurement Error in Nonlinear Models. London : Chapman and Hall, 1995. 305 p.
69. Cheng C.–L., Van Ness J. W. Statistical Regression with Measurement Error. London : Arnold, 1999. 262 p.
70. Ciesielski Z., Kamont A. Levy's fractional Brownian random field and function spaces. *Acta Sci. Math. (Szeged).* 1995. Vol. 60. P. 99–118.
71. Coeurjolly J.-F. Estimating the parameters of a fractional Brownian motion by discrete variations of this sample paths. *Stat. Inference for Stoch. Process.* 2001. Vol. 4. P. 199–207.
72. Decreusefond L., Üstünel A. S. Fractional Brownian motion: Theory and applications. *ESAIM Proc.* 1998. Vol. 5. P. 75–86.
73. Deo C. M., Wong S. A. On quadratic variation of Gaussian random fields. *Теория вероятн. и ее примен.* 1978. Том 23, вып. 3. С. 655–660.
74. Deo C. M. A functional central limit theorem for the quadratic variation of a class of Gaussian random fields. *The Canadien Journal of Statistics*. 1989. Vol. 17, no 2. P. 247–251.
75. Dieker T. Simulation of fractional Brownian motion. Enschede : University of Twene, 2004. 315 p.
76. Dobrushin R. L., Major P. Non Central Limit Theorems for NonLinear Functional of Gaussian Fields. *Z. Wahrsceinlichkeitstheorie und verw. Gebite.* 1979. Vol. 50. P. 27–52.
77. Dzhaparidze K.,van Zanten H. A series expansion of fractional Brownian motion. *Probability Theory and Related Fields.* 2004. Vol. 130, Issue 1. P. 39–55.
78. Dzhaparidze K.,van Zanten H. Optimality of an explicit series expansion of the fractional Brownian sheet. *Statistics&Probability Letters.* 2005. Vol. 71, Issue 4. P. 295–301.

79. Falconer K. J. Fractal geometry. Mathematic foundations and applications. Chichester : John Wiley&Sons, 1990. 280 p.
80. Fazekas I., Kukush A., Zwanzig S. Correction of nonlinear orthogonal regression estimator. *Ukr. Math. J.* 2004. Vol. 56, no 8. P. 1303–1330.
81. Florescu I.,Tudor C. A. Estimation of the long memory parameter in stochastic volatility models by quadratic variations. *Random Oper. Stoch. Equ.* 2011. Vol. 19, no 2. P. 197–216.
82. Fuller W. A. Measurement Error Models. New York : John Wlley&Sons, 1987. 464 p.
83. Gine E., Klein R. On quadratic variation of processes with Gaussian increments. *Ann. of Probab.* 1975. Vol. 3, no 4. P. 716–721.
84. Giraitis L., Koul H. Estimation of the dependence parameter in linear regression with long-range dependent errors. *Stoch. Proc. Applic.* 1997. Vol. 71. P. 207–224.
85. Guyon X. Quelques resultats sur les variations de champs gaussiens stationaires. *C.R. Acad Sci. Paris, ser. I.* 1981. Vol. 293. P. 649–651.
86. Guyon X. Variations des Champs Gaussiens stationnaires, application a l'indetification. *Probab. Theory Related Fields.* 1987. Vol. 75. P. 179–193.
87. Guyon X., Leon J. Convergence en loi des H-variations d'un processus gaussien stationnaire. *Ann. Inst. H. Poincare Probab. Statist.* 1989. Vol. 25, No 3. P. 265–282.
88. Hanson D. L., Wright F. T. A bound on tail probabilities for quadratic forms in independent random variables. *The Ann. of Math. Statistics.* 1971. Vol. 42, No 3. P. 1079 – 1083.
89. Hurst H. E. Long-term storage capacity of reservoirs. *Trans. Am. Soc. Civil Engineers.* 1951. Vol. 116. P. 770-799.
90. Istas J., Lang G. Variations quadratiques et estimation de l'exposant de Holder local d'un processus gaussien. *C.R. Acad. Sci. Paris, ser. 1.* 1994. Vol. 319. P. 201–206.

