

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

І. В. Шапочка, В. І. Шапочка

**ЗБІРНИК
КОНКУРСНИХ ЗАВДАНЬ
З МАТЕМАТИКИ**

Частина 1

Ужгород
"Патент"
2004

ББК 22.1 в10я7

Ш23

УДК 51(07)

Шапочка І. В., Шапочка В. І. Збірник конкурсних завдань з математики. Частина 1. – Ужгород: Патент, 2004. – 116 с. – ISBN 966-7725-87-1.

Збірник містить понад 1400 конкурсних завдань з таких розділів елементарної математики, як алгебра і тригонометрія. Збірник призначений для вступників на спеціальності математичного, інженерно-технічного, економічного факультетів та факультету міжнародних відносин Ужгородського національного університету, а також інших вузів. Може бути використаний вчителями математики та учнями старших класів загальноосвітніх шкіл у навчальному процесі.

Рецензент:

доктор фізико-математичних наук, професор *П. М. Гудивок*,

Зміст

Передмова	4
§ 1. Дійсні числа та властивості дій над ними. Відношення, пропорції, відсотки	5
§ 2. Натуральні числа та їх подільність	13
§ 3. Тотожні перетворення алгебраїчних виразів	20
§ 4. Тригонометричні функції та їх властивості	27
§ 5. Перетворення тригонометричних виразів	35
§ 6. Перетворення виразів, що містять обернені тригонометричні функції	40
§ 7. Показникова та логарифмічна функції	44
§ 8. Алгебраїчні раціональні рівняння	51
§ 9. Ірраціональні рівняння	60
§ 10. Показникові рівняння	67
§ 11. Логарифмічні рівняння	72
§ 12. Тригонометричні рівняння	77
§ 13. Рівняння з модулями	83
§ 14. Системи рівнянь	88
§ 15. Рівняння та системи рівнянь з параметром	101
Зразки екзаменаційних білетів з математики	109
Література	114

Передмова

Останнім часом у вузах України, зокрема в Ужгородському національному університеті, вступні випробування на більшість спеціальностей проводяться у формі письмового тестування. Для автоматизації перевірки знань абітурієнтів приймальними комісіями цих вузів створюються бази екзаменаційних завдань. Важливою особливістю кожного з цих завдань є те, що відповіддю для нього є раціональне число, десятковий запис якого не перевищує певне фіксоване число знаків. Це спонукало авторів розробити збірник конкурсних завдань з математики, які б водночас задовольняли цю вимогу і охоплювали всі розділи елементарної математики, передбачені навчальною програмою загальноосвітньої школи.

В першу частину збірника ввійшли задачі з таких підрозділів елементарної математики, як дійсні числа, відношення, пропорції, відсотки, натуральні числа та їх подільність, тотожні перетворення алгебраїчних виразів, тригонометричні функції, обернені тригонометричні функції, перетворення тригонометричних виразів, показникова та логарифмічна функції, алгебраїчні раціональні та ірраціональні рівняння, показникові та логарифмічні рівняння, тригонометричні рівняння, рівняння з модулями, системи рівнянь, рівняння з параметром. Ці завдання розподілені в п'ятнадцяти параграфах, кожен з яких розбитий на три частини (варіанти А, Б, В) відповідно до ступеня складності завдань. У свою чергу кожен із варіантів А, Б, В поділений на три групи задач, що відповідають трьом рівням складності. Такий, на перший погляд, складний розподіл завдань зумовлений необхідністю створення екзаменаційних білетів різного ступеня складності в залежності від конкурсної ситуації на той чи інший факультет університету. З іншого боку методичне розв'язування задач із варіантів А і Б допоможе впоратися із завданнями з більш складного варіанта В.

Насамкінець, більшість завдань цього збірника пов'язана з необхідністю розв'язувати різного роду рівняння. Звертаємо увагу абітурієнта на те, коли не сказано іншого, то потрібно шукати дійсні розв'язки даних рівнянь.

Автори

**§ 1. Дійсні числа та властивості дій над ними.
Відношення, пропорції, відсотки**

Варіант А

Група 1

1. Обчислити $\frac{(2,4 - \frac{3}{4}) \cdot 0,6}{(\frac{3}{8} + 0,25) \cdot \frac{2}{5}}$.
2. Обчислити $(4\frac{1}{12} - 3,125 + 0,025) \cdot 1\frac{1}{59}$.
3. Обчислити $\frac{(3,25 - \frac{3}{4}) \cdot 6,25}{(2 - 0,75) : \frac{4}{5}}$.
4. Обчислити $\frac{6}{7} + 2\frac{43}{105} : (6\frac{1}{15} - 1,2 + 12)$.
5. Обчислити $\frac{(5,5 - 3\frac{3}{4}) : (\frac{1}{5})^{-1} + \frac{1}{3}}{(2 - \frac{4}{5}) \cdot 1\frac{3}{4}}$.
6. Обчислити $2,375 : 0,1 \cdot \frac{10}{19} + 3,95 + \frac{11}{20}$.
7. Обчислити $1,25 - (\frac{1}{3} + 0,5 + 0,25) : (\frac{2}{3} + \frac{5}{12})$.
8. Обчислити $\frac{2}{45} + 32,4 - 7,5 \cdot 2\frac{2}{45} : 6\frac{3}{11}$.
9. Обчислити $0,3 + 1\frac{17}{25} + 12\frac{3}{50} : 1,2 - 1,03$.
10. Обчислити $52,3 - \frac{11}{45} + 2,7 \cdot 11\frac{1}{9} - 4\frac{1}{9} : 0,74$.

Група 2

11. Обчислити $\frac{(-0,2)^2 + 0,96}{4,5} + (-1,3) \cdot \frac{2}{9} : (\frac{10}{13})^{-1}$.
12. Обчислити $(\frac{0,16}{8} + \frac{4,14}{3}) : (2,04 + \frac{3,42}{4,5}) + 0,458$.
13. Обчислити $9,86 + 19\frac{3}{5} \cdot 7,02 - 9,6 \cdot 7\frac{1}{50} - 0,675 : 1\frac{1}{8}$.
14. Обчислити $(9\frac{5}{6} - 7\frac{7}{8}) \cdot 3,75 \cdot (0,95 - \frac{13}{18}) \cdot 28\frac{4}{41}$.
15. Обчислити $24,57 \cdot \frac{2}{7} + (-15)^3 : \frac{(-25)^2}{10} - 0,02$.
16. Обчислити $31,5 : 1,4 - (3,5 \cdot 4\frac{2}{5} - 3,4 \cdot 3\frac{1}{2}) \cdot 3\frac{1}{2}$.
17. Обчислити $(4,02 : 1\frac{1}{2} - 3,4 \cdot \frac{5}{8}) \cdot 4 + 2,4 \cdot 0,175$.
18. Обчислити $(1\frac{7}{24} + \frac{13}{18}) : 1\frac{11}{18} - 13,4209 : 13,03$.

19. Обчислити $\frac{(4\frac{1}{4} - 1,75) \cdot 6,25}{(4 - 2\frac{3}{4}) : \frac{4}{5}} - \frac{(75,5 - 73\frac{3}{4}) : \frac{5}{6}}{(2 - \frac{4}{5}) \cdot 1\frac{3}{4}}$.

20. Обчислити $\left(\frac{3,75 + 2\frac{1}{2}}{2\frac{1}{3} - 1,875} - \frac{2\frac{3}{4} + 1,5}{2,75 - 1\frac{1}{2}} \right) : \frac{10}{11}$.

Група 3

21. Обчислити $\frac{(15\frac{7}{12} - 18\frac{4}{9}) \cdot \frac{36}{103}}{(21\frac{5}{9} - 23\frac{1}{6}) : 29}$.

22. Обчислити $\frac{0,625 \cdot 15 \cdot 0,8 : (-\frac{3}{4})}{(-21,35 + 19,75) \cdot (-\frac{5}{8})}$.

23. Обчислити $\frac{(5\frac{3}{5} - 8,8) \cdot 5\frac{5}{6} \cdot (-\frac{7}{3})^{-1}}{(4\frac{2}{3} - 4\frac{1}{6}) \cdot ((-2)^{-1})^{-3}}$.

24. Обчислити $\frac{(7\frac{4}{15} - 6\frac{1}{6}) \cdot (-3\frac{9}{13})^{-1}}{(2\frac{2}{3} + 2,75) \cdot 6\frac{2}{7}} \cdot 34\frac{2}{7}$.

25. Обчислити $\frac{2\frac{2}{3} \cdot (4,5 : \frac{3}{5} - 6,75)}{(3\frac{1}{3} \cdot 0,3 + 5\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}) : \frac{2}{3}}$.

26. Обчислити $\frac{0,1 : \frac{3}{38}}{2\frac{109}{120} - 5\frac{4}{7} : \frac{104}{7}} + \frac{(3,75 + 19\frac{1}{6}) \cdot 1\frac{1}{5}}{(2,3 - \frac{1}{2}) \cdot (1,8)^{-1}}$.

27. Обчислити $\frac{(2\frac{3}{20} + 1\frac{5}{16}) : 27,7 + 5\frac{1}{7} \cdot 3,85 - 14\frac{3}{20}}{4\frac{1}{40} + 1,75}$.

28. Обчислити $\frac{(7\frac{8}{9} - 5\frac{11}{12}) \cdot \frac{18}{71} - 7\frac{5}{6} : 15\frac{2}{3}}{(1,75 : \frac{2}{3} - 1,75 : 1\frac{1}{8}) : \frac{7}{12}}$.

29. Обчислити $\frac{(17\frac{1}{3} : 19\frac{1}{2} + 1\frac{1}{12}) \cdot 3 - 3\frac{7}{12}}{(1,25 - 1\frac{1}{8}) \cdot 2\frac{1}{3}}$.

30. Обчислити $\frac{(78,54 : 25,5 - 0,1 : \frac{3}{38}) \cdot \frac{25}{68}}{2,4 : 0,8 - 2\frac{2}{3}}$.

Варіант Б

Група 1

1. Проаналізувавши нерівності:

1) $(2\frac{2}{7} + 3\frac{3}{5}) : 0,5 > (2\frac{3}{5} + 3\frac{2}{7}) \cdot 0,5;$

2) $(4 - 2,4) : (3 - 1\frac{2}{3}) < (7\frac{4}{5} - 6\frac{1}{5}) \cdot (3 - 1\frac{2}{3}),$

вказати вірне з наступних тверджень:

- 1) вірні обидві нерівності; 2) вірна лише перша нерівність;
3) вірна лише друга нерівність; 4) обидві нерівності не вірні.

2. Проаналізувавши нерівності:

- 1) $(8\frac{7}{8} - 5, 6) : 4, 6 - 2 : \frac{1}{4} > (8\frac{7}{8} - 5\frac{3}{5}) : 4\frac{3}{5} - 2 \cdot \frac{1}{4}$;
2) $(4\frac{3}{4} : \frac{4}{5} - 1, 4) \cdot 0, 3 + 4, 7(2 - 1\frac{4}{5}) < (4, 75 : 0, 8 - 1\frac{2}{5}) \cdot 1, 3 + 4, 7 \cdot (2 - 1, 8)$,

вказати вірне з наступних тверджень:

- 1) вірні обидві нерівності; 2) вірна лише перша нерівність;
3) вірна лише друга нерівність; 4) обидві нерівності не вірні.

3. Проаналізувавши нерівності:

- 1) $(12\frac{5}{7} - 5\frac{1}{6}) : 6\frac{1}{13} + 2, 1 > (12\frac{5}{7} - 5\frac{5}{8}) : 6\frac{1}{13} + 2, 1$;
2) $(7\frac{3}{5} + 4\frac{1}{6}) : 5\frac{2}{3} - 3, 4 > (7\frac{1}{6} + 5\frac{3}{5}) : 4\frac{6}{7} - 2, 9$,

вказати вірне з наступних тверджень:

- 1) вірні обидві нерівності; 2) вірна лише перша нерівність;
3) вірна лише друга нерівність; 4) обидві нерівності не вірні.

4. Проаналізувавши нерівності:

- 1) $(12\frac{13}{18} - 4\frac{2}{9}) : (4 + 0, 5) < (6, 375 + 2, 125) : (2, 1 + 2, 4)^2$;
2) $(2\frac{1}{3} + \frac{7}{5}) : 0, 8 < 2\frac{1}{3} : \frac{4}{5} + \frac{7}{5} : \frac{4}{5}$,

вказати вірне з наступних тверджень:

- 1) вірні обидві нерівності; 2) вірна лише перша нерівність;
3) вірна лише друга нерівність; 4) обидві нерівності не вірні.

5. Проаналізувавши нерівності:

- 1) $\frac{25}{7} \cdot (3, 75 - \frac{5}{6}) \cdot 0, 28 > (2\frac{3}{4} - 1\frac{1}{2}) \cdot (3, 75 - \frac{5}{6}) : 1, 5$;
2) $2\frac{1}{4} + \frac{19}{21} \cdot \frac{13}{17} - 3, 1 > 2, 25 + \frac{19}{17} \cdot \frac{13}{22} - 3, 1$,

вказати вірне з наступних тверджень:

- 1) вірні обидві нерівності; 2) вірна лише перша нерівність;
3) вірна лише друга нерівність; 4) обидві нерівності не вірні.

6. Проаналізувавши нерівності:

- 1) $(4, 6 - 2\frac{1}{4}) : 1, 72 < (4, 6 - 2, 25) : (1, 72)^3$;
2) $(9\frac{3}{8} - 5\frac{5}{6}) : 0, 72 + 1, 1 < (9\frac{3}{8} - 5\frac{5}{6}) : (0, 72)^3 + 1, 1$,

вказати вірне з наступних тверджень:

- 1) вірні обидві нерівності; 2) вірна лише перша нерівність;
3) вірна лише друга нерівність; 4) обидві нерівності не вірні.

7. Проаналізувавши нерівності:

1) $(0,35 + \frac{3}{5}) : 0,42 < 0,35 : 0,42 + 0,6 : 0,42$;

2) $(0,75 + \frac{6}{5}) \cdot 0,32 < (0,75 + 1,2) \cdot 0,4 \cdot \frac{4}{5}$,

вказати вірне з наступних тверджень:

- 1) вірні обидві нерівності; 2) вірна лише перша нерівність;
3) вірна лише друга нерівність; 4) обидві нерівності не вірні.

8. Проаналізувавши нерівності:

1) $(7,3 - 4\frac{1}{5}) \cdot 0,6 - 1,8 > 0,19 \cdot (7,3 - 4,2) \cdot 3 - 1,8$;

2) $0,16 + \frac{7}{9} - 3,5 \cdot 0,75 < 0,16 + \frac{7}{9} - 3\frac{1}{2} \cdot 0,7$,

вказати вірне з наступних тверджень:

- 1) вірні обидві нерівності; 2) вірна лише перша нерівність;
3) вірна лише друга нерівність; 4) обидві нерівності не вірні.

9. Проаналізувавши нерівності:

1) $(16,2 - 7,3) : 3,1 < 16\frac{1}{5} : 3,1 - 7\frac{3}{10} : 3,2$;

2) $(7,7 - 8,3) \cdot 0,51 > 7,7 \cdot 0,52 - 8,3 \cdot 0,51$,

вказати вірне з наступних тверджень:

- 1) вірні обидві нерівності; 2) вірна лише перша нерівність;
3) вірна лише друга нерівність; 4) обидві нерівності не вірні.

10. Проаналізувавши нерівності:

1) $(1 - \frac{2}{5}) \cdot (2 - 1\frac{1}{2})^2 < (-1 - \frac{4}{7}) \cdot (-2 + 1\frac{1}{2})^2$;

2) $(1 - \frac{1}{4}) \cdot (1 - \frac{7}{11})^2 < (1 - \frac{1}{4})^2 \cdot (1 - \frac{7}{11})^2$,

вказати вірне з наступних тверджень:

- 1) вірні обидві нерівності; 2) вірна лише перша нерівність;
3) вірна лише друга нерівність; 4) обидві нерівності не вірні.

Група 2

11. Відстань від автовокзалу до головного корпусу національного університету становить 6,4 км, а на карті м. Ужгород — 32 см. Знайти масштаб цієї карти і записати десятковим дробом значення добутку цього відношення на 10^5 .

12. Масштаб карти дорівнює 1 : 500 000. Яку довжину в кілометрах має дорога між двома населеними пунктами, якщо довжина її

проекції на карті становить 6,4 см?

13. На плані, масштаб якого 1 : 10 000, зображено ділянку землі прямокутної форми. Обчислити площу цієї ділянки, виражену в гектарах, якщо її розміри на карті становлять: довжина 9,5 см, а ширина 6,4 см.

14. На плані, масштаб якого 1 : 10 000, зображено ділянку землі прямокутної форми, довжина і ширина якої на місцевості відповідно дорівнюють 400 м і 300 м. Знайти у сантиметрах довжину діагоналі прямокутника, зображеного на карті.

15. Знайти таке значення x , для якого пропорція $4 : (3x - 6) = 1 : (x^2 - 3x + 2)$ є вірною.

16. Обчислити суму таких значень x , для яких пропорція $1 : (x - 2) = (6x + 1) : (x^3 - 8)$ є вірною.

17. Знайти таке значення x , для якого пропорція $1 : (x - 3) = 27 : (x^3 - 27)$ є вірною.

18. Знайти таке значення x , для якого пропорція $(x^4 - 1) : (x^2 - 1) = (x^2 + 4x + 3) : (x + 1)$ є вірною.

19. Знайти значення у відсотках наведених відношень і записати найбільше з них: $2,5 : 0,5$; $\frac{2}{5} : \frac{8}{5}$; $\frac{4}{7} : \frac{16}{7}$; $\frac{3}{10} : 0,6$.

20. Знайти значення у відсотках наведених відношень і записати найменше з них: $4\frac{1}{2} : 9$; $0,6 : 3$; $0,05 : 0,5$; $0,5 : 0,05$.

Група 3

21. Мотузку довжиною 7,8 м розрізали на три частини, пропорційно числам 3, 4 і 6. Знайти у дециметрах довжину найбільшої частини.

22. Сума трьох чисел дорівнює 100. Відношення другого до першого дорівнює 5, третього до першого дорівнює $\frac{2}{5}$. Знайти третє число.

23. Площі трьох ділянок лісу відносяться, як $2,25 : 1,5 : 1\frac{5}{6}$, причому площа третьої ділянки на 136 га менша від площі першої. Обчислити площу другої ділянки.

24. Картоплю засипали у три овочесховища у відношенні $1,3 : 2\frac{1}{2} : 1\frac{1}{5}$, причому у друге овочесховище на 3,2 т більше, ніж у перше. Скільки тон картоплі засипали у третє овочесховище?

25. Число 18,3 представити у вигляді суми чотирьох чисел, які обернено пропорційні числам 1, 2, 3 і 5. Знайти найменше з цих чисел.

26. Число $86,7$ представити у вигляді суми чотирьох чисел, які обернено пропорційні числам $1, 3, 5$ і 6 . Знайти найбільше з цих чисел.

27. Чотири насоси однакової потужності заповнюють басейн водою за 6 год 15 хв. За який час в годинах заповнять басейн водою п'ять таких насосів?

28. Шість робітників виконують роботу за 8 год 10 хв. За який час цю роботу виконають сім робітників?

29. Середнє арифметичне семи перших чисел послідовності дійсних чисел дорівнює 5 , а середнє арифметичне наступних трьох чисел дорівнює 15 . Чому дорівнює середнє арифметичне всіх десяти чисел?

30. Середнє арифметичне двадцяти дійсних чисел дорівнює 5 , а середнє арифметичне перших дванадцяти з них дорівнює 3 . Чому дорівнює середнє арифметичне решти восьми чисел?

Варіант В

Група 1

1. Знайти $21\frac{1}{3}\%$ від $11\frac{5}{8}$.

2. Знайти $3\frac{1}{17}\%$ від $18,7$.

3. Знайти число, $14\frac{2}{7}\%$ якого дорівнює $1\frac{9}{14}$.

4. Знайти число, $105\frac{5}{9}\%$ якого дорівнює 190 .

5. Перше число становить 40% другого. Скільки відсотків становить друге число від першого.

6. Перше число становить 25% другого, а друге 40% — третього. Скільки відсотків становить третє число від першого?

7. Рис містить 75% крохмалу, а ячмінь — 60% . Скільки потрібно взяти ячменю, щоб одержати таку кількість кротових, яку одержують із 150 кг рису?

8. Сплав, що складається з срібла і міді, важить 16 кг, причому вага срібла складає $14\frac{2}{7}\%$ ваги міді в ньому. Скільки срібла в даному сплаві?

9. Сума трьох чисел дорівнює 104 . Перше число дорівнює 60% третього, а друге — 80% першого. Знайти найменше серед цих чисел.

10. Тупий кут розділили на три кути. Один із утворених кутів становить 40% тупого, другий 30% від першого, а третій дорівнює 72° . Знайти тупий кут.

Група 2

11. Свіжі гриби містять 90% води, а сушені — 20%. Скільки грам сушених грибів вийде з 5 кг свіжих?

12. Свіжа трава має вологість 80%, а сухе сіно — 15%. Скільки тон сіна одержують з 5,1 т трави?

13. Скільки грамів 3% розчину солі треба взяти, щоб при змішуванні з 8% розчином солі, одержати 520 г 5% розчину солі?

14. Скільки грамів 50% розчину кислоти змішали з 20% розчином кислоти, якщо в результаті одержали 450 г 30% розчину кислоти?

15. Протягом року завод двічі збільшував випуск продукції на одне і те ж саме число відсотків. Знайти це число, якщо відомо, що на початку року завод випускав щомісячно 600 виробів, а в кінці року почав випускати щомісячно 726 виробів.

16. Після двох послідовних понижень цін кожного разу на 5% ціна товару становила 180,5 грн. Якою була початкова ціна товару?

17. На ощадну книжку вкладник поклав 250 грн. Через два роки на книжці виявилось 291,6 грн. Скільки відсотків нараховував вкладнику ощадний банк щороку, якщо щорічний відсоток нарахування був один і той же?

18. Вкладник поклав до банку 500 грн. Через два роки на його рахунку виявилось 594 грн. Скільки відсотків становила банківська ставка першого року, якщо протягом другого року вона була збільшена в 1,25 рази?

19. Вкладник поклав до банку 1000 грн. Через два роки на його рахунку виявилось 1232 грн. Скільки відсотків становила банківська ставка першого року, якщо у другому році вона була зменшена в 1,2 рази?

20. Вкладник поклав до банку певну суму на два роки під 10% річних. У кінці другого року на його рахунку виявилось на 126 грн більше, ніж він поклав. Скільки гривень поклав до банку вкладник?

Група 3

21. Змішали три літра 30% розчину спирту з п'ятьма літрами 20% розчину спирту. Знайти вміст у відсотках спирту в утвореному розчині.

22. Бригада косарів за перший день скосила половину луки і ще 2 га, за другий день — 25% частини, що залишилася, а за третій день — решту 6 га. Знайти площу луки.

23. Зібрали 100 кг грибів. Виявилось, що їх вологість становила 99%. Після того, як гриби підсушили, їх вологість зменшилась до 98%. Якою стала маса цих грибів після підсушування?

24. Щойно добуто кам'яне вугілля містить 1% води, а після десяти днів перебування його на повітрі вже містить 12% води. На скільки відсотків збільшилась вага вугілля після того, як пролежало на повітрі десять днів.

25. Є два сплави міді. Процент міді у першому сплаві на 10 менший, ніж у другому. Після того, як ці два сплави сплавили разом, одержали новий сплав, що містить 36% міді. Визначити відсоток міді у першому сплаві, якщо у першому сплаві було 6 кг міді, а в другому — 12 кг.

26. Морська вода містить 5% солі. Скільки тонн прісної води потрібно додати до 3 т морської води, щоб одержати воду, вміст солі в якій становить 1,5%?

27. Робочий тиждень швачки зменшився з 42 год до 40 год. На скільки відсотків підвищилась продуктивність її праці, якщо при тих же тарифах на пошиту нею продукцію, заробітна плата виросла на 5%?

28. За 1 кг одного продукту і 10 кг другого заплачено 20 грн. Якщо перший продукт подорожчає на 15%, а другий подешевшає на 25%, то за ту саму кількість товару буде заплачено 18,2 грн. Яка вартість покупки 1 кг першого продукту і 5 кг другого?

29. Дві ювілейні монети загальною вартістю 450 грн було продано з прибутком 40%. Яка була вартість дорожчої монети до її продажу, якщо від першої монети одержано 25% прибутку, а від другої — 50%?

30. На скільки відсотків потрібно збільшити діагональ квадрата, щоб його площа збільшилась на 96%?

§ 2. Натуральні числа та їх подільність

Варіант А

Група 1

1. Скільки множників 2 є в розкладі на прості множники добутку перших десяти натуральних чисел?

2. Знайти найменше натуральне п'ятицифрове число вигляду $74X1Y$, яке ділиться на 2, замінивши X і Y цифрами.

3. Знайти найбільше натуральне п'ятицифрове число вигляду $74X1Y$, яке ділиться на 2, замінивши X і Y цифрами.

4. Чи вірно, що число, яке ділиться на 15 і 21, ділиться також на добуток $15 \cdot 21$?

1) Так. 2) Ні.

5. Яке найбільше із натуральних чисел менших 2002 при діленні на 11 дає остачу 8.

6. Знайти найменше спільне кратне чисел 36, 57, 95.

7. Скільки існує натуральних чисел менших числа $2 \cdot 3^2$ і взаємно простих із ним?

8. Обчислити суму найбільшого спільного дільника і найменшого спільного кратного чисел 243 та 297.

9. Розв'язати рівняння $\frac{2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{x} = 2 \cdot 3 \cdot 11$.

10. Використовуючи цифри 1, 2, 8, 9 по одному разу, скласти два двоцифрових числа, добуток яких буде найбільшим. Відповідь записати у вигляді послідовності цифр, перші дві якої є цифри більшого із знайдених чисел, а дві інші — меншого.

Група 2

11. Знайти найменше серед чисел, утворених наступним чином: до числа 15 зліва і справа дописано по цифрі так, що одержане число ділиться на 15.

12. Якому із чисел 12, 18, 24, 30 не є кратним число $9^{15} - 3^{28}$?

13. Яку найбільшу кількість однакових подарункових наборів можна виготовити з 84 пряників, 210 цукерок та 126 апельсинів?

14. Якої найменшої довжини слід взяти дошку, щоб її можна було розрізати на рівні бруски завдовжки по 20 см або по 24 см, або 3 дм без втрати матеріалу? Відповідь записати в метрах.

15. Аркуш паперу, що має форму прямокутника завдовжки 7,5 дм і завширшки 0,5 м, розрізали без відходів на найбільші з усіх можливих рівних квадратів. Скільки вирізано таких квадратів?

16. Мала і велика шестерні будильника, що перебувають у зчепленні, мають відповідно 24 і 54 зубців. Яке найменше число обертів повинна зробити мала шестерня, щоб обидві шестерні повернулись у своє початкове положення?

17. На столі лежать книжки, які потрібно спакувати. Якщо їх зв'язувати по 4 або по 5, або по 6 штук у пачку, то кожен раз залишається одна книжка. А якщо зв'язати по 7 книжок в пачку, то зайвих книжок не залишиться. Яке найменше число книжок може бути на столі?

18. Три пароплави заходять в Очаків після кожного рейсу і відразу ж виходять у наступний рейс. Перший пароплав здійснює свій рейс за 5 діб, другий — за $6\frac{1}{4}$ доби, а третій — за $3\frac{3}{4}$ доби. Пароплави вийшли в море одночасно. Через скільки діб найраніше, всі вони зустрінуться в Очакові?

