УДК 539.12:537.8

І.Ю. Кривський[1], Т.М. Заяць[2], В.М. Симулик[1], І.Л. Ламер[1]
[1]Інститут електронної фізики НАН України, 88000, Ужгород, вул. Університетська, 21
e-mail: vsimulik@gmail.com
[2]Ужгородський національний університет, 88000, Ужгород, вул. Волошина, 54

ПРО БОЗОННІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ ДІРАКА ДЛЯ ВІЛЬНОГО ПОЛЯ

Продовжено розгляд Фермі – Бозе дуалізму рівняння Дірака з довільною масою. Знайдені бозонні розв'язки цього рівняння у представленні Фолді – Вотхойзена. Аналіз цих розв'язків методом Баргмана – Вігнера та їх порівнянні з відомими ферміонними розв'язками наочно ілюструє Фермі – Бозе дуалізм рівняння Дірака.

Ключові слова: рівняння Дірака, спінорне поле, ферміони, бозони, алгебра Кліффорда, суперсиметрія.

1. Вступ

Дана стаття є безпосереднім продовженням робіт [1, 2], у яких були знайдені бозонні (спіна s=(1,0)) симетрії рівняння Дірака з ненульовою масою. Тут ми доповнюємо цей результат виписаними у явному вигляді бозонними розв'язками цього рівняння.

Починаючи з перших кроків квантової механіки і до періоду її розквіту, цілим рядом авторів досліджувався Фермі – Бозе дуалізм безмасового спінорного поля та зв'язаного з ним електромагнітного поля в термінах напруженостей, яке задовольняє дещо узагальненим рівнянням Максвела (див. відповідні посилання в наших роботах [1, 2]). У наші дні інтерес до цієї проблеми залишається сталим [1-3]. В даній роботі ми обмежуємось Фермі – Бозе дуалізмом окремо взятого рівняння Дірака (про рівняння Максвела та їх дуалізм не згадуємо), ілюструємо, що, поряд з добре відомими ферміонними розв'язками цього рівняння, існують також і додаткові, фізично змістовні бозонні розв'язки.

Зрозуміло, що спочатку цілим рядом різних авторів був досліджений найлегший для аналізу випадок безмасових полів (див. відповідні посилання у [2]). В той же час, загальний випадок $m \neq 0$ є особливо актуальним і сьогодні (окрім статей [1, 2], див., наприклад, [3] і посилання). Сподіваємося, що разом з [1, 2] викладені нижче результати наочно демонструють Фермі – Бозе дуалізм рівняння Дірака для загального випадку довільної (ненульової) маси.

Відмітимо, що для узагальнення результатів [1, 2], тобто для подальшої демонстрації Фермі – Бозе дуалізму рівняння Дірака з довільною масою, виявилось корисним стартувати з представлення Фолді – Вотхойзена (ФВ) для спінорного поля [4], а відповідні результати у стандартному локальному представленні рівняння Дірака одержувати у якості наслідків за допомогою відомого перетворення ФВ [4]. Такий старт зумовлений тим, що саме у канонічному представленні ФВ найбільш наочними і фізично адекватними є як математичні, так і фізичні аспекти теорії спінорного поля (див., наприклад, [4]). Саме тому потрібний нам додатковий математичний апарат – розширену дійсну алгебру Кліффорда – Дірака (за термінологією [2], ERCD–алгебру) – ми ввели в розгляд у [1, 2] безпосередньо у представлення ФВ, а не у стандартне локальне представлення Паулі – Дірака (ПД).

Важливо, що знаходження в [1, 2] додаткових бозонних симетрій рівняння Дірака (а також широкої 32-вимірної алгебри інваріантності цього рівняння, яка у представленні ФВ [4] є максимальною алгеброю інваріантності цього рівняння у класі чисто матричних операторів симетрії) стало можливим завдяки введенню в розгляд в [1, 2] (див. також електронний препринт [5]) 64-вимірної ERCD–алгебри, яка включає 16-вимірну алгебру Кліффорда – Дірака (CD) у якості підалгебри, тобто ERCD$\supset$CD. Нижче для цілей даної статті ми також суттєво використовуємо старт із канонічного представлення ФВ [4] та введений у ньому апарат ERCD–алгебри.

2. Використовувані позначення та означення

Для зручності використовуємо систему одиниць $\hbar = c = 1$, метрику вибираємо у вигляді $g = (g^{\mu\nu}) = (+---)$, $a^{\mu} = g^{\mu\nu}a_{\nu}$, грецькі індекси пробігають значення $0,1,2,3$, латинські $\overline{1,3}$, а по індексу, що двічі повторюється, розуміємо сумування.

Для забезпечення математичної коректності розгляду і адекватності фізичного викладу необхідно уточнити не лише область визначення і значень розв'язків рівняння ФВ (або Дірака), але і множину (клас), якій належать ці розв'язки. Це уточнення вимагає вважати, що всі розв'язки (як Фермі, так і Бозе) розглядаються в одному й тому ж квантово-механічному 4-компонентному просторі Гілберта

$$\begin{aligned} &\mathbb{H}^{3,4} = \mathrm{L}_2(\mathrm{R}^3)\times\mathbb{C}^4,\ \ \mathrm{L}_2(\mathrm{R}^3) \\ &= \{\phi:\ \mathrm{R}^3 \to \mathbb{C}^4;\ \int d^3x\left|\phi(x)\right|^2 < \infty\}, \end{aligned} \tag{1}$$

вкладеному у оснащений простір Гілберта

$$\mathbb{S}^{3,4} \subset \mathbb{H}^{3,4} \subset {}^{\times}\mathbb{S}^{3,4}, \tag{2}$$

де символ «×» у ${}^{\times}\mathbb{S}^{3,4}$ означає, що простір узагальнених функцій ${}^{\times}\mathbb{S}^{3,4}$ спряжений з простором основних функцій Шварца $\mathbb{S}^{3,4}$ відповідною топологією.

