

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

І. В. Шапочка, В. І. Шапочка

**ЗБІРНИК
КОНКУРСНИХ ЗАВДАНЬ
З МАТЕМАТИКИ**

Частина 2

Ужгород
"Патент"
2004

ББК 22.1 в10я7

Ш23

УДК 51(07)

Шапочка І. В., Шапочка В. І. Збірник конкурсних завдань з математики. Частина 2. – Ужгород: Патент, 2004. – 154 с. – ISBN 966-7725-87-1.

Збірник містить понад 1200 конкурсних завдань з таких підрозділів елементарної математики, як алгебраїчні раціональні та ірраціональні нерівності, тригонометричні нерівності, показникові та логарифмічні нерівності, нерівності з модулем, системи нерівностей, арифметична та геометрична прогресії, функції та їх властивості, початки аналізу, декартові координати, вектори, планіметрія, стереометрія, комбінаторика, елементи теорії ймовірностей. Збірник призначений для вступників на спеціальності математичного, інженерно-технічного, економічного факультетів та факультету міжнародних відносин Ужгородського національного університету, а також інших вузів. Може бути використаний вчителями математики та учнями старших класів загальноосвітніх шкіл у навчальному процесі.

Рецензент:

доктор фізико-математичних наук, професор *П. М. Гудивок*

Зміст

Передмова	4
§ 1. Алгебраїчні раціональні нерівності	5
§ 2. Ірраціональні нерівності	17
§ 3. Тригонометричні нерівності	28
§ 4. Показникові нерівності	34
§ 5. Логарифмічні нерівності	46
§ 6. Нерівності з модулем	56
§ 7. Системи нерівностей	64
§ 8. Арифметична та геометрична прогресії	77
§ 9. Планіметрія	82
§ 10. Декартові координати	97
§ 11. Вектори	102
§ 12. Стереометрія	110
§ 13. Функції та їх властивості	129
§ 14. Початки аналізу	137
§ 15. Комбінаторика. Елементи теорії ймовірностей	146
Література	152

Передмова

Даний збірник є продовженням опублікованого раніше авторами збірника конкурсних завдань з математики. У другу частину збірника ввійшли задачі з таких підрозділів елементарної математики, як алгебраїчні раціональні та ірраціональні нерівності, тригонометричні нерівності, показникові та логарифмічні нерівності, нерівності з модулем, системи нерівностей, арифметична та геометрична прогресії, функції та їх властивості, початки аналізу, декартові координати, вектори, планіметрія, стереометрія, комбінаторика, елементи теорії ймовірностей.

Завдання в цій частині, аналогічно як і попередній, сформульовані таким чином, що відповіддю для кожного з них є раціональне число, десятковий запис якого не перевищує певне фіксоване число знаків. Тому велике число завдань містить фрази на зразок: "знайти найменший розв'язок ...", "знайти найбільший цілий розв'язок ...", "знайти середину проміжку розв'язків ...", "обчислити суму розв'язків ..." і т.п. Звертаємо увагу абітурієнта, якщо завданням передбачено обчислити суму всіх чисел із деякої скінченної множини чисел, то у випадку, коли ця множина складається з одного числа a , сума вважається рівною a . У завданнях, де наведені варіанти можливих відповідей, вкажіть номери правильних відповідей, записавши їх у порядку зростання.

Автори

§ 1. Алгебраїчні раціональні нерівності

Група 1

1. Знайти найбільший розв'язок нерівності

$$2 + \frac{x + 17}{5} \geq \frac{3x - 7}{4}.$$

2. Знайти найменший розв'язок нерівності

$$10 - \frac{3x - 1}{2} \leq \frac{6x + 3}{11}.$$

3. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності

$$\frac{x - 4}{5} > 9 + \frac{2x - 4}{2}.$$

4. Знайти найменший натуральний розв'язок нерівності

$$\frac{6x + 7}{3} - 2 < \frac{5x - 3}{2}.$$

5. Знайти найменший натуральний розв'язок сукупності нерівностей

$$\begin{cases} 4(x - 2) + 2x < 6x - 7, \\ \frac{x}{4} \geq 2. \end{cases}$$

6. Знайти найбільший цілий від'ємний розв'язок сукупності нерівностей

$$\begin{cases} 3(x + 2) - x > 2(x - 3) + 13, \\ -4, 5x \geq 18. \end{cases}$$

7. Знайти найменший натуральний розв'язок сукупності нерівностей

$$\begin{cases} 3(x + 2) + 2(x - 1) < 3(x - 1) + 2x + 1, \\ -5x < -20. \end{cases}$$

8. Знайти найбільший цілий від'ємний розв'язок сукупності нерівностей

$$\begin{cases} 6x + 1 \geq 5(x - 1) + x, \\ -0, 4x > 1, 2. \end{cases}$$

9. Знайти найбільший розв'язок нерівності

$$a^2y \geq (1+y)b^2 + (a+2b)a,$$

якщо $a = 63$, $b = 69$.

10. Знайти найменший розв'язок нерівності

$$(a^2 - ab)y \geq a^3 + b^2(b - y),$$

якщо $a = 92$, $b = -99$.

Група 2

11. Знайти число цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \frac{x}{16} - \frac{7}{8} > \frac{3x}{16} - \frac{5}{2}, \\ \frac{x+4}{16} < 2 - \frac{2-x}{6}. \end{cases}$$

12. Обчислити суму всіх цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \frac{2x+1}{2} + 3 < 2x - 6, 25, \\ \frac{10x}{3} < 2x + 19, 4. \end{cases}$$

13. Знайти найменший цілий розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} \frac{x-6}{10} + 2 > \frac{x-2}{20} - 1, \\ \frac{x}{2} - 3 > \frac{x-8}{6}. \end{cases}$$

14. Знайти найбільший цілий розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} 3 - \frac{13x-2}{11} < 2x, \\ \frac{x}{3} - 2\frac{2}{9} > \frac{x}{6} + \frac{2}{3}(x-7). \end{cases}$$

15. Обчислити суму всіх цілих розв'язків подвійної нерівності

$$\frac{x-2}{2} \leq \frac{x}{3} < \frac{5x+15}{6}.$$

16. Обчислити суму всіх цілих розв'язків подвійної нерівності

$$\frac{3x+12}{35} \leq \frac{x}{5} < \frac{x+2}{7}.$$

17. Знайти найбільше значення функції $y = -2x - 10$ з областю визначення, що задається системою нерівностей

$$\begin{cases} 3x - 2 \leq 3(2x + 1) + 16, \\ 2(4 + x) \leq \frac{3}{2}x + 8. \end{cases}$$

18. Знайти найменше значення функції $y = 2x + 7$ з областю визначення, що задається системою нерівностей

$$\begin{cases} 3(4x + 1) + 16 \geq 2(3x - 1), \\ 3x + 8 \geq 4(2 + x). \end{cases}$$

19. Знайти найменше значення функції $y = \frac{18}{x}$ з областю визначення, що задається системою нерівностей

$$\begin{cases} \frac{5x+18}{3} - x \geq 2x, \\ 1 - \frac{6-5x}{4} \geq x. \end{cases}$$

20. Знайти найбільше значення функції $y = -\frac{21}{x}$ з областю визначення, що задається системою нерівностей

$$\begin{cases} 4 - \frac{x-4}{3} \leq x, \\ \frac{7x-1}{8} \leq 6. \end{cases}$$

Група 3

21. Розв'язати нерівність $4x^2 - 12x + 9 \leq 0$.

22. Знайти значення x , що не є розв'язком нерівності

$$25x^2 + 30x + 9 > 0.$$

23. Визначити найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності

$$2x^2 - 7x + 6 > 0.$$

24. Знайти найменший натуральний розв'язок нерівності

$$11x < 5x^2 + 6.$$

25. Знайти найбільший розв'язок нерівності

$$\frac{(2x + 1)^2}{25} - \frac{x - 1}{3} \leq x.$$

26. Знайти найменший розв'язок нерівності

$$\frac{(3x + 2)^2}{11} - \frac{x + 5}{4} \geq x^2.$$

27. Визначити число цілих розв'язків нерівності

$$(2x - 1)(x + 7) < 0.$$

28. Визначити число цілих розв'язків нерівності

$$-2(x + 4, 5)(x - 2) \geq 0.$$

29. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\frac{-5}{6x^2 - 13x - 5} \geq 0.$$

30. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\frac{4}{3x^2 + 4x - 4} \leq 0.$$

Варіант Б
Група 1

1. Визначити число цілих розв'язків нерівності

$$4x^2 \left(1 - \frac{6}{x}\right) < 3x + \frac{7x - 7}{x - 1}.$$

2. Визначити число цілих розв'язків нерівності

$$3x^2 \left(\frac{6}{x} - 1\right) > \frac{x^2 - x}{x - 1} - 6.$$

3. Визначити найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності

$$8x^2 + 2x + \frac{4}{x + 2} \geq 21 + \frac{4x + 12}{(x + 2)(x + 3)}.$$

4. Визначити найбільший натуральний розв'язок нерівності

$$3x(x - 11) + \frac{8(x^2 - 8x + 16)}{x - 4} \leq \frac{x^2 - 9}{x + 3}.$$

5. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$(4x^2 - x) \cos 2 \geq (x + 6) \cos 2.$$

6. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$(2x^2 - x) \operatorname{tg} 5 \geq (70 - x^2) \operatorname{tg} 5.$$

7. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$\frac{(x + 2)^2}{(x - 3)(x - 5)} \leq 0.$$

8. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності

$$\frac{(x + 8)^2}{(x + 7)(x + 9)^2} < 0.$$

9. Знайти найбільший розв'язок нерівності

$$\frac{(x+3)^2(x+7)}{(x^2+3)(x+11)} \leq 0.$$

10. Знайти найменший розв'язок нерівності

$$\frac{(x-8)(x-6)^2}{(x^2+6)(x-12)} \leq 0.$$

Група 2

11. Обчислити суму цілих від'ємних розв'язків нерівності

$$\frac{1}{x+2} \leq \frac{3}{x-3}.$$

12. Обчислити суму цілих додатних розв'язків нерівності

$$\frac{4-x}{x-5} > \frac{1}{1-x}.$$

13. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності

$$\frac{x+7}{x-2} > x-1.$$

14. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності

$$x+3 < -\frac{1}{x+1}.$$

15. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності

$$\frac{2}{x+2} < \frac{1}{x-3}.$$

16. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності

$$\frac{1}{1-x} < \frac{3}{x+3}.$$

17. Знайти цілий розв'язок нерівності

$$\frac{(2x - 3) \operatorname{ctg} 6}{x} > -\frac{(2x - 3) \operatorname{ctg} 6}{x(x + 1)}.$$

18. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\frac{12 \sin 4}{x} < \frac{(x + 4) \sin 4}{x - 1}.$$

19. Знайти цілий розв'язок нерівності

$$\frac{2x - 3}{(4 - x) \log_2 0,2} < \frac{\log_{0,2} 2}{x}.$$

20. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\frac{\lg e}{4(2 - x)} > \frac{x + 2}{(4x + 1) \ln 10}.$$

Група 3

21. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$(x^3 + 1)(3 - x)(x - 2)^2 > 0.$$

22. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$(2x - 5)(x^2 + 4)(x^3 + 8)(x + 1)^2 < 0.$$

23. Знайти середнє арифметичне цілих розв'язків нерівності

$$(x - 1)^4 - 20(x - 1)^2 + 64 < 0.$$

24. Знайти середнє арифметичне цілих розв'язків нерівності

$$(x + 2)^4 - (x + 2)^2 < 12.$$

25. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності

$$(x^2 + 6x)^2 + x^2 + 6x < 56.$$

26. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності

$$(x^2 - 2x - 5)^2 - 8(x^2 - 2x - 5) < 20.$$

27. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$(x^2 + x - 1)(x^2 + x + 2) < 40.$$

28. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$(x^2 - x - 16)(x^2 - x + 2) < 88.$$

29. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$(x + 1)^2(x - 1)(x + 3) < 45.$$

30. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$(x - 2)^2(x + 2)(x - 6) + 15 < 0.$$

Варіант В
Група 1

Група 4

1. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності

$$(x + 1)^3 + (2 - x)^3 \leq 3x^2 - 12x + 18.$$

2. Визначити найменший цілий розв'язок нерівності

$$(2x - 1)^3 - (2x - 3)^3 \geq 25x^2 - 40x + 6.$$

3. Обчислити суму натуральних розв'язків нерівності

$$(\pi - 4)(e - 3)(x^3 - 1)(x^4 - 625) \sin 2e > 0.$$

4. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$(x - \pi)^2(x - 1)(x - e) \operatorname{tg} e \geq 0.$$

5. Знайти цілий розв'язок нерівності

$$x^2 + 2x + \cos 6 < 0.$$

6. Визначити число цілих розв'язків нерівності

$$\sin 1,57 - 4x - x^2 \geq 0.$$

7. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності

$$x^2 + 6x - \log_2 129 \leq 0.$$

8. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності

$$x^2 - 8x - \log_3 8 \leq 0.$$

9. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності

$$\frac{(2 - x^2)(x - 3)^2}{(x + 1)(x^2 - 3x - 4)} > 0.$$

10. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\frac{x^3(5 - x)^6(x - 1)^2}{(x - 2)(x + 3)^5(x - 5)} \leq 0.$$

Група 5

11. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності

$$\frac{2x - 5}{x^2 - 6x - 7} < \frac{1}{x - 3}.$$

12. Визначити число цілих від'ємних розв'язків нерівності

$$\frac{2}{2 - x} + \frac{3}{2 + x} \geq \frac{4x}{4 - x^2}.$$

13. Визначити число цілих розв'язків нерівності

$$\frac{1}{2 - x} + \frac{5}{2 + x} > 1.$$

14. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності

$$\frac{1}{x + 5} + \frac{1}{x + 4} \geq \frac{4x}{x^2 + 9x + 20}.$$

15. Визначити число цілих від'ємних розв'язків нерівності

$$\frac{1}{x^2 - 9} + \frac{1}{3x - x^2} < \frac{3}{2x + 6}.$$

16. Визначити число цілих розв'язків нерівності

$$\frac{9}{(x - 2)^2} - \frac{5}{(x + 2)^2} > \frac{12}{x^2 - 4}.$$

17. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\left(\frac{x + 3}{x - 3} - \frac{x - 3}{x + 3} \right) : \frac{2x^2}{3x - 9} \leq 0.$$

18. Визначити число цілих розв'язків нерівності

$$\frac{x + 1}{x} : \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} + \frac{2}{x - 2} \right) \leq 0.$$

19. Визначити число цілих значень невідомої x , що не є розв'язками нерівності

$$\left(\frac{x+5}{x-5} - \frac{x-5}{x+5} \right) : \frac{3x}{2x^2-50} \geq 0.$$

20. Визначити число цілих значень невідомої x , що не є розв'язками нерівності

$$\frac{x-2}{x-5} : \left(\frac{x^2+24}{x^2-25} - \frac{4}{x-5} \right) \geq 0.$$

Група 6

21. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$\frac{x^2+x+2}{x^2+x+1} + \frac{x^2+x+6}{x^2+x+3} > 4.$$

22. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\frac{x^2-x}{x^2-x+1} - \frac{x^2-x+2}{x^2-x-2} \geq 1.$$

23. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$x^2 - 3x - \frac{8}{x^2 - 3x} \leq 2.$$

24. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\frac{3}{x^2 - 4x + 1} - x^2 \geq 3 - 4x.$$

25. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} \leq \frac{7}{9} \cdot \frac{x+1}{x-1}.$$

26. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$2(x^2+x+1)^2 - 7(x-1)^2 \leq 13(x^3-1).$$

27. Знайти довжину проміжку розв'язків нерівності

$$(x^2 - 1)(x^2 - 4x + 3) \leq 45.$$

28. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$(x^2 - 1)(x^2 + 2x) \leq 24.$$

29. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} \leq 10 \left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x} \right).$$

30. Обчислити добуток числа цілих розв'язків нерівності та найбільшого з них

$$x(x + 3) \leq \frac{1}{x} \left(3 - \frac{1}{x} \right).$$

§ 2. Ірраціональні нерівності

Група 1

1. Знайти цілий розв'язок нерівності $\sqrt{25 - 4x} < 2$.
2. Знайти цілий розв'язок нерівності $\sqrt{9x - 49} < 3$.
3. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\sqrt{16 + 8x - 3x^2} > -2.$$

4. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\sqrt{10 + 7x - 3x^2} > -3.$$

5. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$\sqrt{9 - 2x} \cdot \sqrt{3x + 5} \geq -1.$$

6. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$\sqrt{8x + 16} \cdot \sqrt{3 - 2x} > -5.$$

7. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$\frac{\sqrt{48 - 8x}}{\sqrt{1 + 3x}} > -6.$$

8. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$\frac{\sqrt{14 + 4x}}{\sqrt{1 - 5x}} > -4.$$

9. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$\sqrt{12 - 3x} + \sqrt{14 - 4x} > 0.$$

10. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$\sqrt{17 + 4x} + \sqrt{2x + 8} > 0.$$

Група 2

11. Визначити найменший цілий розв'язок нерівності

$$\sqrt{21 - 4x} \cdot (15 - 6x) < 0.$$

12. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності

$$(33 - 4x) \cdot \sqrt{13 - 2x} > 0.$$

13. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$(5x + 9) \cdot \sqrt{26 + 5x} \geq 0.$$

14. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$(3x - 12) \cdot \sqrt{42 - 4x} \leq 0.$$

15. Визначити найменший цілий розв'язок нерівності

$$(5x + 36) \cdot \sqrt{2x - 5} \cdot \sqrt{3x - 10} > 0.$$

16. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності

$$\sqrt{x - 2} \cdot \sqrt{32 - 5x} \cdot (4x - 25) < 0.$$

17. Знайти цілий розв'язок нерівності

$$(15 - 3x) \cdot \sqrt{14 - 3,5x} \cdot \sqrt{27 - 5x} \leq 0.$$

18. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$(16x - 24) \cdot \sqrt{3x + 17} \cdot \sqrt{2x + 9} \geq 0.$$

19. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$(4x^2 - 25) \cdot \sqrt{3x - 6} \geq 0.$$

20. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$(2x^2 - 18) \cdot \sqrt{21 - 15x} \geq 0.$$

Група 3

21. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$\frac{\sqrt{16 + 2x - 3x^2}}{3x + 1} \geq 0.$$

22. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$\frac{\sqrt{28 + x - 2x^2}}{2x - 7} \leq 0.$$

23. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\sqrt{\frac{7 - 2x}{x + 2}} > 0.$$

24. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\sqrt{\frac{6 - 2x}{x + 1}} > -1.$$

25. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\sqrt{7 - 2x} > \sqrt{3 + x}.$$

26. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\sqrt{3x - 8} < \sqrt{x + 1}.$$

27. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності

$$\sqrt{8x - x^2 - 15} + \sqrt{10 - 2x} \neq 0.$$

28. Визначити найменший цілий розв'язок нерівності

$$\sqrt{24 + 2x - 5x^2} + \sqrt{3x + 6} \neq 0.$$

29. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\sqrt{2 - 5x - 3x^2} \neq \sqrt{-7x - 3x^2}.$$

30. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\sqrt{5 + 24x - 5x^2} \neq \sqrt{68 + 3x - 5x^2}.$$

Варіант Б
Група 1

1. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$(\sqrt{5+2x} + \sqrt{5-2x})^2 > \sqrt{100-16x^2}.$$

2. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$(\sqrt{2x+3} + \sqrt{3-2x})^2 > \sqrt{36-16x^2}.$$

3. Визначити найменший цілий розв'язок нерівності

$$(\sqrt{9-2x} - \sqrt{9+2x})^2 - 18 < \sqrt{81-4x^2}.$$

4. Визначити найменший натуральний розв'язок нерівності

$$(\sqrt{3x-10} - \sqrt{3x+10})^2 < \sqrt{9x^2-100} + 6x.$$

5. Розв'язати нерівність

$$\sqrt{2x-7} + \frac{9}{\sqrt{2x-7}} \leq 6.$$

6. Розв'язати нерівність

$$\sqrt{5x-9} + \frac{16}{\sqrt{5x-9}} \leq 8.$$

7. Обчислити суму розв'язків нерівності

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-2x-2}} + \sqrt{x^2-2x-2} \leq 2.$$

8. Обчислити добуток розв'язків нерівності

$$\sqrt{3x^2-2x+4} + \frac{25}{\sqrt{3x^2-2x+4}} \leq 10.$$

9. Розв'язати нерівність

$$\sqrt{\frac{3x+7}{x-2}} \leq 4 \left(1 - \sqrt{\frac{x-2}{3x+7}} \right).$$

10. Розв'язати нерівність

$$\sqrt{\frac{2x-4}{x+3}} + \sqrt{\frac{x+3}{2x-4}} \leq 2.$$

Група 2

11. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\sqrt{x+1} \geq 2x-4.$$

12. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\sqrt{x+7} \geq 4x-5.$$

13. Визначити найменший цілий розв'язок нерівності

$$\sqrt{x-1} < x-3.$$

14. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності

$$\sqrt{x+18} < 2-x.$$

15. Обчислити добуток найменшого та найбільшого розв'язків нерівності

$$\sqrt{10-x} \geq 4-x.$$

16. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$\sqrt{5-2x} \leq 6x-1.$$

17. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$\sqrt{4x^2-2x-2} < 1-2x.$$

18. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\sqrt{8+2x-x^2} < 6-3x.$$

19. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$\sqrt{2x^2-18} \leq x+3.$$

20. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x.$$

Група 3

21. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\frac{\sqrt{x+4}}{2-x} \leq -1.$$

22. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\frac{\sqrt{15+x}}{3-x} < -2.$$

23. Знайти найменший розв'язок нерівності

$$\frac{\sqrt{19-4x}}{x-1} \leq 2,$$

що задовольняє умову $2 \leq x \leq 5$.

24. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності

$$\frac{\sqrt{6x+171}}{x-4} \geq 3.$$

25. Визначити число цілих розв'язків нерівності

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} < \frac{1}{x-3}.$$

26. Визначити число від'ємних цілих розв'язків нерівності

$$\frac{1}{\sqrt{x+18}} > \frac{1}{2-x}.$$

27. Знайти найменший розв'язок нерівності

$$\frac{1}{x-3} \geq \frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}.$$

28. Визначити число цілих розв'язків нерівності

$$\frac{1}{x-1} \geq \frac{4}{\sqrt{3x^2+4}}.$$

29. Знайти найменший натуральний розв'язок нерівності

$$\sqrt{x+2} > \frac{15}{x\sqrt{x+2}}.$$

30. Знайти найменший натуральний розв'язок нерівності

$$\frac{x^2 - 2x + 60}{2x\sqrt{x+1}} < \sqrt{x+1}.$$

Група 4

31. Розв'язати нерівність

$$\sqrt{2x^2 - 9x + 7} \leq (\sqrt{2x - 7})^2 + (\sqrt{7 - 2x})^2.$$

32. Розв'язати нерівність

$$(\sqrt{2x - 9})^2 + (\sqrt{9 - 2x})^2 \leq \sqrt{9 + 7x - 2x^2}.$$

33. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності

$$5\sqrt{x - 1} > x + 5.$$

34. Визначити найменший натуральний розв'язок нерівності

$$7\sqrt{x} > x + 12.$$

35. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності

$$\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 12 < 0.$$

36. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$\sqrt{x^3 + 8} + \sqrt[4]{x^3 + 8} - 6 \leq 0.$$