19. На станції Жмеринка стоять три товарні потяги, перший вантажністю 2400 т, другий — 1600 т, а третій — 680 т. Яка мінімальна кількість вагонів може бути в трьох потягах, якщо всі вагони мають однакову вантажність, яка є цілим числом?

20. На кожному поверсі будь-якого під'їзду восьмиповерхового будинку знаходиться однакове число квартир. В одному з під'їздів цього будинку на першому поверсі знаходяться квартири з номерами від №97 по №102. В якому під'їзді знаходиться квартира №178?

Група 3

21. Із чисел 15, 29, 31, 39, 37, 47 вибрати найменше, яке при діленні на 4 і 4^2 дає ненульові частки і максимальну суму остач.

22. Із чисел 24, 29, 49, 69, 124 вибрати найменше, яке при діленні на 5 і 5^2 дає ненульові частки і максимальну суму остач.

23. При якому найменшому натуральному n дріб $\frac{2n-3}{3n+10}$ можна скоротити?

24. При якому найменшому натуральному n дріб $\frac{2n-7}{3n+8}$ можна скоротити?

25. Знайти найбільше значення добутку pq , де p і q — прості числа, які задовольняють рівність $p^2 - 2q^2 = 1$.

26. Нехай a — найбільше двоцифрове натуральне число, яке можна записати у вигляді суми чотирьох послідовних натуральних чисел, а b — найменше з цих чисел. Обчислити $a + 0,01b$.

27. Частка при діленні натурального числа A на натуральне число B дорівнює 4, а остача — 30. Якщо додати ділене, дільник, частку і остачу, то в результаті одержимо число 574. Знайти число $1000A + B$.

28. Число A є добутком трьох послідовних натуральних чисел. Сума часток, отриманих при діленні цього числа на кожен із трьох множників, дорівнює 74. Знайти це число.

29. Двоцифрове число XU , поділене на суму своїх цифр, дає в частці 4, а в остачі — 3. Якщо цифри цього числа переставити місцями, то одержимо число на 5 більше, ніж в 6 раз збільшена сума його цифр. Знайти число XU .

30. Знайти суму трьох цілих чисел, які задовольняють наступні умови: перше число, поділене на друге, дає в частці 4, а в остачі 12; друге число, поділене на третє, дає в частці 5 і в остачі 5; і нарешті, перше число, поділене на третє, дає в частці 21, а в остачі 12.

Варіант Б

Група 1

1. Знайти найменше натуральне п'ятицифрове число вигляду $73X1Y$, яке ділиться на 3, замінивши X і Y цифрами.

2. Знайти найбільше натуральне п'ятицифрове число вигляду $73X1Y$, яке ділиться на 3, замінивши X і Y цифрами.

3. Знайти найменше натуральне п'ятицифрове число вигляду $74X1Y$, яке ділиться на 6, замінивши X і Y цифрами.

4. Знайти найбільше натуральне п'ятицифрове число вигляду $74X1Y$, яке ділиться на 6, замінивши X і Y цифрами.

5. Якому із чисел 12, 18, 24, 30 кратне число $27^5 - 9^6$?

6. Знайти найменше спільне кратне всіх одноцифрових натуральних чисел.

7. Знайти найменше натуральне число, що ділиться на 7 і яке при діленні на 2, 3, 4, 5, 6 дає остачу 1.

8. При діленні натурального числа на 2 одержимо остачу 1, а при діленні на 3 — остачу 2. Яку остачу дає це число при діленні на 6?

9. Знайти найменше натуральне число, яке задовольняє умову: сума цифр цього числа разом з сумою цифр наступного за ним числа кратна 6.

10. Знайти найменше шестицифрове число, яке ділиться на 321.

Група 2

11. Було 7 аркушів паперу. Деякі з них розрізали на 7 шматків кожен. Потім деякі з утворених шматків знову розрізали на 7 частин. Яке з наведених чисел шматків можна одержати в результаті такого розрізання: 1) 2002; 2) 2003; 3) 2004; 4) 2005; 5) 2006?

12. При якому найменшому натуральному n остача при діленні числа $4n + 7$ на $2n + 1$ буде найбільшою?

13. На кожному поверсі будь-якого під'їзду восьмиповерхового будинку знаходиться однакове число квартир. В одному з під'їздів цього будинку на першому поверсі знаходяться квартири з номерами від №97 по №102. На якому поверсі знаходиться квартира №178?

14. Із нижче наведених чисел вибрати те, що при діленні на 4^3 дає ненульову частку і максимальну остачу:

1) $2^{13} + 3$; 2) $2^{15} - 1$; 3) $7 + 3 \cdot 4^6$; 4) $4^6 + 3$; 5) $4^{12} + 2^3 + 3$.

Вказати правильний варіант відповіді.

15. Із нижче наведених чисел вибрати найменше, що при діленні на 9^4 дає ненульову частку і мінімальну остачу:

1) $3^{13} + 3$; 2) $3^{13} - 1$; 3) $7 + 5 \cdot 9^6$; 4) $9^6 + 2$; 5) $9^8 - 3^5 - 2$.

Вказати правильний варіант відповіді.

16. Знайти найменше натуральне число n таке, що число $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ ділиться на 990.

17. Знайти найменше натуральне число n таке, що число $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ закінчується шістьма нулями.

18. Нехай p і q — різні прості числа. Скільки дільників у числа p^2q^3 ?

19. Якою цифрою закінчується число 77^{77} ?

20. Якою цифрою закінчується число 88^{88} ?

Група 3

21. Чотирицифрове число вигляду $aabb$ є повним квадратом. Знайти це число.

22. Якою цифрою закінчується число $45^n + 33^{4n-1} + 22^{8n-1}$, де n — натуральне число?

23. Знайти найбільший спільний дільник чисел $2n + 13$ та $n + 7$, де n — натуральне число.

24. Знайти найбільший спільний дільник чисел $12n + 1$ та $30n + 2$, де n — натуральне число.

25. Нехай x і y — натуральні числа, що задовольняють рівняння $x^3 - y^3 = 127$. Обчислити суму $x + y$.

26. Знайти значення суми $x + y$, де x і y — натуральні числа, що задовольняють рівняння $x^4 - y^4 = 671$.

27. Для якого з наведених рівнянь вірне твердження, що не знайдеться пара цілих чисел x і y , яка є його розв'язком:

- 1) $2x - 11y = 3$; 2) $2x + 3y = 55$;
3) $28y - 20x = 14$; 4) $17x + 13y = 31$?

28. Знайти найменше чотирицифрове число вигляду $abca$, яке дорівнює $(5c + 1)^2$.

29. На дошці записано п'ять цілих чисел. Додаючи їх попарно, одержали наступні десять чисел: 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15. Обчислити суму чисел, записаних на дошці.

30. На дошці записано п'ять цілих чисел. Додаючи їх попарно, одержали наступні десять чисел: 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15. Знайти найменше серед чисел, записаних на дошці.

Варіант В

Група 1

1. Знайти найменше натуральне число, яке при множенні на 2 стає квадратом деякого натурального числа, а після множення на 3 — кубом натурального числа.

2. Найменше спільне кратне натуральних чисел a і b ($a > b$) дорівнює 90, а їх найбільший спільний дільник дорівнює 6. Знайти a , якщо відомо, що a не ділиться на b .

3. При якому найменшому натуральному значенні n , число $2n^2 + 5n - 3$ при діленні на $n + 4$ дає найбільшу остачу?

4. Якому з чисел 5, 6, 7, 8 не є кратним число $8^6 - 4^7$?
5. Знайти найменше натуральне число, яке при діленні на 4, 5, 6 дає в остачі відповідно 3, 4, 5.
6. Найбільший спільний дільник двох чисел дорівнює 27, а їх найменше спільне кратне — 2673. Знайти одне з цих чисел, якщо друге з них дорівнює 297.
7. Нехай трицифрові числа a і b ($a < b$) такі, що їх найбільший спільний дільник дорівнює 13, а їх найменше спільне кратне — 1989. Обчислити $1000a + b$.
8. Обчислити $\sqrt{\sqrt{17} - \sqrt{1 - 8\sqrt{33} - 8\sqrt{17}}}$.
9. Нехай n — довільне ціле число. Квадрат якого із нижче наведених чисел дорівнює $(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 1$:
 1) $n^2 + n + 1$; 2) $n^2 - n + 1$; 3) $n^2 + n - 1$; 4) $n^2 - n - 1$?
 Вкажіть правильний варіант відповіді.
10. Знайти найменше натуральне число відмінне від 1, яке при діленні на 24, 45 і 56 дає остачу 1.

Група 2

11. Знайти найбільше трицифрове число, найбільший спільний дільник якого з числом 540 дорівнює 36.
12. Знайти суму всіх цілих чисел x , для яких число $|6x^2 - 11x + 3|$ є простим.
13. Знайти суму всіх цілих чисел x , для яких число $|4x^2 + 4x - 3|$ є простим.
14. Двоцифрове число дорівнює сумі числа його десятків та квадрата числа його одиниць. Знайти це число.
15. До натурального числа справа дописали 6 і воно збільшилось у 13 разів. Яке це число?
16. У магазині було 6 ящиків з яблуками вагою 15 кг, 16 кг, 18 кг, 19 кг, 20 кг і 31 кг. Дві фірми взяли 5 ящиків, причому одна з них взяла ящики по сукупній вазі в два рази більшій, ніж інша. Ящик з якою вагою залишився в магазині?
17. Обчислити суму всіх двоцифрових натуральних чисел вигляду XU таких, сума двоцифрових чисел XU і UX є квадратом натурального числа.

18. Відомо, що найбільший спільний дільник чисел a і b на 1 більший за 20% числа b , а 30% числа b на 3 більше за 20% числа a . Знайти найбільший спільний дільник чисел a і b , якщо їх найменше спільне кратне дорівнює 60.

19. 10% найменшого спільного кратного чисел a і b на 1 більше їх найбільшого спільного дільника, а 20% числа b на 1 менше, ніж найбільший спільний дільник цих чисел. Знайти число a .

20. Натуральні числа a і b різні і такі, що дроби $\frac{2}{a+b}$ і $\frac{5}{ab}$ рівні. Знайти відношення більшого з них до меншого.

Група 3

21. Знайти найбільше значення $|xy|$, де x і y — цілі розв'язки рівняння $xy + 8x - 5y - 7 = 0$.

22. Знайти натуральне число x , для якого сума $1 + 2 + 3 + \dots + x$ є трицифровим числом, всі цифри якого однакові.

23. Знайти суму всіх цілих n , для яких дріб $\frac{n^3+1}{n-1}$ є цілим числом.

24. Для натуральних чисел x , y , z , що задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y + z = 14, \\ x + yz = 19, \end{cases}$$

знайти найбільший добуток xyz .

25. Нехай m і n взаємно прості натуральні числа. На яке найменше натуральне число можна скоротити дріб $\frac{7n+2m}{2n+3m}$, якщо відомо, що він скоротний?

26. Нехай m і n взаємно прості натуральні числа. На яке найменше натуральне число можна скоротити дріб $\frac{3m-2m}{5n+2m}$, якщо відомо, що він скоротний?

27. Нехай a і b — натуральні числа такі, що їх сума дорівнює 85, а їх найменше спільне кратне 102, причому $a > b$. Обчислити $100a + b$.

28. Необхідно придбати на 10 грн 40 поштових марок вартістю 10 коп, 40 коп та 1,2 грн. Визначити число куплених марок, вартість яких 1, 2 грн за штуку.

29. Нехай дійсне число x_0 є розв'язком рівняння $x^3 + [x] = 3$, де $[y]$ — найбільше ціле число, що не перевищує дійсне число y . Обчислити x_0^3 .

30. Розв'язати рівняння $\left[\frac{x+1}{x}\right] = \frac{x-1}{2}$ і обчислити суму його розв'язків ($[y]$ — найбільше ціле число, що не перевищує дійсне число y).

§ 3. Тотожні перетворення алгебраїчних виразів

Варіант А

Група 1

1. При якому значенні параметра a квадратний тричлен $16x^2 + 24x + 3a$ можна записати у вигляді квадрата двочлена?

2. При якому найменшому значенні параметра b тричлен $49x^4 - 14bx^2 + 16$ можна записати у вигляді квадрата двочлена?

3. Обчислити значення дробу $\frac{19,75^2 - 1,75^2}{28,75^2 - 7,25^2}$.

4. Обчислити значення дробу $\left(\frac{8,75^2 - 4,75^2}{65,75^2 - 1,75^2}\right)^{-1}$.

5. Знайти значення виразу $100a + 10b + c$, де a, b, c — числа, для яких справедлива рівність многочленів $ax^3 - 27 = (2x - 3)(4x^2 + bx + c)$.

6. Знайти значення виразу $100a + 10b + c$, де a, b, c — невід'ємні числа, для яких справедлива рівність многочленів $27x^3 + a = (3x + b) \times (9x^2 - cx + 4)$.

7. Знайти значення виразу $100a + 10b + c$, де a, b, c — числа, для яких многочлен $8x^3 + 3bx^2 + cx + 1$ є кубом двочлена $2x + a$.

8. Знайти значення виразу $100a + 10b + c$, де a, b, c — числа, для яких многочлен $27x^3 - 9bx^2 + 9cx - 8$ є кубом двочлена $ax - 2$.

9. Нехай $a = 137^2$; $b = 137\frac{3}{4} \cdot 136\frac{1}{4}$. Вказати, яке з нижче наведених співвідношень вірне:

1) $a > b$; 2) $b > a$; 3) $a = b$.

10. Нехай $a = 126 \cdot 5^2$; $b = 128 \cdot 125$. Вказати, яке з нижче наведених співвідношень вірне:

1) $a > b$; 2) $b > a$; 3) $a = b$.

Група 2

11. Сторони прямокутника виражаються двочленами першого степеня від змінної x , а його площа тричленом $28 + 3x - x^2$. Периметр же цього прямокутника не залежить від x . Обчислити периметр даного прямокутника.

12. Сторони прямокутника виражаються двочленами першого степеня від змінної x , а його площа тричленом $60 - 4x - x^2$. Периметр же цього прямокутника не залежить від x . Обчислити периметр даного прямокутника.

13. Знайти найбільше значення многочлена $-2(x - 3)^2 + 2$.

14. Знайти найменше значення многочлена $2(x - 3)^2 + 4$.
15. Знайти найбільше значення тричлена $-x^2 + 4x + 7$.
16. Знайти найменше значення многочлена $x^2 + 6x + 10$.
17. Обчислити $\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} - \sqrt{48}$.
18. Обчислити $\frac{\sqrt{8} + \sqrt{6}}{\sqrt{8} - \sqrt{6}} - 4\sqrt{3}$.
19. Обчислити $\sqrt[3]{-4} \cdot \sqrt[6]{4}$.
20. Обчислити $\frac{\sqrt[6]{3^8}}{\sqrt[3]{-3}}$.

Група 3

21. Обчислити $\frac{\sqrt[3]{25\sqrt{5}}}{\sqrt[4]{125\sqrt[3]{5}}}$.
22. Обчислити $\frac{\sqrt[4]{8\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[6]{32\sqrt{2}}}$.
23. Обчислити $\frac{(5\sqrt{3} + \sqrt{50})(5 - \sqrt{24})}{\sqrt{75} - 5\sqrt{2}}$.
24. Обчислити $\sqrt[4]{\sqrt{23} - \sqrt{7}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{23} + \sqrt{7}} + \left(\sqrt{7 - \sqrt{33}} - \sqrt{7 + \sqrt{33}} \right)^2$.
25. Обчислити $\sqrt{(\sqrt{2} + 2)^2 - 8\sqrt{2}} + \sqrt{(\sqrt{2} - 2)^2 + 8\sqrt{2}}$.
26. Обчислити $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2 + 4\sqrt{2}} - \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2}}$.
27. Обчислити $\sqrt{\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 2} : \sqrt{\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 2} \cdot (\sqrt{2} - 1) - \sqrt{2}$.
28. Обчислити $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 2} \cdot \sqrt{\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 2}$.

29. Обчислити $\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{2\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} + \sqrt{2}}$.
30. Обчислити $\sqrt{\frac{3\sqrt{3}+8}{\sqrt{3}+2} + 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{3\sqrt{3}-8}{\sqrt{3}-2} - 2\sqrt{3}}$.

Варіант Б

Група 1

1. Знайти значення виразу $100a + 10b + c$, де a, b, c — невід'ємні числа, для яких справедлива рівність многочленів $(ax^2 + b)^2 = 4x^4 + 6cx^2 + 36$.

2. Знайти значення виразу $\frac{b}{a}$, де a і b — невід'ємні числа, для яких справедлива рівність многочленів $(ax^3 - 10)^2 = 625x^6 - 5(a+b)x^3 + 100$.

3. Обчислити значення виразу $10a + b$, де a і b — числа, для яких квадратний тричлен $16x^2 + 144x + a + b$ є квадратом двочлена і при цьому $a - b = 316$.

4. Обчислити добуток чисел a і b , для яких квадратний тричлен $25x^2 - 2(a+b)x + 4$ є квадратом двочлена і при цьому $a - b = 8$.

5. На скільки одне з чисел a або b більше від іншого, якщо $a = 226,5^2$, а $b = 228 \cdot 225$?

6. На скільки одне з чисел a або b більше від іншого, якщо $a = 537^2$, а $b = 537\frac{3}{4} \cdot 536\frac{1}{4}$?

7. Обчислити значення виразу $5 \cdot 148^2 - 10 \cdot 148 \cdot 146 + 5 \cdot 146^2$.

8. Обчислити значення виразу $9 \cdot (21\frac{1}{3})^2 - 360 \cdot 21\frac{1}{3} + 3600$.

9. Обчислити значення виразу $\frac{(17,5 + 12,5)^2 - (17,5 - 12,5)^2}{25 \cdot 35}$.

10. Обчислити значення виразу $a^2b + ab^2 - 2a^2 - b^2 - 3ab + 2a + 2b$, якщо $a = 1,25$, а $b = 2,75$.

Група 2

11. Нехай x_0 — точка екстремуму квадратного тричлена $4(x + 2)^2 - 3$. Запишіть число, утворене дописуванням справа до числа x_0 цифри 0, якщо x_0 є точкою мінімуму або цифри 1 у випадку, коли x_0 — точка максимуму.

12. Нехай x_0 — точка екстремуму квадратного тричлена $-\frac{1}{2}(x + 2)^2 - 3$. Запишіть число, утворене дописуванням справа до числа

x_0 цифри 0, якщо x_0 є точкою мінімуму або цифри 1 у випадку, коли x_0 — точка максимуму.

13. Обчислити $\sqrt[4]{3 - 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{2}}$.

14. Обчислити $\sqrt[6]{7 - 4\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{16 + 8\sqrt{3}}$.

15. Обчислити $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} \cdot (3 - 3\sqrt{3})$.

16. Обчислити $\frac{1}{2 - \sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{11}{\sqrt{5} + 4}$.

17. Обчислити $\frac{22}{7 - \sqrt{5}} + \frac{35}{9 - \sqrt{11}} - \frac{3}{\sqrt{11} - \sqrt{5}}$.

18. Обчислити $2\sqrt{40\sqrt{12}} + 3\sqrt{5\sqrt{48}} - 2\sqrt[4]{75} - 4\sqrt{15\sqrt{27}}$.

19. Обчислити $5\sqrt[3]{6\sqrt{32}} - 3\sqrt[3]{9\sqrt{162}} - 11\sqrt[6]{18} + 2\sqrt[3]{75\sqrt{50}}$.

20. Обчислити значення виразу $x(x+1)(x+2)(x+3)$, якщо $x = \frac{\sqrt{5} - 3}{2}$.

Група 3

21. Обчислити значення виразу $\frac{\sqrt{x - 2\sqrt{x+3}} + 4}{\sqrt{x+3} - 1} + 1$, якщо $x = -2, 5$.

22. Обчислити значення виразу $\frac{\sqrt{x - 2\sqrt{x+7}} + 8}{\sqrt{x+7} - 1} + 1$, якщо $x = -2, 5$.

23. Обчислити значення виразу $\frac{\sqrt{7} + 1}{7\sqrt{7} + 7 + \sqrt{7}} : \frac{1}{\sqrt{7} - 49} + 7$.

24. Обчислити $\frac{\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}}{(\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2})}$.

25. Обчислити $\frac{3\sqrt{24}}{\sqrt{90} - 4\sqrt{6}} + 5\sqrt{1,2}(\sqrt{30} + 3\sqrt{2})$.

26. Обчислити $(4 + \sqrt{15}) \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{6}) \cdot \sqrt{4 - \sqrt{15}}$.

27. Обчислити $\sqrt{3 - \sqrt{5}} \cdot (3 + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{2})$.

28. Обчислити $\sqrt{2\sqrt{3} - \sqrt{13 - \sqrt{48}}}$.

29. Обчислити $\sqrt{2\sqrt{2} - \sqrt{9 - 4\sqrt{2}}}$.

30. Обчислити значення виразу $3 \cdot \frac{\sqrt{8+2\sqrt{7}}}{\sqrt{8-2\sqrt{7}}} - \frac{\sqrt{3+\sqrt{7}}}{\sqrt{3-\sqrt{7}}} \cdot \sqrt{2}$.

Варіант В

Група 1

1. При якому значенні параметра k , квадратний тричлен $x^2 - 2(k-7)x + k^2 - 4k + 9$ можна записати у вигляді квадрата двочлена?

2. При якому значенні параметра k , квадратний тричлен $x^2 - 2(k+4)x + 2(k+4)(k-6)$ можна записати у вигляді квадрата двочлена?

3. Обчислити найбільше значення суми чисел a і b , для яких квадратний тричлен $16x^2 + 2abx + 9$ можна записати у вигляді квадрата двочлена і при цьому $a^2 + b^2 = 25$.

4. Обчислити найменше значення суми чисел a і b , для яких квадратний тричлен $4x^2 - 52x + a^2 + b^2$ є квадратом двочлена і при цьому $ab = 60$.

5. Нехай x_0 — значення змінної x , при якому тричлен $-3x^2 + 18x - 7$ досягає свого найбільшого значення, а M — найбільше значення цього тричлена. Знайти $10M + x_0$.

6. Нехай x_0 — значення змінної x , при якому тричлен $2x^2 - 12x + 13$ набуває свого найменшого значення, а m — це найменше значення. Обчислити $-10m + x_0$.

7. Знайти найменше значення многочлена $a^2 - 4ab + 5b^2 - 2b - 2$.

8. Нехай a_0 і b_0 — значення параметрів відповідно a і b , при яких многочлен $a^2 - 4ab + 5b^2 - 2b - 2$ набуває свого найменшого значення. Обчислити $10a_0 + b_0$.

9. При якому значенні змінної a вираз

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a+2}} + \frac{1}{\sqrt{a+1} - \sqrt{a}} \right) \cdot \frac{a^2 + 2a + 3}{\sqrt{a+2} + \sqrt{a}}$$

набуває свого найменшого значення?

10. При якому значенні змінної a вираз

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a-2} + \sqrt{a-1}} + \frac{1}{\sqrt{a-2} - \sqrt{a-3}} \right) \cdot \frac{5 + 4a - a^2}{\sqrt{a-1} + \sqrt{a-3}}$$

набуває свого найбільшого значення?

Група 2

11. Обчислити $2\sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$.

12. Обчислити $\sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - y^2}}$, якщо $x = 2, 26$, а $y = 0, 3$.

13. Обчислити $10\sqrt{b - 2\sqrt{ab - a^2}}$, якщо $a = 1, 69$, а $b = 4, 58$.

14. Обчислити $\frac{14\sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$, якщо $x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{2}{7}} \right)$.

15. Обчислити $\frac{10\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$, якщо $x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{2}{5}} \right)$.

16. Обчислити $(1 - 2x) \cdot (1 + 2x)^{-1} \cdot (1 + 3x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1 - 3x)^{-\frac{1}{2}}$, якщо $x = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

17. Обчислити $\frac{x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}}{1 - x} + \frac{1 - x^{-\frac{1}{2}}}{1 + \sqrt{x}}$, якщо $x = \frac{1}{2}$.

18. Обчислити $\left(\frac{(\sqrt{a^3} - \sqrt{8})(\sqrt{a} + \sqrt{2})}{a + \sqrt{2a} + 2} \right)^2 + \sqrt{(a^2 + 2)^2 - 8a^2}$, якщо $a = 1, 25$.

19. Знайти цілу частину значення виразу

$$\frac{1}{a^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{8}} + 1} + \frac{1}{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{1}{8}} + 1} - \frac{2a^{\frac{1}{4}} - 2}{a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{4}} + 1},$$

якщо $a = 2, 25$.

20. Знайти цілу частину значення виразу

$$\left(\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}} - \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \right) \cdot \left(\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \right)^{-1} + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Група 3

21. Обчислити $\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} - \sqrt[3]{\sqrt{80}} - 9$.

22. Обчислити $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$.

23. Обчислити $13 \cdot \frac{(4 + \sqrt{15})^{\frac{3}{2}} + (4 - \sqrt{15})^{\frac{3}{2}}}{(6 + \sqrt{35})^{\frac{3}{2}} - (6 - \sqrt{35})^{\frac{3}{2}}}$.

24. Обчислити $\sqrt[3]{3^{-1} \cdot (\sqrt[3]{2} - 1) \cdot (\sqrt[3]{2} + 1)}$.

25. Обчислити значення виразу $\frac{1}{\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}}} + \frac{1}{\sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}}$, якщо $a = 1, 5$.

26. Обчислити $\sqrt{\left(\frac{9 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt[3]{2}} + 3\sqrt[3]{2}\right) \cdot \sqrt{3} \cdot (3 + \sqrt[6]{108})^{-1}}$.

27. Обчислити $\sqrt{9 + 2\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2} + 1) - 2\sqrt{6}$.

28. Спростити вираз і знайти його значення

$$\left(\left(\frac{\sqrt[4]{bx^3} + \sqrt[4]{a^2bx}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} - \sqrt[4]{bx} \right)^2 + bx + 3 \right) \cdot (\sqrt{bx} + 3)^{-1} - \sqrt{bx},$$

якщо $a = 0, 11$; $b = 0, 75$; $x = 12$.

29. Спростити вираз

$$4a^{-1} \cdot \left(\left(\frac{a^2 - ba^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{3}}} + ab^{\frac{1}{3}} \right) : (a + \sqrt[6]{a^3b^2}) - b^{\frac{1}{3}} \right)^2.$$

30. Спростити вираз

$$\left(\frac{a + \sqrt{ax}}{7} \right)^{-1} \cdot \left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{x}} + \frac{a}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\sqrt[4]{ax^3} - \sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} + \frac{1 + \sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}} \right)^{-2}.$$

§ 4. Тригонометричні функції та їх властивості

Варіант А

Група 1

1. Нехай P_α — точка одиничного кола з центром у початку координат, в яку відображається точка $P_0(1; 0)$ при повороті навколо центра на кут α радіан. Якій з чвертей належить точка P_α , якщо $\alpha = -\frac{2}{3}\pi + 3\pi$?

2. Нехай P_α — точка одиничного кола з центром у початку координат, в яку відображається точка $P_0(1; 0)$ при повороті навколо центра на кут α градусів. Якій з чвертей належить точка P_α , якщо $\alpha = 48^\circ + 7 \cdot 180^\circ$?