Нагадаємо, що простір основних функцій Шварца $\mathbb{S}^{3,4}$ в (2) є ядерним, тобто щільним як у $\mathbb{H}^{3,4}$, так і у просторі ${}^{\times}\mathbb{S}^{3,4}$ узагальнених функцій Шварца. Нагадаємо також, що простір $\mathbb{S}^{3,4}$ (як і $\mathbb{H}^{3,4} \subset {}^{\times}\mathbb{S}^{3,4}$) інваріантний відносно перетворення Фур'є – тому координатна ($\vec{x}$-) та імпульсна $\vec{k}$-реалізації використовуваних тут просторів є альтернативними. Далі, вибір простору $\mathbb{S}^{3,4}$ у якості області визначення використовуваних тут операторів фізичних величин зумовлений тим, що він одночасно є і областю їх значень. Все це дає можливість, не залучаючи математично громіздкий функціональний апарат простору ${}^{\times}\mathbb{S}^{3,4}$, проводити всі потрібні нам викладки математично коректно у підпросторі $\mathbb{S}^{3,4} \subset \mathbb{H}^{3,4}$. Детальніше про відповідну мотивацію такого вибору див. у [6].

Для наочного розгляду та безпосереднього порівняння різних типів розв'язків пригадаємо спочатку добре відомі ферміонні розв'язки рівняння Дірака у представленні ФВ. При цьому будемо одночасно вводити і використовувати зручні для нас поняття і позначення, апелювання до яких є необхідним для побудови додаткових бозонних розв'язків та симетрій. Зокрема, як і у [1, 2], будемо використовувати антиермітові первісні генератори $q = -i\widehat{q}$ розглядуваних груп та їх представлень, які виражаються через стандартні ермітові $\widehat{q}$ генератори (демонструємо на прикладі часто використовуваних операторів імпульса та спіна)

$$\widehat{p}_{\mu} = i\partial_{\mu},\ \ \widehat{s}^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}], \tag{3}$$

наступним чином

$$p_{\mu} = \partial_{\mu} = -i\widehat{p}_{\mu},\ \ s^{\mu\nu} = -i\widehat{s}^{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}], \tag{4}$$

де явний вигляд матриць γ^{μ} для визначеності вибираємо у стандартному представленні ПД, див. формули (5) у [2]. Саме ці, *первісні* антиермітові генератори (4) пов'язані з дійсними параметрами $a = (a_{\mu})$, $\varpi = (\varpi_{\mu\nu})$ 4-трансляцій та 4-поворотів, мають безпосередній фізичний зміст. Відмітимо, що використання в теорії груп та перетворень первісних антиермітових генераторів є фізично обґрунтованою альтернативою, див., наприклад, спеціальні зауваження в [7].

Одним із наслідків широкої симетрії – чисто матричної алгебри $\mathrm{A}_{32} \subset$ERCD [2] інваріантності рівняння ФВ

$$\begin{aligned} &(\partial_0 + i\gamma^0\omega)\phi(x) = 0;\ \ \omega \equiv \sqrt{-\Delta + m^2}, \\ &x \in \mathrm{M}(1,3),\ \phi \in \mathbb{H}^{3,4}; \end{aligned} \tag{5}$$

є множина відповідних законів збереження для спінорного поля. Нагадаємо, що кінцевий явний вигляд законів збереження для спінорного поля (для конкретних взаємовідповідних перетворень інваріантності рівнянь Дірака та ФВ) не залежить від представлення (ФВ чи стандартного локального ПД), у якому розглядається рівняння Дірака. У даній статті аналізуються лише ті симетрії та зв'язані з ними додаткові розв'язки рівняння (5) (а коротко – і відповідні їм закони збереження), які безпосередньо відносяться до фізично змістовного Фермі – Бозе дуалізму спінорного поля.

Для ілюстрації Фермі – Бозе дуалізму рівняння Дірака у ФВ-представленні (5) корисно акцентувати увагу на підалгебру SO(6) повної алгебри інваріантності A_{32} рівняння (5). Представлення алгебри SO(6) у $\mathbb{H}^{3,4}$ (яке включає алгебру групи SO(3) поворотів у $R^3 \subset M(1,3)$ у якості підалгебри) породжується чисто матричними операторами (γ^A-матричними, $A=\overline{1,6}$)

$$\begin{gathered}\alpha^{A6}=\gamma^A:\ \gamma^1,\ \gamma^2,\ \gamma^3,\ \gamma^4\equiv\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3,\\ \gamma^5\equiv\gamma^1\gamma^3C,\ \gamma^6\equiv i\gamma^1\gamma^3C;\\ \gamma^A\gamma^B+\gamma^B\gamma^A=-2\delta^{AB},\end{gathered}\tag{6}$$

згідно з формулами (10) у [2]. Тут C – оператор комплексного спряження, $C\phi=\phi^*$ (тобто C є оператором інволюції у просторі $\mathbb{H}^{3,4}$), а також – орт алгебри ERCD [2].

Зауваження 1. Зауважимо, що 64-вимірна ERCD–алгебра була введена в розгляд у [1, 2, 5] як повний перерахунок усіх операторів, побудованих у вигляді добутків операторів $i=\sqrt{-1}$, C та 16 ортів стандартної алгебри CD. Комутаційним співвідношенням $\gamma^A\gamma^B+\gamma^B\gamma^A=-2\delta^{AB}$, $AB=\overline{1,7}$, алгебри CD задовольняють 7 ортів ERCD–алгебри, які зручно вибирати у вигляді набору шести матриць (6), до якого додано матрицю $\gamma^7=i\gamma^0$. Таким чином, стандартна 16-вимірна алгебра CD (тобто SO(1,5) алгебрра) в [1, 2] безпосередньо узагальнюється до 28-вимірної алгебри CD_{ER} SO(8) (або SO(1.7) алгебри), генератори

$$s^{\tilde{A}\tilde{B}}=\{s^{AB}\equiv\frac{1}{4}[\gamma^A,\gamma^B],\ s^{A8}=-s^{8A}=\frac{1}{2}\gamma^A\},\quad \tilde{A},\tilde{B}=\overline{1,8},\tag{7}$$

якої задовольняють комутаційним співвідношенням

$$\begin{aligned}[s^{\tilde{A}\tilde{B}},s^{\tilde{C}\tilde{D}}]&=\delta^{\tilde{A}\tilde{C}}s^{\tilde{B}\tilde{D}}+\delta^{\tilde{C}\tilde{B}}s^{\tilde{D}\tilde{A}}\\&+\delta^{\tilde{B}\tilde{D}}s^{\tilde{A}\tilde{C}}+\delta^{\tilde{D}\tilde{A}}s^{\tilde{C}\tilde{B}}\end{aligned}.\tag{8}$$

Саме за рахунок ширших можливостей 28-вимірної алгебри CD_{ER} SO(8) (або SO(1.7) алгебри) в [1, 2] і нижче одержуються додаткові бозонні характеристики спінорного поля.