37. Визначити найменший натуральний розв'язок нерівності

$$x^5 - 33x^2\sqrt{x} + 32 > 0.$$

38. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності

$$x^2\sqrt{x} - 244x\sqrt[4]{x} + 243 < 0.$$

39. Визначити найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності

$$\sqrt{\frac{2x - 4}{x + 2}} + 2\sqrt{\frac{x + 2}{2x - 4}} \leq 3.$$

40. Визначити найменший натуральний розв'язок нерівності

$$\sqrt{\frac{5x + 2}{x + 3}} - 2\sqrt{\frac{x + 3}{5x + 2}} > 1.$$

Група 5

41. Визначити найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності

$$(x + 1)\sqrt{x^2 + x - 2} < 2(x + 1).$$

42. Визначити найменший натуральний розв'язок нерівності

$$(x + 3)\sqrt{x^2 - 5x + 4} > 2x + 6.$$

43. Обчислити суму цілих від'ємних розв'язків нерівності

$$(x - 10)\sqrt{x^2 - x - 20} > 6x - 60.$$

44. Обчислити суму натуральних розв'язків нерівності

$$(x + 10)(\sqrt{x^2 - x - 6} - 6) < 0.$$

45. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\frac{(x^2 - 1)\sqrt{8 - 2x - 3x^2}}{x^4 - 1} \geq 0.$$

46. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\frac{(1 - x^4)\sqrt{10 + x - 3x^2}}{x^2 + 1} \geq 0.$$

47. Знайти цілий розв'язок нерівності

$$\frac{(x^2 - 1)\sqrt{6 + x - x^2}}{x^2 - 3x} \neq 0.$$

48. Знайти цілий розв'язок нерівності

$$\frac{x^3 + 5x^2 + 4x}{(x + 2)\sqrt{5 - 4x - x^2}} \neq 0.$$

49. Знайти цілий розв'язок нерівності

$$\frac{\sqrt{5 + 4x - x^2}}{x - 3} > \frac{\sqrt{5 + 4x - x^2}}{3x + 6}.$$

50. Знайти цілий розв'язок нерівності

$$\frac{\sqrt{8+2x-x^2}}{2x-5} > \frac{\sqrt{8+2x-x^2}}{x+1}.$$

Група 6

51. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$(x+4)\sqrt{x^2+2x} < 16-x^2.$$

52. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$(x+8)\sqrt{x^2-3x-10} < 64-x^2.$$

53. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\sqrt{y+8} + \sqrt{2y-12} < 6.$$

54. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності

$$\sqrt{3y-72} + \sqrt{y} < 12.$$

55. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності

$$\sqrt{y+20} > \sqrt{y} + \sqrt{2y-28}.$$

56. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} > \sqrt{x-1}.$$

57. Знайти найменший розв'язок нерівності

$$\frac{10-2\sqrt{25-x^2}}{x} \geq 1,5.$$

58. Знайти найменше значення функції $y = |2x-5| + 4$ з областю визначення, що визначається нерівністю

$$\frac{x}{\sqrt{4-x} + \sqrt{x}} - \frac{x}{\sqrt{4-x} - \sqrt{x}} > \frac{8}{\sqrt{x}}.$$

59. Знайти число цілих розв'язків нерівності

$$4(x+1)^2 + 12(x+1)\sqrt{x+2} < 27(x+2).$$

60. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності

$$(x+3)^2 - 3(x+3)\sqrt{2x^2-18} + 4(x^2-9) < 0.$$

§ 3. Тригонометричні нерівності

Група 1

1. Визначити (в градусах) найменший натуральний розв'язок нерівності $2 \sin(2x + 60^\circ) < -1$.

2. Визначити (в градусах) найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності $2 \sin(3x - 45^\circ) > \sqrt{2}$.

3. Визначити (в градусах) найменший натуральний розв'язок нерівності $2 \cos(5x + 50^\circ) > \sqrt{3}$.

4. Визначити (в градусах) найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності $\sqrt{2} \cos(9x + 72^\circ) < -1$.

5. Визначити (в градусах) найменший натуральний розв'язок нерівності $\operatorname{tg}(120^\circ - 4x) < -\sqrt{3}$.

6. Визначити (в градусах) найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності $\operatorname{tg}(27^\circ - 2x) > 1$.

7. Визначити (в градусах) найменший натуральний розв'язок нерівності $\operatorname{ctg}(15^\circ - 3x) < \sqrt{3}$.

8. Визначити (в градусах) найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності $\operatorname{ctg}(3x - 30^\circ) > 1$.

9. Визначити (в градусах) найменший додатний розв'язок подвійної нерівності $1 \leq 2 \sin(4x - 40^\circ) \leq \sqrt{3}$.

10. Визначити (в градусах) найбільший від'ємний розв'язок подвійної нерівності $-1 \leq 2 \cos(27^\circ - 3x) \leq 0$.

Група 2

11. Визначити (в градусах) найменший натуральний розв'язок нерівності $\cos(3x - 20^\circ) \cos(2x - 30^\circ) - \sin(3x - 20^\circ) \sin(2x - 30^\circ) < 0$.

12. Визначити (в градусах) найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності $\sin(4x + 30^\circ) \cos(2x - 30^\circ) - \cos(4x + 30^\circ) \sin(2x - 30^\circ) < -\frac{1}{2}$.

13. Визначити (в градусах) найменший натуральний розв'язок нерівності $4 \sin(3x + 60^\circ) \cos(3x + 60^\circ) < 1$.

14. Визначити (в градусах) найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності $\cos^2(2x - 10^\circ) - \sin^2(2x - 10^\circ) < \frac{1}{2}$.

15. Визначити (в градусах) найменший натуральний розв'язок нерівності $4 \cos^2(40^\circ - 2x) > 3$.

16. Визначити (в градусах) найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності $4 \sin^2(40^\circ - x) < 1$.

17. Визначити (в градусах) найменший натуральний розв'язок нерівності $\sin(3x + 15^\circ) + \cos(3x + 15^\circ) < 1$.

18. Визначити (в градусах) найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності $\sqrt{3} \sin(2x - 10^\circ) - \cos(2x - 10^\circ) > 1$.

19. Визначити (в градусах) найменший натуральний розв'язок нерівності $\cos(135^\circ + 5x) - \cos 180^\circ > -\sin(225^\circ + 5x)$.

20. Визначити (в градусах) найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності $\sin(6x - 120^\circ) + \sin 90^\circ > \sin(6x + 60^\circ)$.

Група 3

21. Визначити (в градусах) найменший натуральний розв'язок нерівності $\sqrt{\cos(4x - 60^\circ)} < 1$.

22. Визначити (в градусах) найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності $\sqrt{\sin(2x - 10^\circ)} < 1$.

23. Визначити (в градусах) найменший натуральний розв'язок нерівності $\sqrt{\operatorname{tg}(3x - 60^\circ)} < 1$.

24. Визначити (в градусах) найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності $\sqrt{\operatorname{ctg}(5x + 120^\circ)} < 1$.

25. Визначити (в градусах) найменший натуральний розв'язок нерівності $\sqrt{\cos(15x - 60^\circ)} > \sqrt{\sin(15x - 60^\circ)}$.

26. Визначити (в градусах) найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності $\sqrt{\sin(3x - 30^\circ)} > \sqrt{\cos(3x - 30^\circ)}$.

27. Визначити (в градусах) найменший натуральний розв'язок нерівності $\sqrt{\sin(6x - 12^\circ)} > \sqrt{-\cos(6x - 12^\circ)}$.

28. Визначити (в градусах) найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності $\sqrt{\cos(5x - 50^\circ)} > \sqrt{-\sin(5x - 50^\circ)}$.

29. Визначити (в градусах) найменший додатний розв'язок нерівності $\sqrt{\operatorname{tg}(9x - 18^\circ)} \geq \sqrt{\operatorname{ctg}(9x - 18^\circ)}$.

30. Визначити (в градусах) найбільший від'ємний розв'язок нерівності $\sqrt{\operatorname{ctg}(6x - 21^\circ)} \geq \sqrt{\operatorname{tg}(6x - 21^\circ)}$.

Група 4

31. Визначити найменший натуральний розв'язок нерівності

$$8 \cos^2 \frac{\pi x}{12} - 2 \cos \frac{\pi x}{6} < 3.$$

32. Визначити найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності

$$\left(\sin \frac{\pi x}{4} - \cos \frac{\pi x}{4} \right)^2 < \sin \frac{\pi x}{2}.$$

33. Визначити найменший додатний розв'язок нерівності

$$\cos^3 \frac{\pi x}{3} \cdot \cos(\pi x) + \sin^3 \frac{\pi x}{3} \cdot \sin(\pi x) \leq \frac{1}{8}.$$

34. Визначити найбільший від'ємний розв'язок нерівності

$$\cos^3 \frac{\pi x}{12} \cdot \sin \frac{\pi x}{4} + \sin^3 \frac{\pi x}{12} \cdot \cos \frac{\pi x}{4} \geq \frac{3}{8}.$$

35. Визначити найменший натуральний розв'язок нерівності

$$2 \cos \frac{\pi(x-2)}{3} - 2(1 - \sqrt{2}) \cos \frac{\pi(x-2)}{6} + 2 - \sqrt{2} < 0.$$

36. Визначити найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності

$$2(\sqrt{2} - 1) \sin \frac{\pi(x-4)}{12} - 2 \cos \frac{\pi(x-4)}{6} + 2 - \sqrt{2} < 0.$$

37. Визначити найменший натуральний розв'язок нерівності

$$\sin^2 \frac{\pi x}{8} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{8} + 1 \right) > 1.$$

38. Визначити найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності

$$\cos^2 \frac{\pi x}{8} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{8} + 1 \right) > 1.$$

39. Визначити найменший натуральний розв'язок нерівності

$$\sin^2 \frac{\pi x}{8} > \sin^2 \frac{3\pi x}{8}.$$

40. Визначити найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності

$$\cos^2 \frac{\pi x}{8} < \cos^2 \frac{3\pi x}{8}.$$

Група 5

41. Визначити найменший натуральний розв'язок нерівності

$$\sin^6 \frac{\pi x}{24} + \cos^6 \frac{\pi x}{24} < \frac{5}{8}.$$

42. Визначити найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності

$$\sin^4 \frac{\pi x}{24} + \cos^4 \frac{\pi x}{24} < \frac{5}{8}.$$

43. Визначити найменший натуральний розв'язок нерівності

$$\cos \frac{\pi x}{24} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\pi x}{24} - \cos^2 \frac{\pi x}{48} > 0.$$

44. Визначити найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності

$$\cos \frac{\pi x}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\pi x}{6} + \sin^2 \frac{\pi x}{12} < 0.$$

45. Визначити найменший натуральний розв'язок нерівності

$$\sin \frac{\pi x}{20} \cdot \sin \frac{\pi x}{10} > \sin \frac{\pi x}{5} \cdot \sin \frac{\pi x}{4}.$$

46. Визначити найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності

$$\cos \frac{\pi x}{48} \cdot \cos \frac{\pi x}{16} < \cos \frac{5\pi x}{48} \cdot \cos \frac{7\pi x}{48}.$$

47. Визначити найменший натуральний розв'язок нерівності

$$\sqrt{1 - \cos \frac{\pi x}{3}} < \sin \frac{\pi x}{3}.$$

48. Визначити найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності

$$\sqrt{1 + \cos \frac{\pi x}{3}} < \sin \frac{\pi x}{3}.$$

49. Визначити найменший натуральний розв'язок нерівності

$$\frac{1 - 4 \sin \frac{\pi x}{6}}{\sin^2 \frac{\pi x}{6} - \sin \frac{\pi x}{6}} > 4.$$

50. Визначити найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності

$$\frac{\cos \frac{\pi x}{12}}{2 \cos \frac{\pi x}{12} - 1} > 2 \cos^2 \frac{\pi x}{12} + \cos \frac{\pi x}{12}.$$

Група 6

51. Визначити число цілих розв'язків нерівності

$$\arcsin \left(\frac{x}{4} - 2 \right) \geq \frac{\pi}{6}.$$

52. Визначити число цілих розв'язків нерівності

$$\arccos \left(\frac{x}{6} - 1 \right) \geq \frac{2\pi}{3}.$$

53. Визначити число цілих розв'язків нерівності

$$\operatorname{arctg} \sqrt{8 - \frac{x}{2}} < \frac{\pi}{3}.$$

54. Визначити число цілих розв'язків нерівності

$$\operatorname{arctg} \sqrt{6 - 0,5x} > \frac{\pi}{6}.$$

55. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\arccos(x^2 - 4x - 5) \geq \frac{\pi}{2}.$$

56. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\arcsin(x^2 - 6x - 6, 5) \leq \frac{\pi}{6}.$$

57. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\operatorname{arctg}(7 + x - x^2) \geq \frac{\pi}{4}.$$

58. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\operatorname{arcctg}(5 - x - x^2) \leq \frac{3\pi}{4}.$$

59. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$12(\arcsin x)^2 + 4\pi \arcsin x - \pi^2 \leq 0.$$

60. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$12(\arccos x)^2 - 13\pi \arccos x + 3\pi^2 \leq 0.$$

§ 4. Показникові нерівності

Група 1

1. Визначити найбільший розв'язок нерівності $81^x \geq \frac{1}{3} \cdot 27^{2x-3}$.
2. Визначити найменший розв'язок нерівності $16^{x-4} \leq \frac{1}{2} \cdot 8^{2x-7}$.
3. Визначити найбільший розв'язок нерівності $\frac{1}{4}\sqrt{2^{x+1}} \leq 8^{-0,25}$.
4. Визначити найменший розв'язок нерівності $\sqrt{125^{x-1}} \geq \sqrt[4]{25^{2-x}}$.
5. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$10 \cdot 2^{2x} \cdot 25^x \geq (10^{2x-1})^5.$$

6. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$2 \cdot 4^x \leq (6^{4x-5})^3 \cdot 3^{-2x-1}.$$

7. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$3^{2x-3} - 9^{x-1} + 3^{2x} \leq 675.$$

8. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$(0, 2)^{x-1} + (0, 04)^{0,5x-1} + 5^{3-x} \leq 0, 0496.$$

9. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1-2x} + \left(\frac{1}{9}\right)^{1-x} + 3^{2x-3} \leq 117.$$

10. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} + 4^{\frac{x-3}{2}} \geq 2\sqrt{2\sqrt{2}}.$$

Група 2

11. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$5^{x-5} + 2^{x-4} \geq 5^{x-4} - 2^{x-2}.$$

12. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$2^{x+1} - 3^{\frac{1}{2}x} \geq 3^{\frac{1}{2}x+1} - 2^x.$$

13. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$18 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^{x+2} \leq 36 \cdot 4^{x+1} - 3 \cdot 9^{x+1}.$$

14. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$4^x - 3^{x-0,5} \geq 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}.$$

15. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$2^{3-x} - (0,2)^x \leq 7 \cdot (0,5)^{x+2} - 3 \cdot (0,2)^{x+1}.$$

16. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$5^x - 3^{x+2} \geq -2 \cdot (5^{x-2} + 3^{x-1}).$$

17. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$2^{2x+5} - 3^{x+\frac{9}{2}} \leq 3^{x+\frac{7}{2}} - 4^{x+4}.$$

18. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$5^{x+\frac{1}{2}} - 9^x \leq 3^{2x-2} - 5^{x-\frac{1}{2}}.$$

19. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$7^{x-2} - 2^x \leq 5 \cdot 7^{x-3} - 2^{x-3}.$$

20. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$55 \cdot 2^x + 3^{x+2} \geq 2^{x+6} + 3^{x+1}.$$

Група 3

21. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\frac{1}{2^x + 5} < \frac{1}{2^{x+2} - 1}.$$

22. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\frac{2^x + 32}{2^x - 4} \geq \frac{2^x}{4}.$$

23. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності

$$\frac{1}{4 - (0,5)^x} < \frac{3}{(0,5)^x + 12}.$$

24. Знайти цілий розв'язок нерівності

$$\frac{2}{3^x + 6} \leq \frac{1}{3^x - 38}.$$

25. Знайти цілий розв'язок нерівності

$$\frac{5 \cdot 3^x + 19 \cdot 2^x}{3^x - 3 \cdot 2^x} \geq \frac{3^x + 17 \cdot 2^x}{2^x}.$$

26. Знайти цілий розв'язок нерівності

$$\frac{2^x + 5^x}{8 \cdot 5^x - 2^x} \geq \frac{2^x + 8 \cdot 5^x}{4 \cdot 5^x}.$$

27. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$\frac{4^x - 3}{8 - 4^x} > \frac{1}{4^x}.$$

28. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$\frac{12}{(0,2)^x + 1} > \frac{(0,2)^x + 5}{(0,2)^x}.$$

29. Обчислити $(0,5)^{x_0}$, де x_0 — середина проміжку розв'язків нерівності

$$\frac{(0,5)^x - 4}{2 \cdot ((0,5)^x - 1)} < \frac{4 - (0,5)^x}{(0,5)^{2x} - 1}.$$

30. Обчислити $(0, 25)^{x_0}$, де x_0 — середина проміжку розв'язків нерівності

$$1 < \frac{-24 \cdot (0, 5)^x}{((0, 5)^x + 16) \cdot ((0, 5)^x - 16)}.$$

Варіант Б
Група 1

1. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$2^{x^2} \leq 8 \cdot 4^x.$$

2. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$7^{x+1} > \frac{49^{4x^2}}{7\sqrt{7}}.$$

3. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$(0,5)^{x(x-3)} > (0,25)^{2x}.$$

4. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{3x^2-2x} \leq (0,81)^{-2}.$$

5. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$9^{x^2-3x-1} < 3^{2x+8}.$$

6. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2x^2-3x-27} \geq 1.$$

7. Обчислити добуток розв'язків нерівності

$$2^{\sqrt{x^2-3x-28}} \leq 1.$$

8. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$(0,5)^{\sqrt{3x-2}} \geq (0,5)^{\sqrt{4-x}}.$$

9. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-4} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x-2}}.$$

10. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$(0, 2)^{\sqrt{x-1}} \geq (0, 2)^{3-x}.$$

Група 2

11. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$5^x + \frac{125}{5^x} \leq 30.$$

12. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$2^{3-2x} - 3 \cdot 2^{1-x} + 1 \leq 0.$$

13. Розв'язати нерівність

$$5^{2x-3} \leq \frac{2}{5^{1-x}} - 5.$$

14. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} \leq 2^{5-x} + 9.$$

15. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності

$$\frac{2^{-2x}}{100^{-x}} \leq 31 \cdot (0, 2)^{-x} - 30.$$

16. Знайти найбільший розв'язок нерівності

$$4^{x-1} - (0, 5)^{3-x} \leq 62.$$

17. Знайти найбільший від'ємний розв'язок нерівності

$$3 \cdot 81^{\frac{1}{x}} - 10 \cdot 9^{\frac{1}{x}} + 3 \leq 0.$$

18. Знайти найбільший розв'язок нерівності

$$4 \cdot 64^{\frac{1}{x}} - 17 \cdot 8^{\frac{1}{x}} + 4 \geq 0.$$

19. Знайти число цілих розв'язків нерівності

$$4^{\sqrt{x^2-9}} - 17 \cdot 2^{\sqrt{x^2-9}} + 16 < 0.$$

20. Знайти число цілих розв'язків нерівності

$$81^{\frac{1}{2} + \sqrt{16-x^2}} - 244 \cdot 9^{\sqrt{16-x^2}} + 27 > 0.$$

Група 3

21. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$27 \cdot 4^x - 35 \cdot 6^x + 8 \cdot 9^x \leq 0.$$

22. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$9 \cdot 16^x - 25 \cdot 12^x + 16 \cdot 9^x \leq 0.$$

23. Знайти найменший розв'язок нерівності

$$4^{x+2} - 29 \cdot 10^{x+1} + 5^{2x+4} \leq 0.$$

24. Знайти найбільший розв'язок нерівності

$$5^{2x+5} - 9 \cdot 20^{x+2} + 4^{2x+5} \leq 0.$$

25. Обчислити $\left(\frac{5}{3}\right)^{x_0}$, де x_0 — середина проміжку, що містить всі числа, що не є розв'язками нерівності

$$3^{2x+4} - 34 \cdot 15^{x+1} + 5^{2x+4} > 0.$$

26. Обчислити $\left(\frac{4}{9}\right)^{x_0}$, де x_0 — середина проміжку, що містить всі числа, що не є розв'язками нерівності

$$5^{2x+3} - 12 \cdot 35^{x+1} + 7^{2x+3} > 0.$$

27. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)^x + \left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^x \leq 6.$$

28. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x \leq 14.$$

29. Визначити найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x > 4.$$

30. Визначити найменший натуральний розв'язок нерівності

$$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x + \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x > 34.$$

Група 4

31. Визначити найменший натуральний розв'язок нерівності

$$2^{\frac{6x-3}{x}} < \sqrt[4]{8^{2x-1}}.$$

32. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності

$$\sqrt{(\sin 3)^{\frac{4x}{1-x}}} \leq \sqrt[4]{(\sin^2 3)^{2x-12}}.$$

33. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$(\sqrt{2} + 1)^{\frac{8x}{3-x}} \leq (\sqrt{2} - 1)^{1-x}.$$

34. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$(\sqrt{5} + 2)^{\frac{2}{x-3}} \geq (\sqrt{5} - 2)^{-\frac{1}{x+1}}.$$

35. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{\frac{4-x}{x-5}} > (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{\frac{1}{x-1}}.$$

36. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$(\sqrt{10} - 3)^{-\frac{1}{x+4}} > (\sqrt{10} + 3)^{\frac{1+x}{x}}.$$

37. Визначити найменший цілий розв'язок нерівності

$$(\sqrt{x-2})^{x^2-6x+8} > 1.$$

38. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності

$$(\sqrt{x+1})^{x^2-2x-8} < 1.$$

39. Нехай n — число натуральних розв'язків нерівності

$$(x^2 - x + 1)^{8-x} > 1,$$

а x_0 — середина проміжку додатних розв'язків цієї нерівності. Обчислити добуток $n \cdot x_0$.

40. Нехай n — число натуральних розв'язків нерівності

$$(x^2 - 6x + 9)^{x+5} \leq 1,$$

а x_0 — середина проміжку додатних розв'язків цієї нерівності. Обчислити добуток $n \cdot x_0$.

Група 5

41. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$(x^2 - 4x) \cdot ((\sqrt{3})^{(x+1)^2} - 9) \leq 0.$$

42. Визначити число цілих розв'язків нерівності

$$(2x^2 + 15x - 27) \cdot (1 - 5^{x^2+15x-54}) > 0.$$

43. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$(4x^2 - 16x + 7) \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{4x^2+4x-15} - 1 \right) \geq 0.$$

44. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$(2x^2 + x - 15) \cdot (2^{x^2-3x} - 16) \leq 0.$$

45. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$\frac{2^{4x+11} - 17 \cdot 2^{2x+4} + 2}{7 - 2x} \leq 0.$$

46. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$\frac{4 \cdot (1,5)^{2x-2} - 5 \cdot (1,5)^{x-1} - 9}{2 - 4x} \geq 0.$$

47. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$(2^{15-x} - 4) \cdot (3^{x^2+2x} - 9^{-x+16}) \geq 0.$$

48. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$(8 \cdot 2^{(2-x)x} - 2^{3x-3}) \cdot (3^{10+6x-x^2} - 27) \leq 0.$$

49. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\frac{5^{0,5x} - 0,0016}{x + 1} \geq \frac{2 \cdot 5^{0,5x} - 0,0032}{x - 3}.$$

50. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\frac{9^x - 27^3}{1 - x} > \frac{9^{x+\frac{1}{2}} - 27^{3\frac{1}{3}}}{x + 3}.$$

Група 6

51. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$\sqrt{2^{x+2} - 16} \leq 12 - 2^x.$$

52. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$5^x - 15 \leq \sqrt{5^{x+1} - 25}.$$

53. Знайти найбільший розв'язок нерівності

$$2^{x+\sqrt{x}} - 8 \cdot 2^{x+2\sqrt{x}} - 8 \cdot 2^{3\sqrt{x}} + 2^{2x} \leq 0.$$

54. Знайти найменший розв'язок нерівності

$$3^{5\sqrt{-x}} + 3^{4\sqrt{-x-x}} - 3^{\sqrt{-x-x}} - 3^{-2x} \geq 0.$$

55. Визначити число цілих розв'язків нерівності

$$2^{4x} - 6 \cdot 2^{3x} - 17 \cdot 2^{2x} + 6 \cdot 2^x + 16 \leq 0.$$

56. Визначити число цілих розв'язків нерівності

$$3^{4\sqrt{x}} - 7 \cdot 3^{3\sqrt{x}} - 19 \cdot 3^{2\sqrt{x}} + 7 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 18 \leq 0.$$

57. Визначити число цілих розв'язків нерівності

$$2^{x+4} \leq 15x + 34.$$

58. Визначити число цілих розв'язків нерівності

$$2^x \leq \sqrt{25x - x^2}.$$

59. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$(0, 2)^x \leq 8 + 2x - x^2.$$

60. Знайти середину проміжку від'ємних розв'язків нерівності

$$(0, 4)^x < 1, 5 - \frac{1}{x}.$$

§ 5. Логарифмічні нерівності

Група 1

1. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$\log_3(18 - 5x) < 3.$$

2. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$\log_{0,5}(22 + 4x) > -3.$$

3. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності

$$\log_{0,2}(35 + 5x) \geq -3.$$

4. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності

$$\log_2(162 - 8x) \leq 5.$$

5. Відомо, що множиною розв'язків нерівності $\log_2(x^2 - 5x + 6) < 1$ є два проміжки, серединами яких відповідно є числа a і b . Обчислити $a + b$.

