

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

**НАУКОВИЙ ВІСНИК
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск №1 (32)

Ужгород 2018

УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. / Редкол.: В. В. Маринець (гол. ред.) та інші. – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2018. – випуск №1 (32). – 160 с.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор — Маринець В. В., доктор фізико-математичних наук, професор.
Заст. головн. редактора — Гече Ф. Е., доктор технічних наук, доцент.
Заст. головн. редактора — Король І. І., доктор фізико-математичних наук, доцент.
Відповідальний секретар — Мич І. А., кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Члени редакційної колегії:

Бовді А. А., доктор фізико-математичних наук, професор.
Бовді В. А., кандидат фізико-математичних наук, доцент.
Бондаренко В. М., доктор фізико-математичних наук, професор.
Волошин О. Ф., доктор технічних наук, професор.
Головач Й. Г., доктор технічних наук, професор.
Гусак Д. В., доктор фізико-математичних наук, професор.
Задирака В. К., академік НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор.
Козаченко Ю. В., доктор фізико-математичних наук, професор.
Кузка О. І., кандидат фізико-математичних наук, доцент.
Перестюк М. О., академік НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор.
Ронто А. М., доктор фізико-математичних наук, професор,
Ронто М. Й., доктор фізико-математичних наук, професор,
Сливка-Тилищак Г. І., доктор фізико-математичних наук, доцент.
Слюсарчук П. В., кандидат фізико-математичних наук, професор.
Шапочка І. В., кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Рекомендовано до друку Вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет», протокол № 6 від 21.06.2018 р.

Свідectво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.

Засновник і видавець – Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет».

Виходить два рази на рік.

Збірник наукових праць видається з 1994 року.

Адреса редакційної колегії: Україна, 88020 Ужгород, вул. Університетська, 14, математичний факультет УжНУ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua.

© В. В. Маринець,
І. А. Мич, упорядкування, 2018

© Ужгородський національний університет,
2018

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

**SCIENTIFIC BULLETIN OF
UZHHOROD UNIVERSITY**

Series of
MATHEMATICS AND INFORMATICS

Issue no 1 (32)

Uzhhorod 2018

Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics / Edit.: V. Marynets (Chief edit.) and others. – Uzhhorod: Scientific Bulletin of UzhNU «Hoverla», 2018. – Issue no 1 (32). – 160 p.

EDITORIAL

Chief editor — Marynets V., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
Deputy Chief editor — Heche F., As. prof., Dr. Sci. (Tech.).
Deputy Chief editor — Korol I., As. prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
Responsible secretary — Mych I., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).
Members: Bovdi A., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Bovdi V., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).
 Bondarenko V., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Voloshyn O., Prof., Dr. Sci. (Tech.).
 Holovach J., Prof., Dr. Sci. (Tech.).
 Gusak D., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Zadyraka V., Prof., academic of NA of Sc of Ukraine,
 Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Kozachenko Yu., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Kuzka A., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).
 Perestyuk N., Prof., academic of NA of Sc of Ukraine,
 Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Ronto A., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Ronto M., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Slyvka-Tylyshchak G., As. prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Slyusarchuk P., Prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).
 Shapochka I., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).

Recommended for publication by the Scientific Council of UzhNU, record no 6 dated by June 21, 2018.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.
Founder and Publisher: State University “Uzhhorod National University”.
Published twice a year.
The collection of scientific articles has been published since 1994.

Address of publishing house: Mathematical faculty “UzhNU”, Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88020, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua.

ЗМІСТ

1. Андрашко Ю. В., Максим В. В. Булева задача розміщення із урахуванням переваг клієнтів	7
2. Білецька Д. Ю., Шапочка І. В. Тензорні добутки нерозкладних цілочислових матричних зображень симетричної групи третього степеня	15
3. Болдирева В. О., Жмихова Т. В. Ймовірність небанкрутства страхової компанії з витратами на рекламу та інвестиціями у банківський депозит за Каско страхуванням топ-10 страхових компаній України. II.	29
4. Бондаренко В. М., Заціха Я. В. Канонічні форми матричних зображень напівгруп малого порядку	36
5. Бондаренко В. М., Стъопочкіна М. В. Про властивості частково впорядкованих множин ММ-типу (1, 3, 5)	50
6. Брила А. Ю. Про одну задачу лексикографічної оптимізації з інтервальними оцінками	54
7. Глебена М. І., Глебена В. Ф., Попельський О. М. Визначення оптимальних параметрів моделей доступу до інформації у файлах баз даних.	61
8. Дрожжина А. В. Асимптотика розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь n -го порядку, що є асимптотично близькими до рівнянь з правильно змінними нелінійностями	67
9. Зубарук О. В. Про зображувальний тип напівгрупи S_{32}^0 над довільним полем	80
10. Кирилюк О. А. Мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(q, \mathbb{Z}_p)$	86
11. Кічмаренко О. Д. Ступінчасте усереднення керованих функціонально-дифференціальних систем	93
12. Козаченко Ю. В., Василик О. І. Рівномірна збіжність вейвлет-розкладів випадкових процесів з класів $V(\varphi, \psi)$	108
13. Маринець В. В., Питъовка О. Ю. Дослідження крайової задачі для нелінійного хвильового рівняння з розривною правою частиною	116
14. Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В. Досконалі диз'юнктивні нормальні форми алгебри U_2	124
15. Сапожнікова К. Ю. Часткове усереднення систем диференціальних рівнянь з максимумом	130
16. Сливка-Тилищак Г. І., Михасюк М. М. Властивості узагальненого розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності на прямій з випадковою правою частиною з простору Орліча	136
17. Чуйко С. М., Чуйко О. С., Чечетенко В. О. Про розв'язання нелінійних інтегрально-диференціальних крайових задач методом Ньютона-Канторовича	147