3. Колесо машини за 3 секунди робить 7 обертів. Записати у градусах кут, на який повертається колесо за 1 секунду.

4. За 1 секунду колесо машини повертається на кут 960° . Скільки обертів зробить колесо за 3 секунди?

5. Подати у градусній мірі кут $\alpha = 1,95$, виміряний у радіанах. У відповіді записати цілу частину градусної міри цього кута.

6. Знайти цілу частину міри кута виражену у радіанах, якщо його градусна міра складає $157^\circ 30'$.

7. Знайти найменше натуральне значення змінної x , яке належить області визначення функції $y = \frac{\sin(0,5\pi x)}{1 - \sin(0,5\pi x)}$.

8. Знайти найбільше ціле значення змінної x , яке належить області визначення функції $y = \operatorname{tg}(0,5\pi x) : \sqrt{16 - x^2}$.

9. Визначити, яка з вказаних нерівностей є хибною:

1) $\sin 20^\circ \cdot \cos 120^\circ \cdot \operatorname{tg} 220^\circ \cdot \operatorname{ctg} 320^\circ > 0$;

2) $\cos 130^\circ + \operatorname{tg} 130^\circ + \operatorname{ctg} 130^\circ < 0$;

3) $\sin 1 \cdot \cos 2 \cdot \operatorname{tg} 3 \cdot \operatorname{ctg} 4 > 0$;

4) $\sin 135^\circ + \cos 135^\circ < 0$.

10. Порівняти числа $A = \cos 583^\circ$ і $B = \cos 584^\circ$:

1) $A > B$; 2) $A < B$; 3) $A = B$.

Вказати правильний варіант відповіді.

Група 2

11. Знайти найбільше серед нижче наведених чисел:

- 1) $\cos 15^\circ$; 2) $\cos 70^\circ$; 3) $\cos(-20^\circ)$; 4) $\cos(-125^\circ)$; 5) $\cos 250^\circ$.

Вказати правильний варіант відповіді.

12. Знайти найбільше значення функції $y = -4 \sin(2x - \frac{\pi}{3}) + 2$.

13. Знайти найменше значення функції $y = 3 \cos(x - \frac{\pi}{4}) - 1$.

14. Знайти найбільше значення функції $y = 3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x$.

15. Знайти найменше значення функції $y = 2 \sin^2 x + 4 \cos^2 x - 3$.

16. Знайти найменше двоцифрове натуральне значення змінної x , при якому значення функції $y = 2 \sin \frac{1}{3} \pi x$ дорівнює нулю.

17. Знайти найбільше двоцифрове натуральне значення змінної x , при якому значення функції $y = 3 \cos \frac{1}{4} \pi x$ дорівнює нулю.

18. Знайти найменше натуральне значення змінної x , при якому значення функції $y = 4 \operatorname{tg} \frac{5}{7} \pi x$ дорівнює нулю.

19. Знайти найменше натуральне значення змінної x , при якому значення функції $y = 2 \operatorname{ctg} \frac{1}{6} \pi x$ дорівнює нулю.

20. Які з наведених пар функцій мають однакові графіки:

1) $y = 2 \sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3})$ і $y = \frac{1}{2} \sin(2x - \frac{\pi}{3})$;

2) $y = 3 \cos(x - \frac{\pi}{3}) + 1$ і $y = 3 \cos(x + \frac{2\pi}{3}) + 1$;

3) $y = 3 \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{3}) + 1$ і $y = 3 \operatorname{tg}(x + \frac{2\pi}{3}) + 1$;

4) $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$?

Група 3

21. Знайти найменший додатний період функції

$$y = \frac{1}{2} \cos(\frac{2\pi}{5}x + \frac{\pi}{3}) - 1.$$

22. Знайти найменший додатний період функції

$$y = 2 \operatorname{tg}(\frac{2\pi}{7}x - \frac{\pi}{6}) + 1.$$

23. Знайти найбільше значення функції $y = \frac{6}{1 + 2 \operatorname{tg}^2(x - \frac{\pi}{4})}$.

24. Знайти найменше значення функції $y = \frac{14}{\sqrt{4 - 3 \operatorname{ctg}^2(3x + \frac{\pi}{3})}}$.

25. Які з наведених виразів мають зміст:

1) $\arccos \sqrt{5}$; 2) $\arcsin(3 - \sqrt{20})$; 3) $\arccos \frac{\pi}{3}$; 4) $\arcsin \frac{3}{\pi}$?

26. Яка з наведених рівностей є вірною:

1) $\operatorname{arctg} \frac{\pi}{4} = 1$; 2) $\operatorname{arcctg}(-1) = 45^\circ$;

3) $\arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$; 4) $\arcsin 0 = \pi$?

27. Знайти в градусах значення $\arcsin(\sin 200^\circ)$.

28. Знайти в градусах значення $\arccos(\cos 200^\circ)$.

29. Знайти в градусах значення $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 160^\circ)$.

30. Знайти в градусах значення $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 340^\circ)$.

Варіант Б

Група 1

1. Нехай P_α — точка одиничного кола з центром у початку координат, в яку відображається точка $P_0(1; 0)$ при повороті навколо центра на кут α радіан. Якій з чвертей належить точка P_{20} ?

2. Нехай P_α — точка одиничного кола з центром у початку координат, в яку відображається точка $P_0(1; 0)$ при повороті навколо центра на кут α градусів. Якій з чвертей належить точка P_{π^2} ?

3. Знайти найбільше ціле значення змінної x , яке належить області визначення функції $y = \frac{\sqrt{12-2x}}{\sin 0,5\pi x}$.

4. Знайти найменше натуральне значення змінної x , яке належить області визначення функції $y = \sqrt{x^2 - 16} \cdot \operatorname{ctg} 0,25\pi x$.

5. Порівняти значення виразів $A = \operatorname{tg} 100^\circ + \operatorname{ctg} 100^\circ$ і $B = \operatorname{tg} 100^\circ \times \operatorname{ctg} 100^\circ$: 1) $A > B$; 2) $A = B$; 3) $A < B$. Вказати правильний варіант відповіді.

6. Нехай число α таке, що $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$, $|\operatorname{tg} \alpha| = -\operatorname{tg} \alpha$, $|\operatorname{ctg}(-\alpha)| = -\operatorname{ctg} \alpha$. Тоді яке з наступних співвідношень вірне:

1) $\sin \alpha > 0$; 2) $\sin \alpha < 0$; 3) $\sin \alpha = 0$?

7. Яке з нижче наведених чисел є найменшим:

1) $\sin 1$; 2) $\sin 2$; 3) $\sin 5$; 4) $\sin 7$; 5) $\sin \frac{\pi}{2}$?

Вказати правильний варіант відповіді.

8. Знайти найменше серед чисел:

1) $\cos 1, 3$; 2) $\cos 0, 7$; 3) $\cos 9, 4$; 4) $\cos 12, 6$; 5) $\cos(-1, 7)$.

Вказати правильний варіант відповіді.

9. Дослідити функцію $y = \frac{x^2 \operatorname{tg}^2 x}{\sin \frac{x}{2}}$ на парність:

- 1) парна; 2) непарна;
3) ні парна, ні непарна; 4) і парна, і непарна.

Вказати правильний варіант відповіді.

10. Дослідити функцію $y = \frac{\cos x + 1}{\sin x \cdot \operatorname{tg} x}$ на парність:

- 1) парна; 2) непарна;
3) ні парна, ні непарна; 4) і парна, і непарна.

Вказати правильний варіант відповіді.

Група 2

11. Яка з наведених нерівностей вірна:

- 1) $\sin(\cos 3) > 0$; 2) $\sin(\operatorname{tg} 3) > 0$;
3) $\cos(\sin 3) > 0$; 4) $\cos(\operatorname{tg} 3) < 0$?

12. Яка з наведених нерівностей вірна:

- 1) $\sin(\pi + \frac{1}{\pi}) > \cos(\pi + \frac{1}{\pi})$; 2) $\operatorname{tg} \pi^2 > \operatorname{ctg} \pi^2$;
3) $\sin 1 < \cos 1$; 4) $\sin 2 < \cos 2$?

13. Для якого з наведених нижче рівнянь вірно твердження, що якщо число a є ненульовим розв'язком даного рівняння, то і протилежне число $-a$ також є його розв'язком:

- 1) $\sin 0, 2x = x^2$; 2) $\cos 0, 2x = x^3$;
3) $\cos 0, 2x = x^2$; 4) $x + \sin 0, 2x = \cos 0, 2x$?

14. Обчислити добуток найбільшого і найменшого значень функції $y = 4 \sin x + 3 \cos x + 2$.

15. Обчислити добуток найбільшого і найменшого значень функції $y = \sin(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(x + \frac{\pi}{3}) + 2\sqrt{2}$.

16. Обчислити добуток найбільшого і найменшого значень функції $y = 3 \sin^2 x + 5 \cos 2x$.

17. Знайти значення аргументу x , при якому функція $y = \cos 2x + \sin^2 x$ набуває найбільшого значення на відрізку $[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$.

18. Знайти найбільше значення функції $y = \frac{21 + 12 \operatorname{tg}^2 x}{2 + 4 \operatorname{tg}^2 x}$.

19. Знайти найменший додатний період функції

$$y = 4 \sin^2(2\pi x - \frac{\pi}{3}).$$

20. Знайти найменший додатний період функції

$$y = 3 \operatorname{tg}(0, 2\pi x - \frac{\pi}{4}) + 1.$$

Група 3

21. Нехай $A = \arcsin(-0, 8)$ і $B = \arccos(-0, 8)$. Яке з наступних тверджень вірне: 1) $A > B$; 2) $A < B$; 3) $A = B$; 4) $A^2 + B^2 = 1$?

22. Нехай $A = \arcsin 0, 2$ і $B = \arccos 0, 2$. Яке з наступних тверджень вірне: 1) $A > B$; 2) $A < B$; 3) $A = B$; 4) $A^2 + B^2 = 1$?

23. Нехай $A = \operatorname{arctg}(-1, 71)$ і $B = \operatorname{arcctg}(-1, 71)$. Яке з наступних тверджень вірне: 1) $A > B$; 2) $A < B$; 3) $A = B$; 4) $AB = 1$?

24. Обчислити $\frac{12}{\pi} \arccos(\sin \frac{4}{3}\pi)$.

25. Обчислити $\frac{15}{\pi} \arccos(\sin \frac{7}{6}\pi)$.

26. Знайти найменше значення функції $y = \frac{4}{\pi} \arcsin(2x - 1) - 2$.

27. Знайти найменше значення функції $y = \frac{5}{\pi} \arccos(3x - 2) + 1$.

28. Обчислити $\frac{8}{\pi} (\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} + \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} + \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{2}})$.

29. Обчислити $\frac{12}{\pi} (\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} + \operatorname{arctg} \sqrt{3})$.

30. Яка з наведених нерівностей невірна:

1) $\arcsin(-0, 11) < 0$; 2) $\arccos(-0, 11) > \frac{\pi}{2}$;

3) $\operatorname{arctg}(-0, 11) > -\frac{\pi}{4}$; 4) $\operatorname{arcctg}(-0, 11) < 0$?

Варіант В

Група 1

1. Нехай P_α — точка одиничного кола з центром у початку координат, в яку відображається точка $P_0(1; 0)$ при повороті навколо центра на кут α радіан. Якій з чвертей належить точка $P_{\sqrt{\pi}}$?

2. Обчислити добуток найменшого та найбільшого двоцифрових натуральних значень змінної x , що належать області визначення функції $y = \sqrt{1 - 2 \sin \frac{1}{2}\pi x}$.

3. Знайти найбільше двоцифрове ціле значення змінної x , що належить області визначення функції $y = \sqrt{\operatorname{tg} 0, 25\pi x - 1}$.

4. Нехай число α таке, що $|\sin(-\alpha)| = -\sin \alpha$, $|\operatorname{tg}(-\alpha)| = -\operatorname{tg} \alpha$, $|\operatorname{ctg} \alpha| = -\operatorname{ctg} \alpha$. Тоді яке з наступних співвідношень вірне:

1) $\cos \alpha > 0$; 2) $\cos \alpha < 0$; 3) $\cos \alpha = 0$?

5. Яке з нижче наведених чисел є найбільшим значенням функції $y = \sin(\sin x)$:

1) 1; 2) 2; 3) $\sin 1$; 4) $\frac{\pi}{2}$; 5) $\arcsin(\sin 1)$?

6. Яке з нижче наведених чисел є найменшим значенням функції $y = \cos(\cos x - 1)$:

1) -1 ; 2) 0; 3) $\cos 1$; 4) $\cos(-2)$; 5) $\arccos(\cos 2)$?

7. Знайти найбільше значення функції $y = -3 \sin^2 x + 3 \sin x + 2$.

8. Знайти найбільше значення функції

$$y = 10 \cos^2 x - 6 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x.$$

9. Знайти найбільше значення функції

$$y = \frac{12}{2 \operatorname{tg}^2 x - 8 \operatorname{tg} x + 11}.$$

10. Знайти найменше додатне значення функції

$$y = \frac{10}{-3 \operatorname{ctg}^2 x + 12 \operatorname{ctg} x - 11}.$$

Група 2

11. Які з наведених пар функцій мають однакові графіки:

1) $y = 2 \sin(\frac{\pi}{4} - x) \cos(\frac{\pi}{4} - x) - 1$ і $y = \cos^2 x - \sin^2 x$;

2) $y = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ і $y = 1 + \cos x$;

3) $y = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$ і $y = 1 - \sin(\frac{3\pi}{2} - x)$;

4) $y = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ і $y = \operatorname{tg} 2x$?

12. Які з наведених пар функцій мають однакові графіки:

1) $y = 2 \sin(3x - \frac{\pi}{3}) + 1$ і $y = 2 \cos(3x + \frac{5\pi}{6}) + 1$;

2) $y = 2 \sin(3x - \frac{\pi}{3}) + 1$ і $y = 2 \sin(3x - \frac{5\pi}{6}) + 1$;

3) $y = 2 \sin(3x - \frac{\pi}{3}) + 1$ і $y = 2 \cos(3x - \frac{5\pi}{6}) + 1$;

4) $y = 2 \sin(3x - \frac{\pi}{3}) + 1$ і $y = 2 \cos(3x - \frac{\pi}{3}) \cdot \operatorname{tg}(3x - \frac{\pi}{3}) + 1$?

13. Дослідити функцію $y = \frac{1}{2} (3^{\sin x} - 3^{-\sin x}) : (3^{\sin x} + 3^{-\sin x})$ на парність:

- 1) парна; 2) непарна;
3) ні парна, ні непарна; 4) і парна, і непарна.

Вказати правильний варіант відповіді.

14. Знайти найменший додатний період функції

$$y = \cos \frac{2\pi}{3}x + 2 \operatorname{tg} 0, 5\pi x.$$

15. Знайти найменший додатний період функції

$$y = \cos^2 0, 5\pi x + 2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2}x.$$

16. Обчислити $\sin(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos(-\frac{1}{2}) - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3})$.

17. Обчислити $\operatorname{tg}(\arcsin \frac{1}{2} + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2})$.

18. Обчислити $\frac{52}{\pi} \arccos(\sin \frac{14\pi}{13})$.

19. Обчислити $\frac{16}{\pi} \arcsin(\cos \frac{17\pi}{16})$.

20. Обчислити $\frac{8}{\pi} \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{8})$.

Група 3

21. Обчислити суму всіх цілих значень аргументу x , що належать області визначення функції

$$y = \sqrt{x^2 - x - 6} \cdot \arcsin \frac{2x - 1}{7}.$$

22. Обчислити суму всіх цілих значень аргументу x , що належать області визначення функції

$$y = \lg(2x + 10) + \arccos \frac{3x + 1}{3x - 9}.$$

23. Обчислити суму всіх цілих значень аргументу x , що належать області визначення функції $y = 2 \arcsin(\frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}x)$.

24. Знайти найменше значення функції

$$y = 2 \operatorname{arctg}^2 x - \pi \operatorname{arctg} x + \frac{\pi^2}{8} + 3.$$

25. Знайти найбільше значення функції

$$y = -12 \operatorname{arctg}^2 x + 4\pi \operatorname{arctg} x + 2 - \frac{\pi^2}{3}.$$

26. Знайти значення змінної x , при якому функція

$$y = 2 \operatorname{arctg}^2 x - \pi \operatorname{arctg} x + \frac{\pi^2}{8} + 3$$

набуває найменшого значення.

27. Знайти значення змінної x , при якому функція

$$y = -12 \operatorname{arctg}^2 x + 4\pi \operatorname{arctg} x + 2 - \frac{\pi^2}{3}$$

досягає свого найбільшого значення, та обчислити добуток $x\sqrt{3}$.

28. Обчислити $\frac{8}{\pi}(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3})$.

29. Обчислити $\frac{8}{\pi}(\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3)$.

30. Обчислити $\frac{3}{\pi}(\arccos(-0,8) - \arcsin(-0,6))$.

§ 5. Перетворення тригонометричних виразів

Варіант А

Група 1

1. Обчислити $7 \cos 120^\circ - 5 \sin 150^\circ$.
2. Обчислити $3 \operatorname{tg} 135^\circ + 5 \operatorname{ctg} 225^\circ$.
3. Обчислити $6 \sin 210^\circ + 8 \cos 240^\circ$.
4. Обчислити $\operatorname{ctg} 405^\circ + 2 \cos 660^\circ$.
5. Обчислити $4 \sin 1050^\circ + \operatorname{tg} 495^\circ$.
6. Обчислити $\sin 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 405^\circ \cdot 2 \operatorname{tg} 60^\circ$.
7. Обчислити $\operatorname{tg}^2 120^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ + 2 \sin 60^\circ$.
8. Обчислити $\cos^2 30^\circ + \frac{1}{2} \sin 30^\circ + 2 \operatorname{tg}^2 60^\circ$.
9. Обчислити $0,75 \operatorname{ctg}^2 60^\circ - \sin^2 60^\circ + \cos 60^\circ$.
10. Обчислити $\cos 300^\circ + 0,75 \operatorname{tg}^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ + \sin 30^\circ$.

Група 2

11. Обчислити $\sin^2 20^\circ + \sin^2 20^\circ \cdot \cos^2 20^\circ + \cos^4 20^\circ + 1$.
12. Обчислити $(1 - \cos^2 10^\circ + \operatorname{tg}^2 10^\circ \cdot \cos^2 10^\circ) \cdot \operatorname{ctg}^2 10^\circ + 2 \sin^2 10^\circ$.
13. Обчислити $2 \cos^2 220^\circ + 4 \operatorname{tg}^2 40^\circ \cdot \operatorname{ctg}^2 140^\circ + 2 \sin^2 320^\circ$.
14. Обчислити $(\sin 67^\circ + \sin 157^\circ)^2 + (\cos 67^\circ + \cos 157^\circ)^2$.
15. Обчислити $\frac{\cos^2 243^\circ}{\operatorname{tg}^2(-333^\circ)} + \frac{\cos^2(-27^\circ)}{\operatorname{tg}^2(-243^\circ)}$.
16. Обчислити $\cos 68^\circ \cdot \cos 22^\circ - \sin 68^\circ \cdot \sin 22^\circ$.
17. Обчислити $\sin 128^\circ \cdot \cos 22^\circ - \sin 158^\circ \cdot \cos 52^\circ$.
18. Обчислити $\sin 160^\circ \cdot \cos 110^\circ + \sin 250^\circ \cdot \cos 340^\circ$.
19. Обчислити $\sin 32^\circ \cdot \sin 148^\circ - \sin 302^\circ \cdot \sin 122^\circ$.
20. Обчислити $\frac{\operatorname{tg} 23^\circ - \operatorname{tg} 68^\circ}{1 + \operatorname{tg} 23^\circ \cdot \operatorname{tg} 68^\circ} + 5$.

Група 3

21. Обчислити $\frac{(\sin 2\alpha - \cos 2\alpha)^2}{1 - \sin 4\alpha}$.
22. Обчислити $\sin 2\alpha$, якщо $\sin \alpha = -0,8$; $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.
23. Обчислити $\cos 2\alpha$, якщо $\sin \alpha = -0,6$.

24. Обчислити $7 \operatorname{tg} 2\alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{4}{5}$; $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.
25. Обчислити $\left(\frac{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ} \right)^2$.
26. Обчислити $\frac{\sin 56^\circ + \sin 34^\circ}{\sin 56^\circ - \sin 34^\circ} - \operatorname{tg} 79^\circ$.
27. Обчислити $4 \sin 15^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 75^\circ - 4$.
28. Обчислити $\operatorname{tg} 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 50^\circ \cdot \operatorname{tg} 70^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ$.
29. Обчислити $(\cos 255^\circ + \sin 255^\circ) \cdot (\cos 285^\circ - \sin 285^\circ)$.
30. Обчислити $\sqrt{3}(\cos 255^\circ + \sin 255^\circ) \cdot (\cos 285^\circ + \sin 285^\circ)$.

Варіант Б

Група 1

1. Обчислити $\frac{4 \sin 20^\circ \cdot \sin 70^\circ}{2 \cos^2 25^\circ - 1}$.
2. Обчислити $\frac{10 \sin 40^\circ \cdot \sin 50^\circ}{1 - 2 \sin^2 5^\circ}$.
3. Обчислити $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2}$; $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; $\operatorname{ctg} \beta = 0$; $\pi < \beta < 2\pi$.
4. Обчислити $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{5}$; $\pi < \alpha < 2\pi$; $\cos \beta = 0$; $\pi < \beta < 2\pi$.
5. Обчислити $\sin^2 11^\circ + \cos^2 11^\circ - (\cos^2 15^\circ - \cos^2 75^\circ)^2$.
6. Обчислити $\cos^4 x + \sin^4 x + \frac{2}{9}$, якщо $\sin 2x = \frac{2}{3}$.
7. Обчислити $\cos^8 x - \sin^8 x$, якщо $\cos 2x = 0, 2$.
8. Обчислити $\sin 2\alpha$, якщо $\sin \alpha + \cos \alpha = 1, 4$.
9. Обчислити $\sin 2\alpha$, якщо $\cos \alpha - \sin \alpha = 1, 3$.
10. Обчислити $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$, якщо $\sin \alpha - \cos \alpha = 1, 2$.

Група 2

11. Обчислити $\frac{\sqrt{2 - 2 \cos 8}}{1 - (\sin 2 - \cos 2)^2}$.
12. Обчислити $\frac{\sqrt{2 + 2 \cos 4}}{1 - 2 \sin^2 1}$.

13. Обчислити $\frac{\sqrt{6}}{2} \cos \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{12}$.
14. Обчислити $2\sqrt{6} \cos \frac{\pi}{12} + 2\sqrt{6} \sin \frac{\pi}{12}$.
15. Обчислити $\frac{\cos^2 26^\circ - \sin^2 34^\circ}{\sin 82^\circ}$.
16. Обчислити $\frac{\sin^2 64^\circ - \cos^2 56^\circ}{\cos 8^\circ}$.
17. Обчислити $\left(\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{16} + \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{16} \right) \cdot \cos \frac{\pi}{8}$.
18. Обчислити $\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{5} + \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{10} \right) \cdot \cos \frac{\pi}{10}$.
19. Обчислити $\left(\sqrt{\cos^2 3} + \sqrt{\sin^2 3} \right)^2 + \sin 6$.
20. Обчислити $2 + \sqrt{\sin^2 4} + 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right) \cdot \sin \left(\frac{3\pi}{2} - 2 \right)$.

Група 3

21. Обчислити $8 \sin 10^\circ \cdot \sin 70^\circ \cdot \sin 50^\circ$.
22. Обчислити $\frac{3 - 4 \sin^2 \alpha}{4 \cos^2 \alpha - 3}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5}$.
23. Обчислити $\frac{\sin \alpha \cdot (3 - 4 \sin^2 \alpha)}{\cos \alpha \cdot (4 \cos^2 \alpha - 3)}$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{5}{3}$.
24. Обчислити $\left(\operatorname{tg} \frac{13\pi}{12} - \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} \right) \cdot \sin \frac{\pi}{3}$.
25. Обчислити $\left(\operatorname{ctg} \frac{9\pi}{8} - \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{8} \right) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$.
26. Обчислити $8 \sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ$.
27. Обчислити $128(\sin 4\alpha + 2 \sin 2\alpha) \cos \alpha$, якщо $\sin \alpha = 0, 25$.
28. Обчислити $\frac{1}{2 \sin 10^\circ} - 2 \sin 70^\circ$.
29. Обчислити $\alpha + \beta$, якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$; $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{7}$. Відповідь записати в градусній мірі.
30. Обчислити $\alpha + \beta$, якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$; $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$; $\sin \beta = \frac{\sqrt{21}}{14}$. Відповідь записати в градусній мірі.

Варіант В

Група 1

1. Обчислити $13\sqrt{2}\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$.
2. Обчислити $13\sqrt{2}\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$.
3. Обчислити $2 - 13\cos 2\alpha + \sin^{-1} 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = -5$.
4. Обчислити $1 + 5\sin 2\alpha - 3\cos^{-1} 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = -2$.
5. Спростити вираз $\frac{\cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha - 1}{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}$.
6. Спростити вираз $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$.
7. Спростити вираз $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$.
8. Обчислити $(\sin 165^\circ + \sin 45^\circ) \cdot (\sin 135^\circ + \sin 15^\circ) + (\sin 75^\circ + \sin 315^\circ) \cdot (\sin 105^\circ + \sin 225^\circ)$.
9. Обчислити $(\cos 160^\circ + \cos 40^\circ) \cdot (\cos 140^\circ + \cos 20^\circ) + (\cos 50^\circ + \cos 70^\circ) \cdot (\cos 130^\circ + \cos 110^\circ)$.
10. Обчислити $\sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$.

Група 2

11. Обчислити $((\cos 40^\circ)^{-1} + (\operatorname{tg} 50^\circ)^{-1}) \cdot \operatorname{tg} 25^\circ$.
12. Обчислити $((\cos 40^\circ)^{-1} - (\operatorname{tg} 50^\circ)^{-1}) \cdot \operatorname{ctg} 25^\circ$.
13. Обчислити $\sin^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8}$.
14. Обчислити $\sin^4 \frac{\pi}{12} + \cos^4 \frac{5\pi}{12} + \sin^4 \frac{7\pi}{12} + \cos^4 \frac{11\pi}{12}$.
15. Обчислити $16 \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ$.
16. Обчислити $\sqrt{\frac{1 + \cos 250^\circ}{2}} \cdot \frac{1}{\cos 125^\circ}$.
17. Обчислити $\sqrt{2(1 - \cos 400^\circ)} + 2(\sin 100^\circ + \cos 100^\circ)^2$.
18. Обчислити $\frac{11 \sin \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 2$.
19. Обчислити $\frac{7 \sin^3 \alpha + \cos \alpha}{5 \cos^3 \alpha + 3 \sin \alpha}$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = -0,5$.
20. Обчислити $\frac{8 \sin 2\alpha - 12 \cos 2\alpha}{4 \sin 2\alpha + 5 \cos 2\alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 3$.