91. Kamont A. On the fractional anisotropic Wiener field. *Probability and Mathem. Statisttics.* 1996. Vol. 16, Fasc. 1. P. 85–98.
92. Kawada T. The Levy-Baxter theorem for Gaussian random fields: a sufficient condition. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1975. Vol. 53, no 2. P. 463–469.
93. Kawada T. Maximum in the Levy-Baxter theorem for Gaussian random fields. *Annals of Probab.* 1979. Vol. 7, no 1. P. 173–178.
94. Kozachenko Yu. V., Kurchenko O. O. Levy-Baxter theorems for one class of non-Gaussian stochastic processes. *Random Oper. Stoch. Equ.* 2011. Vol. 19, no 4. P. 313–326.
95. Kozachenko Yu. V., Kurchenko O. O., Synyavska O. O. The Levy-Baxter theorem for one class of non-Gaussian random fields. *Monte Carlo Methods Appl.* 2013. Vol. 19, Issue 3. P. 171–182.
96. Kozachenko Yu. V., Kurchenko O. O. An estimate for the multiparameter FBM. *Theory of Stoch. Process.* 1999. Vol. 5 (21), no. 3–4. P. 113–119.
97. Kozachenko Yu. V., Stus V.O. Square-Gaussian random processes and estimators of covariance functions. Math. Communicat. – 1998. – Vol. 3, No 1. – P. 83 – 94.
98. Krasnitskiy S. M. , Kurchenko O. O. Baxter type theorems for generalized random Gaussian processes. *Theory of Stoch. Process.* Vol.21 (37), no.1, 2016, P. 45–52 .
99. Kukush A., Mishura Y., Valkeila E. Statistical Inference with Fractional Brownian Motion. *Stat. Inference for Stoch. Process.* 2005. Vol. 8 (24). P. 71–93.
100. Kukush A., Schneeweiss H. Comparing different estimators in a nonlinear measurement error model. *Math. Methods of Statist.* 1998. Vol. 14. P. 53–79.
101. Kukush A. G., Malenko A. L. An optimal joint estimator for regression and dispersion parameters in errors-in-variables nonlinear models. Teor. Imovirn. Mat. Stat. 2009. Vol. 78. P. 157–166.

102. Kurchenko O. O. Estimation for the function of a time deformation in the mode of the stationary reduction. *Theory Stoch. Process.* 2001. Vol. 7 (23). P. 231–235.

103. Kurchenko O. O. Confidence intervals and rate of convergency for the estimates of Hurst parameter of the FBM. *Theory Stoch. Process.* 2002. Vol. 8 (24). P. 242–249.

104. Levy P. Le movement Brownian plan. *Amer. J. Math.* 1940. Vol. 62. P. 487–550.

105. Mandelbrot B. B., Van Ness J. W. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Rev.* 1968. Vol. 10. P. 422–437.

106. Mishura Yu. S. Stochastic Calculus for Fractional Brownian motion and Related Processes. Lectures Notes in Mathematics, Vol. 1929. Berlin : Springer-Verlag, 2008. 410 p.

107. Perrin O. Quadratic variation for Gaussian processes and application to time deformation. *Stochastic Process. Appl.* 1999. Vol. 82. P. 293–305.

108. Prakasa Rao B. L. S. Statistical Inference for Fractional Diffusion Processes. Chichester : John Wiley&Sons, 2010. 280 p.

109. Robinson P. M. Gaussian semiparametric estimation of long dependence. *Ann. Statist.* 1995. Vol. 23. P. 1630–1661.

110. Rosenblatt M. Some limit theorems for partial sums of quadratic forms in stationary Gaussian variables. *Z. fur wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete.* 1979. Vol. 49. P. 125–132.

111. Strait P. T. On Berman's version of the Levy-Baxter theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1969. Vol. 23, no 1. P. 91–93.

112. Synyavska O. O. An estimate of the parameter of the random field covariance function. *Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Сер. Матем. і інформ.* 2013. Вип. 24, № 1. P. 166–174.

113. Synyavska O. O. Interval estimation of the fractional Brownian motion parameter in a model with measurement error. *Theory Stoch. Process.* 2016. Vol. 21 (37):1. P. 84–90.

114. Taqqu M. S. Weak convergence to fractional Brownian Motion and the Rozenblatt process. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebite.* 1975. Vol. 31. P. 287–302.

115. Taqqu M. S. Law of the iterated logarithm for sums of non-linear functions of Gaussian variables that exhibit a long range dependence. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebite.* 1977. Vol. 40. P. 203–238.

116. Watson G. N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge, England :Cambridge University Press, 1944. 804 p.

117. Wrobel A. On the almost sure convergence of the square variation of the Brownian motion. *Probability and Mathem. Statisttics.* 1982. Vol. 3, no 1. P. 97–101.

118. Xiong Ch., Xia P. On Levy-Baxter theorem for general two-parameter Gaussian processes. *Stud. Sci. Math. Hung.* 1991. Vol. 26. P. 401–410.

119. You J., Chen G. Semiparametric generalized least squares estimation in partially linear regression models with correlated errors. *Journal of Statist. Plan. and Infer.* 2007. Vol. 137. P. 117–132.

Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний
Формат видання 60х84/16
Умов. друк. арк. 13.25 Зам. №17 . Наклад 100 прим.

Видруковано ПП «АУТДОР-ШАРК»
88000, м. Ужгород, пл. Жупанатська, 15/1, тел. 3-51-25
e-mail: office@shark.com.ua

*Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців,
виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції*
Серія 3т № 40 від 29 жовтня 2012 року