CONTENTS

1. <i>Andrashko Yu. V., Maksym V. V.</i> Boolean facility location problem with client preferences.....	7
2. <i>Biletska D. Yu., Shapochka I. V.</i> Tensor products of indecomposable integral matrix representations of the symmetric group of third degree.....	15
3. <i>Boldyreva V. O., Zhmykhova T. V.</i> The probability of non-ruin of an insurance company with advertising expenses and investing in bank term deposit by MHull insurance of 10 Top insurance companies of Ukraine. II.....	29
4. <i>Bondarenko V. M., Zaciha Ya. V.</i> Canonical forms of matrix representations of semigroups of small order.....	36
5. <i>Bondarenko V. M., Styopochkina M. V.</i> On properties of posets of MM -type $(1, 3, 5)$	50
6. <i>Bryla A. Yu.</i> On lexicographic optimization problem with interval parameters....	54
7. <i>Hlebena M. I., Hlebena V. F., Popelskyi O. M.</i> Finding the optimum parameters of models of access to information in database files. \\.....	61
8. <i>Drozzhina A. V.</i> Asymptotic of solutions of the nonlinear differential equations n -th order asymptotically close to the equations with regularly varying nonlinearities.....	67
9. <i>Zubaruk O. V.</i> On representation type of the semigroup S_{32}^0 over an arbitrary field	80
10. <i>Kyryl'uk O. A.</i> Minimal irreducible solvable subgroups of the group $GL(q, \mathbf{Z}_p)$...	86
11. <i>Kichmareno O. D.</i> Step-by-step averaging of functional-differential control systems.....	93
12. <i>Kozachenko Yu. V., Vasylyk O. I.</i> Uniform convergence of wavelet expansions of random processes from the classes $V(\varphi, \psi)$	108
13. <i>V. V. Marynets, O. Y. Pytovka</i> Investigation of boundary-value problem for non-linear wave equation with discontinuous right part.....	116
14. <i>Mych I. A., Nykolenko V. V., Varcaba E. V.</i> Perfect disjunctive normal forms of algebra U_2	124
15. <i>Sapozhnikova K. Yu.</i> Partial averaging of differential systems with maxima.....	130
16. <i>Slyvka-Tylyshchak G. I., Mykhasiuk M. M.</i> The properties of generalized solution of Cauchy problems for the heat equations with a random right side from Orlicz space.....	136
17. <i>Chuiko S. M., Chuiko O. S., Chechetenko V. O.</i> On of solving nonlinear Noether integral-differential boundary value problems by the of Newton-Kantorovich method.....	147

УДК 519.854.33

Ю. В. Андрашко, В. В. Максим (ДВНЗ "Ужгородський нац. ун-т")

БУЛЕВА ЗАДАЧА РОЗМІЩЕННЯ ІЗ УРАХУВАННЯМ ПЕРЕВАГ КЛІЄНТІВ

Boolean facility location problem with client preferences is considered. Mathematical model of the problem is built. Branchs and bounds method to solve the problem is proposed. The lower bound calculation method as the solution of the linear programming problem with constraints that are based on the solution of the ancillary transport problem is proposed. Usage of the algorithm for solution of the model problem of the wholesale pharmacy location problem in ukrainian regions is illustrated. The method is compared to the full-fledged method. On average 96% of variants are rejected by this method of the problem solution.

У статті розглядається булева задача розміщення із урахуванням переваг клієнтів. Побудована її математична модель. Для розв'язання цієї задачі пропонується метод гілок і меж. Запропоновано метод обчислення нижньої оцінки як розв'язок задачі лінійного програмування, обмеження до якої будуються згідно з розв'язком допоміжної транспортної задачі. Застосування методу проілюстровано на модельній задачі розміщення гуртових аптек в областях України. Здійснено порівняння запропонованого методу з методом повного перебору в результаті якого встановлено, що метод гілок і меж є значно ефективніший. В середньому, ефективність методу за критерієм відсікання становить 96%.