3. Ферміонні розв'язки рівняння Фолді – Вотхойзена

Для порівняння з бозонними розв'язками рівняння ФВ, які розглядаємо у наступному параграфі, коротко нагадаємо стандартні ферміонні розв'язки даного рівняння. При цьому визначаємо необхідний нам формалізм та метод. Нижче наведемо явний вигляд Фермі-розв'язку рівняння Дірака (як у ФВ-, так і у ПД-представленнях). Для цих самих цілей у розділі 5 наводимо також аналіз Фермі-властивостей цього розв'язку на основі методу Баргмана – Вігнера.

Фермі-розв'язок рівняння (5) визначаємо за допомогою певного стаціонарного повного набору операторів ферміонних фізичних величин для $s=\frac{1}{2}$-дублета ($\frac{1}{2}$D) у ФВ-представленні, а саме, набору "імпульс – знак заряду – проекція s^3 спіна $\vec{s}$":

$$(\vec{p}=-\nabla,\ i\gamma^0,\ s^3),\tag{9}$$

де

$$\begin{gathered}s^3\in\vec{s}=(s^1=s^{23},\ s^2=s^{31},\ s^3=s^{12})\\ =\frac{1}{2}(\gamma^2\gamma^3,\ \gamma^3\gamma^1,\ \gamma^1\gamma^2)\Rightarrow\vec{s}^{\,2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)I_4,\end{gathered}\tag{10}$$

а I_4 – одинична 4×4 матриця.

Фундаментальні розв'язки рівняння

(5), які є спільними власними розв'язками ферміонного повного набору (9), мають вигляд

$$\varphi^{\varepsilon_1}_{\vec{k}\varepsilon_2}(t,\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\varepsilon_1(\tilde{\omega}t-\vec{k}\vec{x})} \mathrm{D}^{\varepsilon_1}_{\varepsilon_2}, \qquad (11)$$

де ε_1 є власне значення оператора знака заряду спінорного поля, $\frac{\varepsilon_2}{2}$ є власне значення $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ оператора s^3 проекції спіна $\vec{s}$ (10), а $\mathrm{D}^{\varepsilon_1}_{\varepsilon_2}$ – декартові орти у просторі $\mathbb{H}^{3,4}$ (1):

$$\begin{aligned}&\mathrm{D}^{\varepsilon_1}_{\varepsilon_2}:\ \mathrm{D}^-_+=\mathrm{d}_1,\ \mathrm{D}^-_-=\mathrm{d}_2,\ \mathrm{D}^+_+=\mathrm{d}_3,\ \mathrm{D}^+_-=\mathrm{d}_4;\\ &\mathrm{d}_\alpha=(\delta^\beta_\alpha).\end{aligned} \qquad (12)$$

Розв'язки (11) є узагальненими станами, які належать простору ${}^{\times}\mathbb{S}^{3,4}$. Тим не менше, вони утворюють повну ортонормовану систему узагальнених станів. Тому будь-який ферміонний фізичний стан ФВ поля ϕ із щільної в $\mathbb{H}^{3,4}$ множини $\mathbb{S}^{3,4}$ – розв'язок рівняння (5) – однозначно представляється у вигляді

$$\begin{aligned}&\phi_{\frac{1}{2}D}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k[e^{-ikx}(a^-_+(\vec{k})\mathrm{D}^-_+\\ &+a^-_-(\vec{k})\mathrm{D}^-_-)+e^{ikx}(a^{*+}_+(\vec{k})\mathrm{D}^+_+ + a^{*+}_-(\vec{k})\mathrm{D}^-_-)];\\ &kx=\tilde{\omega}t-\vec{k}\vec{x},\end{aligned} \qquad (13)$$

де $a^\alpha_\beta(\vec{k})\equiv a^{\varepsilon_1}_{\varepsilon_2}(\vec{k})$ – імпульсно-зарядово-спінові квантовомеханічні амплітуди розподілу ймовірностей для $\frac{1}{2}\mathrm{D}$ за власними значеннями стаціонарного повного набору (9) (нагадаємо, що поняття виродження для будь-якого стаціонарного повного набору відсутнє). Наголосимо, що для $\forall\phi(x)$ (13), що належить простору $\mathbb{S}^{3,4}\subset\mathbb{H}^{3,4}$, амплітуди $a^{\varepsilon_1}_{\varepsilon_2}(\vec{k})$ належать комплекснозначному простору основних функцій Шварца $\mathbb{S}(\mathrm{R}_{\vec{k}})$.

Аналогічно виписується також ферміонний загальний розв'язок типу (13) рівняння (5), пов'язаний з будь-яким іншим ферміонним стаціонарним повним набором, зокрема, з імпульсно-зарядово-спіральним повним набором

$$\left(\vec{p}=-\nabla,\ i\gamma^0,\ h=\frac{\vec{s}\cdot\nabla}{|\nabla|}\right). \qquad (14)$$

У ПД-представленні розв'язок (13) стандартного рівняння Дірака

$$\begin{aligned}&(\partial_0+i\widehat{H})\psi(x)=0;\\ &\widehat{H}\equiv\gamma^0(\vec{\gamma}\cdot\widehat{\vec{p}}+m),\ \widehat{\vec{p}}=-i\nabla,\end{aligned} \qquad (15)$$

має добре відомий вигляд

$$\begin{aligned}&\psi(x)=V^{-1}\phi_{\frac{1}{2}D}(x)\\ &=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k[e^{-ikx}(a^-_+(\vec{k})\mathrm{v}^-_+ + a^-_-(\vec{k})\mathrm{v}^-_-)\\ &+e^{ikx}(a^{*+}_+(\vec{k})\mathrm{v}^+_+ + a^{*+}_-(\vec{k})\mathrm{v}^-_-)].\end{aligned} \qquad (16)$$

Тут 4-компонентні спінори v^{-+}_{+-} мають вигляд

$$\begin{aligned}&\mathrm{v}^-_{\varepsilon_2}=V^{-1}\mathrm{D}^-_{\varepsilon_2}=N\begin{vmatrix}(\tilde{\omega}+m)\mathrm{d}_{\varepsilon_2}\\ (\vec{\sigma}\cdot\vec{k})\mathrm{d}_{\varepsilon_2}\end{vmatrix},\\ &\mathrm{v}^+_{\varepsilon_2}=V^{-1}\mathrm{D}^+_{\varepsilon_2}=N\begin{vmatrix}(\vec{\sigma}\cdot\vec{k})\mathrm{d}_{\varepsilon_2}\\ (\tilde{\omega}+m)\mathrm{d}_{\varepsilon_2}\end{vmatrix},\end{aligned} \qquad (17)$$

де $N^{-1}=\sqrt{2\tilde{\omega}(\tilde{\omega}+m)}$, а $\mathrm{d}_{\varepsilon_2}$ є 2-компонентні стани, власні для оператора $\frac{1}{2}\sigma^3$, (явний вигляд оператора ФВ V^{-1} див., наприклад, у формулі (3) у [2]).