6. Знайти середину проміжку, що містить всі числа, які не є розв'язками нерівності $\log_3(x^2 - 6x + 8) > 1$.

7. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$\log_{0,1}(x^2 - x - 2) \geq -1.$$

8. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$\log_{0,2}(x^2 + 2x - 3) \geq -1.$$

9. Знайти середину проміжку, що містить всі числа, які не є розв'язками нерівності

$$\lg \frac{2x - 3}{x - 1} > 0.$$

10. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$\log_2 \frac{x - 3}{x + 9} \geq 2.$$

Група 2

11. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$\log_2(6 - x) < 1 + \log_2(6x - x^2).$$

12. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$\log_{0,5}(14x - x^2) \leq 1 + \log_{0,5}(13 + x).$$

13. Визначити число цілих розв'язків нерівності

$$\log_{0,1}(3x^2 + 28) + 1 \geq \log_{0,1}(3x - 2).$$

14. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності

$$\log_3(x - 2) + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \log_3(2x^2 - 2x + 3).$$

15. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$\log_3 x < 1 + \log_{\frac{1}{3}}(x - 2).$$

16. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$2 \log_{0,2} x + \log_5(7x + 6) \geq 1.$$

17. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$\ln(-x - 1) \leq 0,5 \ln(1 - 1,5x).$$

18. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності

$$\lg(2x^2 + 3x + 1) > 2 \lg(1 - x).$$

19. Визначити число цілих розв'язків нерівності

$$\log_{0,1}(2x^2 - 9x + 4) + 2 \lg(2 + x) > 0.$$

20. Відомо, що множиною розв'язків нерівності

$$\log_{0,5}(x^2 + 3x + 2) - 1 > 2 \log_{0,5}(2 - x)$$

є два проміжки, серединами яких відповідно є числа a і b . Обчислити $a + b$.

Група 3

21. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності

$$4 \log_4^2 x - 12 \log_4 x + 5 < 0.$$

22. Визначити найменший цілий розв'язок нерівності

$$9 \log_{0,001}^2 x - 9 \log_{0,001} x - 4 > 0.$$

23. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\log_3^2(x-4) + \log_{\sqrt{3}}(x-4) \leq \log_{x-4}(x-4)^3.$$

24. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$\log_9^2 x - 7 \log_{81} x \leq \log_{0,5} 8.$$

25. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$\log_2^2 x - \log_2 x^5 + 3^{1+\log_3 2} < 0.$$

26. Відомо, що множиною розв'язків нерівності

$$\log_2^2(x^2-1) - \log_{16}(1-x^2)^8 < \log_{x^2-1}(x^2-1)^3$$

є два проміжки, серединами яких відповідно є числа a і b . Обчислити $a + b$.

27. Відомо, що множиною розв'язків нерівності

$$\log_x 4 + \log_4 x < 2, 5$$

є два проміжки, серединами яких відповідно є числа a і b . Обчислити $a + b$.

28. Визначити найменший цілий розв'язок нерівності

$$\log_7 x + 3 \log_x \frac{1}{7} > 2.$$

29. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності

$$\log_{0,(3)} x - \log_{0,(3)} 27 \cdot \log_x 0, (3) - 2 \log_{0,(3)} 9 > 0.$$

30. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$\log_x 8x \cdot (\log_4 x)^2 \leq 1.$$

Варіант Б
Група 1

1. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$\lg(x + 20) - \lg(21x - 40) < \lg 2 - \lg(x - 1).$$

2. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$\lg(2x - 1) + \lg(x - 3, 5) \leq \lg(2x + 23).$$

3. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$\log_3(1 - 6x) - \log_3(7 - 2x) \leq \log_3 6 - \log_3(3 - 2x).$$

4. Знайти число цілих розв'язків нерівності

$$\lg(-12x - 6x^2 - x^3) - 0,5 \lg x^2 \leq \lg(56 - x).$$

5. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$\log_{0,5} \log_2 \frac{5x - 5}{x + 3} > -1.$$

6. Знайти число цілих розв'язків нерівності

$$\log_{0,3} \log_3 \frac{4x - 12}{x + 2} \geq 0.$$

7. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$\log_{0,5}(3 - \log_2(2x - 1)) \geq -2.$$

8. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$\log_{\frac{1}{3}}(7 + \log_{0,5}(5x + 2)) \leq -1.$$

9. Знайти розв'язок x_0 нерівності $8^{\log_{0,5}(3-2x)} > 1$, що задовольняє умову: $x_0 + 4, 8$ є цілим числом.

10. Визначити найбільший розв'язок нерівності $9^{\log_{27}(4x-12)} \leq 16$.

Група 2

11. Знайти довжину проміжку розв'язків нерівності $\log_{\frac{1+2x}{7-x}} 2 > 0$.

12. Знайти розв'язок x_0 нерівності $\log_{\frac{5x-1}{4x-2}} 0,3 > 0$, що задовольняє умову: $x_0 + 2,8$ є цілим числом.

13. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$\log_{\sqrt{2}-1}(4-x) > \log_{3-2\sqrt{2}} 36.$$

14. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності

$$\log_{9-4\sqrt{5}}(x-3) > \log_{\sqrt{5}-2} 7.$$

15. Відомо, що множиною розв'язків нерівності

$$\log_{\sqrt{2}+1}(x^2-4) < -5 \log_{\sqrt{2}-1} 2.$$

є два проміжки, серединами яких відповідно є числа a і b . Обчислити $a \cdot b$.

16. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності

$$\log_{0,25x-1}(2-\sqrt{3}) < \log_{0,25x-1}(7-4\sqrt{3}).$$

17. Визначити найменший цілий розв'язок нерівності

$$\log_{0,2x-3}(1+\sqrt{2}) < -\log_{0,2x-3}(3-2\sqrt{2}).$$

18. Знайти розв'язок x_0 нерівності

$$\log_{3-2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right) > \log_{3-2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right),$$

що задовольняє умову: $x_0 - 2,7$ є цілим числом.

19. Знайти розв'язок нерівності

$$\log_{2x-5}(\sqrt{2}-1) < -\log_{2x-5}(2\sqrt{2}+3),$$

що задовольняє умову: $x_0 + 0,3$ є цілим числом.

20. Визначити число цілих розв'язків нерівності

$$\log_{\sqrt{5}-2}(x+5) + 2 \log_{9+4\sqrt{5}} 3 > 0.$$

Група 3

21. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності

$$x^{\log_2 x} \leq 8x^2.$$

22. Обчислити куб найбільшого розв'язку нерівності

$$x^{3 \log_{0,5} x + 7} \geq 16.$$

23. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$10^{\lg^2 x} + x^{\lg x} \leq 20000.$$

24. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності

$$e^{\ln^2 x} + x^{\ln x} \leq 2e^4.$$

25. Знайти число цілих розв'язків нерівності

$$x^{2 - \lg \frac{x}{2}} \geq 4.$$

26. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$x^{\lg \frac{x}{3}} \leq x^3 \cdot 3^{-3}.$$

27. Знайти розв'язок x_0 нерівності $\log_3(4 \cdot 3^{x-1} - 1) > 2x - 1$, що задовольняє умову: $2x_0 \in \mathbb{Z}$.

28. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$\lg(4^{x-2} + 9) - 1 < \lg(2^{x-2} + 1) - \lg 2.$$

29. Знайти число цілих розв'язків нерівності

$$\log_2(2^{x+1} - 2^{-3}) \cdot \log_2(2^{x-3} - 2^{-7}) \leq 21.$$

30. Визначити найменший цілий розв'язок нерівності

$$\log_3(3^{x+1} - 3^{-3}) \cdot \log_3(3^{x+3} - 3^{-1}) \leq 8.$$

Група 4

31. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$\log_{2x-3} 2 < \log_{3x+4} 2.$$

32. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$\log_{4x+2} 3 > \log_{2x-3} 3.$$

33. Знайти розв'язок x_0 нерівності

$$\log_{2x+7} 0,5 > \log_{x+4} 2,$$

що задовольняє умову: $x_0 + 5,4$ є цілим числом.

34. Знайти розв'язок x_0 нерівності

$$\log_{0,4x-0,2} 0,2 > \log_{0,5x+1,75} 5,$$

що задовольняє умову: $x_0 + 2,8$ є цілим числом.

35. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$\frac{1}{2 + \log_2 x} > \frac{1}{\log_2 x - 3}.$$

36. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$\frac{1}{\lg x - 1} \leq 3 - \lg x.$$

37. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$3 + \lg x + \frac{1}{1 + \lg x} \geq 0.$$

38. Знайти число цілих розв'язків нерівності

$$\frac{2 \log_2 x - 3}{4 - \log_2 x} > \frac{1}{\log_2 x}.$$

39. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$\log_{0,5} \sqrt{x+7} < \log_{0,5}(x+5).$$

40. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$\lg \sqrt{4-x} > \lg(2-x).$$

Група 5

41. Визначити найменший цілий розв'язок нерівності

$$\log_{0,5x+3}(1,5-x) \leq 1.$$

42. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$\log_{x+2}(x^2 - 4x) \geq 2.$$

43. Відомо, що множиною розв'язків нерівності

$$\log_x(2x^2 - 5x + 6) < 2.$$

є два проміжки, серединами яких відповідно є числа a і b . Обчислити $a + b$.

44. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$\log_{x-1}(x^2 - 5x + 10) > 2.$$

45. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$\frac{\lg(x^2 - 3x)}{2 \lg 2 + \lg(x - 1,5)} < 1.$$

46. Відомо, що множиною від'ємних розв'язків нерівності

$$\frac{\log_5 x^2}{\log_5(2+x)} < 1.$$

є два проміжки, серединами яких відповідно є числа a і b . Обчислити $a + b$.