Перші моделі та методи розв'язування дискретних задач розміщення приписують французьким та італійським математикам XVII століття [1]. Бурхливий розвиток задачі розміщення отримали з розвитком обчислювальної техніки. Лінійні моделі, моделі частково-цілочислового програмування, статистичні та динамічні моделі розміщення, а також моделі з нелінійними цільовими функціями виникали при реалізації програм розміщення нафтових і газових станцій, підприємств, станцій метро, поліцейських та пожежних дільниць та ін. [2]. Проте ці задачі розміщення часто виникають у зовсім інших галузях, зокрема, при вирішенні завдань уніфікації та стандартизації [3].

Задачі розміщення досі є надзвичайно актуальними. В роботі [4] розглядається задача розміщення базових станцій мобільних операторів. Запропоновано три модифікації методів локального пошуку для її розв'язування. Ці методи знаходять розв'язок із похибкою до 32 %, тобто не є достатньо точними. В роботі [5] розглянуто метод зведення задачі балансування запитів до серверів до булевої задачі розміщення. Пропонується метод для розв'язування цих задач за допомогою генетичного алгоритму. Але в роботі знайдено клас задач, які є важкими для запропонованого методу. Знайдені наближені розв'язки суттєво відрізняються від оптимального. В роботі [6] досліджено вплив врахування переваг клієнтів на знаходження оптимального розв'язку задачі про р-меридіану.

На основі робіт [4–6] можна зробити висновок, що наближені методи не завжди дають змогу знайти розв'язок, близький до оптимального, а тому існує потреба в розробці точних методів розв'язування задач розміщення. В роботі [7] запропоновано метод гілок і меж, який дозволяє відкинути 31%-65% варіантів розв'язків для найпростішої задачі розміщення, тобто не є достатньо ефективним. Отже існує потреба в розробці нових точних методів розв'язування булевої задачі розміщення, які є більш ефективними.

Метою публікації є дослідження булевої задачі розміщення з урахуванням переваг клієнтів та розробка ефективного точного методу її розв'язування.

Розглянемо найпростішу задачу розміщення. В переважній більшості розглянутих моделей розміщення автори виходять із думки, що є одна людина, яка приймає рішення, наприклад керівник фірми. Для заданої множини клієнтів $J = \{1, 2, \dots, m\}$ він знає виробничо-транспортні витрати: $c_{ij} \geq 0$, зв'язані з виробництвом і доставкою продукції j -му клієнту із i -го пункту виробництва, якщо воно буде там відкрито. Множина можливих пунктів виробництва $I = \{1, 2, \dots, n\}$ вважається скінченною і для кожного пункту $i \in I$ відома вартість $f_i \geq 0$ відкриття підприємства в цьому пункті. Задача полягає у виборі такої підмножини $S \subseteq I$ пунктів розміщення виробництва, яке дозволяє обслужити всіх клієнтів з мінімальними сумарними витратами.

Але в ринкових умовах клієнт має можливість сам вибирати постачальників продукції, виходячи із власних переваг. Він не зобов'язаний мінімізувати виробничо-транспортні витрати фірми - йому байдуже. Це призводить до виникнення задачі розміщення з урахуванням переваг клієнтів. Нехай матриця $G = (g_{ij})$ - задає переваги клієнтів на множині i . Якщо $g_{i_1j} > g_{i_2j}$, $i_1 \neq i_2$, то j -й клієнт надає перевагу підприємству i_1 . Для спрощення моделі будемо вважати, що в кожному стовпці матриці G всі елементи різні. Математична модель може бути представлена у вигляді задачі дворівневого програмування [2]:

знайти

$$\min_{x_i} \left\{ \sum_{i \in I} f_i x_i + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} c_{ij} x_{ij}^*(x_i) \right\}, \quad (1)$$

при умові

$$x_i \in \{0, 1\}, i \in I, \quad (2)$$

де $x_{ij}^*(x_i)$ — оптимальний розв'язок задачі клієнтів:

знайти

$$\max_{x_{ij}} \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} g_{ij} x_{ij}, \quad (3)$$

при умовах

$$\sum_{i \in i} x_{ij} = 1, j \in J; \quad (4)$$

$$x_{ij} \leq x_i, i \in I, j \in J; \quad (5)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i \in I, j \in J. \quad (6)$$

В задачі розміщення цільова функція (1) задає сумарні затрати на відкриття підприємств і обслуговування клієнтів, а задача (3)–(6) визначає переваги клієнтів.

Метод гілок і меж — один з комбінаторних методів. Його суть полягає в упорядкованому переборі варіантів і розгляді лише тих з них, які виявляються за певними ознаками корисними для знаходження оптимального рішення.

Метод використовується для вирішення деяких NP повних задач. Складність знаходження оптимального розв'язку залежить від вигляду функції та способу визначення оцінок, але гарантовано є не більшою за повний перебір.