Відмітимо, що у ПД-представленні 4-компонентні спінори v^{-+}_{+-} (17) не є власними векторами оператора проекції спіна s^3 (10). Вони є власними векторами лише оператора проекції $s^{3\mathrm{Dirac}}$ нелокального "істинно" спінового оператора $\vec{s}^{\,\mathrm{Dirac}}=V^{-1}\vec{s}V$; явний вигляд оператора $\vec{s}^{\,\mathrm{Dirac}}$ див., наприклад, у [4, 6].

4. Бозонні розв'язки рівняння Фолді – Вотхойзена

Для побудови бозонного стаціонарного повного набору операторів, який комутує з оператором рівняння (5), використаємо частину генераторів алгебри SO(6) (див. формули (10) у [2]), а саме, два набори $SU(2)$-генераторів. Перший набір $SU(2)$-генераторів добре відомий – це стандартні оператори ферміонного спіна (10). Другий набір $SU(2)$-генераторів задається формулами

$$\vec{s}' = (s'^1 = s'^{23},\ s'^2 = s'^{31},\ s'^3 = s'^{12}) \qquad (18)$$
$$= \frac{1}{2}(-\gamma^0\gamma^2 C,\ i\gamma^0\gamma^2 C,\ -i) \Rightarrow \vec{s}'^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\mathrm{I}_4,$$

(тут, як і раніше у (6), C – оператор комплексного спряження в $\mathbb{H}^{3,4}$). Набори $SU(2)$-генераторів $\{\vec{s}\}$ (10) та $\{\vec{s}'\}$ (18) комутують, $[\{\vec{s}\},\{\vec{s}'\}] = 0$, і зв'язані між собою оператором u,

$$\vec{s}' = u\vec{s}u^{-1},\ u = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & C \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$
$$u^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ C & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},\ uu^{-1} = u^{-1}u = 1. \qquad (19)$$

Важливо, що оператор u (19) не змінює явного вигляду гамільтоніана $i\gamma^0\omega$ рівняння (5), тобто $ui\gamma^0\omega u^{-1} = i\gamma^0\omega$. Таким чином, при перетворенні (19) явний вигляд рівняння ФВ (5) не змінюється.

Спінові $SU(2)$-генератори $\underset{\sim}{\vec{s}}$ для бозонного стаціонарного повного набору знаходимо наступним чином

$$\underset{\sim}{\vec{s}} = W(\vec{s} + \vec{s}')W^{-1}, \qquad (20)$$

де оператор W має вигляд

$$W = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & C \\ 0 & 0 & -i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -C & 0 & -1 \end{vmatrix},$$
$$W^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -C \\ 0 & 0 & i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & C & 0 & -1 \end{vmatrix}, \qquad (21)$$
$$WW^{-1} = W^{-1}W = 1.$$

Зауважимо, що без здійснення перетворення W (20), (21) оператори $(\vec{s} + \vec{s}')$, хоча і задовольняють комутаційним співвідношенням для первісних генераторів алгебри $SU(2)$, але оператор $(\vec{s} + \vec{s}')^2$ не є діагональним. Перетворення W (20), (21) не змінює явний вигляд проекції спіна $s^3 + s'^3$ та $SU(2)$ комутаційні співвідношення, але діагоналізує оператор $(\vec{s} + \vec{s}')^2$. Таким чином, для генераторів $\underset{\sim}{\vec{s}}$ (20) одержуємо

$$\underset{\sim}{s}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & C & 0 \\ 0 & -C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},\ \underset{\sim}{s}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -iC & 0 \\ 0 & iC & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$
$$\underset{\sim}{s}^3 = \begin{vmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},\ \underset{\sim}{\vec{s}}^2 = -1(1+1)\begin{vmatrix} \mathrm{I}_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad (22)$$

де I_3 – одинична 3×3 матриця.

Важливо відмітити, що оператор W (20), (21) (як і оператор u (19)) не змінює $i\gamma^0\omega$, тобто $Wi\gamma^0\omega W^{-1} = i\gamma^0\omega$. Отже при здійсненні перетворення до бозонного представлення рівняння ФВ (5) не змінює свій явний вигляд (5).

Таким чином, бозонний розв'язок рівняння ФВ (5) безпосередньо знаходимо у повній аналогії з тим, як у попередньому параграфі був побудований ферміонний розв'язок. Бозонний розв'язок визначаємо за допомогою повного стаціонарного набору операторів бозонних фізичних величин для s=(1,0)-мультиплету у ФВ представленні, а саме, набору "імпульс-проекція спіну $\underset{\sim}{s}^3$":

$$(\vec{p} = -\nabla,\ \underset{\sim}{s}^3), \qquad (23)$$

де $\underset{\sim}{s}^3$ дано в (22). У наборі (23) (у порівнянні з ферміонним повним набором (9)) відсутній оператор знаку заряду, оскільки заряд s=(1,0)-мультиплету дорівнює нулеві.