Група 3

21. Обчислити $(\operatorname{tg} 435^\circ - \operatorname{tg} 375^\circ) \cdot (\operatorname{tg} 615^\circ + \operatorname{tg} 375^\circ) \cdot \operatorname{tg} 390^\circ$.
22. Обчислити $(\operatorname{tg} 435^\circ - \operatorname{tg} 375^\circ) \cdot (\operatorname{tg} 615^\circ + \operatorname{tg} 375^\circ)^{-1} \cdot \operatorname{tg} 390^\circ$.
23. Обчислити $8(\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha)$, якщо $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$.
24. Обчислити $\operatorname{tg} 12^\circ \cdot \operatorname{tg} 24^\circ + \operatorname{tg} 24^\circ \cdot \operatorname{tg} 54^\circ + \operatorname{tg} 54^\circ \cdot \operatorname{tg} 12^\circ$.
25. Обчислити $\operatorname{ctg} 80^\circ \cdot \operatorname{ctg} 70^\circ + \operatorname{ctg} 70^\circ \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ \cdot \operatorname{ctg} 80^\circ$.
26. Обчислити $\sin^3 2x \cos 6x + \cos^3 2x \sin 6x$, якщо $x = \frac{\pi}{16}$.
27. Обчислити $\operatorname{tg} 18^\circ + \operatorname{tg} 42^\circ + \sqrt{3} \operatorname{tg} 18^\circ \cdot \operatorname{tg} 42^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ$.
28. Обчислити $\frac{\operatorname{ctg} 70^\circ + 4 \cos 70^\circ}{\cos 30^\circ}$.
29. Обчислити $8 \sin \frac{3\pi}{10} \sin \frac{\pi}{10}$.
30. Обчислити $(\sin 10^\circ)^{-1} - \sqrt{3}(\cos 10^\circ)^{-1}$.

§ 6. Перетворення виразів, що містять обернені тригонометричні функції

Варіант А

Група 1

1. Обчислити в градусах $\arcsin \frac{1}{2} - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. Обчислити в градусах $\arccos 0 - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Обчислити в градусах $\arcsin(-1) + \arccos(-\frac{1}{2})$.
4. Обчислити в градусах $\arcsin(-\frac{1}{2}) + \arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})$.
5. Обчислити в градусах $\arcsin(-1) + \arccos 1$.
6. Обчислити в градусах $\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2} + 3 \arcsin 0$.
7. Обчислити в градусах $\frac{1}{3} \operatorname{arctg}(-\frac{\sqrt{3}}{3})$.
8. Обчислити в градусах $5 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$.
9. Обчислити в градусах $3 \operatorname{arctg} \sqrt{3} - 2 \arccos \frac{1}{2}$.
10. Обчислити в градусах $0,5 \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \operatorname{arctg}(-1)$.

Група 2

11. Обчислити $3 \sin(\arcsin \frac{1}{3})$.
12. Обчислити $10 \cos(\arccos 0, 2)$.
13. Обчислити $5 \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-2))$.
14. Обчислити $4 \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 5)$.
15. Обчислити $5 \sin(\arccos \frac{3}{5})$.
16. Обчислити $13 \cos(\arcsin \frac{5}{13})$.
17. Обчислити $14 \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} 3, 5)$.
18. Обчислити $9 \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} \frac{3}{4})$.
19. Обчислити $6 \cos(\arccos 0 + \arcsin \frac{1}{3})$.
20. Обчислити $10 \sin(\arcsin 1 - \arccos 0, 2)$.

Група 3

21. Обчислити $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} 0 + \operatorname{arctg} \frac{2}{3})$.
22. Обчислити $\operatorname{ctg}(\arccos 0 - \operatorname{arcctg} \frac{4}{7})$.
23. Обчислити $\sin(\arcsin(-1) - \arcsin \frac{3}{5})$.

24. Обчислити $\cos(2 \operatorname{arctg}(-1) - \arccos \frac{7}{25})$.
25. Обчислити $\operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{2}{3})$.
26. Обчислити $\sin(\arccos(-1) + \arcsin \frac{3}{5})$.
27. Обчислити $\cos(6 \arcsin \frac{1}{2} - \arccos \frac{13}{25})$.
28. Обчислити $\sin(5 \arcsin \frac{1}{2} + \arccos(-\frac{1}{2}) - \arccos 0, 8)$.
29. Обчислити $\cos(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + 2 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - \arccos \frac{24}{25})$.
30. Обчислити $\sin(3 \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}(-1) + \arcsin \frac{7}{25})$.

Варіант Б

Група 1

1. Обчислити $\sin^2(\arccos 0, 25)$.
2. Обчислити $\cos^2(\arcsin 0, 7)$.
3. Обчислити $\sin^2(\operatorname{arctg} 3)$.
4. Обчислити $\sin^2(\operatorname{arctg}(-7))$.
5. Обчислити $\cos^2(\operatorname{arctg} 3)$.
6. Обчислити $\cos^2(\operatorname{arctg} 2)$.
7. Обчислити $\operatorname{tg}(\arcsin \frac{3}{5})$.
8. Обчислити $\operatorname{tg}(\arccos 0, 8)$.
9. Обчислити $\operatorname{ctg}(\arcsin \frac{5}{13})$.
10. Обчислити $\operatorname{ctg}(\arccos 0, 6)$.

Група 2

11. Обчислити $\pi - \arcsin(\sin 3)$.
12. Обчислити $\arccos(\cos 3) + \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 3)$.
13. Обчислити $2 \arcsin(\cos 3) - \pi$.
14. Обчислити $2 \arccos(\sin 3) + \pi$.
15. Обчислити $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 3) + \pi$.
16. Обчислити $\arcsin(\sin 4) - \pi$.
17. Обчислити $0, 5 \arccos(\cos 4) - \pi$.
18. Обчислити $2 \arccos(\sin 4) + \pi$.
19. Обчислити $3\pi + 2 \arcsin(\cos 4)$.
20. Обчислити $\pi + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 4)$.

Група 3

21. Обчислити $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{2}{3})$.
22. Обчислити $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3)$.
23. Обчислити $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3})$.
24. Обчислити $\cos(\arccos \frac{7}{25} + \arccos \frac{3}{5})$.
25. Обчислити $\sin(\arcsin \frac{3}{5} - \arcsin \frac{24}{25})$.
26. Обчислити $\cos(\arcsin(-0,8) + \arccos 0,6)$.
27. Обчислити $\sin(\arccos(-0,6) - \arccos 0,8)$.
28. Обчислити $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7})$.
29. Обчислити $\operatorname{tg}(\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} + \arccos \frac{1}{\sqrt{10}})$.
30. Обчислити $\cos(\arcsin \frac{\sqrt{21}}{7} + \arcsin \frac{\sqrt{21}}{14})$.

Варіант В**Група 1**

1. Обчислити $2 \sin^2(\frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{5})$.
2. Обчислити $2 \sin^2(\frac{1}{2} \arccos \frac{3}{4})$.
3. Обчислити $2 \cos^2(\frac{1}{2} \arcsin 0,6)$.
4. Обчислити $2 \cos^2(\frac{1}{2} \arccos \frac{7}{25})$.
5. Обчислити $\operatorname{tg}^2(\frac{1}{2} \arccos \frac{7}{12})$.
6. Обчислити $\operatorname{tg}^2(\frac{1}{2} \arccos \frac{9}{11})$.
7. Обчислити $\operatorname{ctg}^2(\frac{1}{2} \arcsin \frac{5}{13})$.
8. Обчислити $\operatorname{tg}^2(\frac{1}{2} \arcsin \frac{24}{25})$.
9. Обчислити $\operatorname{ctg}^2(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{3}{4})$.
10. Обчислити $\operatorname{tg}^2(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{5}{12})$.

Група 2

11. Обчислити $\sin(2 \arcsin \frac{3}{5})$.
12. Обчислити $625 \sin(2 \arccos \frac{7}{25})$.
13. Обчислити $\cos(2 \arcsin \frac{3}{4})$.
14. Обчислити $\cos(2 \arccos \frac{3}{4})$.

15. Обчислити $\sin(2 \operatorname{arctg} \frac{3}{4})$.
16. Обчислити $\cos(2 \operatorname{arctg} \frac{3}{4})$.
17. Обчислити $\operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3})$.
18. Обчислити $\operatorname{ctg}(2 \arccos \frac{5}{\sqrt{26}})$.
19. Обчислити $\sin(2 \operatorname{arctg} 3)$.
20. Обчислити $\operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} 3)$.

Група 3

21. Обчислити в градусах $\arccos \frac{7}{5\sqrt{2}} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$.
22. Обчислити в градусах $\operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7}$.
23. Обчислити в градусах $\arcsin \frac{\sqrt{21}}{7} + \arcsin \frac{\sqrt{21}}{14}$.
24. Обчислити в градусах $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$.
25. Обчислити в градусах $\arccos \frac{1}{7} - \arccos \frac{13}{14}$.
26. Обчислити в градусах $\operatorname{arctg} 5 + \operatorname{arctg} \frac{2}{3}$.
27. Обчислити в градусах $\operatorname{arctg} 4 + \operatorname{arctg} \frac{5}{3}$.
28. Обчислити в градусах $\arccos \frac{1}{\sqrt{26}} + \operatorname{arctg} \frac{3}{2}$.
29. Обчислити в градусах $\operatorname{arctg} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$.
30. Обчислити в градусах $\arccos \frac{3}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7}$.

§ 7. Показникова та логарифмічна функції

Варіант А

Група 1

1. Обчислити $128^{\frac{1}{7}} \cdot 32^{\frac{1}{5}} : 64^{\frac{1}{3}}$.
2. Обчислити $\left(2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} : 4^{\frac{1}{4}}\right)^2$.
3. Обчислити $\log_5 \frac{1}{25} + \log_2 64$.
4. Обчислити $2 \log_2 \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \log_3 27$.
5. Обчислити $\log_2 \log_5 625$.
6. Обчислити $\left(2^{\frac{5}{4}} \cdot 3^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{2}{3}} : \left(3^{\frac{1}{4}} : 2^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}$.
7. Обчислити $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}}{4^{\frac{5}{12}}} \cdot \pi^0$.
8. Обчислити $\frac{\sqrt[3]{3}}{e^0 \cdot \sqrt{3}} \cdot 9^{\frac{7}{12}}$.
9. Обчислити $\left(\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[80]{10^{240}} + (0,01)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$.
10. Обчислити $\left(\left(4^{-\frac{7}{9}}\right)^{\frac{4}{7}}\right)^{-0,75} : \left((-2\sqrt[3]{2})^{-2}\right)^{-1}$.

Група 2

11. Обчислити $3^{(\sqrt{3}-1)^2} \cdot 9^{\sqrt{3}}$.
12. Обчислити $24^{\sqrt{3}} : 2^{\sqrt{27}} \cdot 3^{1-\sqrt{3}}$.
13. Обчислити $18^{\sqrt{2}} \cdot 3^{(\sqrt{2}-1)^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}-1}$.
14. Обчислити $\log_2 5 - \log_2 45 + \log_2 72$.
15. Обчислити $3 \log_3 \frac{3}{2} + \log_3 8$.
16. Знайти x , якщо $\lg x = (\lg 42 - \lg 7) \cdot (\lg 50 + \lg 2)$.
17. Знайти x , якщо $\log_3 x = \frac{1}{2} \log_3 25 - 2 \log_3 0,5$.
18. Знайти x , якщо $\log_3 x = \log_3 8 - 2 \log_3 2 + \log_3 \frac{9}{2}$.
19. Знайти x , якщо $\log_2 x = \log_2 7 - \log_2 63 + \log_2 36$.
20. Знайти x , якщо $\log_2 x = 3 \log_2 2 - \log_2 72 + 3 \log_2 3$.

Група 3

21. Обчислити $10^{\lg 3 + \lg \frac{2}{3}}$.

22. Обчислити $10^{2 - \lg 2}$.

23. Обчислити $6^{2 - \log_6 9}$.

24. Обчислити $9^{\log_{81} 25}$.

25. Обчислити $8^{4 \log_{16} 3}$.

26. Обчислити $\sqrt{7}^{2 \log_7 5}$.

27. Обчислити $5^{2 \log_{25} 3 - 1}$.

28. Обчисливши $7^{\log_a 5}$, де $a = \sqrt[3]{7}$, вказати номер правильної відповіді:

1) 125; 2) $\frac{1}{25}$; 3) 25; 4) $\sqrt[3]{5}$; 5) $\sqrt{75}$.

29. Обчисливши $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_a 8}$, де $a = 3\sqrt{3}$, вказати номер правильної відповіді:

1) $\frac{1}{8}$; 2) 2; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 4; 5) $\frac{1}{4}$.

30. Обчислити $\log_{5^7 \cdot \sqrt{5}} \sqrt[4]{125}$.

Варіант Б

Група 1

1. Обчислити $\left(2^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{8}} + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{2}}$.

2. Обчислити $\log_5 \frac{1}{125} - 2 \log_{\frac{1}{2}} 2\sqrt{2}$.

3. Обчислити $2^{-\frac{3}{4}} : 2^{\frac{5}{4} + \sqrt{3}} \cdot \left(2^{2\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 4$.

4. Обчислити $\log_{49} 7 + \log_9 243$.

5. Обчислити $2 \log_4 \frac{1}{128} + \log_{\sqrt{7}} \frac{1}{7}$.

6. Обчислити $2 \log_5 \frac{1}{5\sqrt{5}} + \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64}$.

7. Обчислити $\left(3^{\sqrt[5]{8}}\right)^{\sqrt[5]{4}} - 8\sqrt{3} : 2^{3\sqrt{3}}$.

8. Обчислити $2 \log_4 32 - 4 \log_{16} 8$.

9. Обчислити $4 \log_{16} 128 + 2 \log_9 243$.

10. Обчислити $\left(81^{-\frac{1}{4}} \cdot 27^{0,5} + 3,5^0\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3-1}} - 1\right)$.

Група 2

11. Обчислити $\frac{2}{5} (\log_3 81 + 16^{\log_2 3})^{\log_{85} 25}$.
12. Обчислити $5^{\log_{\sqrt{5}} 4 - \log_5 2 + 2 \log_{25} 2}$.
13. Обчислити $4^{\log_3 2} - 2^{\log_3 4} + (\sqrt{3})^{\log_2 4 + \log_{\sqrt[4]{3}} \sqrt{2}}$.
14. Обчислити $3^{\log_5 7} - 7^{\log_5 3}$.
15. Обчислити $\log_{ab} \frac{\sqrt{b}}{a}$, якщо $\log_a b = 2$.
16. Обчислити $3 \log_{\sqrt{ab}} \frac{a^3}{\sqrt{b}}$, якщо $\log_a b = 2$.
17. Обчислити $\log_7 3 \cdot \log_{17} 7 \cdot \log_9 17$.
18. Обчислити $\log_{21} 25 \cdot \log_{13} 21 \cdot \log_5 13$.
19. Обчислити $\log_3 (\log_2 5 \cdot \log_5 8)$.
20. Обчислити $2^{\log_4 (\sqrt{3}-2)^2} + 3^{\log_9 (\sqrt{3}+2)^2}$.

Група 3

21. Знайти суму цілих від'ємних значень аргументу x , що належить області визначення функції

$$y = \log_2 \frac{x^2 + 6x + 5}{x + 2}.$$

22. Знайти суму цілих додатних значень аргументу x , що належить області визначення функції

$$y = \log_3 \frac{x^2 - 7x + 6}{2 - x}.$$

23. Знайти суму цілих значень аргументу x , що належить області визначення функції

$$y = \log_{x-2} \frac{3x-1}{x^2+1} + \sqrt{49-x^2}.$$

24. Знайти суму цілих значень аргументу x , що належить області визначення функції

$$y = (2x + 3)^{\frac{1}{4}} + \lg(9 - x^2).$$

25. Знайти суму цілих значень аргументу x , що належить області визначення функції

$$y = \frac{1}{\log_2 \frac{2x-8}{1-x}}.$$

26. Знайти суму цілих значень аргументу x , що належить області визначення функції

$$y = \frac{1}{\lg \frac{3-3x}{x-5}}.$$

27. Знайти найменше натуральне значення аргументу x , що належить області визначення функції

$$y = \frac{\sqrt{2x-10}, 5}{\ln |x-7|}.$$

28. Знайти найбільше ціле значення аргументу x , що належить області визначення функції

$$y = \frac{\sqrt{11-2x}}{\ln |x-4|}.$$

29. Знайти найменше ціле значення аргументу x , що належить області визначення функції

$$y = \lg(x^3 - 6x^2 + 5x).$$

30. Знайти найбільше ціле значення аргументу x , що належить області визначення функції

$$y = \ln(3x - 2x^2 - x^3).$$

Варіант В Група 1

1. Вказати, які з наступних алгебраїчних виразів мають зміст:

$$1) (-8)^{\frac{4}{3}}; \quad 2) 8^{-\frac{4}{3}}; \quad 3) -(-8)^{\frac{4}{3}}; \quad 4) -(-8)^{-\frac{4}{3}}?$$

2. Вказати, які з наступних алгебраїчних виразів мають зміст:

1) $(-8)^{-\frac{1}{3}}$; 2) $0^{-\frac{1}{3}}$; 3) $(-1)^{-1}$; 4) 0^0 ?

3. В яких із наступних пар дійсних чисел перше число більше за друге:

1) $\log_7 3$ і $\log_5 9$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ і $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$; 3) $\log_2 3$ і $\log_3 2$;

4) $\log_2 10$ і $\log_5 90$?

4. Визначити знак виразу $A = \log_{\log_3 2} 1,2 + \log_{\log_3 2} 5$. Вказати правильний варіант відповіді:

1) $A > 0$; 2) $A < 0$; 3) визначити знак неможливо.

5. Знайти цілу частину значення виразу $\log_{\frac{1}{2}}(0,5(1 + \log_3 13))$.

6. Вказати, які з наступних показникових функцій є спадними:

1) $y = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{6-4\sqrt{2}}\right)^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{5}-2}\right)^x$; 3) $y = (3 - \sqrt{7})^x$;

4) $y = (\log_3 2)^x$.

7. Яке з наступних чисел є найбільшим:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt[5]{5}}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt[4]{4}}$; 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt[3]{3}}$; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$?

8. Які з наступних нерівностей є вірними:

1) $\log_a 7 < \log_a 6$, якщо $a > 1$;

2) $\log_a 5 > \log_a 6$, якщо $0 < a < 1$;

3) $\log_a \sqrt{2} > 0$, якщо $a > 1$;

4) $\log_a \frac{1}{\sqrt{3}} < 0$, якщо $0 < a < 1$?

9. Які з наступних нерівностей є вірними:

1) $\log_{\log_2 3} 1,2 < 0$; 2) $\log_{\log_3 2} 0,5 > 0$; 3) $\log_{\log_2 5} 0,8 < 0$;

4) $\log_{\log_5 2} 3 > 0$; 5) $\log_{\log_3 2} 3 - \log_{\log_3 2} 4 > 0$?

10. Які з наступних нерівностей є вірними:

1) $\log_a 5 < \log_a 2$, якщо $a > 1$;

2) $\log_a 2\sqrt{15} < \log_a 5\sqrt{3}$, якщо $a > 1$;

3) $\log_a \sqrt{5} > 0$, якщо $a > 1$;

4) $\log_a \sqrt{\frac{2}{3}} > 0$, якщо $0 < a < 1$;

5) $\log_a \sqrt{11} < 0$, якщо $a > 1$?

Група 2

11. Які з наступних нерівностей є вірними:

- 1) $\log_{2,1} 2 > 1$; 2) $\log_2 \frac{3}{7} > -1$; 3) $\log_{0,25} 5 + 1 > 0$;
 4) $\log_{1,5} \sqrt{5} - 2 < 0$?

12. Обчислити суму найбільшого та найменшого значень функції

$$y = 2^{2 \sin x + 1}.$$

13. Знайти найбільше значення функції $y = (0, 8)^{x^2 - 2x + 3}$.

14. Знайти найменше значення функції $y = (2, 4)^{3 - 2x + x^2}$.

15. Обчислити суму найбільшого та найменшого значень функції

$$y = \log_4(4 \sin x + 12).$$

16. Знайти найменше значення функції $y = \log_2(2x^2 - 8x + 10)$.

17. Знайти найбільше значення функції $y = \log_{0,25}(2x^2 + 4x + 6)$.

18. Скільки різних цілих значень набуває функція

$$y = \log_2(\sqrt{225 - x^2} + 1)?$$

19. Скільки різних цілих значень набуває функція

$$y = \left(\sqrt[4]{5}\right)^{\frac{24}{x^2+6}}?$$

20. Скільки різних цілих значень набуває функція

$$y = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{-\frac{12}{|x|+4}}?$$

Група 3

21. Які з наступних рівностей є вірними:

- 1) $\frac{\log_2 0,3}{|\log_2 0,3|} = 1$; 2) $\frac{\ln 2,3}{|\ln 2,3|} = 1$; 3) $\frac{\log_{0,2} 0,3}{|\log_{0,2} 0,3|} = 1$;
 4) $\frac{\log_{0,3} 7,3}{|\log_{0,3} 7,3|} = 1$; 5) $\frac{\lg 0,3}{|\lg 0,3|} = -1$?

22. Обчислити $\log_{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} x$, якщо $\operatorname{tg} 2x = -\frac{3}{4}$ і $\sin 2x > 0$.
23. Обчислити $\sqrt{3} \log_{\sqrt{x}} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$, якщо $\log_b a = \sqrt{3}$.
24. Обчислити $3 \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$.
25. Обчислити $3^x + 3^{-x}$, якщо $9^x + 9^{-x} = 34$.
26. Обчислити $\log_{(\sqrt[3]{0,5} + \sqrt[3]{4})} 13, 5$.
27. Обчислити $\log_{40,5} (\sqrt[4]{8} + \sqrt[4]{0,5})$.
28. Знайти найменше ціле значення аргументу x , що належить області визначення функції $y = \log_2 \log_3 \log_4 x$.
29. Знайти найбільше ціле значення аргументу x , що належить області визначення функції $y = \arcsin(\lg \frac{x}{10})$.
30. Знайти найменше ціле значення аргументу x , що належить області визначення функції $y = \lg(\sqrt{x-3} - 2)$.

§ 8. Алгебраїчні раціональні рівняння

Варіант А

Група 1

1. Розв'язати рівняння $\frac{6x+7}{7} - 3 = \frac{5x-3}{8}$.

2. Розв'язати рівняння $10 - \frac{3x-1}{2} = \frac{6x+3}{11}$.

3. Розв'язати рівняння $\frac{2x-5}{x-2} + 1 = \frac{3x-5}{x-1}$.

4. Знайти найменший серед розв'язків рівняння $\frac{6x+3}{1+2x} - \frac{5+2x}{x+1} = 2$.

5. Серед множини чисел $\{3; 1, 6; 0; 1\frac{2}{3}; -7; -2\pi; -4\sqrt{3}\}$ та множини розв'язків рівняння $\frac{8x-10}{x-2} + \frac{6x+11}{x+1} = 18$ вибрати найменше число.

6. Серед множини чисел $\{3; 1, 6; 0; 1\frac{2}{3}; -5; -7; -2\pi; -4\sqrt{3}\}$ та множини розв'язків рівняння $\frac{4}{3x+6} = \frac{9}{8x+16}$ вибрати найбільше від'ємне ціле число.

7. Серед множини чисел $\{3; 1, 6; 0; 1\frac{2}{3}; -7; -2\pi; -4\sqrt{3}\}$ вибрати найменше число, що є розв'язком рівняння

$$z + \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{3} \left(z + \frac{1}{4} \right) \right) = \frac{10}{3} \left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{80} \right).$$

8. Серед множини чисел $\{3; 1, 6; 0; 1\frac{2}{3}; -7; -2\pi; -4\sqrt{3}\}$ та множини розв'язків рівняння $1, 5(\frac{2}{3}x + 2) - 4(2, 5x - 0, 75) = 18(\frac{1}{3} - 0, 5x)$ вибрати найменше додатне ціле число.

9. Серед множини чисел $\{3; 1, 6; 0; 1\frac{2}{3}; -7; -2\pi; -4\sqrt{3}\}$ та множини розв'язків рівняння $2\frac{1}{3}(5z - 1) + 5\frac{5}{6}(4 - 2z) = 21$ вибрати найбільше від'ємне ціле число.

10. Серед множини чисел $\{3; 1, 6; 0; 1\frac{2}{3}; -7; -2\pi; -4\sqrt{3}\}$ та множини розв'язків рівняння $\frac{27x-1}{10} = \frac{4(3x-1)}{5} + 0, 3x + 2, 5$ вибрати найменше додатне число.

Група 2

11. Знайти спільний розв'язок рівнянь $x^2 - 2003x - 2004 = 0$ та $x^2 - 2005x + 2004 = 0$.

12. Знайти спільний розв'язок рівнянь $x^2 - 2003x - 2004 = 0$ та $x^2 + 2005x + 2004 = 0$.

13. Знайти найбільше число серед розв'язків рівнянь $x^2 - 2003x + 2002 = 0$ та $x^2 - 2003x - 2004 = 0$.

14. Знайти найменше число серед розв'язків рівнянь $x^2 + 2004x + 2003 = 0$ та $x^2 + 2004x - 2005 = 0$.

15. Знайти число a , якщо один із розв'язків рівняння $28x^2 + 11a - 6 = 0$ дорівнює -1 .

16. Знайти число a , якщо один із розв'язків рівняння $ax^2 + 5x - 2 = 0$ дорівнює -2 .

17. Знайти квадрат суми розв'язків рівняння $(4a+3)^2 + (2a-1) \times (2a+1) = 8$.

18. Знайти квадрат суми розв'язків рівняння $(3a-5)^2 - (2a+7) \times (2a-7) = 74$.

19. Розв'язати рівняння $(2x-6)^2 - 3(2x-6)(2x-5) + 2(2x-5)^2 = 0$.

20. Обчислити добуток коренів рівняння

$$(3x-4)^2 - 6(3x-4)(2x-5) + 5(2x-5)^2 = 0.$$

Група 3

21. Розв'язати рівняння

$$2x^2 + \frac{3}{x-2} = 3x + 2 + \frac{3}{x-2}.$$

22. Розв'язати рівняння

$$2 - 3x - \frac{5}{x+2} = 2x^2 - \frac{5}{x+2}.$$

23. Розв'язати рівняння

$$\frac{2x^2 - 5x - 3}{2 + 3x - 2x^2} = 0.$$

24. Розв'язати рівняння

$$\frac{3x^2 - 5x - 2}{3 + 8x - 3x^2} = 0.$$

25. Розв'язати рівняння

$$\frac{3x^2 - x - 2}{x^2 + 2x - 3} = 2.$$

26. Розв'язати рівняння

$$\frac{3x^2 + x - 2}{x^2 - 2x - 3} = 2.$$

27. Обчислити добуток розв'язків рівняння

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} = \frac{1}{4}.$$

28. Обчислити добуток розв'язків рівняння

$$\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} = \frac{1}{4}.$$

29. Знайти найменший із розв'язків рівняння

$$\frac{(x^2 - 8)(x + 4)}{(x - 3)(x + 5)} = \frac{(2 - 3x)(x + 4)}{(x + 5)(x - 3)}.$$

30. Обчислити добуток розв'язків рівняння

$$\frac{(x^2 + 5)(x + 2)}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{(5x + 1)(x + 2)}{(x - 2)(x - 1)}.$$

Варіант Б
Група 1

1. Нехай x_1, x_2 — розв'язки рівняння $x^2 - 8x + 4 = 0$. Обчислити $x_1^{-2} + x_2^{-2}$.

2. Нехай x_1, x_2 — розв'язки рівняння $x^2 - 3x + 1 = 0$. Обчислити $x_1^3 + x_2^3$.

3. Нехай x_1, x_2 — розв'язки рівняння $x^2 + 6x + q = 0$ і $x_1 = -3x_2$. Знайти число q .

4. Нехай x_1, x_2 — розв'язки рівняння $x^2 - px - 8 = 0$, де $p < 0$, і $x_1 = -2x_2$. Знайти число p .