Результатом роботи алгоритму є знаходження мінімуму функції на допустимій множині. Причому множина може бути як дискретною, так і раціональною.

В ході роботи алгоритму виконується дві операції: розбиття вихідної множини на підмножини (гілки), та знаходження оцінок (меж). Оцінка знизу — значення, що гарантовано не більше за мінімальне значення цільової функції на заданій підмножині. Оцінка зверху — значення, що гарантовано не менше за мінімальне значення цільової функції на заданій підмножині. Підмножина, що має найменшу оцінку зверху, називається рекордною. Спочатку вся множина вважається рекордною. Наведемо схему методу гілок і меж:

- розбити рекордну множину на підмножини;
- знайти оцінку зверху та знизу для отриманих підмножин;
- знайти мінімальну оцінку зверху серед усіх підмножин та вважати її рекордною;
- видалити ті множини, у яких оцінка знизу більша за рекордну оцінку;
- якщо не досягнуто необхідної точності, повернутись до першого пункту.

Розв’язок задачі міститься між оцінкою зверху та знизу для рекордної множини. Точністю є різниця між оцінками зверху та знизу, тобто розв’язування задачі завершується тоді, коли ці оцінки збігаються.

Запропонуємо наступний метод розв’язування булевої задачі розміщення із урахуванням переваг клієнтів (1)–(6):

- методом гілок і меж здійснюємо перебір варіантів, на кожному кроці фіксуємо значення однієї певної невідомої — 0 або 1;
- розв’язуємо допоміжну транспортну задачу, яку описано нижче;
- розв’язуємо задачу лінійного програмування, обмеження до якої будуються згідно з розв’язком транспортної задачі. Знаходимо оцінку розв’язків знизу на відповідному кроці;
- порівнявши значення оцінки з найкращим відомим розв’язком приймаємо рішення щодо продовження перебору варіантів, що відповідають цьому значенню невідомої.

Розглянемо k -ий крок методу:

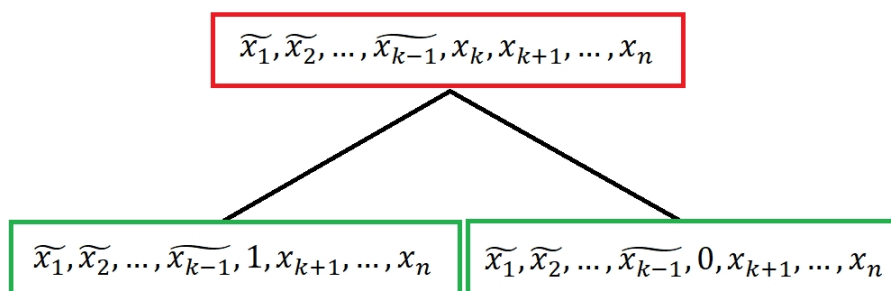


Рис. 1. Розбиття множини на підмножини на кроці k

маємо множину $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \dots, \widetilde{x}_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$, де $\widetilde{x}_i, i = \overline{1, k-1}$ — відомі константи, а $x_i, i = \overline{k, n}$ — невідомі.

$$\widetilde{x}_i = \begin{cases} 1, & \text{підприємство } i \text{ відкрите,} \\ 0, & \text{підприємство } i \text{ не відкрите,} \end{cases} \quad \forall i = \overline{1, k-1}.$$

Розглянемо можливі випадки (рис. 1):

- k -те підприємство відкрите;
- k -те підприємство не відкрите.

У першому із випадків множина має вигляд: $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \dots, \widetilde{x}_{k-1}, 1, x_{k+1}, \dots, x_n)$. На основі цієї множини будемо транспортну задачу:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \widetilde{c}_{ij} x_{ij} \rightarrow \min; \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j \in J; \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq n \widetilde{x}_j, i = \overline{1, k}; \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq n, i = \overline{k+1, n}; \quad (10)$$

$$\widetilde{c}_{ij} = \begin{cases} \infty, & g_{lj} < \max\{g_{ij} \widetilde{x}_l, l = \overline{1, k-1}\}; \\ c_{ij}, & \text{інакше.} \end{cases} \quad (11)$$

Розв'язавши транспортну задачу (7) – (11), отримаємо деяке значення $z_1(x^*)$, де $x^* = \{x_{ij}^*, i \in I, j \in J\}$ — оптимальний розв'язок. На основі цього розв'язку будемо задачу лінійного програмування (ЗЛП):

$$\sum_{i=1}^{k-1} c_i \widetilde{x}_i + c_k + \sum_{i=k+1}^n c_i x_i \rightarrow \min; \quad (12)$$

$$x_i \leq 1, i = \overline{k+1, n}; \quad (13)$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij}^* \leq n x_i, i = \overline{k+1, n}. \quad (14)$$

Симплекс-методом розв'язуємо ЗЛП (12) – (14), отримуємо деякий розв'язок $z_2(x^{**})$, де $x^{**} = \{x_i^*, i = \overline{k+1, n}\}$. Оцінка знизу розглядуваної множини рівна сумі $z_1(x^*)$ та $z_2(x^{**})$. Порівнюємо дану оцінку із відомим рекордом. Якщо вона є меншою, то продовжуємо розглядати дану гілку (рис. 2).