Фундаментальні розв'язки рівняння (5), які є спільними власними розв'язками бозонного повного набору (23), мають вигляд

$$\varphi_{\vec{k}\varepsilon}(t,\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i(\tilde{\omega}t - \vec{k}\vec{x})}\mathrm{D}_\varepsilon, \qquad (24)$$

де ε – це власні значення 1,0,-1,0 оператора $\underset{\sim}{s}^3$ проекції спіна $\underset{\sim}{\vec{s}}$ (22), а D_ε – декартові орти у тому ж самому просторі $\mathbb{H}^{3,4}$ (1):

$$\mathrm{D}_\varepsilon:\ \mathrm{D}_+ = \mathrm{d}_1,\ \mathrm{D}_0 = \mathrm{d}_2,\ \mathrm{D}_- = \mathrm{d}_3,\ \mathrm{D}_{\underline{0}} = \mathrm{d}_4; \quad \mathrm{d}_\alpha = (\delta_\alpha^\beta). \qquad (25)$$

Бозонні розв'язки (24) (як і (11)) є узагальненими станами, які належать простору ${}^{\times}\mathbb{S}^{3,4}$; вони утворюють повну ортонормовану систему для бозонних узагальнених станів. Тому, будь-який бозонний фізичний стан $\phi_{(1,0)}$ ФВ поля – розв'язок рівняння (5), представляється у вигляді

$$\phi_{(1,0)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k[e^{-ikx}(\xi_+(\vec{k})\mathrm{D}_+ + \xi_0(\vec{k})\mathrm{D}_0) + e^{ikx}(\xi_-(\vec{k})\mathrm{D}_- + \xi_{\underline{0}}(\vec{k})\mathrm{D}_{\underline{0}})], \qquad (26)$$

де $\xi_\varepsilon(\vec{k})$ – імпульсно-спінові квантовомеханічні амплітуди розподілу ймовірностей за власними значеннями стаціонарного повного набору (23) для бозонного s=(1,0)-мультиплету. І якщо $\phi_{(1,0)}(x) \in \mathbb{S}^{3,4}$, то бозонні амплітуди $\xi_\varepsilon(\vec{k})$ належать комплекснозначному простору Шварца $\mathbb{S}(\mathrm{R}_{\vec{k}})$.

Бозонний загальний розв'язок (26) корисно також представити у ортах не декартового $\{\mathrm{D}_\alpha\}$, а циклічного базису

$$\{\mathbb{C}_\alpha\}:\ \mathbb{C}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}1\\ i\\ 0\\ 0\end{vmatrix},\ \mathbb{C}_2 = \begin{vmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 0\end{vmatrix},\ \mathbb{C}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}i\\ 1\\ 0\\ 0\end{vmatrix},\ \mathbb{C}_4 = \begin{vmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{vmatrix}, \qquad (27)$$

де спінові оператори s=(1,0)-мультиплету мають вигляд

$$\underline{s}^1 = \begin{vmatrix}0&0&0&0\\0&0&-C&0\\0&C&0&0\\0&0&0&0\end{vmatrix},\ \underline{s}^2 = \begin{vmatrix}0&0&C&0\\0&0&0&0\\-C&0&0&0\\0&0&0&0\end{vmatrix},$$
$$\underline{s}^3 = \begin{vmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{vmatrix},\ \underline{\vec{s}}^2 = -1(1+1)\begin{vmatrix}\mathrm{I}_3&0\\0&0\end{vmatrix}. \qquad (28)$$

Розгляд бозонних станів у циклічному спіновому базисі корисний для дослідження зв'язку теорії поля ФВ s=(1,0)-мультиплету з рівняннями Максвела для поля напруженостей $\vec{E}, \vec{H}$ (деталі не є предметом даного короткого викладу).

Бозонний розв'язок рівняння (5) у циклічному спіновому базисі (27) має вигляд

$$\phi_{(1,0)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k[e^{-ikx}(b_+(\vec{k})\mathbb{C}_1 + b_-(\vec{k})\mathbb{C}_3) + e^{ikx}(b_0(\vec{k})\mathbb{C}_2 + b_{\underline{0}}(\vec{k})\mathbb{C}_4)], \qquad (29)$$

а зв'язок між спіновими базисами $\{\mathrm{D}_\alpha\}$ і $\{\mathbb{C}_\alpha\}$ задається оператором

$$\underline{\vec{s}} = U\underset{\sim}{\vec{s}}U^{-1},\ U\mathrm{d}_\alpha = \mathbb{C}_\alpha,\ UU^{-1} = U^{-1}U = 1,$$
$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}1&0&iC&0\\ i&0&C&0\\ 0&\sqrt{2}C&0&0\\ 0&0&0&\sqrt{2}\end{vmatrix}, \qquad (30)$$
$$U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}1&-i&0&0\\ 0&0&\sqrt{2}C&0\\ iC&C&0&0\\ 0&0&0&\sqrt{2}\end{vmatrix}.$$

Розв'язок (29) (у повній аналогії з вище представленим розглядом бозонного розв'язку (26)) пов'язаний зі стаціонарним повним набором $(\vec{p} = -\nabla,\ \underline{s}^3)$, у якому $\underline{s}^3$ дано у (28). Особливо важливо, що перетворення U (30) також (як і інші залучені тут перетворення (19), (21)) не змінює оператор $i\gamma^0\omega$, тобто оператор рівняння ФВ (5) знову залишається незмінним.

У повній аналогії з розглядом ферміонних розв'язків (параграф 3), розв'язки типу (26), (29) рівняння ФВ (5) виписуються і для будь-якого іншого бозонного стаціонарного повного набору, зокрема, важливим є імпульсно-спіральний повний набір

$$\left(\vec{p} = -\nabla,\ h = \frac{\vec{s}\cdot\nabla}{|\nabla|}\right). \qquad (31)$$

Перетворення $\phi_{(1,0)} \to \psi_{(1,0)}$ бозонних розв'язків (26), (29) рівняння ФВ (5) у локальне (стандартне ПД-представлення рівняння Дірака (15)) виконується за допомогою того ж самого оператора ФВ V^{-1} [4] у повній аналогії з відповідним перетворенням ферміонних розв'язків (див. параграф 3, формули (15) – (17)). Тобто, $\psi_{(1,0)} = V^{-1}\phi_{(1,0)}$, $V^{-1}(i\gamma^0\omega)V = \gamma^0(\vec{\gamma}\cdot\hat{\vec{p}} + m)$ (деталі у цій короткій публікації не розглядаємо). Це наслідок того факту, що всі використовувані тут при побудові бозонних розв'язків перетворення u, W, U не змінюють оператор $(\partial_0 + i\gamma^0\omega)$ рівняння ФВ (5).

5. Аналіз Баргмана – Вігнера наведених розв'язків

Про ферміонність чи бозонність того або іншого розв'язку певного польового рівняння свідчить (крім пов'язаного з цим розв'язком того чи іншого стаціонарного повного набору операторів) також і аналіз Баргмана – Вігнера представлення групи Пуанкаре $\mathscr{P}$, відносно якого інваріантна та чи інша множина розв'язків розглядуваного рівняння.