5. Нехай x_1, x_2 — розв'язки рівняння $x^2 - 8x + 4 = 0$, а $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ — розв'язки рівняння $x^2 + px + q = 0$. Знайти число p .

6. Нехай x_1, x_2 — розв'язки рівняння $x^2 - 8x + 4 = 0$, а $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ — розв'язки рівняння $x^2 + px + q = 0$. Знайти число q .

7. Нехай x_1, x_2 — розв'язки рівняння $x^2 - 8x + 4 = 0$, а $x_1 + x_2, x_1 \cdot x_2$ — корені квадратного тричлена $f(x) = 2x^2 + bx + c$. Знайти $f(6)$.

8. Нехай x_1, x_2 — розв'язки рівняння $3x^2 - 8x + 4 = 0$, а $x_1 + x_2, x_1 \cdot x_2$ — корені квадратного тричлена $f(x) = 9x^2 + bx + c$. Знайти $f(1)$.

9. Нехай x_1, x_2 — розв'язки рівняння $x^2 - 6x + 2 = 0$, а $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_1 \cdot x_2}$ — корені квадратного тричлена $f(x) = 8x^2 + bx + c$. Знайти $f(2)$.

10. Нехай x_1, x_2 — розв'язки рівняння $2x^2 - 3x - 1 = 0$, а $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}, \frac{1}{x_1^2 \cdot x_2^2}$ — корені квадратного тричлена $f(x) = \frac{1}{8}x^2 + bx + c$. Знайти $f(9)$.

Група 2

11. Знайти найменший розв'язок рівняння $9x^4 - 13x^2 + 4 = 0$.

12. Знайти найбільший розв'язок рівняння $x^4 - 21x^2 - 100 = 0$.

13. Розв'язати рівняння

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{13x + 13}{14x - 14}.$$

14. Знайти найбільший розв'язок рівняння

$$4(x^2 - 3x - 2)^2 - 9(x^2 - 3x - 2) + 2 = 0.$$

15. Знайти цілий розв'язок рівняння

$$\frac{x^2}{(2x + 3)^2} - \frac{7x}{2x + 3} + 6 = 0.$$

16. Знайти цілий розв'язок рівняння

$$\frac{x^2}{(3x - 4)^2} - \frac{9x}{3x - 4} + 8 = 0.$$

17. Обчислити добуток розв'язків рівняння

$$(x^2 + x + 1)(x^2 + x - 1) = 3.$$

18. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 5) = -6.$$

19. Знайти найменший розв'язок рівняння

$$\frac{x^2 + x - 5}{x} + \frac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0.$$

20. Знайти найбільший розв'язок рівняння

$$\frac{x^2 - 3x - 7}{x - 4} + \frac{7x - 28}{x^2 - 3x - 7} - 8 = 0.$$

Група 3

21. Розв'язати рівняння

$$\frac{x^3 - 27}{x - 3} = 4x + 15.$$

22. Розв'язати рівняння

$$\frac{x^3 + 125}{x + 5} = 40 - 7x.$$

23. Обчислити суму кубів розв'язків рівняння

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0.$$

24. Обчислити суму квадратів розв'язків рівняння

$$x^3 - 6x^2 - x + 6 = 0.$$

25. Знайти найбільший розв'язок рівняння

$$\frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} = -2, 5.$$

26. Обчислити суму цілих розв'язків рівняння

$$\frac{16}{x^2 + 2x - 8} - \frac{10}{x^2 + 2x - 2} = 3.$$

27. Обчислити суму цілих розв'язків рівняння

$$\frac{6}{(x + 1)(x + 2)} + \frac{8}{(x - 1)(x + 4)} = 1.$$

28. Знайти найменший розв'язок рівняння

$$\frac{1}{x(x + 2)} - \frac{1}{(x + 1)^2} = \frac{1}{12}.$$

29. Знайти найбільший цілий розв'язок рівняння

$$\frac{1}{(x - 2)^2} - \frac{3}{x(x - 4)} = 2.$$

30. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 2} + \frac{1}{x + 3} = 0.$$

Варіант В
Група 1

1. Обчислити добуток розв'язків рівняння

$$(x - 2)^4 + (x - 4)^4 = 16.$$

2. Обчислити добуток розв'язків рівняння

$$(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 16.$$

3. Обчислити добуток розв'язків рівняння

$$2(x - 2)^4 - 7(x - 2)^2(x - 3) - 4(x - 3)^2 = 0.$$

4. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$(x^2 + 2x + 3)^2 + 4(x^2 + 2x + 3)(x + 2) - 12(x + 2)^2 = 0.$$

5. Знайти найменший розв'язок рівняння

$$(x^2 + 4x + 5)^6 - 9(x^2 + 4x + 5)^3 + 8 = 0.$$

6. Знайти найбільший розв'язок рівняння

$$(x^2 - 2x + 2)^4 - 29(x^2 - 2x + 2)^2 + 100 = 0.$$

7. Обчислити добуток розв'язків рівняння

$$\frac{4x^2}{(x + 2)^2} + x^2 = 5.$$

8. Обчислити добуток розв'язків рівняння

$$x^2 + \frac{9x^2}{(x - 3)^2} = 40.$$

9. Знайти найбільший розв'язок рівняння

$$(x^2 - 4x + 2)^2 - 3(x - 2)^2 + 8 = 0.$$

10. Знайти найменший розв'язок рівняння

$$(x^2 + 2x)^2 - 15(x + 1)^2 + 15 = 0.$$

Група 2

11. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$(x + 2)(x - 1)(x - 3)(x - 6) = 16.$$

12. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$(x - 1)(x + 1)(x + 2)x = 24.$$

13. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$(x + 1)^2(x - 1)(x + 3) = 45.$$

14. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$(x - 1)^2(x + 1)(x - 3) = -3.$$

15. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$2\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 3\left(x - \frac{2}{x}\right) = 7.$$

16. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$2\left(x^2 + \frac{9}{x^2}\right) + 3\left(x - \frac{3}{x}\right) = 14.$$

17. Обчислити суму раціональних розв'язків рівняння

$$2(x^2 - 3x + 1)^2 + (x^2 + 3x + 1)x = 6x^2.$$

18. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$2(x^2 - 2x - 2)^2 + x(x^2 + 2x - 2) = 4x^2.$$

19. Обчислити суму квадратів розв'язків рівняння

$$x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0.$$

20. Обчислити суму квадратів розв'язків рівняння

$$2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Група 3

21. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$(x^2 - x + 1)^2 + 6(x^3 + 1) = 7(x + 1)^2.$$

22. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x - 1)^2 = 13(x^3 - 1).$$

23. Знайти найбільший розв'язок рівняння

$$(x - 3)(x + 4)(x + 6)(x - 2) = 10x^2.$$

24. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$(x + 2)(x + 3)(x + 8)(x + 12) = 4x^2.$$

25. Знайти найбільший розв'язок рівняння

$$\frac{(x^2 + 1)^2}{x(x + 1)^2} = \frac{25}{12}.$$

26. Обчислити добуток раціональних розв'язків рівняння

$$\frac{(x - 1)^2 x}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{2}{9}.$$

27. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$\frac{x^2 + 2x - 4}{2(x^2 + 6x - 4)} = \frac{x}{x^2 + 2x - 4}.$$

28. Знайти найбільший цілий розв'язок рівняння

$$\frac{x^2 - 4x + 5}{x} = \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 - 4x + 5}.$$

29. Розв'язати рівняння

$$\frac{2x}{x^2 + 4x + 4} + \frac{3x}{x^2 - x + 4} = \frac{5}{4}.$$

30. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$\frac{3x}{x^2 - x + 3} - \frac{2x}{x^2 + x + 3} = \frac{3}{5}.$$

§ 9. Іраціональні рівняння

Варіант А

Група 1

1. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$(x^2 - 3x - 10)\sqrt{3 - x} = 0.$$

2. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$(x^2 - 7x + 12)\sqrt{3 + 2x - x^2} = 0.$$

3. Розв'язати рівняння

$$\frac{x^2 - 2x - 15}{\sqrt{(x - 2)(x - 7)}} = 0.$$

4. Розв'язати рівняння

$$\frac{x^2 - 2x - 8}{\sqrt{10 + 3x - x^2}} = 0.$$

5. Розв'язати рівняння

$$\frac{\sqrt{x^2 - x - 6}}{2x^2 - 8} = 0.$$

6. Розв'язати рівняння

$$\frac{\sqrt{x^2 + 6x + 8}}{x^2 + x - 12} = 0.$$

7. Розв'язати рівняння

$$\frac{\sqrt{6 - x - x^2}}{2x - 5} = \frac{\sqrt{6 - x - x^2}}{x - 2}.$$

8. Розв'язати рівняння $(x - 3)\sqrt{x^2 - 5x + 10} = 6 - 2x$.

9. Знайти найбільший розв'язок рівняння

$$(x - 1)\sqrt{x^2 - x - 6} = 6x - 6.$$

10. Розв'язати рівняння $(x^2 - 4)\sqrt{6x - 11} = 8 - 2x^2$.

Група 2

11. Розв'язати рівняння $x - \sqrt{x+1} = 5$.
12. Розв'язати рівняння $7 - \sqrt{3x+7} = x$.
13. Розв'язати рівняння $4 + \sqrt{2x+3} = x - 2$.
14. Розв'язати рівняння $x - \sqrt{15-3x} = -1$.
15. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{2x+3} = x + 3$.
16. Розв'язати рівняння $\sqrt{3-x} = \frac{x+5}{\sqrt{1-3x}}$.
17. Розв'язати рівняння $\frac{x+8}{\sqrt{1-4x}} = \sqrt{2-x}$.
18. Розв'язати рівняння $\sqrt{10 + \sqrt[3]{x^5 + 31}} = 3$.
19. Розв'язати рівняння $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = 3$.
20. Розв'язати рівняння $x + 3\sqrt{x} = 10$.

Група 3

21. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2$.
22. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = 2$.
23. Розв'язати рівняння $\sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6$.
24. Обчислити суму розв'язків рівняння $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2$.
25. Розв'язати рівняння $\frac{2}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1} = \sqrt{4x-3}$.
26. Розв'язати рівняння $\sqrt{2x-1} - \sqrt{x-1} = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$.
27. Обчислити добуток розв'язків рівняння $\sqrt{x^2+9} - \sqrt{x^2-7} = 2$.
28. Обчислити добуток розв'язків рівняння $\sqrt{10-x^2} + \sqrt{x^2+3} = 5$.
29. Розв'язати рівняння $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-4} = 2\sqrt{x}$.
30. Розв'язати рівняння $\sqrt{x + \sqrt{x+11}} + \sqrt{x - \sqrt{x+11}} = 4$.

Варіант Б
Група 1

1. Розв'язати рівняння

$$\frac{\sqrt[3]{x^4} - 1}{\sqrt[3]{x^2} - 1} - \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1} = 4.$$

2. Знайти найменший розв'язок рівняння

$$\frac{\sqrt[5]{x} + 3}{5} + \frac{4}{\sqrt[5]{x} + 2} = 2.$$

3. Обчислити добуток розв'язків рівняння

$$x\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{x^2} + 4 = 0.$$

4. Розв'язати рівняння $\sqrt{x\sqrt[5]{x}} - \sqrt[5]{x\sqrt{x}} = 56$.

5. Розв'язати рівняння

$$\frac{x\sqrt[5]{x} - 1}{\sqrt[5]{x^3} - 1} + \frac{\sqrt[5]{x^3} - 1}{\sqrt[5]{x} - 1} = 16.$$

6. Розв'язати рівняння

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} = 3.$$

7. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$5\sqrt[15]{x^{22}} + \sqrt[15]{x^{14}\sqrt{x}} - 22\sqrt[15]{x^7} = 0.$$

8. Розв'язати рівняння $2\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[6]{x} - 18 = 0$.

9. Розв'язати рівняння $5\sqrt[5]{x^3} + 3\sqrt[10]{x^3} = 8$.

10. Обчислити добуток розв'язків рівняння $3\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[3]{x^{-1}} = 2x^{-1}$.

Група 2

11. Розв'язати рівняння $\sqrt{2x-1} + 5\sqrt[4]{2x-1} - 6 = 0$.
12. Розв'язати рівняння $2\sqrt{5x+1} - 7\sqrt[4]{5x+1} = 15$.
13. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt[6]{3x-2} = 4$.
14. Розв'язати рівняння $\sqrt[5]{2x+3} + 6\sqrt[10]{2x+3} = 7$.
15. Обчислити добуток розв'язків рівняння $x^2 + \sqrt{x^2+20} = 22$.
16. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$x^2 + 3x - 18 + 4\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 0.$$

17. Обчислити суму розв'язків рівняння $x^5 - 33x^2\sqrt{x} + 32 = 0$.
18. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$\sqrt{1 + x\sqrt{10x^2 + 6}} = 2x - 1.$$

19. Розв'язати рівняння $1 + \sqrt{1 + x\sqrt{x^2 - 24}} = x$.
20. Обчислити суму розв'язків рівняння $\sqrt[3]{x-2} = x - 2$.

Група 3

21. Обчислити добуток розв'язків рівняння

$$10 - x = 9\sqrt{12 + x - 4\sqrt{x+8}}.$$

22. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+13} + 4\sqrt{x+9} = x - 1$.
23. Розв'язати рівняння $\sqrt[5]{2x-8} = \sqrt[5]{2x} + \frac{4}{x}\sqrt[5]{2x-8}$.
24. Розв'язати рівняння $\sqrt[4]{x+1} + \frac{1}{x}\sqrt[4]{x+1} = 3\sqrt[4]{3x}$.
25. Обчислити добуток розв'язків рівняння

$$\sqrt{x^2-1} - (x+5)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = 0.$$

26. Обчислити добуток розв'язків рівняння

$$\sqrt{x^2-1} - (x+5)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = 0.$$

27. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{\frac{y}{y+3}} - 3\sqrt{\frac{y+3}{y}} = 2.$$

28. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{\frac{2x}{x+1}} - \sqrt{\frac{2(x+1)}{x}} = 1.$$

29. Розв'язати рівняння $\sqrt{2x+7} + \sqrt{3x+11} = \sqrt{x+4}$.

30. Розв'язати рівняння $\sqrt{5x-1} - \sqrt{3x-2} = \sqrt{x-1}$.

Варіант В Група 1

1. Розв'язати рівняння $\sqrt{3x^2 + x - 14} + 2x^2 - 8x + 8 = 0$.

2. Розв'язати рівняння $\sqrt{2x^2 - x - 6} + (x^2 + 5x - 14)^2 = 0$.

3. Розв'язати рівняння $\sqrt[4]{3x^2 - 2x - 1} + |3x^2 - 5x + 2| = 0$.

4. Розв'язати рівняння $\sqrt[4]{3x^2 - 5x - 12} + \sqrt{2x^2 - 5x - 3} = 0$.

5. Розв'язати рівняння $|x^6 - 32x| + \sqrt[4]{x-2} = 0$.

6. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2 - 5x - 6} + 1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}(2x - 4)\right) = 0$.

7. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2 - x - 12} + 1 + \cos(\pi(x + 3)) = 0$.

8. Розв'язати рівняння $\sqrt[4]{x^2 - 4x + 3} = \sqrt{5x - 6 - x^2}$.

9. Розв'язати рівняння $\sqrt[4]{5x - 2 - 2x^2} = \sqrt[3]{2x^2 - 7x + 3}$.

10. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2 - x - 6} - \sqrt{2 - x - x^2} = 2 + x$.

Група 2

11. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{4x+3} - \sqrt[3]{x+2} = 1$.
12. Знайти найменший розв'язок рівняння $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$.
13. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{7-\sqrt{x}} = 2$.
14. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}} - \sqrt[3]{5+\sqrt{x}} = 1$.
15. Обчислити $\frac{7}{3}$ суми розв'язків рівняння

$$\sqrt[3]{(x+1)^2} - 2\sqrt[3]{(x-1)^2} = \sqrt[3]{x^2-1}.$$

16. Обчислити суму розв'язків рівняння $\sqrt[4]{x+10} + \sqrt[4]{7-x} = 3$.
17. Обчислити суму розв'язків рівняння $\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5$.
18. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$\sqrt{10+x+6\sqrt{1+x}} + \sqrt{5-x+2\sqrt{4-x}} = 7.$$

19. Обчислити суму цілих розв'язків рівняння

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = 1.$$

20. Розв'язати рівняння

$$\frac{x}{x+3} - 2\sqrt{\frac{x+3}{x}} = 3.$$

Група 3

21. Знайти найменший розв'язок рівняння

$$x - 2\sqrt{x\sqrt{x-1}} + 2 + 2 = 0.$$

22. Розв'язати рівняння $2 - x = \sqrt{-2x\sqrt{5-4x}-1}$.

23. Знайти найменший розв'язок рівняння

$$4x^2 + 8x + 5 = 4x\sqrt{8x+5}.$$

24. Знайти найбільший розв'язок рівняння

$$x^2 + 2x + 15 = 2x\sqrt{2x + 15}.$$

25. Знайти найменший розв'язок рівняння

$$\sqrt{2x^2 + 5x - 27} - \sqrt{2x^2 + 5x + 12} = -3.$$

26. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x - 2} + \sqrt{2x - 5} + \sqrt{x + 2 + 3\sqrt{2x - 5}} = 7\sqrt{2}.$$

27. Обчислити потрійний добуток розв'язків рівняння

$$\sqrt[3]{(x^2 + 1)(x - 1) - x\sqrt{x^2 - 1}} = x - 1.$$

28. Знайти найбільший розв'язок рівняння $\sqrt{x + 1} = \sqrt[3]{x + 5}$.

29. Обчислити добуток розв'язків рівняння $\sqrt[3]{2 - x} = 1 - \sqrt{x - 1}$.

30. Знайти найбільший розв'язок рівняння

$$\sqrt{x^2 - 9} + 2\sqrt{x^2 - 16} = \frac{50}{x}.$$

§ 10. Показникові рівняння

Варіант А

Група 1

1. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{3^{x+1}} = \sqrt[5]{9^{x-1}}$.
2. Розв'язати рівняння $\sqrt[4]{4^{x-3}} = \sqrt[3]{2^{x+3}}$.
3. Розв'язати рівняння $\left(\frac{1}{0,125}\right)^{\frac{x}{3}} = 128$.
4. Розв'язати рівняння $1000 \cdot (0,1)^x = 100^x$.
5. Розв'язати рівняння $3^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$.
6. Розв'язати рівняння $\sqrt[4]{125^{3-2x}} = \frac{5}{\sqrt[4]{5}}$.
7. Розв'язати рівняння $\frac{1}{8} \cdot 2^{2(2x+8)} = \left(\frac{1}{4} \cdot 2^{-\frac{1}{2}}\right)^x$.
8. Знайти найбільший розв'язок рівняння $(0,2)^{x^2-16x-37,5} = 5\sqrt{5}$.
9. Знайти найбільший розв'язок рівняння $(2^{x-1})^{x+2} = 32^x \cdot 8^{x+2}$.
10. Знайти найбільший розв'язок рівняння $\frac{2^{x^2}}{4^x} = 8$.

Група 2

11. Розв'язати рівняння $2^{1-2x} = 54 \cdot 3^{2x-3}$.
12. Розв'язати рівняння $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{1-4x} = 3^{3-4x}$.
13. Розв'язати рівняння $2^{2x-6} = 0,8 \cdot 5^{x-3}$.
14. Розв'язати рівняння $2^{2x+9} \cdot 3^{6x+3} = 6^{4x+6}$.
15. Розв'язати рівняння $\frac{2^{x+5}}{7^x} = 3\frac{1}{2} \cdot \frac{2^{5x}}{(7^{x-1})^5}$.
16. Розв'язати рівняння $20^{6x+2} = 2^{4x+24} \cdot 5^{10x-8}$.
17. Розв'язати рівняння $2^{x-2} = 5^{2x-5} \cdot 0,032$.
18. Розв'язати рівняння $10^x - 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950$.
19. Розв'язати рівняння $12^{x^2} \cdot 11^{\sqrt{x}} - 11^{\sqrt{x}} \cdot 12^{x+2} = 0$.
20. Розв'язати рівняння $x^2 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 3^{\sqrt{x+2}} = 0$.

Група 3

21. Розв'язати рівняння $3^{x+2} + 4 \cdot 3^{x+1} = 21$.
22. Розв'язати рівняння $3^{2x-3} - 9^{x-1} + 3^{2x} = 675$.
23. Розв'язати рівняння $3^{x-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} - \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{4-x}{2}} = 105$.
24. Розв'язати рівняння $3 \cdot 7^{x+1} + 5 \cdot 7^{x-1} = 152$.
25. Розв'язати рівняння $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$.
26. Обчислити добуток розв'язків рівняння $3^{x^2+1} + 3^{x^2-1} = 270$.
27. Обчислити добуток розв'язків рівняння $2^{x^2+x-6} - 2^{x^2+x-9} = 56$.
28. Розв'язати рівняння $5 \cdot 2^{2\sqrt{x}+2} + 3 \cdot 2^{2\sqrt{x}-1} = 172$.
29. Розв'язати рівняння $7^{2x-3} + \left(\frac{1}{49}\right)^{1-x} + \left(\frac{1}{7}\right)^{1-2x} = 399$.
30. Розв'язати рівняння $\left(\frac{1}{6}\right)^{2-x} - \left(\frac{1}{6}\right)^{3-x} + 36^{\frac{x-1}{2}} = 246$.

Варіант Б

Група 1

1. Розв'язати рівняння $5^{x-1} + 2^x - 5^x + 2^{x+2} = 0$.
2. Розв'язати рівняння $27^{x-\frac{2}{3}} - 9^{x-1} = 2 \cdot 3^{2x-1} - 2 \cdot 3^{3x-1}$.
3. Розв'язати рівняння $2^{3x} \cdot 3^x - 2^{3x+1} \cdot 3^{x-1} = 192$.
4. Розв'язати рівняння $5^{x-1} - 5 \cdot (0,2)^{x-2} = 24$.
5. Розв'язати рівняння $4^x - 2^{x+2} - 32 = 0$.
6. Розв'язати рівняння $3^{x-1} \cdot 5^{1,5x+2} = \frac{9}{5} \cdot 5^x \cdot 3^{1,5x}$.
7. Розв'язати рівняння $\frac{(0,2)^{x+0,5}}{\sqrt{5}} = \frac{(0,04)^x}{25}$.
8. Розв'язати рівняння $2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} = 1$.
9. Розв'язати рівняння $2^{2x-3} - 2^{x-2} = 1$.
10. Обчислити суму розв'язків рівняння $4^{x-2} - 17 \cdot 2^{x-4} + 1 = 0$.

Група 2

11. Обчислити суму розв'язків рівняння $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x-1} = 3$.
12. Обчислити суму розв'язків рівняння $4\sqrt{x-1} + 16 = 10 \cdot 2\sqrt{x-1}$.
13. Розв'язати рівняння $2^{\frac{3x-1}{2x+1}} - 1 = 2^{\frac{2-x}{2x+1}}$.
14. Розв'язати рівняння $5^{2x-12} - 7^{0,5x-3} - 7 \cdot 5^{2x-11} + 5 \cdot 7^{0,5x-2} = 0$.
15. Розв'язати рівняння $4^{x+0,5} - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} + 2^{2x-1}$.
16. Розв'язати рівняння $9^x - \frac{28}{3^{2x-1}} + \frac{1}{3} = 0$.
17. Розв'язати рівняння $3^{x+1} - 2 \cdot 5^{x-2} = 5^x - 2 \cdot 3^x$.
18. Розв'язати рівняння $9\sqrt{1-x+\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3\sqrt{1-x} - 3 = 0$.
19. Розв'язати рівняння $9\sqrt{2x-1} + 3^{2+\sqrt{2x-1}} - 10 = 0$.
20. Розв'язати рівняння $x^{x+8}\sqrt{3^{3x-2}} - x^{-2}\sqrt{3^{8-x}} = 0$.

Група 3

21. Розв'язати рівняння $5^{2x-1} + 2^{2x} + 2^{2x+2} - 5^{2x} = 0$.
22. Розв'язати рівняння $2 \cdot 3^x - 3^{x-1} = 5^{x-1} + 2 \cdot 5^{x-3}$.
23. Обчислити суму квадратів розв'язків рівняння

$$6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0.$$
24. Обчислити суму квадратів розв'язків рівняння

$$7 \cdot 4^{x^2} - 9 \cdot 14^{x^2} + 2 \cdot 49^{x^2} = 0.$$
25. Розв'язати рівняння $3 \cdot 4^{-\frac{1}{x}} + 2 \cdot 9^{-\frac{1}{x}} = 5 \cdot 6^{-\frac{1}{x}}$.
26. Розв'язати рівняння $14 \cdot 7^x - 21 \cdot 2^x = 43 \cdot 14^{\frac{x}{2}}$.
27. Обчислити суму модулів розв'язків рівняння

$$3 \cdot 4^{x^2+0,75} + 2 \cdot 9^{x^2+0,75} = 5 \cdot 6^{x^2+0,75}.$$
28. Розв'язати рівняння $4^{\frac{x+1}{x}} + 6^{\frac{x+1}{x}} = 2 \cdot 9^{\frac{x+1}{x}}$.
29. Розв'язати рівняння $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$.
30. Розв'язати рівняння $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 6 \cdot 3^{2x+1}$.

Варіант В
Група 1

1. Розв'язати рівняння $6^{x+1} + 3^{x+1} = 3^{x+2} - 6^x + 3^x$.

2. Розв'язати рівняння $12\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{3^4} = 27$.

3. Розв'язати рівняння $2\sqrt[3]{81} + 3\sqrt[3]{36} = 9\sqrt[3]{16}$.

4. Розв'язати рівняння $3\sqrt[3]{81} - 10\sqrt[3]{9} + 3 = 0$.

5. Обчислити суму модулів розв'язків рівняння

$$3 \cdot 81^{\frac{1}{x}} - 10 \cdot 9^{\frac{1}{x}} + 3 = 0.$$

6. Обчислити суму розв'язків рівняння $\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[3]{8^{x-2}} = \sqrt[8]{0,25}$.

7. Розв'язати рівняння $3 \cdot \sqrt[2]{3^{20}} + \sqrt[2]{3^{10}} = 252$.

8. Обчислити суму розв'язків рівняння $\sqrt[2]{4} \cdot \sqrt[3]{8^{\frac{x-4}{2}}} = \sqrt[4]{0,25}$.

9. Розв'язати рівняння $\sqrt{25\sqrt{x}} = 5\sqrt{x-1}$.

10. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$27^x - 13 \cdot 9^x + 13 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0.$$

Група 2

11. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$12^x - 3 \cdot 2^{2x} - 2 \cdot 3^x + 6 = 0.$$

12. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$50^x + 10 = 2 \cdot 25^x + 5 \cdot 2^x.$$

13. Розв'язати рівняння $3 \cdot 5^x + 15^x = 5 \cdot 3^x + 15$.

14. Розв'язати рівняння $2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}} - 6 \left(2^x - \frac{1}{2^{x-1}} \right) = 1$.

15. Знайти цілі розв'язки рівняння $5^{3x} + 9 \cdot 5^x + 27(5^{-3x} + 5^{-x}) = 64$.

16. Обчислити суму модулів розв'язків рівняння

$$(4 + \sqrt{15})^x + (4 - \sqrt{15})^x = 62.$$

17. Обчислити суму модулів розв'язків рівняння

$$(5 + 2\sqrt{6})^x + (5 - 2\sqrt{6})^x = 10.$$

18. Розв'язати рівняння $2 \cdot (2^{\sqrt{x}-3})^{\frac{\sqrt{x}-1}{2}} - \sqrt{x+1}\sqrt[3]{16} = 0$.