47. Визначити найбільший від'ємний розв'язок нерівності

$$\frac{\lg \sin \frac{\pi x}{6}}{\lg(\sin \frac{\pi x}{12} - \cos \frac{\pi x}{12})^2} \leq 1.$$

48. Визначити найменший додатний розв'язок нерівності

$$\frac{\log_2 \sin \frac{\pi x}{12} + \log_2 3 - 2}{\log_2 \cos \frac{\pi x}{12} - 0,5} \leq 2.$$

49. Визначити найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності

$$\frac{\lg(1 + \cos \frac{\pi x}{12})}{\lg \sin \frac{\pi x}{12} + \frac{1}{2} \lg 2} \geq 2.$$

50. Визначити найменший додатний розв'язок нерівності

$$\frac{\ln \cos \frac{\pi x}{6} + \ln 0,75}{\ln \cos \frac{\pi x}{12} - 0,5 \ln 2} \geq 2.$$

Група 6

51. Знайти довжину проміжку розв'язків нерівності

$$(21x^2 + 11x - 10) \cdot \log_3(2 - 5x) < 0.$$

52. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$(x^2 - 7x + 10) \cdot \log_2(x - 2) < 0.$$

53. Знайти довжину проміжку розв'язків нерівності

$$\frac{\log_2(18 + 3x - x^2) - 3}{x^2 - 4x - 21} \leq 0.$$

54. Знайти довжину проміжку розв'язків нерівності

$$\frac{\log_3(24 - 2x - x^2) - 2}{36 - x^2} \geq 0.$$

55. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$\sqrt{x+3} \cdot \lg(3+0,1x-0,1x^2) \geq \sqrt{7-x} \cdot \lg(3+0,1x-0,1x^2).$$

56. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$(\sqrt{10-x} - \sqrt{x}) \cdot (\log_3(16 - 6x - x^2) - 2) < 0.$$

57. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$(9 - 27^{3-\frac{x}{3}}) \cdot \lg(x^2 - 8\frac{1}{8}x + 1) \geq 0.$$

58. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$(16^{2-\frac{x}{4}} - 8^3) \cdot \lg(x^2 + 4,25x + 1) \geq 0.$$

59. Визначити найбільший від'ємний розв'язок нерівності

$$\sin \frac{2\pi x}{7} \cdot \log_2 \frac{14 - 5x - x^2}{8} \geq 0.$$

60. Визначити найменший додатний розв'язок нерівності

$$\cos \frac{\pi x}{4} \cdot \lg \frac{6 + 5x - x^2}{6} \leq 0.$$

§ 6. Нерівності з модулем

Група 1

1. Визначити число цілих розв'язків нерівності $|2x - 4| \leq 15$.
2. Визначити число цілих розв'язків нерівності $|3x + 11| \leq 11$.
3. Знайти найменший додатний розв'язок нерівності $|5x - 12| \geq 14$.
4. Знайти найменший додатний розв'язок нерівності $|4x + 5| \geq 13$.
5. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності $|3x - 6| < 5$.
6. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності $|2x + 5| < 3$.
7. Розв'язати нерівність $3|x - 4| \leq |2x - 8|$.
8. Розв'язати нерівність $|5x + 10| \leq |3x + 6|$.
9. Знайти довжину проміжку розв'язків нерівності

$$|7x - 21| - 5 \leq 3|3 - x|.$$

10. Знайти довжину проміжку розв'язків нерівності

$$|3x + 6| + 2|x + 2| \leq 10.$$

Група 2

11. Визначити найбільший розв'язок нерівності $|4x + 3| \geq |4x + 5|$.
12. Визначити найменший розв'язок нерівності $|2x - 3| \leq |2x + 2|$.
13. Визначити число цілих розв'язок нерівності $|2x - 5| \leq |x + 2|$.
14. Визначити число цілих розв'язок нерівності $|3x - 2| \leq |x - 6|$.
15. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$|2x + 1| \geq |3x - 2|.$$

16. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$|4x - 7| \leq |x + 5|.$$

17. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\frac{|3x - 6| - 5}{|x - 2|} < 1.$$

18. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\frac{|2x + 8| + 6}{|x + 4|} > 5.$$

19. Відомо, що множиною розв'язків нерівності

$$\frac{3}{|x - 1| - 4} > 1$$

є два проміжки, серединами яких відповідно є числа a і b . Обчислити $a + b$.

20. Відомо, що множиною розв'язків нерівності

$$\frac{1}{|x + 1| - 6} < \frac{1}{|x + 1| - 2}$$

є два проміжки, серединами яких відповідно є числа a і b . Обчислити $a + b$.

Група 3

21. Визначити найбільший розв'язок нерівності $|3x + 1| \leq x + 8$.

22. Визначити найменший розв'язок нерівності $|x - 7| \geq 6 - 3x$.

23. Знайти довжину проміжку розв'язків нерівності

$$|5x - 2| \leq 3x + 7.$$

24. Знайти довжину проміжку розв'язків нерівності

$$|3x - 1| \leq x + 11.$$

25. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $|2x + 9| \geq 3x + 1$.

26. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $|x - 2| \geq 18 - 2x$.

27. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності $|3x - 2| \leq 8 - x$.

28. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності $|5x - 1| \leq 3x + 10$.

29. Знайти найбільший розв'язок нерівності

$$\frac{1}{|2x - 7|} \geq \frac{1}{x + 1}.$$

30. Обчислити добуток найбільшого та найменшого цілих розв'язків нерівності

$$\frac{1}{|x+7|} \leq \frac{1}{2x-5}.$$

Варіант Б

Група 1

1. Визначити найбільший розв'язок нерівності $|x^2 - 4x| \leq 8$, 25.
2. Визначити найменший розв'язок нерівності $|x^2 + 4x| \leq 8$, 25.
3. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності $x^2 \leq |2 - x|$.
4. Знайти довжину проміжку розв'язків нерівності $x^2 \leq |x + 6|$.
5. Відомо, що множиною розв'язків нерівності $|x^2 - 5x| < 6$ є два проміжки, серединами яких відповідно є числа a і b . Обчислити $a + b$.
6. Відомо, що множиною розв'язків нерівності $x^2 < |5x + 6|$ є два проміжки, серединами яких відповідно є числа a і b . Обчислити $a \cdot b$.
7. Знайти найменший цілий додатний розв'язок нерівності

$$(x - 2)^2 > |x + 3| + 3.$$

8. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності

$$x^2 + 12x - 9|x + 3| + 11 \leq 0.$$

9. Знайти довжину проміжку розв'язків нерівності

$$|17x - 4x^2 - 4| < 19.$$

10. Знайти найбільший від'ємний розв'язок нерівності

$$|2x^2 - 11|x| + 15| \leq 3.$$

Група 2

11. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$|x - 3| + |x + 3| \leq 25.$$

12. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$|x - 4| + |x - 7| \leq 28.$$

13. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності

$$|2x + 3| - |x - 9| < 27.$$

14. Визначити найменший цілий розв'язок нерівності

$$|x + 8| - |x - 2| > -10.$$

15. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$\frac{|x - 5|}{|x - 3| - 2} < 1.$$

16. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$\frac{|x + 4|}{|x + 7| - 3} < 1.$$

17. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\frac{|x - 2|}{5 - |x + 3|} > 1.$$

18. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$\frac{|x + 3|}{5 - |x + 8|} > 1.$$

19. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$\frac{x^2 + |x| - 12}{|x^2 - 3x|} > 2.$$

20. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$\frac{x^2 + 5|x| - 10}{|x^2 + x|} > 2.$$

Група 3

21. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$(4 - |x - 3|) \cdot (4x^2 - 27x - 40) \geq 0.$$

22. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$(|x - 1, 2| - 3, 2) \cdot (3x^2 - 8x - 3) \leq 0.$$

23. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$\frac{|x - 2, 4| - 5, 6}{2 + x - x^2} \geq 0.$$

24. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$\frac{2x^2 - 13x - 34}{|x - 3| - 2} \leq 0.$$

25. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$(|x - 7, 4| - 10, 6) \cdot (|x - 5| - 10) \leq 0.$$

26. Обчислити суму цілих розв'язків нерівності

$$(|x + 1, 2| - 8, 8) \cdot (11 - |x - 1|) \geq 0.$$

27. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$|2x^2 - 18x| \cdot (|6, 2 - x| - 1, 8) \leq 0.$$

28. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$|9x + 4x^2| \cdot (4, 5 - |x - 2, 5|) \geq 0.$$

29. Визначити число цілих розв'язків нерівності

$$(x^2 - 7|x| + 10) \cdot |x + 7| \leq 0.$$

30. Визначити число цілих розв'язків нерівності

$$\frac{x^2 - 3|x| - 10}{|0, 5x^2 - 8|} \leq 0.$$

Група 4

31. Відомо, що множина розв'язків нерівності $|x^2 - 5|x|| < 6$ більших за 2 є проміжок. Знайти довжину цього проміжку.

32. Знайти довжину проміжку розв'язків нерівності $|x^2 - 2|x|| < 3$.

33. Знайти довжину проміжку розв'язків нерівності

$$\left| \frac{3|x| - 1}{|x| - 4} \right| \leq 2.$$

34. Визначити найбільший від'ємний розв'язок нерівності

$$\left| \frac{2 - 3|x|}{5 - 2|x|} \right| \geq 4.$$

35. Визначити число цілих розв'язків нерівності

$$\left| \frac{1}{4 - |x|} \right| > \left| \frac{-2}{|x| + 2} \right|.$$

36. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$\left| \frac{1}{2|x| - 5} \right| \geq \left| \frac{2}{2|x| + 13} \right|.$$

37. Обчислити потроєне значення найменшого розв'язку нерівності

$$\sqrt{9x^2 - 24|x| + 16} \leq 1.$$

38. Визначити найбільший від'ємний розв'язок нерівності

$$\sqrt{4x^2 + 12|x| + 9} \geq 6.$$

39. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$\sqrt{5 - 4x - x^2} \geq |6 + x| - 1.$$

40. Обчислити потроєне значення найбільшого розв'язку нерівності

$$\sqrt{x^2 + 2x - 3} \leq 4 - |1 - x|.$$

Група 5

41. Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$\frac{128 + 2^{x+2}}{|4 - 2^x|} \geq 2^x.$$

42. Знайти довжину проміжку розв'язків нерівності

$$8^{\frac{2}{3}-|x|} \cdot (0,5)^{x^2} \geq (0,25)^{|2x|}.$$

43. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$(0,2)^{|x-6|} \leq (0,04)^{|x|}.$$

44. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$2^{|x+2|} + 2^{|x-1|} \leq 9.$$

45. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$|x-1|^{\lg(5-x)} \geq |x-1|^{\lg x}.$$

46. Відомо, що множиною розв'язків нерівності

$$|x-3|^{x^2-8x+15} < 1$$

є два проміжки, серединами яких відповідно є числа a і b . Обчислити $a+b$.

47. Визначити найменший розв'язок нерівності

$$|9 - (0,5)^{1-2|x|}| \leq 7.$$

48. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$|2^{5x+3} - 2^{5x} - 119| \leq 105.$$

49. Знайти середину проміжку розв'язків нерівності

$$(\ln 2)^{|x+6|} \leq (\ln 2)^{|x^2-5x+6|}.$$

50. Визначити число цілих розв'язків нерівності

$$\frac{36}{3^{\log_2 |x|} - 3} \leq 15 - 3^{\log_2 |x|}.$$

Група 6

51. Знайти середину проміжку додатних розв'язків нерівності

$$\lg(2x^2 - 0,5) < \lg(3|x| + 1,5).$$

52. Знайти середину проміжку від'ємних розв'язків нерівності

$$\log_{0,1}(4 - x^2) + \lg(6|x| - 3) > 0.$$

53. Знайти середину проміжку від'ємних розв'язків нерівності

$$\log_{|x|}(x + 1) > 1.$$

54. Відомо, що множиною розв'язків нерівності

$$\log_{|2x-15|} x > 1$$

є два проміжки, серединами яких відповідно є числа a і b . Обчислити $a + b$.

55. Відомо, що множиною розв'язків нерівності

$$(x^2 - 4x - 5) \lg(8 - |x|) > 0$$

є два проміжки, серединами яких відповідно є числа a і b . Обчислити $a + b$.

56. Знайти розв'язок x_0 нерівності

$$(81 - 3^{|x|}) \cdot (\lg(20 + x - x^2) - 3 \lg 2) < 0,$$

що задовольняє умову: $x_0 + 5, 6$ є цілим числом.