Тут використовуємо сучасне математичне означення поняття симетрії (інваріантності) рівнянь математичної фізики (див., наприклад, [8]), а саме. Оператор $\hat{q}$ у $\mathbb{H}^{3,4}$ називаємо оператором перетворення інваріантності рівняння (5), якщо множина $\Phi = \{\phi\} \subset \mathbb{H}^{3,4}$ розв'язків цього рівняння інваріантна відносно перетворення $\hat{q}$, тобто якщо $\hat{q}\Phi = \Phi \subset \mathbb{H}^{3,4}$. Отже, під релятивістською інваріантністю рівняння (5) розуміємо інваріантність множини розв'язків цього рівняння відносно операторів представлення універсальної накриваючої $\mathscr{P} \supset \mathscr{L} = \mathrm{SL}(2,\mathrm{C})$ власної ортохронної групи Пуанкаре $\mathrm{P}_+^\uparrow \supset \mathrm{L}_+^\uparrow = \mathrm{SO}(1,3)$. А аналіз Баргмана – Вігнера явного вигляду операторів Казіміра відповідних представлень цієї групи показує, якою саме (зокрема, Фермі чи Бозе) є розглядувана множина розв'язків.

Нагадаємо, що множина $\Phi^{\mathrm{F}} \equiv \{\phi_{\frac{1}{2}\mathrm{D}}\}$ розв'язків (13) рівняння (5) інваріантна відносно $\mathscr{P}^{\mathrm{F}}$-генераторів D-64 – D-67 у [9], які у термінах первісних генераторів мають вигляд

$$p_0 = -i\gamma_0\omega,\ p_n = \partial_n,\ j_{ln}^{\mathrm{F}} = x_l\partial_n - x_n\partial_l + s_{ln},$$
$$j_{0k}^{\mathrm{F}} = x_0\partial_k + i\gamma_0\left\{x_k\omega + \frac{\partial_k}{2\omega} + \frac{(\vec{s}\times\vec{\partial})_k}{\omega+m}\right\}, \tag{32}$$

і задовольняють відповідним комутаційним співвідношенням для $\mathscr{P}$-генераторів у явно коваріантній формі. Оператори $(p_\mu, j_{\mu\nu}^{\mathrm{F}})$ (32) за допомогою відомого, збіжного у просторі $\mathbb{S}^{3,4} \subset \mathbb{H}^{3,4}$, експоненціального ряду породжують унітарне представлення $\mathscr{P}^{\mathrm{F}}$ групи $\mathscr{P}$, тобто $\mathscr{P}^{\mathrm{F}}$ групу інваріантності множини $\Phi^{\mathrm{F}} \equiv \{\phi_{\frac{1}{2}\mathrm{D}}\}$ розв'язків (11) рівняння (5). У виразах (32) $s_{ln} = \frac{1}{2}\gamma_l\gamma_n$ та $\vec{s}$ дані у формулах (10). Результат обчислення операторів Казіміра для $\mathscr{P}$-генераторів (32) такий:

$$p^\mu p_\mu = m^2,\ W^{\mathrm{F}} = w^\mu w_\mu = m^2\vec{s}^{\,2}$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)m^2\mathrm{I}_4, \tag{33}$$

де вектор Любанського – Паулі $w^{\mu\mathrm{F}} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\nu j_{\rho\sigma}^{\mathrm{F}}$ визначено так, щоб $w_0^{\mathrm{F}} = \vec{s}\cdot\nabla$. Із (33) наочно видно, що множина Φ^{F} розв'язків (13) рівняння (5) дійсно є множиною Фермі-станів $\phi_{\frac{1}{2}\mathrm{D}}$ поля ϕ, тобто станів $s = \frac{1}{2}$-дублета.

У роботах [1, 2] доведена бозонна $\mathscr{P}$–інваріантність рівняння ФВ (5), тобто знайдено представлення $\mathscr{P}^{\mathrm{B}}$ групи $\mathscr{P}$ для s=(1,0)-мультиплету, відносно якого інваріантне рівняння (5) (див. формули (20) у [2]). Саме відносно цього зображення інваріантні множини $\Phi^{\mathrm{B}} \equiv \{\phi_{(1,0)}\}$ розв'язків (26), (29) рівняння ФВ (5) (для визначеності нижче наводимо аналіз Баргмана – Вігнера лише для множини $\{\phi_{(1,0)}\}$ розв'язків (26); аналіз множини розв'язків (29) виконується аналогічно).

Легко переконатись, що визначені за формулами

$$p_0 = -i\gamma_0\omega,\ p_n = \partial_n,\ j_{ln}^{\mathrm{B}} = x_l\partial_n - x_n\partial_l + \underset{\sim}{s}_{ln},$$
$$j_{0k}^{\mathrm{B}} = x_0\partial_k + i\gamma_0\left\{x_k\omega + \frac{\partial_k}{2\omega} + \frac{(\vec{\underset{\sim}{s}}\times\vec{\partial})_k}{\omega+m}\right\}, \qquad (34)$$

генератори ($p_\mu, j_{\mu\nu}^{\mathrm{B}}$) групи $\mathcal{P}$ комутують з оператором рівняння ФВ (5) і задовольняють відповідним комутаційним співвідношенням для $\mathcal{P}$-генераторів у явно коваріантній формі. Нагадаємо, що явний вигляд оператора ω заданий у (5), а спінових операторів $\underset{\sim}{s}_{ln}$ – у (22). Оператори (34) породжують інше, ніж генератори (32), унітарне у просторі $\mathbb{H}^{3,4}$ $\mathcal{P}^{\mathrm{B}}$-представлення групи $\mathcal{P}$ як групу інваріантності множини $\Phi^{\mathrm{B}} \equiv \{\phi_{(1,0)}\}$ Бозе-розв'язків (26) того ж рівняння (5). Для генераторів (34) оператори Казіміра мають вигляд:

$$p^\mu p_\mu = m^2,\ W^{\mathrm{B}} = w^\mu w_\mu = m^2\vec{\underset{\sim}{s}}^2$$
$$= -1(1+1)m^2\begin{vmatrix}\mathrm{I}_3 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}, \qquad (35)$$

причому тепер $w_0^{\mathrm{B}} = \vec{\underset{\sim}{s}}\cdot\nabla$.