Якщо знайдена сума більша за рекорд — цю гілку більше не розглядаємо.

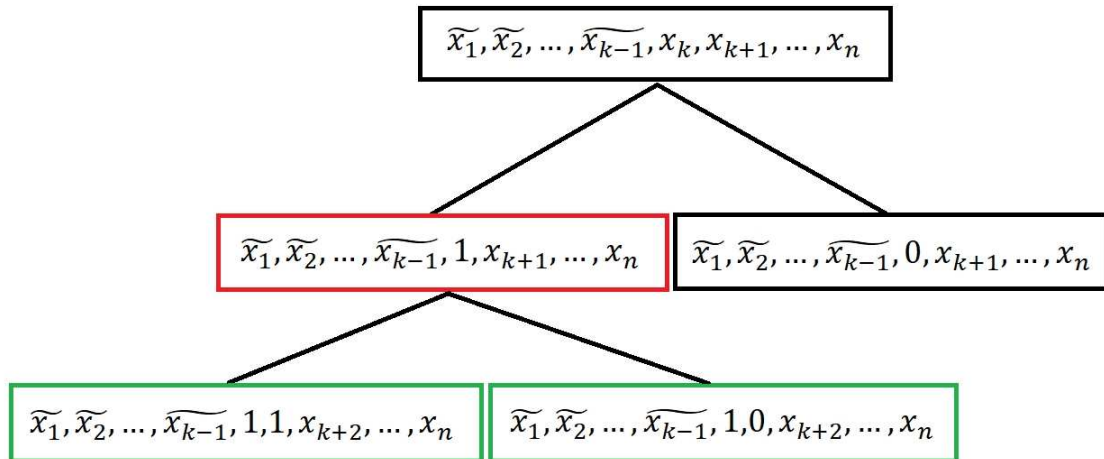


Рис. 2. Розбиття множини на підмножини на кроці $k + 1$

У випадку, якщо підприємство x_k не відкривати, то множина матиме вигляд: $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_n)$. Відповідно до цієї множини будується транспортна задача (7)-(11). Цільова функція (12) буде мати вигляд:

$$\sum_{i=1}^{k-1} c_i \tilde{x}_i + \sum_{i=k+1}^n c_i x_i \rightarrow \min .$$

Тестування програми. Запропонований алгоритм реалізовано на мові програмування C#. Програма має графічний інтерфейс для введення даних вручну (рис. 3.а), а також надає можливості для роботи з файлами та автоматичного генерування задач.

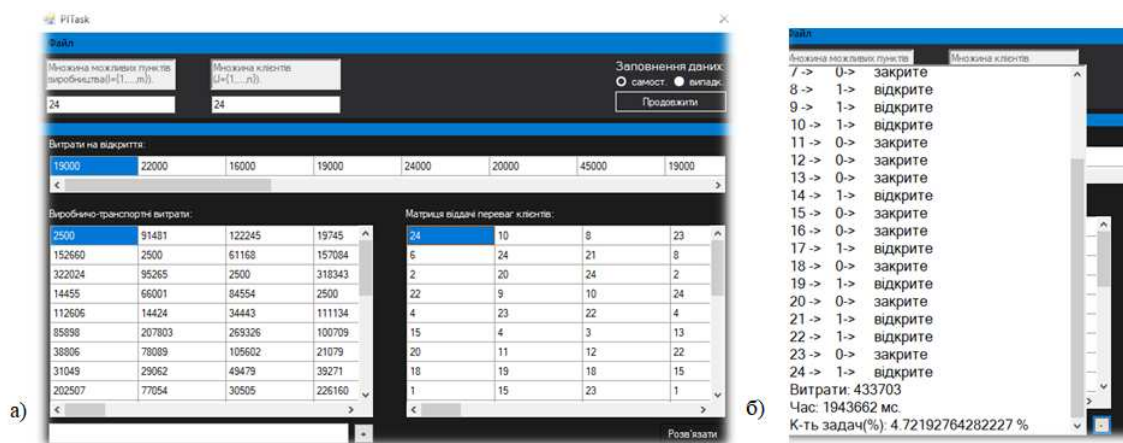


Рис. 3. а) інтерфейс програми б) розв’язок задачі

Проведено тестування ефективності методу гілок і меж для задач різної розмірності. Під ефективністю ми розуміємо відношення кількості відкинутих варіантів до кількості всіх можливих варіантів відкриття підприємств, яка рівна 2^n . Розглядалися два класи задач, в яких кількість клієнтів рівна кількості

місць для відкриття підприємств, а решта вхідних даних генерувалися випадковим чином згідно з такими правилами:

- #1: витрати на відкриття цілі числа в межах від 25000 до 37000, виробничо-транспортні витрати — від 60000 до 110000, елементи матриці віддачі переваг — від 0 до 100;
- #2: витрати на відкриття цілі числа в межах від 25000 до 37000, виробничо-транспортні витрати — від 2500 до 4000, елементи матриці віддачі переваг — від 0 до 100;

Тестування проводилось на ноутбучі з процесором Intel Core i3-2310m та 8 Гб оперативної пам'яті. Для кожної розмірності було згенеровано по 10 випадкових задач що належать кожному із класів, знайдено їх розв'язок методом гілок і меж та визначено ефективність знаходження розв'язку. Ефективність методу для фіксованої розмірності рівна середньому арифметичному ефективностей кожної із згенерованих задач відповідного класу. Результати тестування наведено на графіку (рис. 4). Встановлено існування залежності ефективності запропонованого методу від співвідношення вхідних даних.

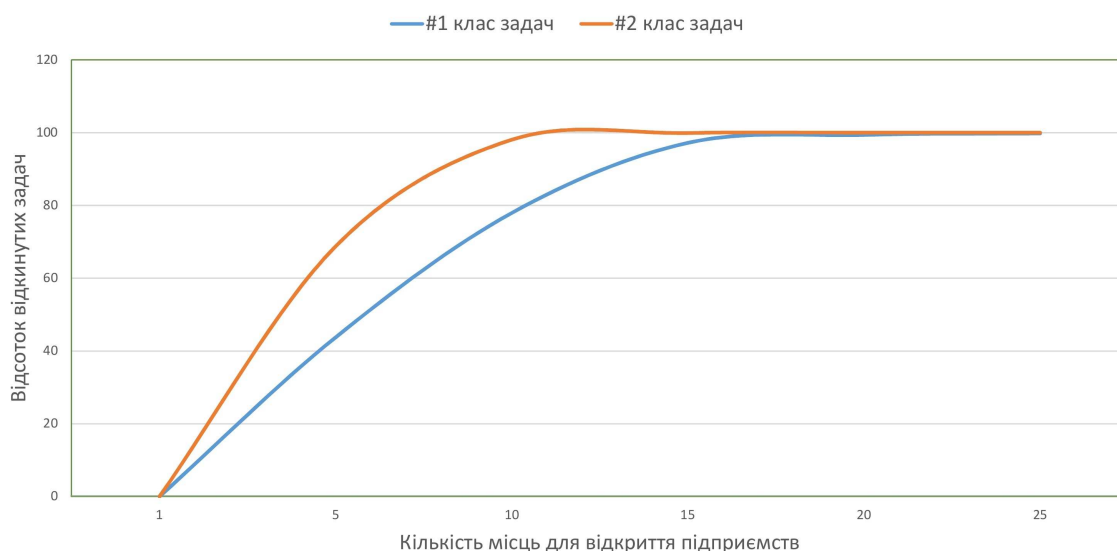


Рис. 4. Результати тестування ефективності методу гілок і меж

Приклад. Розглянемо застосування алгоритму на модельній задачі.

Нехай ми маємо змогу відкрити мережу гуртових аптек по Україні. Треба визначити в яких областях необхідно відкрити аптеки, щоб сумарні витрати на відкриття і виробничо-транспортні витрати були мінімальними. Крім того, необхідно врахувати перевагу клієнтів, які завжди вибирають найближчу з існуючих аптек. Для спрощення задачі всіх клієнтів у кожній з областей вважаємо одним цілим. Отже, маємо 24 можливі пункти відкриття і 24-х клієнтів. Вважаємо, що вартість на відкриття рівна середній вартості однокімнатної квартири у відповідній області України (рис. 5).



Рис. 5. Вартість однокімнатної квартири в різних областях України [8]

Виробничо-транспортні витрати обраховувалися наступним чином:

$$c_{ij} = 2d_{ij}c_bq_i + 2500,$$

де d_{ij} – відстань між обласними центрами;

c_b – середня вартість бензину (\$1.15);

q_i – коефіцієнт витрат, залежний від кількості населення та площі області;

2500 – фіксовані витрати на заробітну плату, комунальні послуги, тощо.

Таким чином отримуємо матрицю виробничо-транспортних витрат C :