19. Розв'язати рівняння $3 \cdot 2^{\sqrt{x}-1} - 8^{\frac{\sqrt{x}-1}{2}} - 4 = 0$.

20. Розв'язати рівняння $\sqrt{7 + 2^{1-x}} = 7 - (\frac{1}{2})^{x-2}$.

Група 3

21. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$x^2 \cdot 2^{\sqrt{2x+1}-1} + 2^x = 2^{\sqrt{2x+1}+1} + x^2 \cdot 2^{x-2}.$$

22. Знайти найменший додатний розв'язок рівняння

$$6 \cdot 3^{-\cos 2\pi x} + 3 = 7 \cdot 3^{\sin^2 \pi x}.$$

23. Знайти найменший додатний розв'язок рівняння

$$2^{\sin^2 \pi x} + 4 \cdot 2^{\cos^2 \pi x} = 6.$$

24. Розв'язати рівняння $\sqrt[4]{20^8} - 15\sqrt[4]{10^8} = 16\sqrt[4]{5^8}$.

25. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$\sqrt[2x]{100^4} - 6\sqrt[2x]{50^4} + 8\sqrt[2x]{25^4} = 0.$$

26. Обчислити суму цілих розв'язків рівняння

$$|x - 3|^{3x^2 - 10x + 3} = 1.$$

27. Обчислити суму квадратів розв'язків рівняння

$$|x^2 - 4|^{x^2 - 2x} = |x^2 - 4|^{2x - 4}.$$

28. Обчислити суму цілих розв'язків рівняння

$$(x^2 - 6x + 8)^{x-5} = 1.$$

29. Розв'язати рівняння $5^x \cdot \sqrt[4]{8^x} = 100$.

30. Знайти цілий розв'язок рівняння $(\sqrt[3]{0,5} + \sqrt[3]{4})^x = 13,5$.

§ 11. Логарифмічні рівняння

Варіант А

Група 1

1. Розв'язати рівняння

$$\log_7 \frac{x+3}{21} = \log_7 \frac{2}{3x-6}.$$

2. Розв'язати рівняння $\log_3(1-x) = \log_3 \frac{6}{2-x}$.

3. Розв'язати рівняння $\log_4(x^2 - 5x - 5) = \log_4(7 - 4x)$.

4. Розв'язати рівняння $\log_4(x^2 - 3x - 1) = \log_4(2 - x)$.

5. Розв'язати рівняння $\log_{(6-2x)} 4 - 2 = 0$.

6. Розв'язати рівняння $\log_{(2x+3)} 49 - 2 = 0$.

7. Розв'язати рівняння $\log_{\sqrt[4]{4x-13}}(22 - 3x) - 4 = 0$.

8. Розв'язати рівняння $\log_{\sqrt[3]{7-x}}(5x + 19) - 3 = 0$.

9. Розв'язати рівняння

$$\frac{\lg(x+3)}{\lg 9 - \lg 3} = 2.$$

10. Розв'язати рівняння

$$\frac{\lg(x-2)}{\lg 12 + \lg 3} = \frac{1}{2}.$$

Група 2

11. Розв'язати рівняння $\lg(3x - 2) = 2 - \lg 25$.

12. Розв'язати рівняння $\lg(3 - x) = 2 \lg 2 + \lg(x + 2)$.

13. Розв'язати рівняння $\log_4 \log_2 \log_3 x = 0, 5$.

14. Розв'язати рівняння $\log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{3}} \log_4 x = 2$.

15. Розв'язати рівняння $\log_{2x+3} x^2 = 1$.

16. Розв'язати рівняння $\log_{(2x+3)}(11 + 11x + 3x^2) = 2$.

17. Розв'язати рівняння $\log_{(1-x)} 3 - \log_{(1-x)} 2 - 0,5 = 0$.
18. Розв'язати рівняння $\log_{(1+x)} 3 + \log_{(1+x)} 2 - \frac{1}{3} = 0$.
19. Розв'язати рівняння $2 \log_2(-x) = 1 + \log_2(x + 4)$.
20. Розв'язати рівняння $2 \log_2(-x) = 1 + \log_2(6 - 2x)$.

Група 3

21. Розв'язати рівняння

$$\frac{\lg 2x}{\lg(4x - 15)} = 2.$$

22. Розв'язати рівняння

$$\frac{\log_2^2 x - \log_2 x}{2 \log_2 x + 1} = \frac{1 - \log_2^2 x}{1 + 2 \log_2 x}.$$

23. Розв'язати рівняння $\log_3(x - 5) + \log_3(2x - 3) = 2$.
24. Розв'язати рівняння $\lg 2x + \lg(5x - 15) = 2$.
25. Розв'язати рівняння $\log_4 x + \log_4(x - 1) = \log_4(x + 3)$.
26. Розв'язати рівняння $\log_3 x + \log_3(x + 1) = \log_3(8 - x)$.
27. Розв'язати рівняння $(6 - 3x) \cdot \log_2(x - 2) = 0$.
28. Розв'язати рівняння $(3x + 6) \cdot \log_2(x + 2) = 0$.
29. Розв'язати рівняння $\lg(x - 1) \cdot \lg(3x^2 - 10x + 4) = 0$.
30. Розв'язати рівняння $\lg(x - 1) \cdot \lg(2x^2 - 5x + 3) = 0$.

Варіант Б

Група 1

1. Обчислити добуток розв'язків рівняння $\log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0$.
2. Обчислити добуток розв'язків рівняння $\log_3^2 x - 3 \log_3 x + 2 = 0$.
3. Розв'язати рівняння $3 \log_2 x = 5 + \log_4 x$.
4. Розв'язати рівняння $\log_8 x = \log_2 x - 2$.
5. Розв'язати рівняння $3 \log_8(x - 2) = \log_2 \sqrt{2x - 1}$.
6. Розв'язати рівняння $\log_{0,5}(1 - 2x) + \log_2 \sqrt{2 - x} = 0$.

7. Розв'язати рівняння $6 \log_2(x-1) - \log_2(1-x)^4 = 2$.
8. Розв'язати рівняння $5 \log_2(2-x^2) - \log_2(x^2-2)^2 = 3$.
9. Розв'язати рівняння $\lg(0,5+x) = \lg 0,5 - \lg x$.
10. Розв'язати рівняння $\log_2(\frac{1}{8}x+1) = 1 - \log_2 \frac{x}{3}$.

Група 2

11. Розв'язати рівняння $2 \lg x^2 - \lg^2(-x) = 4$.
12. Розв'язати рівняння $\lg x^2 - \lg^2(-x) = 1$.
13. Розв'язати рівняння $\log_5 \sqrt{x-9} + \log_5 \sqrt{2x-1} = \log_5 10$.
14. Розв'язати рівняння $\lg \sqrt{5x-4} + \lg \sqrt{x+1} = 2 + \lg 0,18$.
15. Обчислити добуток розв'язків рівняння $\log_4 \sqrt{(x-6)^2} = \frac{1}{2}$.
16. Обчислити добуток розв'язків рівняння $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{(x+1)^2} = -2$.
17. Розв'язати рівняння $4 - \lg x = 3\sqrt{\lg x}$.
18. Розв'язати рівняння $\sqrt{1 + \log_2 x} + \sqrt{2 \log_2 x - 2} = 4$.
19. Розв'язати рівняння $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$.
20. Розв'язати рівняння $\log_2 x - \log_4 x - \log_{16} x = \frac{3}{4}$.

Група 3

21. Обчислити добуток розв'язків рівняння

$$\sqrt{5 \log_2(-x)} = \log_2 \sqrt{x^2}.$$

22. Розв'язати рівняння $3\sqrt{\lg x} - 2 \lg \sqrt{\frac{1}{x}} = 4$.
23. Розв'язати рівняння $2 \log_5 \sqrt{x} - 2 = \log_x \frac{1}{5}$.
24. Розв'язати рівняння $2\sqrt{\log_3 x} - \log_3 3x = 0$.
25. Розв'язати рівняння $\sqrt{\log_2 x} + \log_2 4x - 4 = 0$.
26. Обчислити добуток розв'язків рівняння $\log_2 x - \log_x 8 = 2$.
27. Розв'язати рівняння $\log_2(\lg x + 2\sqrt{\lg x} + 1) = 2$.
28. Розв'язати рівняння $x^2 \cdot \log_x 8 \cdot \log_4 x = x + 4$.
29. Розв'язати рівняння $\lg(2-x) - \frac{1}{3} \lg(2-x^3) = 0$.
30. Знайти найбільший розв'язок рівняння $\log_2 x \cdot \log_{2x} 4x = \frac{3}{2}$.

Варіант В

Група 1

1. Знайти найбільший розв'язок рівняння $10x^{1-\lg x} = 0,1$.
2. Знайти найбільший розв'язок рівняння $0,1 \cdot x^{1+\lg x} = 10$.
3. Розв'язати рівняння $\lg(25^x - 5^x) = 1 + \lg 2$.
4. Розв'язати рівняння $\log_2(2^x + 1) \cdot \log_2(2^{x+1} + 2) = 2$.
5. Обчислити суму розв'язків рівняння $\log_3(4 \cdot 3^x - 1) = 2x + 1$.
6. Обчислити суму розв'язків рівняння $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$.
7. Обчислити добуток розв'язків рівняння

$$\lg(2(4^{x-2} + 9)) = 1 + \lg(2^{x-2} + 1).$$

8. Розв'язати рівняння $3^{\lg x} = 3^{\lg 2} \cdot 9^{\lg(x-1)}$.
9. Знайти найбільший розв'язок рівняння

$$x^{\frac{7+\lg x}{4}} = 10^{1+\lg x}.$$

10. Знайти найбільший розв'язок рівняння

$$2^{\lg 3} \cdot 2^{\lg x - \lg 6} = 4^{\lg(x-1)}.$$

Група 2

11. Знайти найбільший розв'язок рівняння

$$\log_{64x} 2 \cdot \log_{4x} 2 = \log_x 2.$$

12. Знайти найбільший розв'язок рівняння $\log_2 x \cdot \log_{2x} 4x = \frac{8}{3}$.
13. Розв'язати рівняння $\log_4(x + 12) \cdot \log_x 2 = 1$.
14. Знайти найбільший розв'язок рівняння $\log_{3x} \frac{3}{x} + \log_3^2 x = 1$.
15. Розв'язати рівняння $\log_x(8x^2) + \sqrt{\log_x(8x^4)} = 0$.
16. Знайти найбільший розв'язок рівняння $\log_3^2 x = 4 \log_{9x^2} x$.
17. Розв'язати рівняння $\log_2 \sqrt{2x + 3} \cdot \log_x 2 = 1$.

18. Обчислити добуток числа розв'язків наступного рівняння та найбільшого з цих розв'язків: $\lg^2 x^4 - 7 \lg x^2 - 2 = 0$.

19. Обчислити добуток числа розв'язків наступного рівняння та найбільшого з цих розв'язків: $\log_4^2 4x^2 = \log_2 512$.

20. Обчислити суму розв'язків рівняння $\log_2(|x+2| - 1) = 3$.

Група 3

21. Знайти найбільший розв'язок рівняння

$$\log_2 x \cdot \log_3 x + \log_2 x \cdot \log_5 x + \log_3 x \cdot \log_5 x = \log_2 x \cdot \log_3 x \cdot \log_5 x.$$

22. Розв'язати рівняння $\log_2 x + \log_5 x = \log_5 10$.

23. Знайти найбільший розв'язок рівняння

$$2^{\log_2^2 x} + x^{\log_2 x} = 1024.$$

24. Знайти найбільший розв'язок рівняння

$$\log_x 8 = \log_{2x} 16 + \log_{4x} 8.$$

25. Знайти найбільший від'ємний розв'язок рівняння

$$\log_{\sin \pi x} \cos \pi x + \log_{\cos \pi x} \sin \pi x = 2.$$

26. Знайти число обернене до добутку розв'язків рівняння

$$x^{\log_5(9x)+1} = 15^{\log_{0,2} 3}.$$

27. Знайти розв'язок рівняння $\log_{\sqrt{2} \sin x} (1 + \cos x) = 2$ в градусній мірі, що належить інтервалу $(360^\circ; 450^\circ)$.

28. Розв'язати рівняння $\log_{27} \log_3 x + \log_3 \log_{27} x = \frac{1}{3}$.

29. Знайти найбільший від'ємний розв'язок рівняння

$$\log_{\cos \pi x} 2 \sin \pi x + \log_{2 \sin \pi x} \cos \pi x = \log_{\operatorname{ctg} 0,5\pi x} \operatorname{tg}^2 0,5\pi x.$$

30. Знайти суму розв'язків рівняння

$$(\log_{\sin \pi x} 2)^2 = \log_{\sin \pi x} 4 \sin^3 \pi x,$$

що належить інтервалу $(-2; -1)$.

§ 12. Тригонометричні рівняння

Варіант А

Група 1

1. Знайти у градусній мірі розв'язок рівняння $2 \sin(4x - 60^\circ) = -\sqrt{3}$, що належить інтервалу $(90^\circ; 180^\circ)$.

2. Знайти у градусній мірі розв'язок рівняння $2 \sin(6x - 30^\circ) = -1$, що належить інтервалу $(60^\circ; 120^\circ)$.

3. Знайти у градусній мірі розв'язок рівняння $2 \cos x - \sqrt{2} = 0$, що належить інтервалу $(360^\circ; 540^\circ)$.

4. Знайти у градусній мірі розв'язок рівняння $2 \cos 2x + 1 = 0$, що належить інтервалу $(180^\circ; 270^\circ)$.

5. Знайти у градусній мірі розв'язок рівняння $\sqrt{3} - \operatorname{tg} 2x = 0$, що належить інтервалу $(-360^\circ; -270^\circ)$.

6. Знайти у градусній мірі розв'язок рівняння $3 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$, що належить інтервалу $(-270^\circ; -180^\circ)$.

7. Знайти у градусній мірі розв'язок рівняння $\operatorname{ctg}(120^\circ - x) + 1 = 0$, що належить інтервалу $(-270^\circ; -180^\circ)$.

8. Знайти у градусній мірі розв'язок рівняння $1 + \operatorname{ctg} 4x = 0$, що належить інтервалу $(-120^\circ; -90^\circ)$.

9. Знайти число розв'язків рівняння $2 \sin(2x - 60^\circ) = 1$, що належить інтервалу $(0^\circ; 360^\circ)$.

10. Знайти число розв'язків рівняння $2 \cos(2x - 60^\circ) = 1$, що належить інтервалу $(0^\circ; 360^\circ)$.

Група 2

11. Знайти у градусній мірі найбільший розв'язок рівняння $\sin 3x \cos 2x + \cos 3x \sin 2x = \frac{1}{2}$, що належить інтервалу $(180^\circ; 360^\circ)$.

12. Знайти у градусній мірі найменший розв'язок рівняння $\cos 8x \sin 3x - \sin 8x \cos 3x = -\frac{1}{2}$, що належить інтервалу $(180^\circ; 360^\circ)$.

13. Знайти у градусній мірі найбільший розв'язок рівняння $\cos 5x \cos 4x + \sin 5x \sin 4x = -\frac{1}{2}$, що належить інтервалу $(90^\circ; 270^\circ)$.

14. Знайти у градусній мірі найменший розв'язок рівняння $\cos 9x \cos 4x + \sin 9x \sin 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, що належить інтервалу $(180^\circ; 360^\circ)$.

15. Знайти у градусній мірі розв'язок рівняння

$$\frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x} = 1,$$

що належить інтервалу $(540^\circ; 630^\circ)$.

16. Знайти у градусній мірі розв'язок рівняння $4 \sin x \cos x = 1$, що належить інтервалу $(405^\circ; 450^\circ)$.

17. Знайти у градусній мірі розв'язок рівняння

$$\cos^2 2x - \sin^2 2x = 1,$$

що належить інтервалу $(-255^\circ; -135^\circ)$.

18. Знайти у градусній мірі розв'язок рівняння $2 \sin^2 2x - \frac{1}{2} = 0$, що належить інтервалу $(360^\circ; 405^\circ)$.

19. Знайти у градусній мірі розв'язок рівняння $2 \cos^2 2x - \frac{1}{2} = 0$, що належить інтервалу $(180^\circ; 225^\circ)$.

20. Знайти у градусній мірі розв'язок рівняння $2 \cos^2 x - \cos x = 0$, що належить інтервалу $(405^\circ; 450^\circ)$.

Група 3

21. Знайти у градусній мірі розв'язок рівняння $\sqrt{3} \sin x = \cos x$, що належить інтервалу $(180^\circ; 270^\circ)$.

22. Знайти у градусній мірі розв'язок рівняння $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 0$, що належить інтервалу $(270^\circ; 360^\circ)$.

23. Знайти у градусній мірі найменший додатний розв'язок рівняння $\cos^4 x - \sin^4 x = 0$.

24. Знайти у градусній мірі найбільший від'ємний розв'язок рівняння $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$.

25. Знайти у градусній мірі найменший додатний розв'язок рівняння $2 \sin(x + 45^\circ) \sin(x - 45^\circ) = 1$.

26. Знайти у градусній мірі найбільший від'ємний розв'язок рівняння $2 \operatorname{tg}(45^\circ - x) + \operatorname{tg}(135^\circ + x) = 1$.

27. Знайти у градусній мірі найбільший розв'язок рівняння $1 + \frac{1}{\cos^2 x} = 3 \operatorname{tg}^2 x$, що належить відрізку $[180^\circ; 360^\circ]$.

28. Знайти у градусній мірі розв'язок рівняння $\frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg} x}{1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} x} = 1$, що належить інтервалу $(270^\circ; 360^\circ)$.

29. Знайти у градусній мірі розв'язок рівняння $1 - \sin 2x = (\cos 0,5x - \sin 0,5x)^2$, що належить відрізку $[270^\circ; 315^\circ]$.

30. Знайти у градусній мірі розв'язок рівняння $2\sqrt{2} \cos^2 x = 1 + \sqrt{2}$, що належить інтервалу $(-360^\circ; -270^\circ)$.

Варіант Б

Група 1

1. Знайти найменший додатний розв'язок рівняння $\sin^2 \pi x - \sin \pi x = 2$.

2. Знайти найбільший від'ємний розв'язок рівняння $\cos^2 \pi x + \cos \pi x = 2$.

3. Знайти розв'язок рівняння $\sin^2 \pi x - 4 \sin \pi x = 5$, що належить відрізку $[9; 10]$.

4. Знайти найбільший від'ємний розв'язок рівняння $2 \cos^2 \pi x + 5 \sin \pi x = 5$.

5. Знайти розв'язок рівняння $2 + \cos^2 \pi x = 2 \sin \pi x$, що належить відрізку $[8; 10]$.

6. Знайти число розв'язків рівняння $5 \sin^2(1,5\pi - \pi x) + 2 \sin^2(\pi - \pi x) = 2$, що належать відрізку $[5; 9]$.

7. Обчислити суму розв'язків рівняння $3 \operatorname{tg}^2 \pi x - 4\sqrt{3} \operatorname{tg} \pi x + 3 = 0$, що належать відрізку $[2; 3]$.

8. Обчислити суму розв'язків рівняння $4 \operatorname{ctg}^2 \pi x - \frac{9}{\sin \pi x} + 6 = 0$, що належать відрізку $[0; 1]$.

9. Обчислити добуток розв'язків рівняння $\operatorname{ctg} \pi x - \sqrt{3} \operatorname{tg} \pi x + 1 = \sqrt{3}$, що належать відрізку $[3; 4]$.

10. Знайти розв'язок рівняння $\operatorname{tg} \pi x + \operatorname{ctg} \pi x = 2$, що належить інтервалу $(-5; -4)$.

Група 2

11. Обчислити суму розв'язків рівняння $\sqrt{3} \sin \pi x + \cos \pi x = \sqrt{2}$, що належать відрізку $[0; 2,5]$.

12. Знайти найбільший від'ємний розв'язок рівняння $\sin \pi x + \cos \pi x = \sqrt{2}$.

13. Знайти розв'язок рівняння $\cos \pi x - \sin \pi x = 1$, що належить інтервалу $(3; 4)$.

14. Знайти число розв'язків рівняння $\sin \pi x + \sqrt{3} \cos \pi x = -\sqrt{3}$, що належать інтервалу $(\frac{1}{3}; 5\frac{1}{3})$.

15. Обчислити суму розв'язків рівняння $2 \cos \pi x + 2 \sin \pi x = \sqrt{6}$, що належать відрізку $[2; 3]$.

16. Знайти найбільший від'ємний розв'язок рівняння $\sin 0, 5\pi x + \cos 0, 5\pi x = -1$.

17. Знайти число розв'язків рівняння $\sin 2\pi x - \cos 2\pi x = -1$, що належать відрізку $[0; 2]$.

18. Обчислити суму розв'язків рівняння $\cos \pi x - \sin \pi x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, що належать відрізку $[-1; 1]$.

19. Знайти найменший додатний розв'язок рівняння $\sin 2\pi x - \cos 2\pi x = \sqrt{2}$.

20. Обчислити суму розв'язків рівняння $\sin 2\pi x + \sqrt{3} \cos 2\pi x = \sqrt{2}$, що належать відрізку $[-1; 0, 5]$.

Група 3

21. Знайти число розв'язків рівняння $\sin 2\pi x + \cos 2\pi x = \sqrt{2} \sin 3\pi x$, що належать інтервалу $(1; 2)$.

22. Знайти число розв'язків рівняння $\sin \pi x + \cos \pi x = \sqrt{2} \sin 5\pi x$, що належать інтервалу $(1; 3)$.

23. Обчислити суму розв'язків рівняння $\sin^2 \pi x - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \pi x \cos \pi x = \frac{1}{2}$, що належать інтервалу $(1; 2, 5)$.

24. Обчислити суму розв'язків рівняння $\cos^2 \pi x + 3 \sin^2 \pi x + \sqrt{3} \sin 2\pi x = 1$, що належать відрізку $[0; 3]$.

25. Знайти найбільший із розв'язків рівняння $4 \cos^2 \pi x + 0, 5 \sin 2\pi x + 3 \sin^2 \pi x = 3$, що належать інтервалу $(1; 3)$.

26. Знайти найменший із розв'язків рівняння $\sin 2\pi x = \cos^4 \pi x - \sin^4 \pi x$, що належать інтервалу $(-4; -2)$.

27. Обчислити добуток числа розв'язків рівняння $\cos^2 \pi x + \sqrt{3} \sin \pi x \cdot \cos \pi x = 1$ та найбільшого з них, що належать відрізку $[0; 2, 5]$.

28. Обчислити добуток числа розв'язків рівняння $3 \sin^2 \pi x - 2\sqrt{3} \sin \pi x \cdot \cos \pi x + 5 \cos^2 \pi x = 2$ та найменшого з них, що належать відрізку $[-4; -1]$.

29. Обчислити суму розв'язків рівняння $3 \sin^2 \pi x - 2\sqrt{3} \sin \pi x \times \cos \pi x + \cos^2 \pi x = 0$, що належать інтервалу $(-1; 2)$.

30. Обчислити суму найбільшого та найменшого із розв'язків рівняння $\sin \pi x + \cos \pi x = \frac{1}{\cos \pi x}$, що належать проміжку $(2; 4]$.

Варіант В

Група 1

1. Знайти найбільший додатний розв'язок рівняння

$$\sin \frac{\pi(12+x)}{6x} = -\frac{1}{2}.$$

2. Знайти найменший від'ємний розв'язок рівняння $\sin \frac{3\pi}{x^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Знайти найбільший розв'язок рівняння $\sin \frac{3\pi}{\sqrt{x}} = -1$.

4. Знайти число розв'язків рівняння $\cos \pi(\sqrt{x} + 0, 25) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, що належить інтервалу $(0; 10)$.

5. Знайти найменший від'ємний розв'язок рівняння $\cos \frac{2\pi}{x} = \frac{1}{2}$.

6. Знайти найбільший додатний розв'язок рівняння $\cos \frac{6\pi}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

7. Знайти найбільший розв'язок рівняння $\cos \frac{2\pi}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}$.

8. Знайти найбільший розв'язок рівняння $\operatorname{tg} \frac{\pi(3x+24)}{4x} = -1$.

9. Знайти найменший розв'язок рівняння $\operatorname{tg} \frac{\pi(54-x^2)}{6x^2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

10. Знайти найменший розв'язок рівняння $\operatorname{ctg} \pi\sqrt{x} = -1$.

Група 2

11. Обчислити суму розв'язків рівняння $9 \cos^4 \pi x - \sin^4 \pi x = 2 \sin^2 2\pi x$, що належать інтервалу $(0; 2)$.

12. Обчислити суму розв'язків рівняння $4 \sin^4 \pi x + \cos 4\pi x = 1 + 12 \cos^4 \pi x$, що належать інтервалу $(0; 2)$.

13. Обчислити суму розв'язків рівняння $\sqrt{\cos 2\pi x} = 1 + 2 \sin \pi x$, що належать відріzkу $[0; 2]$.

14. Обчислити суму розв'язків рівняння $\sqrt{1 - \cos 2\pi x} = \sqrt{2} \cos \pi x$, що належать інтервалу $(0; 2)$.

15. Знайти число розв'язків рівняння $\sin^2 \pi x + \sin^2 2\pi x + \sin^2 3\pi x + \sin^2 4\pi x = 2$, що належить інтервалу $(0; 1)$.

16. Обчислити суму розв'язків рівняння $\cos^2 \pi x + \cos^2 2\pi x = \cos^2 3\pi x + \cos^2 4\pi x$, що належать інтервалу $(0; 1)$.

17. Знайти найбільший від'ємний розв'язок рівняння

$$\sin^3 \pi x + \cos^3 \pi x = 1.$$

18. Знайти найменший додатний розв'язок рівняння

$$\sin^3 \pi x - \cos^3 \pi x = 1.$$

19. Обчислити суму найбільшого від'ємного та найменшого додатного розв'язків рівняння

$$\frac{\sin \pi x}{1 - \cos \pi x} = 1 + \cos \pi x.$$

20. Обчислити добуток найменшого додатного та найбільшого від'ємного розв'язків рівняння

$$\frac{\cos \pi x}{1 - \sin \pi x} = 1 + \sin \pi x.$$

Група 3

21. Розв'язати рівняння $\arcsin(2x - 5) = -\frac{\pi}{2}$.

22. Знайти найменший розв'язок рівняння $\arccos(x^2 - 6x + 9) = 0$.

23. Розв'язати рівняння $4 \operatorname{arctg}(4x^2 - 12x + 10) = \pi$.

24. Знайти найменший розв'язок рівняння

$$(x^2 - 4) \arcsin(x - 1) = 0.$$

25. Знайти найбільший розв'язок рівняння

$$(x^2 - 9) \arccos(2x + 5) = 0.$$

26. Розв'язати рівняння $\arccos(\sin \pi x) = 3\pi x - 0,5\pi$.

27. Розв'язати рівняння $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \pi x) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{2}$.

28. Розв'язати рівняння $2(\arcsin x)^2 - 3\pi \arcsin x + \pi^2 = 0$.

29. Розв'язати рівняння $2(\arccos x)^2 + 3\pi \arccos x - 2\pi^2 = 0$.

30. Розв'язати рівняння $\arcsin(4x - 2) = \arccos 2x$.