57. Визначити найменший цілий додатний розв'язок нерівності

$$4 \left(\sin^2 \frac{\pi x}{12} - \left| \cos \frac{\pi x}{12} \right| \right) > 1.$$

58. Визначити найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності

$$\left| \sin \frac{\pi x}{24} + \cos \frac{\pi x}{24} \right| > 1.$$

59. Визначити найменший цілий додатний розв'язок нерівності

$$\left| \sin \frac{\pi x}{24} \right| \cdot \cos \frac{\pi x}{24} > \frac{1}{4}.$$

60. Визначити найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності

$$\left| \sin \frac{\pi x}{24} \right| > \left| \cos \frac{\pi x}{24} \right|.$$

§ 7. Системи нерівностей

Група 1

1. Визначити середину проміжку розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 2x^2 - 21x - 36 < 0, \\ \frac{x-3}{5} < \frac{x-5}{3}. \end{cases}$$

2. Знайти довжину проміжку розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 2x^2 + 5x - 7 < 0, \\ \frac{x}{3} > \frac{3x+1}{7}. \end{cases}$$

3. Визначити середину проміжку розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 4x^2 + 7x + 3 < 0, \\ 5x^2 + 9x + 4 > 0. \end{cases}$$

4. Визначити довжину проміжку розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 3x^2 - 11x - 14 < 0, \\ 3x^2 - 2x - 33 > 0. \end{cases}$$

5. Визначити число цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x - 21 < 0, \\ \frac{x^2+x}{x-2} > \frac{6}{x-2}. \end{cases}$$

6. Обчислити суму цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 3x^2 - 7x - 48 < 0, \\ \frac{x^2-2x}{x+2} < \frac{8}{x+2}. \end{cases}$$

7. Визначити найбільший цілий розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} x - 1 - \frac{4x}{x+3} < \frac{12}{x+3}, \\ 2x^2 - 7x - 22 > 0. \end{cases}$$

8. Визначити найменший цілий розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} x + 3 + \frac{7}{x-7} > \frac{x}{x-7}, \\ 2x^2 - 7x - 30 > 0. \end{cases}$$

9. Обчислити суму цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x^2 - 6x - 7 \leq 0, \\ \frac{2x-14}{12-3x} \leq 0. \end{cases}$$

10. Обчислити суму цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x^2 + 6x - 16 \geq 0, \\ \frac{x+8}{2x-10} \leq 0. \end{cases}$$

Група 2

11. Розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} \frac{x}{(x-2)^2} \leq 3, \\ x^2 - 5x + 6 \leq 0. \end{cases}$$

12. Обчислити добуток всіх розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x - 5 + \frac{9}{x+1} \leq 0, \\ x + 5 + \frac{9}{x-1} \geq 0. \end{cases}$$

13. Обчислити суму всіх цілих розв'язків подвійної нерівності

$$-3 < \frac{2x^2 + 7x - 15}{x^2 + 1} < 0.$$

14. Обчислити суму всіх цілих розв'язків подвійної нерівності

$$2 < \frac{x^2 + 5x + 8}{x^2 + 1} < 7.$$

15. Знайти цілий розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} -6 < x^2 + 5x < 6, \\ \frac{x-2}{3x+12} > 0. \end{cases}$$

16. Знайти цілий розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} 5 < 2x^2 - 9x + 15 < 8, \\ \frac{x-1}{2x+4} > 0. \end{cases}$$

17. Визначити число цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \frac{x^3+27}{x} \leq 0, \\ \frac{2x^2-5}{x} \leq 3. \end{cases}$$

18. Визначити число цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \frac{x^2-4}{x(x+2)} \geq 0, \\ \frac{x^2-13}{x^2-9} \geq 1. \end{cases}$$

19. Обчислити суму всіх цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+1)} \geq 0, \\ (x-3)(x+3) \leq 0. \end{cases}$$

20. Обчислити суму всіх цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \frac{(x-2)^2(x+1)}{x+4} \leq 0, \\ \frac{(x+3)^2(x-1)}{x-3} \leq 0. \end{cases}$$

Група 3

21. Розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} (5x+12)^2(x-7) \geq 0, \\ \frac{2x-10}{x+3} \leq 0. \end{cases}$$

22. Розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} (5x+21)^2(2x+3) \geq 0, \\ \frac{x+2}{25+4x} \leq 0. \end{cases}$$

23. Розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} \frac{3x}{x-2} \leq 2, \\ \frac{(4x+13)^2}{2-x} \leq 0. \end{cases}$$

24. Розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} \frac{4x}{x+2} \geq 3, \\ (2x^2 - 5x - 12)(2x - 15)^2 \leq 0. \end{cases}$$

25. Обчислити суму розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} (4x - 26)^2(x^2 - 4x - 12) \leq 0, \\ \frac{x-2}{4} \geq 1. \end{cases}$$

26. Обчислити середнє арифметичне розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} (5x + 33)^2(2x^2 - 3x - 20) \leq 0, \\ \frac{x^2 - 8x + 16}{2x + 11} \leq 0. \end{cases}$$

27. Обчислити добуток розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} |4x - 12|(x^2 - 10x + 9) \geq 0, \\ (x - 1)^2(x^2 - 12x + 27) \leq 0. \end{cases}$$

28. Обчислити добуток розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} |0,5x - 3|\sqrt{109x - 9x^2 - 12} \leq 0, \\ 2x^2 - 6x + 5 \geq 0. \end{cases}$$

29. Обчислити добуток розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \frac{5x^2 - 12x + 4}{|0,2x - 1|} \geq 0, \\ (|x - 1, 2| - 0, 8)\sqrt{5 - x} \leq 0. \end{cases}$$

30. Обчислити середнє арифметичне розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} (|2x - 5| - 3)\sqrt{7 - x} \leq 0, \\ (x^2 - 5x + 4) : |14 - 2x| \geq 0. \end{cases}$$

Варіант Б
Група 1

1. Визначити середину проміжку розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \frac{x-2}{x-3} < \frac{1}{x+1}, \\ |2x - 5| \leq 3. \end{cases}$$

2. Знайти довжину проміжку розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \frac{x+19}{x+20} \leq \frac{16}{5-x}, \\ |2x + 9| > 21. \end{cases}$$

3. Визначити найбільший розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} \frac{16}{x-14} \leq \frac{86-x}{x+35}, \\ \sqrt{3x-9} \geq \sqrt{43-x}. \end{cases}$$

4. Визначити найменший розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} \frac{x+61}{x-20} \leq \frac{16}{x+5}, \\ \sqrt{x+26} \leq \sqrt{2-x}. \end{cases}$$

5. Визначити найбільший цілий розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} \frac{2}{x-9} < \frac{27-5x}{x+1}, \\ \sqrt{x^2 - 4x + 4} > 4. \end{cases}$$

6. Визначити найменший цілий розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} \frac{55+8x}{x+7} < \frac{49}{1-x}, \\ \sqrt{4x^2 + 12x + 9} \leq 7. \end{cases}$$

7. Визначити число цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \frac{x+5}{x+8} < \frac{3}{4-x}, \\ \frac{(x-2)^2}{x+7} < x^2 - 4x + 4. \end{cases}$$

8. Обчислити суму цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \frac{(x-3)^2}{6-x} < x^2 - 6x + 9, \\ \frac{x-5}{x-8} < \frac{3}{x+4}, \end{cases}$$

9. Обчислити середнє арифметичне множини цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \frac{1}{x-3} \leq \frac{26-5x}{x+2}, \\ |3x - 12| < |2x - 13|. \end{cases}$$

10. Обчислити середнє арифметичне множини цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \frac{20}{x-4} \leq \frac{4-x}{x+1}, \\ |x - 8| > |2x - 1|. \end{cases}$$

Група 2

11. Знайти довжину проміжку розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - 4\sqrt{x-1} \leq 1, \\ \frac{2x-1}{2} \geq \frac{13-x}{4}. \end{cases}$$

12. Знайти середину проміжку розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \sqrt{x+8} - 6\sqrt{x-1} \leq 2, \\ x - \frac{x+11}{2} \leq \frac{x-3}{4}. \end{cases}$$

13. Визначити найменший розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} + 2\sqrt{x+14} \geq 4, \\ |x-5| \leq 4. \end{cases}$$

14. Визначити найбільший розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} \geq 3, \\ |\frac{1}{3}x - 4| \leq 3. \end{cases}$$

15. Визначити найбільший розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2 - 3x - 5} \leq x - 1, \\ |2x - 8| \geq 1. \end{cases}$$

16. Визначити найменший розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} \sqrt{-2x^2 - 18x} \geq 4x - 2, \\ |5x + 10| \geq 12. \end{cases}$$

17. Визначити найбільший розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 6x} + \sqrt[4]{x^2 - 6x} - 6 \leq 0, \\ \frac{4x-17}{2x+5} \geq 0. \end{cases}$$

18. Визначити найменший цілий розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x^2 - 17} - \sqrt[6]{x^2 - 17} - 2 \leq 0, \\ \frac{3x-5}{x+8} \leq 0. \end{cases}$$

19. Визначити найбільший цілий розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} \sqrt[3]{3x+4} \cdot \sqrt[4]{2,1-0,1x} \cdot \sqrt[5]{6-x} > 0, \\ \sqrt{6-\sqrt{x}} > 1. \end{cases}$$

20. Визначити найменший цілий розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} \sqrt[5]{x+8} \cdot \sqrt[6]{24-2x} \cdot \sqrt[7]{2-4x} < 0, \\ \sqrt{3-\sqrt{-x}} \geq 0. \end{cases}$$

Група 3

21. Знайти довжину проміжку додатних розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 9^{x(x-1)-0,5} > \sqrt{3}, \\ \frac{4x}{x+1} < 3. \end{cases}$$

22. Знайти середину проміжку розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 2^{x^2+2x-0,5} < 4\sqrt{2}, \\ \frac{3}{x+3} < 2. \end{cases}$$

23. Визначити число цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 3^{(x-4)(x+3)} < 243^{-1} \cdot 9^{x+5,5}, \\ |5x + 10| < 26. \end{cases}$$

24. Обчислити суму цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 4 \cdot (0,5)^{x(x+3)} < (0,25)^{2x}, \\ |2x + 3| \leq 9. \end{cases}$$

25. Визначити найбільший розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} 2^{2x} - 2^{x-2} < 2^{x+3} - 2, \\ \sqrt{5-2x} < 2. \end{cases}$$

26. Визначити найменший розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} 3^{2x} + 3^2 < 3^{x+3} + 3^{x-1}, \\ \sqrt{4x+2} < 4. \end{cases}$$

27. Визначити число цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 5^{x-1} + 2^x - 5^x + 2^{x+2} < 0, \\ \sqrt[3]{x} + 7\sqrt{x} - 18 \leq 0. \end{cases}$$

28. Визначити число цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 4^{x+0,5} - 3^{x-0,5} < 3^{x+0,5} + 4^{x-0,5}, \\ x\sqrt[3]{x} - 7\sqrt[3]{x^2} - 18 \leq 0. \end{cases}$$

29. Знайти середину проміжку розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 12x^2 \cdot 11\sqrt{16-x^2} - 11\sqrt{16-x^2} \cdot 12^{x+2} > 0, \\ x^2 \cdot 3\sqrt{-x} - 3\sqrt{-x+2} < 0. \end{cases}$$

30. Знайти довжину проміжку розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} (0, 2)^{x^2 + \sqrt{x+4}} < (0, 2)^{2(x+4) + \sqrt{x+4}}, \\ x^4 \cdot 2^{\sqrt{16-x^2}} - 2^{8 + \sqrt{16-x^2}} < 0. \end{cases}$$

Група 4

31. Знайти середину проміжку розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \log_2(x^2 - 2x) > 3, \\ x^2 - 4x < 12. \end{cases}$$

32. Знайти довжину проміжку розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \log_2(x^2 + 3x) \leq 2, \\ 2x^2 + 3x \geq 14. \end{cases}$$

33. Визначити найбільший цілий розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{9}}(4x + 1) < -2, \\ \sqrt{x} - \sqrt[4]{x} - 6 \leq 0. \end{cases}$$