2500	3983	4496	2787	4220	3341	3088	3226	4931	3378	3328	3583	3468	3863	3215	4441	3884	3033	3822	4188	3698	2776	3288	3410
3983	2500	3079	4027	2686	4572	3725	3176	3406	4351	4742	3288	3576	2950	4701	3525	3489	4517	5099	2989	3364	4259	3245	4045
4496	3079	2500	4473	2999	5193	4172	3696	2840	5055	5308	3905	4181	3397	4903	3859	4123	5030	5699	3316	3788	4772	3758	4494
2787	4027	4473	2500	4197	3491	2801	3436	5218	3091	3472	4057	3781	3576	2930	4346	3597	3185	4043	4087	3935	2925	3238	3123
4220	2686	2999	4197	2500	5073	3896	3196	3339	4066	4415	3367	3643	3121	4627	3339	3597	4747	5922	3160	3183	4512	3431	4218
3341	4572	5193	3491	5073	2500	3790	3921	5724	3254	2810	4218	3942	4565	3180	4961	4588	2808	3144	4892	4335	3065	4130	4112
3088	3725	4172	2801	3896	3790	2500	3185	4365	3392	3765	3627	3624	3275	3231	4735	3295	3482	4353	3599	3767	3224	2937	2842
3226	3176	3696	3436	3196	3921	3185	2500	4036	4027	4133	2900	3176	3065	3942	3811	3663	3758	4530	3390	3017	3500	2789	3334
4931	3406	2840	5218	3339	5724	4365	4036	2500	5257	5671	4471	4747	3590	5096	4199	3081	5464	6039	3265	4353	5207	4123	4687
3378	4351	5055	3091	4066	3254	3392	4027	5257	2500	2849	4294	4468	4167	2661	4919	4188	2865	3449	4491	4498	3104	3829	4682
3328	4742	5308	3472	4415	2810	3765	4133	5671	2849	2500	4455	4731	4549	3033	5197	4560	2794	3100	4864	5124	3052	4202	4087
3583	3288	3905	4057	3367	4218	3627	2900	4471	4294	4455	2500	2776	3466	4487	3148	4066	4234	4797	3778	2617	3857	3190	3972
3484	3576	4181	3781	3643	3942	3624	3176	4747	4468	4731	2776	2500	3742	4204	3401	4340	4018	4820	4411	2893	3760	3466	3716
3863	2950	3397	3576	3121	4505	3275	3065	3590	4167	4549	3466	3742	2500	4029	3960	3100	4397	5142	2824	3583	4001	3141	3597
3215	4701	4903	2930	4627	3180	3231	3942	5096	2661	3033	4487	4204	4029	2500	5161	4027	2872	3613	4351	4418	2943	3668	3553
4441	3525	3859	4346	3339	4961	4735	3811	4199	4919	5197	3148	3401	3960	5161	2500	4560	5023	5634	3999	3008	4717	4100	6057
3884	3489	4123	3597	3597	4588	3295	3663	3081	4188	4560	4066	4340	3100	4027	4560	2500	4280	5117	2937	4183	4022	3742	3305
3033	4517	5030	3185	4747	2808	3482	3758	5464	2865	2794	4234	4018	4397	2872	5023	4280	2500	3277	4770	4411	2757	3822	3806
3822	5099	5699	4043	5922	3144	4353	4530	6039	3449	3100	4797	4820	5142	3613	5634	5117	3277	2500	5487	4949	3546	4763	4687
4188	2989	3270	4087	3160	4892	3599	3390	3265	4491	4864	3778	4411	2824	4351	3999	2937	4770	5487	2500	3824	4464	3466	4089
3698	3364	3788	3935	3183	4335	3767	3017	4353	4498	5124	2617	2893	3583	4418	3008	4183	4411	4949	3824	2500	3974	3307	4089
2776	4259	4772	2925	4512	3065	3224	3500	5207	3104	3052	3857	3760	4001	2943	4717	4022	2757	3546	4464	3974	2500	3564	3546
3288	3245	3758	3238	3431	4130	2937	2789	4123	3829	4202	3190	3466	3141	3668	4100	3742	3822	4763	3466	3307	3564	2500	3259
3410	4045	4494	3123	4218	4112	2842	3334	4687	4682	4087	3972	3716	3597	3553	5057	3305	3806	4687	3898	4089	3546	3259	2500