§ 13. Рівняння з модулями

Варіант А

Група 1

1. Знайти найменший розв'язок рівняння $|2x - 1| = 5$.
2. Знайти найбільший розв'язок рівняння $|3x - 5| = 4$.
3. Обчислити добуток розв'язків рівняння $|3x^2 - 1| = 11$.
4. Обчислити частку розв'язків рівняння $|4x^2 - 7| = 29$.
5. Обчислити суму розв'язків рівняння $|2x^2 - 4x - 3| = 3$.
6. Знайти розв'язок рівняння $\frac{2-3|x|}{1+|x|} = 1$, що менший за $(\sqrt{16})^{-1}$.
7. Розв'язати рівняння $|16x + 23| \cdot (16x + 23) = -1$.
8. Розв'язати рівняння $(13x - 14, 9) \cdot |14, 9 - 13x| = 4$.
9. Знайти найменший розв'язок рівняння $\left| \frac{3x-2}{x-1} \right| = 2$.
10. Знайти найбільший розв'язок рівняння $\left| \frac{2-3x}{1+x} \right| = 1$.

Група 2

11. Знайти найменший цілий розв'язок рівняння

$$|\sqrt{9 - x^2} - 1| = |1 - \sqrt{9 - x^2}|.$$

12. Знайти найбільший цілий розв'язок рівняння

$$\left| \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}} - 9 \right| = \left| 9 - \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}} \right|.$$

13. Обчислити суму розв'язків рівняння $2|x - 2| + 3|2 - x| = 15$.
14. Обчислити добуток розв'язків рівняння $9|x - 1| - 5|1 - x| = 4$.
15. Розв'язати рівняння $|x^2 - 6x + 8| + |2 - x| = 0$.
16. Розв'язати рівняння $|3x^2 - 10x + 3| + |x^2 + x - 12| = 0$.
17. Розв'язати рівняння $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4 + |x^2 - 6x + 8| = 0$.
18. Розв'язати рівняння $\sqrt{2x^2 - 5x + 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 0$.
19. Обчислити суму розв'язків рівняння $|x - 6| = |x^2 - 5x + 3|$.
20. Розв'язати рівняння $|x + 6| = |x - 10|$.

Група 3

21. Розв'язати рівняння $|2 + x^2| - |2x - 1| = 0$.
22. Розв'язати рівняння $|10 + x^2| - |6x + 1| = 0$.
23. Знайти найменший цілий розв'язок рівняння $|3x+10|=3x+10$.
24. Знайти найбільший цілий розв'язок рівняння $|15-2x|=15-2x$.
25. Знайти найменший розв'язок рівняння $|3x^2-12x+15| = 5x-7$.
26. Обчислити суму розв'язків рівняння $|x^2 - 2x - 3| = 3x - 3$.
27. Обчислити добуток розв'язків рівняння $x^2 + |x| - 2 = 0$.
28. Обчислити суму квадратів розв'язків рівняння $x^2 - 2|x| - 8 = 0$.
29. Обчислити суму цілих розв'язків рівняння $|x^2 - x - 6| = 6 + x - x^2$.
30. Обчислити добуток найбільшого та найменшого розв'язків рівняння $|3x^2 - 11x - 42| = 42 + 11x - 3x^2$.

Варіант Б

Група 1

1. Обчислити суму цілих розв'язків рівняння $\frac{|x^2-4x-12|}{12+4x-x^2} = 1$.
2. Знайти найбільший цілий розв'язок рівняння $\frac{12+x-x^2}{|x^2-x-12|} = 1$.
3. Знайти найбільший розв'язок рівняння $\left| \frac{x^2-2x-6}{x^2-3x+2} \right| = 3$.
4. Розв'язати рівняння $|x| \cdot x + 6|x| + 6x = 64$.
5. Обчислити суму цілих розв'язків рівняння $|x - 3| = (x - 3)^2$.
6. Знайти число розв'язків рівняння $|2x - 3| = (2x - 3)^2$.
7. Знайти найменший розв'язок рівняння $(x + 1)^2 = |x + 3|$.
8. Обчислити добуток розв'язків рівняння $\left| \frac{3|x+2|}{|x|-4} \right| = 2$.
9. Розв'язати рівняння $\left| \frac{2-2|x|}{1+|x|} \right| = 2$.
10. Знайти найбільший розв'язок рівняння $\left| \frac{3|x|-2}{|x|-1} \right| = 2$.

Група 2

11. Знайти найбільший розв'язок рівняння $\frac{x^2(|x|+5)}{|x|} = 6$.
12. Знайти найменший розв'язок рівняння $\frac{x^2(|x|-4)}{|x|} = 12$.

13. Розв'язати рівняння $x(|x| + 7) = 8$.
14. Обчислити суму розв'язків рівняння $x(|x| - 5) = 6$.
15. Обчислити суму розв'язків рівняння $(x+4)(x-2) + |x+4| = 0$.
16. Обчислити суму розв'язків рівняння $(x-1)(x-3) + |x-3| = 0$.
17. Розв'язати рівняння $|7 - 2x| = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$.
18. Розв'язати рівняння $|3x + 8| = \frac{x^2 + 6x + 8}{2 + x}$.
19. Розв'язати рівняння $|x| + x + x|x| = 35$.
20. Обчислити добуток розв'язків рівняння $|x|x + |2x^2 - 5x| = 6$.

Група 3

21. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2 + |x| - 2} = 1 - x$.
22. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2 - |x| - 2} = x - 2$.
23. Обчислити суму розв'язків рівняння $\sqrt{2x - 1} + |2x - 7| = 6$.
24. Обчислити суму розв'язків рівняння $\sqrt{2x + 1} + |2x - 5| = 6$.
25. Розв'язати рівняння $10 + 6|3 - \sqrt{x}| = x$.
26. Розв'язати рівняння $|4 - \sqrt{-x}| + x + 24 = 0$.
27. Розв'язати рівняння $25^{|1-2x|} = (0, 2)^{6x-4}$.
28. Знайти найбільший розв'язок рівняння $4^{|2x-1|} = 2^{2-x}$.
29. Обчислити суму розв'язків рівняння $\log_4 \left(\frac{1}{|x-1|-1} \right) = 0, 5$.
30. Обчислити суму розв'язків рівняння $\log_8 (|x + 1| - 2) = -\frac{2}{3}$.

Варіант В

Група 1

1. Знайти найменший розв'язок рівняння $|x + 5| + |x - 1| = x + 6$.
2. Знайти найбільший розв'язок рівняння $|x - 3| + |x + 1| = 2x + 6$.
3. Обчислити суму цілих розв'язків рівняння $|x + 5| + |x| = 5$.
4. Обчислити суму цілих розв'язків рівняння $|x + 5| + |x - 8| = 13$.
5. Розв'язати рівняння $|2x + 2| - |6 - x| = |x - 8|$.
6. Обчислити добуток розв'язків рівняння $|2x - 6| = |12 - x| - |x - 10|$.
7. Знайти найменший розв'язок рівняння $||2x + 5| - x| = x + 5$.

8. Знайти найбільший розв'язок рівняння $||2x - 7| + x| = 7 - x$.
9. Обчислити добуток розв'язків рівняння $||x - 2| - |x + 1|| = x$.
10. Обчислити добуток розв'язків рівняння $||x + 4| - |x - 2|| = -x$.

Група 2

11. Знайти найменший розв'язок рівняння $\sqrt{|x - 1|} + |x + 1| = 10$.

12. Знайти найбільший розв'язок рівняння

$$\sqrt{4|x| + 8} = 2 + \sqrt{3|x| - 2}.$$

13. Обчислити суму розв'язків рівняння $|(0, 2)^{0,1 \cdot x} - 15| = 10$.

14. Розв'язати рівняння $|5^{0,2 \cdot x} - 5^{0,1 \cdot x}| - 3 \cdot 5^{0,1 \cdot x} - 5 = 0$.

15. Розв'язати рівняння $|(0, 25)^x + 3| + |2 \cdot (0, 25)^x - 1| = 8$.

16. Розв'язати рівняння $|5 - 2^x| + |2^x - 1| = 10$.

17. Розв'язати рівняння $|\log_{0,2} x - 3| + 2|\log_{0,2} x + 1| = 4$.

18. Обчислити добуток розв'язків рівняння

$$|\log_{0,5}^2 x - \log_{0,5} x - 12| = 8 - 2 \log_{0,5} x.$$

19. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$|\log_2^2 x - 2 \log_2 x - 3| = 3 \log_2 x - 3.$$

20. Знайти найбільший розв'язок рівняння $\log_{\frac{2}{3}}^2 x - 2|\log_{\frac{1}{3}} x| = 8$.

Група 3

21. Знайти найбільший розв'язок рівняння

$$\left| \sin \frac{\pi(3x + 28)}{4x} \right| = \sin \frac{\pi(3x + 28)}{4x} + 2 \cos \frac{\pi(3x + 28)}{4x}.$$

22. Знайти найменший додатний розв'язок рівняння

$$|\cos(\pi\sqrt{x})| = \cos(\pi\sqrt{x}) + 2 \sin(\pi\sqrt{x}).$$

23. Знайти найменший додатний розв'язок рівняння

$$|\cos(0,5\pi x)| + \sin(0,5\pi|x|) = 0.$$

24. Знайти найбільший від'ємний розв'язок рівняння

$$|\sin(0,5\pi x)| + \cos(0,5\pi|x|) = 0.$$

25. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$|\sin \pi x| = \cos^2 \pi x + 1,$$

що належать інтервалу $(0; 3)$.

26. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$1,5 \cdot \left| \cos \frac{\pi x}{3} \right| = \sin^2 \frac{\pi x}{3},$$

що належать інтервалу $(1; 5)$.

27. Обчислити суму цілих розв'язків рівняння

$$\operatorname{tg}^2(0,25\pi x) = |1 - 2 \operatorname{ctg}^2(0,25\pi x)|,$$

що належать інтервалу $(0; 6)$.

28. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$\left| 2 \cos^2 \frac{\pi x}{3} - 1,5 \right| = 0,5,$$

що належать інтервалу $(-7; 0)$.

29. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$18(\arcsin x)^2 - 3\pi |\arcsin x| - \pi^2 = 0.$$

30. Знайти найбільший розв'язок рівняння

$$24(\operatorname{arcctg} x)^2 + 14\pi |\operatorname{arcctg} x| - 5\pi^2 = 0.$$

§ 14. Системи рівнянь

Варіант А

Група 1

1. Розв'язати систему рівнянь від однієї невідомої

$$\begin{cases} \frac{6x+7}{7} - 3 = \frac{5x-3}{8}, \\ x^2 - 12x + 35 = 0. \end{cases}$$

2. Розв'язати систему рівнянь від однієї невідомої

$$\begin{cases} 10 - \frac{3x-1}{2} = \frac{6x+3}{11}, \\ 2 - \frac{3x-7}{4} + \frac{x+17}{5} = \frac{143-11x}{20}. \end{cases}$$

3. Обчислити суму $x_0 + y_0$, де (x_0, y_0) є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} 0,15 \cdot (x - 4) = 9,9 - 0,3 \cdot (x - 1), \\ 1,6 \cdot (y - 4) - 0,6 = 3(0,4 \cdot y - 7). \end{cases}$$

4. Обчислити добуток $x_0 y_0$, де (x_0, y_0) є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} 3,5 - 9x = 2(0,5 \cdot x - 4), \\ 0,6 \cdot y - 1,5 = 0,3 \cdot (y - 4). \end{cases}$$

5. Обчислити значення виразу $(x_0 y_0)^3$, де (x_0, y_0) є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} 2,5 \cdot (3y - x) - 3 = 3x + 0,5, \\ 3(x + 6y) - 4 = 9y - 19. \end{cases}$$

6. Обчислити значення виразу $(x_0 - y_0)^2$, де (x_0, y_0) є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{3x}{2} + \frac{7+y}{5} = 5, \\ 4 - x - \frac{3y-1}{8} = 1. \end{cases}$$

7. Записати трицифрове число, число сотень якого співпадає з порядковим номером однієї з наступних систем рівнянь, що має єдиний розв'язок, число десятків — з порядковим номером системи рівнянь,

що немає розв'язку, число одиниць — з порядковим номером системи рівнянь, що має безліч розв'язків:

$$1) \begin{cases} 2x - 5y = 10, \\ 0,5 \cdot x - 1,25 \cdot y = 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 0,5 \cdot x + 1,5 \cdot y = 2, \\ -x - 3y = -4; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 7x - 5y = 3, \\ 3,5 \cdot x + 2,5 \cdot y = 1,5. \end{cases}$$

8. Записати трицифрове число, число сотень якого співпадає з порядковим номером однієї з наступних систем рівнянь, що має єдиний розв'язок, число десятків — з порядковим номером системи рівнянь, що немає розв'язку, число одиниць — з порядковим номером системи рівнянь, що має безліч розв'язків:

$$1) \begin{cases} 2x - 3y = 2, \\ 0,4 \cdot x - 0,6 \cdot y = 0,4; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x - 3y = 2, \\ x + 0,6 \cdot y = 0,4; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 4x - 6y = 5, \\ x - 1,5 \cdot y = 1. \end{cases}$$

9. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 5x - 3y = -1, \\ 4x + 3y = 10, \\ 2x - 3y = -4. \end{cases}$$

Якщо дана система рівнянь має єдиний розв'язок (x_0, y_0) , то записати значення виразу $0,1 \cdot (x_0 + y_0)$. У протилежному випадку записати 0.

10. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x - 2y = 5, \\ 2x + 4y = -6, \\ 4x - 8y = 15. \end{cases}$$

Якщо дана система рівнянь має єдиний розв'язок (x_0, y_0) , то записати значення виразу $0,1 \cdot (x_0 + y_0)$. У протилежному випадку записати 0.

Група 2

11. Знайти найменшу із відстаней від початку координат до точок координатної площини Oxy , координати (x_0, y_0) яких є розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x - y = 19, \\ xy = 60. \end{cases}$$

12. Знайти найменшу із відстаней від початку координат до точок координатної площини Oxy , координати (x_0, y_0) яких є розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} 4x - 3y = 7, \\ xy = 12. \end{cases}$$

13. Знайти найменше значення із квадратів модулів векторів координатної площини Oxy , координати (x_0, y_0) яких є розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ xy = 6. \end{cases}$$

14. Знайти найменшу із відстаней до осі Oy від точок координатної площини Oxy , координати (x_0, y_0) яких є розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ y = \frac{6}{x}. \end{cases}$$

15. Знайти ординату точки $A(x_0; y_0)$, яка знаходиться в третій чверті координатної площини і координати якої задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

16. Знайти відстань від точки $A(x; y)$ координатної площини Oxy до початку координат, якщо

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ xy = 48. \end{cases}$$

17. Знайти найбільше значення виразу $2^x \cdot 2^y$, якщо

$$\begin{cases} x^2 + xy = 10, \\ xy + y^2 = 15. \end{cases}$$

18. Знайти найбільше значення виразу $5^x : 5^y$, якщо

$$\begin{cases} x^2 - xy = -2, \\ y^2 - xy = 3. \end{cases}$$

19. Нехай пара дійсних чисел (x_0, y_0) є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ x + y = 8. \end{cases}$$

Знайти катет прямокутного трикутника, якщо довжини його гіпотенузи та іншого катета відповідно дорівнюють x_0 і y_0 .

20. Нехай пара дійсних чисел (x_0, y_0) є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 7, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Знайти гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо довжини його катетів відповідно дорівнюють x_0 і y_0 .

Група 3

21. Обчислити суму $x + y$, якщо

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 8, \\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 6. \end{cases}$$

22. Обчислити значення виразу $x^2 + y^2$, якщо

$$\begin{cases} \frac{2}{x-y} + \frac{8}{x+y} = 2, \\ \frac{6}{x-y} - \frac{16}{x+y} = 1. \end{cases}$$

23. Обчислити частку $\frac{x}{y}$, якщо

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 4, \\ 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 18. \end{cases}$$

24. Обчислити значення виразу $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, якщо

$$\begin{cases} 3\sqrt{x} - \sqrt{y} = 8, \\ \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 19. \end{cases}$$

25. Знайти найменше значення виразу $\sqrt{\frac{x}{y}}$, якщо

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8, \\ \sqrt{xy} = 15. \end{cases}$$

26. Знайти найменше значення виразу $\sqrt{\frac{x}{y}}$, якщо

$$\begin{cases} \sqrt{xy} = 12, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 7. \end{cases}$$

27. Обчислити суму $3x + y$, якщо

$$\begin{cases} 25^{x+y} = 125, \\ 7^{x-y-1} = 1. \end{cases}$$

28. Обчислити значення виразу $x + 0,1 \cdot y$, якщо

$$\begin{cases} (\sqrt{3})^{x-y} = 9, \\ 5^{6y-x-1} = 1. \end{cases}$$

29. Знайти найбільше значення виразу $x + y$, якщо

$$\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 1, \\ \log_2^2 x + \log_2^2 y = 5. \end{cases}$$

30. Обчислити значення виразу $x + 0,1 \cdot y$, якщо

$$\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 2, \\ \log_{0,75} x - \log_{0,75} y = 1. \end{cases}$$

Варіант Б
Група 1

1. Знайти найбільше значення виразу $x + y$, якщо

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x + y + 3xy = 9. \end{cases}$$

2. Обчислити добуток xy , якщо

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x^3 + y^3 = 9. \end{cases}$$

3. Обчислити добуток xy , якщо

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9, \\ x^2y + xy^2 = 6. \end{cases}$$

4. Знайти найменше значення виразу $x + y$, якщо

$$\begin{cases} xy = 15, \\ x^2 - y^2 + xy = 31. \end{cases}$$

5. Знайти найменше значення виразу xy , якщо

$$\begin{cases} xy + x - y = 3, \\ x^2y - xy^2 = 2. \end{cases}$$

6. Знайти найбільше значення виразу $x + y$, якщо

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{3}, \\ x^2 - y^2 = 8. \end{cases}$$

7. Обчислити значення виразу $100x + 10y + z$, якщо відомо, що $x > 0$ і

$$\begin{cases} xy = 2, \\ yz = 3, \\ zx = 6. \end{cases}$$

8. Обчислити значення виразу $100z + 10y + x$, якщо відомо, що $x > 0$, $y > 0$ і

$$\begin{cases} xy = z, \\ yz = 625x, \\ zx = 16y. \end{cases}$$

9. Обчислити значення виразу $100z + 10y + x$, якщо відомо, що $x > 0$, $y > 0$ і

$$\begin{cases} \frac{xy}{z} = 1, \\ \frac{yz}{x} = 81, \\ \frac{zx}{y} = 16. \end{cases}$$

10. Знайти найменше значення виразу $(2^x)^y$, якщо

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 17, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

Група 2

11. Знайти найменше значення виразу $x - y$, якщо

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} = 9, \\ \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

12. Обчислити значення виразу $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, якщо

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} = 12, \\ \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

13. Знайти найбільше значення виразу $x + 0,1 \cdot y$, якщо

$$\begin{cases} \sqrt[3]{\frac{x+y}{x-y}} - \sqrt[3]{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{3}{2}, \\ x^2 - y^2 = 32. \end{cases}$$

14. Обчислити значення виразу $x + y$, якщо x та y є цілими числами і

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{6x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{6x}} = \frac{5}{2}, \\ xy - x - y = 9. \end{cases}$$

15. Знайти найменше значення виразу $x + 0,1 \cdot y$, якщо

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2}, \\ x + y = 10. \end{cases}$$

16. Знайти найбільше значення виразу $x + y$, якщо

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{5}{2}, \\ x^2 + y^2 = 34. \end{cases}$$

17. Знайти найбільше значення виразу $x - y$, якщо

$$\begin{cases} \sqrt[3]{xy} (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) = 30, \\ x + y = 35. \end{cases}$$

18. Знайти найбільше значення виразу $\frac{x}{y}$, якщо

$$\begin{cases} (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})(x + y) = 280, \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4. \end{cases}$$

19. Знайти найбільше значення виразу $x + 0,1 \cdot y$, якщо

$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5. \end{cases}$$

20. Знайти найменше значення виразу x^y , якщо

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 4, \\ x + y = 82. \end{cases}$$

Група 3

21. Обчислити частку $\frac{x}{y}$, якщо

$$\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 725, \\ 3^x - 2^{0,5 \cdot y} = 25. \end{cases}$$

22. Обчислити частку $\frac{y}{x}$, якщо

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 36, \\ 3^x \cdot 4^y = 144. \end{cases}$$

23. Обчислити суму $10x + y$, якщо

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 648, \\ 3^x \cdot 2^y = 432. \end{cases}$$

24. Знайти найбільше значення виразу $x + y$, якщо

$$\begin{cases} 2^{2x-2y} + 2^{x-y} - 2 = 0, \\ 2^{2x+1} + (0,5)^{2y-1} = 5. \end{cases}$$

25. Знайти найбільше значення виразу $x^2 + y$, якщо

$$\begin{cases} 2^{\frac{x+y}{4}} + 2^{\frac{x+y}{2}} = 6, \\ 2^x + 2^y = 17. \end{cases}$$

26. Обчислити значення виразу $x + 0,1 \cdot y$, якщо

$$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = \frac{1}{9}, \\ y - x = 2. \end{cases}$$

27. Обчислити значення виразу $x + 0,1 \cdot y$, якщо

$$\begin{cases} x^{2y-1} = 32, \\ x^{y+1} = 16. \end{cases}$$

28. Знайти найменше значення виразу $x + 0,1 \cdot y$, якщо

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{\frac{4-x-y}{4}} - 2^{\frac{x+y}{4}} = 1, \\ 2^x + 2^y = 17. \end{cases}$$

29. Знайти найбільше значення виразу $\frac{y}{x}$, якщо

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y}, \\ x^2 y = 1. \end{cases}$$

30. Знайти найбільше значення виразу $x + 0,1 \cdot y$, якщо

$$\begin{cases} x^{x+y} = x^4 y^2, \\ y^{x+y} = x^2 y^4. \end{cases}$$

Варіант В
Група 1

1. Знайти найбільше значення виразу xy , якщо

$$\begin{cases} \log_x 25 + 2y = 2, \\ -(\log_x 0, 2)^3 + y = 1. \end{cases}$$

2. Обчислити частку $\frac{x}{y}$, якщо

$$\begin{cases} 3^{\lg(2y-x)} = 1, \\ 2^{x-y} - 2^{\frac{x-y}{2}} = 12. \end{cases}$$

3. Обчислити частку $\frac{y}{x}$, якщо

$$\begin{cases} 5^{2x} \cdot 3^y = 675, \\ \log_{\sqrt[3]{2}}(x+y) = 6. \end{cases}$$

4. Обчислити суму $x + y$, якщо

$$\begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2, \\ x^2 + y = 42. \end{cases}$$

5. Обчислити значення виразу $x + 0,1 \cdot y$, якщо

$$\begin{cases} 9^x \cdot 4^y = 324, \\ \log_{\frac{1}{5}}(x+y) = -0,5. \end{cases}$$

6. Обчислити значення виразу $x + 0,1 \cdot y$, якщо

$$\begin{cases} (x+y)^2 \cdot 2^{x-y} = 50, \\ 2 \log_{0,04}(x+y) = y-x. \end{cases}$$

7. Обчислити значення виразу $x + 0,1 \cdot y$, якщо

$$\begin{cases} \log_2 y = \log_4(xy-2), \\ \log_9 x^2 + \log_3(x-y) = 1. \end{cases}$$

8. Знайти найбільше значення виразу $x + y$, якщо $x > 0$, $y > 0$ і

$$\begin{cases} (xy)^y \cdot x^{6x} = y^x, \\ x^2 y = 1. \end{cases}$$

9. Знайти найбільше значення виразу $x + 0,1 \cdot y$, якщо

$$\begin{cases} \lg^2 x = \lg^2 y + \lg^2 xy, \\ \lg^2(x - y) + \lg x \lg y = 0. \end{cases}$$

10. Обчислити суму $x + y$, якщо

$$\begin{cases} \log_3 x - 2^y + y = 3, \\ y \cdot 2^y + 2^y \cdot \log_3 x = 4. \end{cases}$$

Група 2

11. Знайти найбільше значення виразу $(x - y)^2$, якщо відомо, що $|x| < 2$, $|y| < 2$ і

$$\begin{cases} x + y = \frac{2}{3}, \\ \operatorname{tg} \pi x + \operatorname{tg} \pi y = 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

12. Знайти найменше значення виразу $3xy$, якщо відомо, що $x > 0$, $y > 0$ і

$$\begin{cases} x - y = \frac{1}{3}, \\ \cos \pi x + \cos \pi y = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

13. Знайти найбільше значення виразу $\frac{x}{y}$, якщо

$$\begin{cases} x + y = \frac{5}{6}, \\ \cos^2 \pi x + \cos^2 \pi y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

14. Знайти найбільше значення виразу $\frac{x}{y}$, якщо

$$\begin{cases} x - y = \frac{1}{3}, \\ \sin^2 \pi x - \sin^2 \pi y = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

15. Знайти найбільше значення виразу $\frac{x}{y}$, якщо

$$\begin{cases} x - y = \frac{1}{3}, \\ \cos \pi x \cdot \cos \pi y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

16. Знайти найменше значення виразу $9|xy|$, якщо

$$\begin{cases} x + y = \frac{4}{3}, \\ \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

17. Знайти найбільше значення виразу $(xy)^{-1}$, якщо

$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} \pi x \cdot \operatorname{ctg} \pi y = 1. \end{cases}$$

18. Знайти найбільше значення виразу $\frac{x}{y}$, якщо

$$\begin{cases} x - y = \frac{1}{6}, \\ \operatorname{ctg} \pi x \cdot \operatorname{ctg} \pi y = 1. \end{cases}$$

19. Знайти найбільше значення виразу $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, якщо

$$\begin{cases} \sin \pi x + \cos \pi y = 0, \\ \sin^2 \pi x + \cos^2 \pi y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

20. Знайти найбільше значення виразу $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, якщо

$$\begin{cases} \sin \pi x \sin \pi y = \frac{3}{4}, \\ \operatorname{tg} \pi x \cdot \operatorname{tg} \pi y = 3. \end{cases}$$

Група 3

21. Знайти найбільше значення виразу xy , якщо

$$\begin{cases} \operatorname{arctg}^2 x + \operatorname{arccos}^2 y = \frac{5\pi^2}{36}, \\ \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccos} y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

22. Обчислити добуток xy , якщо

$$\begin{cases} \operatorname{arccos}^2 x + \operatorname{arcsin}^2 y = \frac{5\pi^2}{8}, \\ \operatorname{arccos} x + \operatorname{arcsin} y = \pi. \end{cases}$$

23. Обчислити значення виразу $x^2 + y^2$, якщо

$$\begin{cases} x + y = -2, \\ \operatorname{arcctg} x + \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

24. Обчислити добуток xy , якщо

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ \arccos x - \arcsin y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

25. Обчислити значення виразу $x^2 + y^2$, якщо

$$\begin{cases} \arcsin x - \arccos y = \frac{\pi}{12}, \\ \arcsin x \cdot \arccos y = \frac{\pi^2}{12}. \end{cases}$$

26. Обчислити добуток xy , якщо

$$\begin{cases} \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} y = \frac{2\pi}{3}, \\ \operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arcctg} y = -\frac{5\pi^2}{36}. \end{cases}$$

27. Обчислити добуток xy , якщо

$$\begin{cases} 3 \arccos \frac{x+y}{2} + 4 \arcsin \frac{x-y}{2} = \pi, \\ 2 \arccos \frac{x+y}{2} - \frac{2}{3} \arcsin \frac{x-y}{2} = \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

28. Обчислити частку $\frac{y}{x}$, якщо

$$\begin{cases} \frac{2\pi}{\operatorname{arcctg} x} - \frac{\pi}{\operatorname{arctg} y} = 9, \\ \frac{3\pi}{\operatorname{arcctg} x} + \frac{4\pi}{\operatorname{arctg} y} = -3. \end{cases}$$

29. Обчислити значення виразу $\sqrt{3}(y - x)$, якщо

$$\begin{cases} \operatorname{arctg} x = -\operatorname{arcctg} y, \\ y = -3x. \end{cases}$$

30. Обчислити значення виразу $2(\sqrt{3}x - y)$, якщо

$$\begin{cases} \arcsin x = -\arccos y, \\ x = -\sqrt{3}y. \end{cases}$$

§ 15. Рівняння та системи рівнянь з параметром

Варіант А

Група 1

1. Знайти значення параметра a , для якого рівняння $(3a + 1)x = 2a + (2a + 3)x$ не має розв'язку.