Як видно з (35), на множині $\Phi^{\mathrm{B}} \equiv \{\phi_{(1,0)}\}$ розв'язків (26) рівняння ФВ (5) оператори Казіміра (35) для $\mathcal{P}^{\mathrm{B}}$-представлення є діагональними, їх власні значення наочно ілюструють, що множина $\Phi^{\mathrm{B}} \equiv \{\phi_{(1,0)}\}$ розв'язків (26) рівняння ФВ (5) є множиною саме Бозе-станів $\phi_{(1,0)}$ поля ϕ, тобто станів s=(1,0)-мультиплету. Цим завершується доведення методом Баргмана – Вігнера бозонного характеру розв'язків (26) рівняння ФВ (5). Завершено важливий крок у доведенні Фермі – Бозе дуалізму рівняння Дірака у ФВ-представленні.

Всі наведені тут твердження стосовно Фермі – Бозе дуалізму спінорного поля залишаються справедливими і для локального ПД представлення цього поля та рівняння (15). У цьому легко переконатися, виконавши відповідні перетворення ФВ [4]. У якості наочного прикладу див. формули (23), (24) у роботі [2] та процедуру їх отримання з відповідних формул у ФВ-представленні.

6. Про бозонні закони збереження для рівняння Фолді – Вотхойзена

Наявність бозонних симетрій та бозонних розв'язків рівняння ФВ (5) (або рівняння Дірака (15)) автоматично означає і наявність бозонних законів збереження для поля ФВ. Бозонні закони збереження для поля ϕ, особливо їх явний вигляд у термінах квантовомеханічних імпульсно-спінових амплітуд s=(1,0)-мультиплета, є додатковим (до проведеного вище аналіза методом Баргмана – Вігнера) аргументом, який дозволяє фізично наочно інтерпретувати розв'язки (26) як бозонні.

Лагранжевий підхід та основні ферміонні закони збереження для поля ФВ ϕ можна знайти у маловідомих роботах [10, 11]. Автор робіт [10, 11] використав нестандартне формулювання принципу найменшої дії у термінах похідних нескінченого порядку від польових функцій. Зручний (стандартно сформульований) лагранжевий підхід для поля ФВ ϕ побудовано у роботі [12], де на основі теореми Нетер знайдено стандартні та додаткові ферміонні закони збереження. На відміну від запропонованого у роботах [10, 11] лагранжевого підходу до спінорного поля у представленні ФВ ми базуємося на математично коректній формі визначення нелокальних (псевдодиференціальних, типу оператора $\omega = \sqrt{-\Delta + m^2}$ та функцій від нього) операторів. Ми, див. [12], розглядаємо такі оператори як інтегральні, коректно визначені у імпульсному представленні простору Шварца $\mathbb{S}^{3,4}$.

Дійсно, якщо у формулу теореми Нетер з [12]

$$Q = \int d^3x\phi^\dagger(x)iq\phi(x) \qquad (36)$$

підставити бозонні $\mathcal{P}$-генератори q^{B} (34) та бозонні польові функції, тобто бозонні розв'язки $\phi_{(1,0)}$ (26), (29) рівняння (5), то автоматично одержимо бозонні закони збереження для s=(1,0)-мультиплету. Таким чином, список ферміонних законів збереження, одержаний для рівняння ФВ (5) у роботі [12], легко доповнюється відповідним списком бозонних законів збереження, які нескладно представити, наприклад, у термінах квантовомеханічних імпульсно-спінових амплітуд s=(1,0)-мультиплету.

Фермі- та Бозе-представлення групи Пуанкаре $\mathcal{P}$, які на множині $\mathbb{S}^{3,4} \subset \mathbb{H}^{3,4}$ визначаються через генератори q^{F} (32) та q^{B} (34) експоненціальними рядами

$$(a,\omega) \to U^{\mathrm{F,B}}(a,\omega) = \exp(a^{\rho} p_{\rho} + \frac{1}{2}\varpi^{\rho\sigma} j^{\mathrm{F,B}}_{\rho\sigma});$$
$$U^{\mathrm{F,B}}(a,\omega)\Phi^{\mathrm{F,B}} = \Phi^{\mathrm{F,B}}, \tag{37}$$

є індукованими представленнями групи $\mathcal{P}$ (термінологію, див., наприклад, у монографії [13]). Як видно з явних виглядів (32) та (34) генераторів $q^{\mathrm{F,B}} = (p_{\mu}, j^{\mathrm{F,B}}_{\mu\nu})$, ці представлення задаються відповідними $\vec{s}^{\mathrm{F}} \in \mathrm{D}\left(\frac{1}{2}\right) \otimes \mathrm{D}\left(\frac{1}{2}\right)$- та $\vec{s}^{\mathrm{B}} \in \mathrm{D}(1) \otimes \mathrm{D}(0)$-представленнями групи SU(2) в $\mathbb{H}^{3,4}$ (тобто двома різними представленнями малої групи SU(2) для групи $\mathcal{P}$). Причому орбітальні частини

$$p_0 = -i\gamma_0\omega,\ p_n = \partial_n,\ m_{ln} = x_l\partial_n - x_n\partial_l,$$
$$m_{0k} = x_0\partial_k + i\gamma_0\left\{x_k\omega + \frac{\partial_k}{2\omega}\right\}, \tag{38}$$

$\mathcal{P}^{\mathrm{F,B}}$-генераторів (32) та (34) однакові, і вони окремо є перетвореннями інваріантності рівняння ФВ (5). Так само окремо взяті SU(2)-спінові $\vec{s}^{\mathrm{F}}$- та $\vec{s}^{\mathrm{B}}$-генератори є перетвореннями інваріантності цього рівняння. Тому як орбітальні, так і спінові Фермі – Бозе величини зберігаються (що, зокрема, відображає відсутність спін-фліп процесів для вільних полів).

Детальний аналіз повного списку законів збереження, наприклад, у термінах відповідних квантовомеханічних Фермі- та Бозе-амплітуд, виходить за рамки даної короткої статті.

Наявність, наряду з відомими спінорними, також і бозонних законів збереження для поля ФВ ϕ – ще одна важлива ознака Фермі – Бозе дуалізму рівняння ФВ (5) та відповідного йому рівняння Дірака (15).

7. Висновки

Факт наявності Фермі – Бозе дуалізму спінорного поля тут проілюстровано у ФВ представленні (5) рівняння Дірака на мові стаціонарних повних наборів операторів таких фізичних величин (зокрема, 3-координати $\vec{x}$, 3-імпульса $\vec{p}$, спінів $\vec{s}^{\mathrm{F}}, \vec{s}^{\mathrm{B}}$ та ін.), які у ФВ-представленні мають однозначний квантовомеханічний зміст.