Матриця віддачі переваг

24	10	8	23	7	17	20	15	9	17	17	15	18	9	17	11	13	18	17	9	15	22	16	18
6	24	21	8	23	7	9	19	19	8	6	18	17	22	4	19	18	6	8	21	17	6	18	10
2	20	24	2	22	2	4	9	23	2	2	11	8	16	3	17	9	2	3	18	13	2	8	5
22	9	10	24	9	16	23	12	6	20	16	9	11	14	21	12	17	17	16	10	11	21	19	22
4	23	22	4	24	3	5	16	20	12	11	17	15	19	5	21	16	5	2	20	19	4	14	6
15	4	3	13	2	24	6	6	2	18	22	7	10	2	18	6	2	21	22	2	7	18	3	7
20	11	12	22	11	15	24	17	13	16	15	14	16	17	16	8	20	15	15	15	14	16	22	23
18	19	18	15	18	14	19	24	17	13	13	21	21	12	18	15	14	14	17	20	15	23	19	
1	15	23	1	17	1	2	3	24	1	1	3	2	12	2	13	22	1	1	19	6	1	4	3
14	6	4	19	10	18	14	4	5	24	21	5	4	5	23	7	7	20	20	5	3	17	6	4
16	2	2	14	6	22	8	2	3	22	24	4	3	3	19	2	4	22	23	3	1	19	2	9
11	17	14	6	15	10	10	22	12	9	10	24	23	15	6	22	10	10	11	14	23	10	20	11
12	12	11	10	12	13	11	18	10	7	7	22	24	10	9	20	5	11	10	7	22	11	13	14
8	22	19	12	21	8	16	20	18	11	9	16	13	24	10	16	21	8	6	23	16	8	21	15
19	3	6	20	4	19	17	5	8	23	20	2	7	6	24	3	11	19	18	8	4	20	10	16
3	13	15	3	16	4	1	7	15	3	3	20	20	8	1	24	3	3	4	11	21	3	5	1
7	14	13	11	13	6	15	10	22	10	8	8	6	20	11	10	24	9	7	22	8	7	9	20
21	5	5	17	3	23	13	8	4	21	23	6	9	4	22	5	6	24	21	4	5	23	7	13
9	1	1	7	1	20	3	1	1	15	18	1	1	1	14	1	1	16	24	1	2	14	1	2
5	21	20	5	20	5	12	13	21	6	5	13	5	23	8	15	23	4	5	24	12	5	12	12
10	16	16	9	19	9	7	21	14	5	4	23	22	13	7	23	8	7	9	13	24	9	15	8
23	7	7	21	5	21	18	11	7	19	19	12	12	7	20	9	12	23	19	6	10	24	11	17
17	18	17	16	14	11	21	23	16	14	12	19	19	18	13	14	14	12	12	16	18	12	24	21
13	8	9	18	8	12	22	14	11	4	14	10	14	11	15	4	19	13	13	12	9	13	17	24

формується таким чином, що більшому значенні d_{ij} відповідає менше значення g_{ij} , а кожен стовпець матриці є перестановкою чисел $\overline{1, 24}$.

Розв'язок модельної задачі:

$$x^* = (0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1),$$

тобто згідно з нашими позначеннями, маємо відкрити аптеки в Донецьку, Житомирі, Запоріжжі, Івано-Франківську, Кропивницькому, Луганську, Луцьку, Полтаві, Сумах, Ужгороді, Херсоні, Хмельницьку і Чернігові. Сумарні витрати на відкриття і виробничо-транспортні витрати становлять 433703\$.

Висновки. В роботі досліджено булеву задачу розміщення з урахуванням переваг клієнтів. Побудовано її математичну модель у вигляді задачі дворівневого програмування. Також розроблено новий точний метод розв'язування даної задачі на основі методу гілок і меж. Декомпозиція задачі знаходження значення оцінки цільової функції знизу на заданій підмножині на транспортну задачу та задачу лінійного програмування дала змогу значно підвищити ефективність алгоритму та відсікати більше 96% варіантів для задач з розмірністю більше ніж 15. Запропонований алгоритм дає змогу розв'язувати важливі прикладні задачі. Подальше вдосконалення методу шляхом побудови більш строгих оцінок цільової функції надасть змогу розв'язувати задачі більшої розмірності.

Список використаної літератури

1. *Krarup J., Pruzan P. M.* The simple plant location problem: survey and synthesis // *European J. Oper. Res.* – 1983. – V. 12, No. 1. – P. 36–81.
2. *Андрашко Ю. В., Кузка О. І.* Про деякі конкурентні задачі розміщення // *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.* – Ужгород, 2013. – Вип. №1(24). – С. 5–11.
3. *Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т.* Экстремальные задачи стандартизации. – Новосибирск: Наука, 1978. – 335 с.
4. *Скаков Е. С., Малыш В. Н.* Использование алгоритмов мултистарта и поиска с запретами для решения задачи размещения базовых станций // *Информационно-управляющие системы.* – 2015. – №3. – С. 99–106.
5. *Кочетов Ю. А., Панин А. А., Плясунов А. В.* Генетический локальный поиск и сложность аппроксимации задачи балансировки нагрузки на сервер // *Автоматика и телемеханика.* – 2017. – Вып. 3. – С. 51–62.
6. *Алексеева Е. В., Кочетов Ю. А.* Генетический локальный поиск для задачи о р-мередиане с предпочтениями клиентов // *Дискретный анализ и исследование операций.* – 2007. – Том 14, №1. – С. 3–31.
7. *Mezentsev Yu. A.* Binary cut-and-branch method for solving linear programming problems with boolean variables // *Proc. 9th int. Conf. on Discrete Optimization and Operations Research and Scientific School.* – 2016. – P. 72–85.
8. *Скільки стоять однокомнатні квартири в новостройках різних регіонів України в лютому 2017 року: інфографіка [Електронний ресурс].* – URL: <http://domik.ua/novosti/skolko-stoyat-odnokomnatnye-kvartiry-v-novostrojках-raznyx-regionov-ukrainy-v-iyune-2017-goda-infografika-n252119.html>

Одержано 07.02.2018