2. Знайти значення параметра a , для якого рівняння $a^2x - a = 3(ax - 1)$ має безліч розв'язків.

3. Знайти значення параметра a , для якого рівняння $a^2(x - 1) - 3ax = 4x - 1$ не має розв'язку.

4. Знайти значення параметра a , для якого рівняння $a^2(x - 3) - 9x + 10a = 3$ має безліч розв'язків.

5. Обчислити суму всіх цілих значень параметра a , для яких рівняння $(a - 2)x = a + 3$ має недодатний розв'язок.

6. Обчислити суму всіх цілих значень параметра a , для яких рівняння $(4 - a)x = a - 2$ має невід'ємний розв'язок.

7. Обчислити добуток всіх значень параметра a , для яких рівняння $3x = a$ та $(5 - a)x = 2$ мають однакові розв'язки.

8. При якому значенні параметра a розв'язок рівняння $(a - 2)x = 3a + 3$ вдвічі більший розв'язку рівняння $(a - 1)x = 2a + 2$.

9. Знайти найбільше число серед розв'язків рівнянь вигляду $(2a - 1)x = 6a + 12$, де a — цілий параметр.

10. Знайти найменше число серед розв'язків рівнянь вигляду $(3a + 2)x = 4(1 - 3a)$, де a — цілий параметр.

Група 2

11. При якому значенні параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} 2x + 4y = 5, \\ 7x - ay = 17 \end{cases}$$

немає розв'язку?

12. При якому значенні параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} ax + y = 2, \\ x + y = 2a \end{cases}$$

має безліч розв'язків?

13. При якому значенні параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} ax + y = a^2 - 2, \\ 3x + (a - 2)y = 3 \end{cases}$$

немає розв'язку?

14. При якому значенні параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} ax - y = a, \\ 2ax - 2y = 6 \end{cases}$$

має безліч розв'язків?

15. При якому значенні параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} x + ay = 1, \\ ax - 3ay = 2a + 3 \end{cases}$$

немає розв'язку?

16. При якому значенні параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} (a - 1)x + 2ay = -2, \\ 2ax + (a - 1)y = a - 1 \end{cases}$$

має безліч розв'язків?

17. При якому значенні параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} 2x + (a - 1)y = 5, \\ ax + y = 5 \end{cases}$$

немає розв'язку?

18. При якому значенні параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} (a + 2)x + 3y = 6 - 3a, \\ (a - 2)x + (a - 2)y = 0 \end{cases}$$

має безліч розв'язків?

19. При якому значенні параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} a^2x - 2y = 2\frac{1}{3}, \\ 3x - 6y = -7a \end{cases}$$

немає розв'язку?

20. При якому значенні параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} (a+1)x + (a-1)y = 2, \\ 5x - (1-a)y = 5 \end{cases}$$

має безліч розв'язків?

Група 3

21. При якому значенні параметра a рівняння

$$\frac{3x-4}{x-2} = a$$

немає розв'язку?

22. При якому значенні параметра a рівняння

$$\frac{2-15x}{3x-1} = a$$

немає розв'язку?

23. Обчислити добуток ax_0 , де x_0 — розв'язок рівняння $(2x-a)^2 + 2x^2 - 8x + 8 = 0$ з параметром a .

24. Обчислити суму $a + x_0$, де x_0 — розв'язок рівняння $9x^2 - 12ax + 4a^2 + |x-4| = 0$ з параметром a .

25. Знайти найбільше ціле значення параметра a , для якого рівняння $x^2 - ax + a + 3 = 0$ не має дійсного розв'язку.

26. Знайти найменше натуральне значення параметра a , для якого рівняння $x^2 - ax + 2a + 5 = 0$ має два різні дійсні розв'язки.

27. Знайти найменше значення параметра a , для якого рівняння $(a+1)x^2 - (a-1)x - 2a = 0$ має один розв'язок.

28. Обчислити суму всіх цілих значень параметра a , при яких рівняння $x^2 + (3a+1)x + 2a^2 + a + 1 = 0$ має один розв'язок.

29. Знайти ціле значення параметра a , для якого рівняння $x^2 - (a+2)x + a^2 + 3a + 2 = 0$ має два різні дійсні розв'язки.

30. Обчислити суму $a_1 + a_2 + a_3$, де a_1 — найбільше ціле значення параметра a , при якому рівняння $x^2 + 3x + a = 0$ має два різні дійсні розв'язки; a_2 — значення параметра a , при якому це рівняння має один розв'язок; a_3 — найменше ціле значення параметра a , для якого дане рівняння немає дійсних розв'язків.

Варіант Б
Група 1

1. Обчислити суму всіх значень параметра a , для яких рівняння $a^2(x+1) + 2 = a(x+3)$ немає розв'язків або має безліч розв'язків.

2. Обчислити суму всіх значень параметра a , для яких рівняння $a(ax-a-1) = 3(ax-a-1)$ немає розв'язків або має безліч розв'язків.

3. Обчислити суму всіх цілих значень параметра a , для яких рівняння $(2a-2)x = (a+1)x + 3a$ має розв'язки, які не більші за 2.

4. Знайти найбільше ціле значення параметра a , для якого всі розв'язки рівняння $(a^2+a)x + 4 = a^2(1+ax) - 2x$ є додатними.

5. Обчислити суму всіх цілих додатних значень параметра a , для яких розв'язки рівняння $16(a^2x-1)+a^2 = (9a^2+28)x$ є невід'ємними.

6. Обчислити суму всіх цілих значень параметра a , для яких рівняння $a(4x+a) = 16 - a^2x$ має лише додатні розв'язки.

7. Знайти найменше значення параметра a , для якого розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} (a-1)x + y = 2, \\ x + y = a, \end{cases}$$

задовольняють умовам $x < 0, y \geq 0$.

8. Знайти найменше ціле значення параметра a , для якого розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} ax - 2y = 3, \\ ax + ay = 4, \end{cases}$$

задовольняють умовам $x > 0, y > 0$.

9. Знайти найменше ціле значення параметра a , для якого розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} ax + 3y = -a, \\ 3x + ay = 12 \end{cases}$$

задовольняють умовам $x > 0, y > 0$.

10. Знайти найбільше ціле значення параметра a , для якого розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x - 6y = 1, \\ 5x + ay = 2 \end{cases}$$

задовольняють умовам $x > 0, y < 0$.

Група 2

11. Для якого значення параметра a сума квадратів коренів квадратного тричлена $6x^2 + 15x + a$ дорівнює 4, 25?

12. Для якого найбільшого значення параметра a сума квадратів коренів квадратного тричлена $2x^2 - ax + 2a$ дорівнює 45?

13. Обчислити суму всіх цілих значень параметра a , для яких квадратний тричлен $3x^2 - 2ax - a + 6$ має два різних додатних корені.

14. Обчислити суму всіх цілих значень параметра a , для яких квадратний тричлен $(a + 1)x^2 - 4ax + a - 5$ має два корені різних знаків.

15. Обчислити суму всіх цілих значень параметра a , для яких квадратний тричлен $(a - 3)x^2 - 2(a + 10)x + a + 3$ має два різних від'ємних корені.

16. Знайти середнє арифметичне всіх значень параметра a , для яких рівняння $a(a + 1)x^2 + x - a(a + 1) = 0$ має один розв'язок.

17. Обчислити суму всіх значень параметра a , для яких рівняння $(a - 1)x^2 - 2(a + 1)x + a + 4 = 0$ має один розв'язок.

18. Обчислити суму всіх значень параметра a , для яких квадратний тричлен $x^2 - 2ax + 2a^2 - 6a + 8$ є квадратом двочлена.

19. Обчислити суму всіх цілих значень параметра a , для яких квадратний тричлен $(a - 2)x^2 + 2(a + 4)x + a + 10$ має два корені різних знаків, причому модуль від'ємного кореня більший за модуль додатного.

20. Обчислити суму всіх цілих значень параметра a , для яких квадратний тричлен $(a - 2)x^2 - 2(a + 3)x + a + 8$ має два корені різних знаків, причому модуль додатного кореня більший за модуль від'ємного.

Група 3

21. Обчислити суму всіх значень параметра a , для яких рівняння $\frac{6x-3}{a-2x} = a$ немає розв'язків.

22. Обчислити суму всіх значень параметра a , для яких рівняння $\frac{9x-3}{3x+a} = a$ немає розв'язків.

23. Знайти значення параметра a , для якого рівняння $\frac{a-1}{x-1} = \frac{2a-x}{a}$ має один розв'язок.

24. Обчислити суму всіх значень параметра a , для яких рівняння $\frac{a-1}{x-1} = \frac{2x-a}{x}$ має один розв'язок.

25. Знайти найменше ціле значення параметра a , для якого рівняння $x^4 - (a+1)x^2 + a + 1 = 0$ має чотири різні дійсні розв'язки.

26. Знайти найменше ціле значення параметра a , для якого рівняння $2x^4 + (2a-1)x^2 + a - 1 = 0$ немає дійсного розв'язку.

27. Знайти середнє арифметичне всіх цілих значень параметра a , для яких рівняння $(a-2)x - 2a\sqrt{x} + 2a - 3 = 0$ має один дійсний розв'язок.

28. Знайти найменше ціле значення параметра a , для якого рівняння $x - 2(a-1)\sqrt{x} + 2a + 1 = 0$ має два різні додатні розв'язки.

29. Знайти суму цілих значень параметра a , для яких рівняння $9x + 2(a+3) \cdot 3^x + a^2 = 22$ має розв'язок.

30. Знайти найбільше ціле значення параметра a , для якого рівняння $a \cdot 9^x - 4 \cdot 3^x + 1 = 0$ має один розв'язок.

Варіант В

Група 1

1. Обчислити суму всіх цілих значень параметра a , для яких рівняння $(a-6)\sin x = a^2 - 5a + 9$ має розв'язок.

2. Знайти найбільше значення параметра a , для якого рівняння $(3a - a^2 - 10)\cos x = a^2 + 2a + 7$ має розв'язок.

3. Знайти найбільше ціле значення параметра a , для якого рівняння $(a^2 - 2a + 9)\sin x = a^2 + 3a + 10$ має розв'язок.

4. Знайти найменше значення параметра a , для якого рівняння $(a^2 + 2a + 4)\cos x = a^2 - 3a + 5$ має розв'язок.

5. Для якого найменшого цілого значення параметра a рівняння $\cos^{-4} x - \operatorname{tg}^4 x = \frac{a}{4}$ має розв'язок?

6. Для якого найбільшого цілого значення параметра a рівняння $(3a + 4)\sin x + (4a - 3)\cos x = a^2 + 1$ має розв'язок?

7. Для якого найменшого цілого значення параметра a рівняння $(5a + 12)\sin x - (12a - 5)\cos x = a^2 + 1$ має розв'язок?

8. Обчислити суму найбільшого від'ємного та найменшого додатного цілих значень параметра a , для яких рівняння $(a-2)^2 \sin x + (a^2 - 4)\cos x = 3\sqrt{2}(a-2)$ має розв'язок.

9. Обчислити суму найбільшого від'ємного та найменшого додатного цілих значень параметра a , для яких рівняння $(a + 1)^2 \sin x - (a^2 - 1) \cos x = 5\sqrt{2}(a + 1)$ має розв'язок.

10. Знайти середину проміжку значень параметра a , для якого рівняння $\cos^4 x + \cos^4(x - \frac{\pi}{4}) = a$ має розв'язок?

Група 2

11. Обчислити суму всіх цілих значень параметра a , для яких рівняння $4 \sin^2 x - 2 \sin x + a = 0$ має розв'язок.

12. Обчислити суму всіх цілих значень параметра a , для яких рівняння $5 \cos^2 x + 2 \cos x + 3a = 0$ має розв'язок.

13. Для якого найменшого значення параметра a рівняння $4 \sin^2 x - 20 \sin x + a + 1 = 0$ має розв'язок?

14. Для якого найменшого значення параметра a рівняння $4 \cos^2 x + 35 \cos x + 3a = 0$ має розв'язок?

15. Для якого найбільшого значення параметра a рівняння $5 \cos^2 x + (2a - 2) \cos x - 4a - 16 = 0$ має розв'язок?

16. Для якого найменшого значення параметра a рівняння $6 \sin^2 x - (2a + 1) \sin x - 3a - 15 = 0$ має розв'язок?

17. Обчислити суму всіх цілих значень параметра a , для яких рівняння $0,5 \sin 2x + \cos^2 x = 0,5a$ має розв'язок.

18. Обчислити суму всіх цілих значень параметра a , для яких рівняння $\sin^2 x - \frac{3}{2} \sin 2x = 0,5a$ має розв'язок.

19. Обчислити суму всіх цілих значень параметра a , для яких рівняння $\cos^2 x - 3 \cos x \sin x + 1 = a$ має розв'язок.

20. Обчислити суму всіх цілих значень параметра a , для яких рівняння $4 \cos^2 x - \sin 2x = 1 - a$ має розв'язок.

Група 3

21. Для якого найменшого значення параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} ax + 2y = 1, \\ x + 2y = 2, \\ x - 2y = a \end{cases}$$

має розв'язок?

22. Знайти значення параметра a , для якого система рівнянь

$$\begin{cases} ax + 4y = a + 2, \\ x + ay = 2, \\ ax + a^2y = 2a \end{cases}$$

немає розв'язку?

23. Для якого значення параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ 3x - 4y = 60 \end{cases}$$

має один розв'язок?

24. Для якого найменшого значення параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 27,04, \\ 3x + 4y = a \end{cases}$$

має один розв'язок?

25. Обчислити суму всіх цілих значень параметра a , для яких система рівнянь

$$\begin{cases} |x| + |y| = 2, \\ y = x^2 + a \end{cases}$$

має розв'язок.

26. Для якого найменшого цілого значення параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 1 + 3 \log_3 2, \\ \log_a(x + y) = 2 \end{cases}$$

має розв'язок?

27. Для якого найменшого значення параметра a рівняння $2|x - 3| = x + a$ має розв'язок?

28. Для якого найменшого значення параметра a рівняння $x + \sqrt{x^2 - 1} = a$ має розв'язок?

29. Для якого найбільшого від'ємного значення параметра a рівняння $a \sin(x + \frac{\pi}{4}) - \sin 2x = 9$ має розв'язок?

30. Для якого найменшого натурального значення параметра a рівняння $\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x(x-1)} = 2 \sin \frac{a\pi}{2}$ має розв'язок?

Зразки екзаменаційних білетів з математики

Варіант А

1. Обчислити

$$\left(\frac{2}{7} - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{13} - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{7}.$$

2. Використовуючи цифри 2, 3, 5, 7 по одному разу, скласти два двоцифрових числа, добуток яких буде найбільшим. Знайти значення цього добутку.

3. Обчислити $(3\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{18} + 1) + (2 - \sqrt{3})^2 + \sqrt{48}$.

4. Обчислити $3 \cos \pi - 2 \sin \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3}$.

5. Вказати, які з наступних нерівностей є правильними:

1) $\cos 285^\circ < \cos 286^\circ$; 2) $\sin 285^\circ < \sin 286^\circ$;

3) $\operatorname{tg} 285^\circ < \operatorname{tg} 286^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} 285^\circ < \operatorname{ctg} 286^\circ$.

6. Обчислити в градусах $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

7. Обчислити

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} + 3 \cdot (0,0081)^{-0,25} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}.$$

8. Розв'язати рівняння

$$\frac{1}{5x-2} = \frac{2}{5x+4}.$$

9. Обчислити суму розв'язків рівняння $(16 - x^2) \cdot \sqrt{7 - 2x} = 0$.

10. Розв'язати рівняння $25^{\frac{1}{2x}+1} = 125^{-\frac{2}{3}}$.

11. Розв'язати рівняння $\log_4 \frac{1}{x^2} - \log_4 \sqrt{x} = -5$.

12. Знайти у градусній мірі розв'язки рівняння

$$5 \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 2 = 0,$$

що належать інтервалу $(0^\circ; 90^\circ)$.

13. Розв'язати рівняння $|23x - 572| \cdot (572 - 23x) = -9$.

14. Обчислити $\frac{y}{x}$, якщо

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{3}{10} \quad \text{і} \quad \frac{3x-4y}{5xy} = -\frac{13}{25}.$$

15. При якому значенні параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} x + 4ay = 3, \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$$

має безліч розв'язків?

16. Розв'язати нерівність $4x^2 + 25 \leq 20x$.

17. У правильний трикутник вписано коло, навколо якого описано правильний шестикутник. Знайти відношення площі даного трикутника до даного шестикутника.

18. Знайти діаметр кола, описаного навколо прямокутного трикутника з вершинами в точках $M(2; 2)$, $N(4; 3)$, $P(6; -1)$.

19. Знайти довжину вектора $\overline{m}(x; y)$, якщо

$$2 \cdot \overline{a}(3x + 3; 4, 5y) - 3 \cdot \overline{b}(3y; 21 - 3x) = 3 \cdot \overline{c}(1; 0).$$

20. Відрізок AM довжиною 10 см перпендикулярний до площини прямокутника $ABCD$. Знайти відстань від точки M до діагоналі BD прямокутника, якщо його сторони відповідно дорівнюють 30 см і 40 см.

Варіант Б

1. Отримані при сушінні винограду родзинки становлять 32% його ваги. Скільки потрібно взяти винограду, щоб отримати 40 кг родзинок?

2. На яку цифру закінчується число 22^{22} ?

3. Обчислити $\sqrt{8} : (\sqrt[6]{8} : \sqrt{9^3})$.

4. Вказати, які з наступних нерівностей є правильними:

- 1) $\arcsin(-0, 2) > \arcsin(-0, 3)$; 2) $\arccos(-0, 2) > \arccos(-0, 3)$;
 3) $\arctg(-0, 2) > \arctg(-0, 3)$; 4) $\text{arcctg}(-0, 2) > \text{arcctg}(-0, 3)$.

5. Розв'язати рівняння $(4x - 7) \cdot (x^2 + x + 2) = 4x - 7$.

6. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{(64x)^5} = 32$.

7. Розв'язати рівняння $2 \log_5 x + \log_{0,2} x = 2$.

8. Знайти середину проміжку додатних розв'язків нерівності

$$\frac{3}{x+2} < \frac{5}{2-x}.$$

9. Знайти найменший розв'язок нерівності

$$(4x - 17)\sqrt{5x + 8} \cdot \sqrt{2x - 7} \geq 0.$$

10. Знайти довжину проміжку розв'язків нерівності

$$|x^2 - 5| \leq 7, 25.$$

11. Обчислити $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-1) - \operatorname{arctg} 0, 2)$.

12. Розв'язати рівняння $2 \cdot 4^{\sqrt{x-2}} - 17 \cdot 2^{\sqrt{x-2}} + 8 = 0$.

13. Знайти найменший додатний розв'язок рівняння

$$3 \sin^2 2\pi x - 3 \cos^2 2\pi x + \cos 4\pi x = 2.$$

14. Навколо кола радіуса $8 - 4\sqrt{3}$ описано рівнобедрений трикутник з кутом 120° . Знайти довжину його найбільшої сторони.

15. Знайти радіус кола, вписаного у фігуру, обмежену осями координат та прямою $15x - 8y = 120$.

16. Дано вектор $\vec{a}(-6; 2; 3)$. Знайти довжину колінеарного йому вектора з початком у точці $A(-10; 6; 4)$ і кінцем, що належить координатній площині Oxz .

17. При якому значенні x значення квадратів двочленів $x + 3$, $x + 1$, $x - 3$ є послідовними членами арифметичної прогресії?

18. Нехай f — функція, що задається формулою $y = -2x + 8$. Знайти значення параметра a , для якого функція $y = f(x - a)$ є непарною.

19. У розкладі $\left(\sqrt[3]{y} - \frac{2}{\sqrt{y}}\right)^5$ знайти член, що не залежить від y .

20. У трикутнику ABC довжини сторін AB , BC і AC відповідно дорівнюють 17 см, 15 см і 8 см. Із точки D , що лежить на стороні BC , проведено відрізок DM довжиною 2 см, перпендикулярний до площини трикутника. Точка M рівновіддалена від прямих AC і AB . Знайти відстань від точки M до прямих AC і AB .

Варіант В

1. Знайти число, $27\frac{1}{3}\%$ якого дорівнює 57, 4.
2. Знайти найменше натуральне число відмінне від 3, яке при діленні на 12; 15 і 35 дає остачу 3.

3. Обчислити

$$\frac{\sqrt[3]{4 - \sqrt{17}}}{\sqrt[3]{(4 + \sqrt{17})^2}} + \sqrt{17}.$$

4. Обчислити

$$\frac{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha},$$

якщо $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{7}$.

5. Обчислити добуток розв'язків рівняння

$$(x^2 - 2x)^2 - 3x^2 + 6x - 4 = 0.$$

6. Розв'язати рівняння $\sqrt{2x^2 + 15x - 8} + \sqrt[4]{0,5x + 4} = 0$.
7. Обчислити суму розв'язків рівняння $\lg(81 \sqrt[3]{3^{x^2 - 8x}}) = 0$.
8. Розв'язати нерівність $(x - 2)(x^2 - 4)(x^3 - 8)(x^4 - 16) \leq 0$.
9. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$x^2 + 4(\sqrt{x + 4})^2 - 28 \leq 0.$$

10. Знайти довжину проміжку розв'язків нерівності

$$|4x - 3| < |2x + 3|.$$

11. Обчислити $26 \sin^2\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{12}{13}\right)$.

12. Розв'язати рівняння $x^2 \cdot 6^{-x} - 6^{2+\sqrt{x}} = 6^{2-x} - x^2 \cdot 6^{\sqrt{x}}$.

13. Розв'язати рівняння $3 \arccos(2x - 3) = 2\pi$.

14. У прямокутний трикутник вписано коло, точка дотику якого до гіпотенузи ділить її на частини, довжини яких відповідно дорівнюють 21 см і 4 см. Знайти радіус цього кола.

15. Знайти периметр трикутника ABC , дві вершини якого мають відповідно координати $(2; 1; 1)$ і $(0; 3; 2)$, а середини сторін AC і BC лежать відповідно на осі Oy та в площині Oxz .

16. Знайти довжину більшої з частин, на які ділиться відрізок з кінцями $A(-9; -10; 0)$ і $B(7; 6; 8)$ координатною площиною Oxz .

17. Сума першого і третього членів арифметичної прогресії дорівнює її дев'ятому членові, а добуток цих членів — дев'ятнадцятому члену прогресії. Знайти порядковий номер члена цієї прогресії, який дорівнює 8, якщо перший член не дорівнює нулю.

18. Знайти найменший додатний період функції

$$y = 4 \cos \frac{\pi x}{5} + \operatorname{tg} \frac{2\pi x}{3}.$$

19. Яка ймовірність того, що намання вибране натуральне число від 1 до 36 буде дільником числа 36?

20. Площа повної поверхні конуса в 2,25 рази більша за площу поверхні вписаної в нього кулі. Чому дорівнює найбільше значення відношення площі бічної поверхні конуса до площі його основи?

Література

1. *Бевз Г. П.* Методика викладання математики. – К.: Вища школа, 1977.
2. *Вишенський В. А., Перестюк М. О., Самоїленко А. М.* Посібник для вступників до вузів. – К.: Либідь, 1990.
3. *Возняк Г. М.* Диференційовані контрольні роботи з математики 6 кл. – Тернопіль: 2001.
4. *Гайшут О. Г., Литвиненко Г. М.* Розв'язування алгебраїчних задач. – К.: Рад. школа, 1991.
5. *Генкін С. А. та ін.* Ленінградські математичні гуртки. I ч. – К.: ТВІМС, 1997.
6. Задачі по алгебре для 6–8 классов / *Фаддеев Д. К. и др.* – М.: Просвещение, 1987.
7. Задачі по математике. Уравнения и неравенства / *Вавилов В.В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И.* – М.: Наука, 1987.
8. Збірник задач республіканських математичних олімпіад / *За редак. В. І. Михайловського.* – К.: Вища школа, 1979.
9. *Коваленко В. Г. та ін.* Алгебра 9 кл. – К.: Освіта, 1996.
10. *Литвиненко Г. М., Мордкович А. Г.* Практикум по решению математических задач: Алгебра. Тригонометрия. – М.: Просвещение, 1991.
11. *Литвиненко Г. М. та ін.* Збірник завдань для екзамену з математики на атестат про середню освіту. Частина 1. Алгебра та початки аналізу – Донецьк: ЛІК, 1997.
12. *Ляпин С. Е.* Сборник задач по элементарной алгебре. – М.: Просвещение, 1973.
13. *Маланюк М. П., Лукавецький В. І.* Олімпіади юних математиків. – К.: Рад. школа, 1985.
14. *Петраков И. С.* Математические олимпиады школьников. – М.: Просвещение, 1982.
15. Сборник задач по элементарной математике / *Антонов Н. П., Выгодский М. Я., Никитин В. В., Санкин А. И.* – М.: Наука, 1961.

16. Сборник задач по математике для поступающих во втузы: Учеб. пособие / *Егеров В. К., Кордемский Б. А., Зайцев В. В. и др.*; Под ред. *Сканави М. И.* – 6-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 1992.
17. *Слепкань З. І.* Збірник завдань для державної підсумкової атестації з алгебри. 9 кл. – Харків: Гімназія, 2001.
18. *Фаддеев Д. К. и др.* Элементы высшей математики для школьников. – М.: Наука, 1987.
19. *Ципкін О. Г.* Довідник з математики для середніх навчальних закладів. – К.: Вища школа, 1988.
20. *Черкасов О. Ю.* Математика – Московский лицей. – М.: Янтарный сказ, 1996.
21. *Шаригин И. Ф.* Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 10 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1989.
22. *Шаригин И. Ф., Голубев В. И.* : Решение задач: Учеб. пособие для 11 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1991.
23. *Шкіль М. І. та ін.* Алгебра і початки аналізу 10–11 кл. – К.: Зодіак-ЕКО, 1995.

ШАПОЧКА Ігор Валерійович,

ШАПОЧКА Валерій Іванович

ЗБІРНИК КОНКУРСНИХ ЗАВДАНЬ З МАТЕМАТИКИ

Частина 1

Здано до складання 12.01.2004. Підписано до друку 01.03.2004.
Формат 60×84/16. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 6,74. Обл.-вид. арк. 5,96.
Тираж 1000 пр. Зам. № 22.

Віддруковано з готового оригінал макету у ВАТ "Патент".
88006, м. Ужгород, вул. Гагаріна, 101.