Всі одержані тут результати для рівняння Дірака у представленні ФВ справедливі і для стандартного локального представлення цього рівняння (представлення ПД). Зв’язок між представленнями ФВ та ПД добре відомий – це перетворення ФВ [4].

Дослідження полів різного спіну у канонічному представленні ФВ має також і самостійне значення. Побудова нещодавно варіанту квантової електродинаміки [14] у цьому представленні актуалізувала інтерес фізиків-теоретиків до його поглибленого вивчення (див., наприклад, [15] та посилання там).

Основний висновок – Фермі – Бозе дуалізм рівняння Дірака (як у ФВ, так і у ПД представленнях), доведення якого започатковано у [1, 2] знаходженням бозонних симетрій цього рівняння, вдалося доповнити знаходженням у явному вигляді бозонних спіна (1,0) розв’язків розглядуваного рівняння. Зроблено черговий важливий крок у демонстрації Фермі – Бозе дуалізму рівняння Дірака.

Результати одержано на основі використання 64-вимірної розширеної дійсної алгебри Кліфворда – Дірака (ERCD алгебри), нового математичного апарату, введеного в розгляд у [1, 2], як узагальнення стандартної 16-вимірної алгебри Кліффорда – Дірака. Таким чином, тут продовжена демонстрація широких можливостей застосування ERCD алгебри.

Фермі – Бозе дуалізм рівнянь релятивістської квантової теорії поля є основою побудови нового нестандартного підходу до моделі суперсиметрії в теорії елементарних частинок.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Симулик В.М., Кривський І.Ю. Про розширену дійсну алгебру Кліффорда – Дірака та нові фізично важливі симетрії рівняння Дірака з ненульовою масою // Доповіді НАН України. – 2010. – №5. – С. 82–88.
2. Simulik V.M., Krivsky I.Yu. Bosonic symmetries of the Dirac equation // Phys. Lett. A. – 2011. – Vol. 375. – №25. – P. 2479–2483.
3. Okninski A. Supersymmetric content of the Dirac and Duffin-Kemmer-Petiau equations // Int. J. Theor. Phys. – 2011. – Vol. 50. – P. 729–736.
4. Foldy L., Wouthuysen S. On the Dirac theory of spin ½ particles and its non-relativistic limit // Phys. Rev. – 1950. – Vol. 78. – №1. – P. 29–36.
5. Simulik V.M., Krivsky I.Yu. Extended real Clifford – Dirac algebra and bosonic symmetries of the Dirac equation with nonzero mass // arXiv: math-ph, 0908.3106, 21 Aug 2009, 5 p.
6. Krivsky I.Yu., Simulik V.M. Fermi-Bose duality of the Dirac equation and extended real Clifford-Dirac algebra // Cond. Matt. Phys. – 2010. – Vol. 13. – №4. – P. 43101 (1 –15).
7. Эллиот Дж., Добер П. Симметрия в физике. Т.1. – М.: Мир, 1983. – 366 с.
8. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. – М.: Наука, 1983. – 280 с.
9. Foldy L. Synthesis of covariant particle equations // Phys. Rev. – 1956. – Vol. 102. – №2. – P. 568–581.
10. Krech W. Einige Bemerkungen zur Klassischen Theorie des Anschaulichen Wellenbildes fur Kraftefreie Materie mit Spin ½ // Wissenschaftliche Zeitschrift der Friedrich–Schiller Universitat Jena, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Reine. – 1969. – V.18. – №1. – P. 159–163.
11. Krech W. Erhaltungssatze des quantisierten Foldy – Wouthuysen Feldes // Wissenschaftliche Zeitschrift der Friedrich–Schiller Universitat Jena, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Reine. – 1972. – V.21. – №1. – P. 51–54.
12. Кривський І.Ю., Симулик В.М., Тимчик Р.В. Про лагранжевий підхід та динамічні змінні для спінорного поля у канонічному представленні Фолді – Вотхойзена // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Фізика. – 2009. – Вип. 25. – С. 175–186.
13. Thaller B. The Dirac equation. – Berlin: Springer, 1992. – 357 p.
14. Незнамов В.П. К теории взаимодействующих полей в представлении Фолди – Вотхойзена // ЭЧАЯ. – 2006. – Т.37, Выпуск 1. – С. 53–182.
15. Neznamov V.P., Silenko A.J. Foldy – Wouthuysen wave functions and conditions of transformation between Dirac and Foldy – Wouthuysen wave functions // J. Math. Phys. – 2009. – Vol. 50. – P. 122302 (1 – 15).

Стаття надійшла до редакції 23.12.2011

I.Yu. Krivsky[1], T.M. Zajac[2], V.M. Simulik[1], I.L. Lamer[1]
[1]Institute of Electron Physics of NAS of Ukraine, 88000, Uzhhorod, Universitetska Str., 21
[2]Uzhhorod National University, 88000, Uzhhorod, Voloshin Str., 54

ON BOSONIC SOLUTIONS OF THE DIRAC EQUATION FOR THE FREE FIELD

The consideration of Fermi – Bose duality of the Dirac equation with arbitrary mass is continued. The bosonic solutions of this equation in the Foldy – Wouthuysen representation are found. The Bargman – Wigner analysis of these solutions and their comparison with standard fermionic solutions is carried out. It provides the evident illustration of Fermi – Bose duality of the Dirac equation

Key words: The Dirac equation, the spinor field, fermions, bosons, Clifford algebra, supersymmetry.

И.Ю. Кривский[1], Т.М. Заяц[2], В.М. Симулик[1], И.Л. Ламер[1]
[1]Институт электронной физики НАН Украины, 88000, Ужгород, ул. Университетская, 21
[2]Ужгородский национальный университет, 88000, Ужгород, ул. Волошина, 54

О БОЗОННЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА ДЛЯ СВОБОДНОГО ПОЛЯ

Продолжено рассмотрение Ферми – Бозе дуализма уравнения Дирака с произвольной массой. Найдены бозонные решения этого уравнения в представлении Фолди – Вотхойзена. Анализ этих решений методом Баргмана – Вигнера и их сравнение с известными фермионными решениями наглядно иллюстрируют Ферми – Бозе дуализм уравнения Дирака.

Ключевые слова: уравнение Дирака, спинорное поле, фермионы, бозоны, алгебра Клиффорда, суперсимметрия.