34. Визначити найменший цілий розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(3 - 2x) > -3, \\ \sqrt{-x} - \sqrt[4]{-x} - 2 \leq 0. \end{cases}$$

35. Розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} \log_2(x + 1) + \log_2(x - 2) \leq 2, \\ |2x + 4| \leq |3x + 1|. \end{cases}$$

36. Розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} \log_2(2x + 4) + \log_2(2x - 2) \geq 4, \\ |4x + 7| \leq |2x + 11|. \end{cases}$$

37. Знайти довжину проміжку розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \log_{0,5} \log_3 \frac{x+2}{x-2} > 0, \\ (0,2)^{x^2-12} - (0,04)^{2x} > 0. \end{cases}$$

38. Обчислити суму цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \log_2 \log_{0,5} \frac{2x-7}{2x+8} > 1, \\ (0,2)^{\frac{x^2+1}{x^2-1}} < 1. \end{cases}$$

39. Розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} \log_2^2(x+2) - 8 \log_2(x+2) + 16 \leq 0, \\ \lg^2(x-4) + 7 \lg(x-4) \geq 8. \end{cases}$$

40. Розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} \log_{0,2}^2(3x+1) + 4 \log_{0,2}(3x+1) + 4 \leq 0, \\ \lg^2(x+2) + 10 \lg(x+2) \geq 11. \end{cases}$$

Група 5

41. Визначити середину проміжку розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \cos^2 \frac{\pi x}{12} > \frac{3}{4}, \\ \frac{5}{x-8} > 1. \end{cases}$$

42. Знайти довжину проміжку розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 16 \sin^2 \frac{\pi x}{24} \cos^2 \frac{\pi x}{24} > 3, \\ \frac{6}{11-x} > 1. \end{cases}$$

43. Визначити найбільший цілий розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} \sin^4 \frac{\pi x}{12} - \cos^4 \frac{\pi x}{12} < \frac{1}{2}, \\ |x-22| > |2x-32|. \end{cases}$$

44. Визначити найменший цілий розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} \sin^4 \frac{\pi x}{12} + \cos^4 \frac{\pi x}{12} < \frac{5}{8}, \\ |x - 14| < |0,5x - 10|. \end{cases}$$

45. Визначити число цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \sin \frac{\pi(x-4)}{24} \sin \frac{\pi(16-x)}{24} > \frac{1}{4}, \\ \sqrt{x-5} < \sqrt{19-x}. \end{cases}$$

46. Обчислити суму цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 2 \sin \frac{\pi x}{16} \cos \frac{\pi x}{8} > \sin \frac{3\pi x}{16} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sqrt{x+14} > \sqrt{-8-x}. \end{cases}$$

47. Визначити найменший розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} \arcsin(4x+2) < \frac{\pi}{6}, \\ |x| < \frac{1}{x^2}. \end{cases}$$

48. Визначити найбільший розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} \arccos(5x+2) < \frac{2\pi}{3}, \\ 2x^2 - 3|x| + 1 > 0. \end{cases}$$

49. Знайти довжину проміжку розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \operatorname{arctg} \left(\left(\frac{1}{9} \right)^{-3x+1} \right) \geq \frac{\pi}{6}, \\ \log_{\frac{1}{3}}(5x-1) > 0. \end{cases}$$

50. Визначити середину проміжку розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \operatorname{arccotg}(\log_{0,5}(1+2x)) \leq \frac{3\pi}{4}, \\ (0,2)^{2x} < 125 \cdot \sqrt[5]{0,04}. \end{cases}$$

51. Визначити найменший розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} 4 \cdot 3^{2x-2} \geq 3 \cdot 2^{\frac{2x+1}{2}}, \\ \sqrt{10x+25} > \sqrt{16-5x}. \end{cases}$$

52. Визначити найбільший розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} 8 \cdot 3^{2x} \geq 4^{2x+1} \cdot \sqrt[4]{3^{4x+1}}, \\ \sqrt{2x+7} > \sqrt{2-x}. \end{cases}$$

53. Визначити найменший розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} 2^{2x+2} - 6^x - 2 \cdot 3^{2x+2} \leq 0, \\ 2^{x+14} \sqrt{2^{2x-8}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}. \end{cases}$$

54. Визначити найбільший розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} 5 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x \geq 7 \cdot 10^x, \\ x + \sqrt[6]{3^{3x-21}} < 3. \end{cases}$$

55. Визначити найменший розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} (x-3)\sqrt{24+0,5x} \leq x^2-9, \\ \sqrt[6]{2^{2x+15}} \geq 64^{\frac{1}{2x+15}}. \end{cases}$$

56. Визначити найбільший розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} (x+3)\sqrt{x-2} > 9-x^2, \\ \left((0,04)^{x^2-2x} - (0,008)^{5x-10}\right) \cdot \log_{0,2}(x^2+1) \leq 0. \end{cases}$$

57. Визначити найменший розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} (18+5x-2x^2) \cdot (\log_2^2 x - 3 \log_2 x - 4) \leq 0, \\ |\log_2 x - 1| \geq 2. \end{cases}$$

58. Визначити найбільший розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} \frac{\log_3^2 x - 2 \log_3 x - 3}{16+6x-x^2} \geq 0, \\ |\log_5 x - 1| \leq 1. \end{cases}$$

59. Знайти довжину проміжку розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \frac{9^x - 4 \cdot 3^x + 3}{x^2 + 4x - 5} < 0, \\ \log_{0,2} \frac{x+2}{x-4} \leq 1. \end{cases}$$

60. Визначити середину проміжку розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \frac{4^{x+1} - 65 \cdot 2^x + 16}{x^2 - 5x + 4} < 0, \\ \log_2 \frac{2x+3}{2x-3} < 1. \end{cases}$$

§ 8. Арифметична та геометрична прогресії

Група 1

1. Знайти п'ятий член арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_4 = 21\frac{4}{7}$, $a_6 = 42\frac{3}{7}$.
2. Знайти шостий член арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_5 = 8\frac{1}{6}$, $a_7 = 9\frac{1}{3}$.
3. Знайти сьомий член геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_1 > 0$, $b_6 = -1,2$, $b_8 = -10,8$.
4. Знайти восьмий член геометричної прогресії (b_n) , якщо знаменник прогресії — від'ємний, а $b_7 = -8\frac{4}{7}$, $b_9 = -105$.
5. Числа 1, 4 і $\frac{1}{15}$ є першими двома членами арифметичної прогресії. Знайти її четвертий член.
6. Числа $3\frac{1}{7}$ і $3\frac{5}{7}$ є відповідно третім і четвертим членами арифметичної прогресії. Знайти її перший член.
7. Знайти четвертий член геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_1 = 13,5$; $b_2 = 9$.
8. Знайти перший член геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_3 = 1\frac{1}{7}$, $b_4 = \frac{16}{49}$.
9. Знайти п'ятий член арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_7 + a_3 = 11,2$.
10. Знайти сьомий член геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_1 > 0$, $b_9 \cdot b_5 = 104,04$.

Група 2

11. В арифметичній прогресії третій член дорівнює 8, а десятий дорівнює 29. Знайти перший член прогресії.
12. В арифметичній прогресії четвертий член дорівнює 17, а сьомий дорівнює 26. Знайти різницю прогресії.
13. В геометричній прогресії третій член дорівнює 12, а п'ятий дорівнює 48. Знайти перший член прогресії.
14. В геометричній прогресії п'ятий член дорівнює $\frac{1}{4}$, а сьомий дорівнює $\frac{1}{16}$. Знайти модуль знаменника прогресії.
15. Знайти сімнадцятий член арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_5 = 23$, $a_{11} = 47$.

16. Знайти п'ятий член арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_{12} = 22$, $a_{19} = 33$.

17. Знайти п'ятнадцятий член геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_3 = \frac{1}{27}$, $b_9 = \frac{1}{3}$.

18. Знайти п'ятий член геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_{11} = -\frac{12}{5}$, $b_{17} = -\frac{48}{125}$.

19. Знайти дванадцятий член арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_6 = 1, 5$; $a_{11} = 6$.

20. Знайти шостий член геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_4 = 125$, $b_7 = 64$.

Група 3

21. Знайти суму всіх двоцифрових натуральних чисел кратних чотирьом.

22. Знайти суму всіх двоцифрових натуральних чисел кратних семи.

23. Обчислити суму перших п'яти членів геометричної прогресії (b_n) з від'ємним знаменником, якщо $b_1 = 64$, $b_5 = 4$.

24. Обчислити суму перших п'яти членів геометричної прогресії (b_n) з від'ємним знаменником, якщо $b_1 = 2, 5$; $b_5 = 5, 184$.

25. Знайти різницю арифметичній прогресії, перший член якої дорівнює 1, 2, а сума її перших шести членів дорівнює 10, 2.

26. В арифметичній прогресії перший член дорівнює 7, 5, різниця дорівнює 2, 3, а сума її перших n членів дорівнює 640, 5. Знайти n .

27. Знаменник геометричної прогресії дорівнює -2 , а сума її перших п'яти членів дорівнює 44. Знайти перший член прогресії.

28. Знайти четвертий член геометричної прогресії, знаменник якої дорівнює $\frac{2}{3}$, а сума її перших чотирьох членів дорівнює 130.

29. Одинадцятий член арифметичної прогресії дорівнює $1\frac{5}{7}$. Обчислити суму перших двадцяти одного членів цієї прогресії.

30. Сума перших тридцяти трьох членів арифметичної прогресії дорівнює 132. Знайти сімнадцятий член прогресії.

Група 4

31. Обчислити суму чисельника та знаменника нескоротного раціонального дробу, який у десятковій формі записується у вигляді періодичного десяткового дробу $0,1(81)$.

32. Обчислити добуток чисельника та знаменника нескоротного раціонального дробу, який у десятковій формі записується у вигляді періодичного десяткового дробу $0,2(72)$.

33. Обчислити $(0,5(45) : \frac{3}{550} - 99,99) : 0,002$.

34. Обчислити $(0,4(54) : \frac{5}{297} - 26,99)^{-2}$.

35. Розв'язати рівняння $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{4}{5}$.

36. Розв'язати рівняння $1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{3}{8x}$.

37. Розв'язати рівняння $\frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \dots + \frac{2}{x} + \frac{1}{x} = 7\frac{1}{2}$, де x — натуральне число.

38. Розв'язати рівняння $2 + 5 + 8 + \dots + (x-3) + x = 345$, де x — натуральне число, яке при діленні на 3 дає остачу 2.

39. Обчислити $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$.

40. Обчислити $100^{100} - 101 \cdot 100^{99} + 101 \cdot 100^{98} - 101 \cdot 100^{97} + \dots - 101 \cdot 100^2 - 101 \cdot 100 + 101$.

Група 5

41. Відношення суми всіх членів арифметичній прогресії (a_n) з непарними номерами до суми всіх її членів з парними номерами дорівнює 1,04. Знайти число членів цієї прогресії, якщо відомо, що воно непарне.

42. Знайти різницю арифметичної прогресії (a_n) , у якій перший член дорівнює -49 , останній дорівнює 47 , а сума решти її членів дорівнює -5 .

43. Знайти перший член зростаючої геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_1 + b_2 + b_3 = 126$ та $\log_6 b_1 + \log_6 b_2 + \log_6 b_3 = 6$.

44. Сума перших трьох додатних членів зростаючої геометричної прогресії дорівнює 62, а сума обернених до них чисел дорівнює 0,62. Знайти знаменник геометричної прогресії.

45. Серед заданих п'яти чисел перші чотири є членами зростаючої арифметичної прогресії, а останні три є членами геометричної

прогресії. Сума перших чотирьох чисел дорівнює 6, а добуток другого і третього дорівнює нулю. Знайти п'яте із заданих чисел.

46. Сума трьох перших членів зростаючої арифметичної прогресії дорівнює 36. Якщо перші два члени залишити без змін, а до третього члена додати 50, то утвориться геометрична прогресія. Знайти перший член арифметичної прогресії.

47. Перший, третій і сьомий члени заданої арифметичної прогресії з ненульовою різницею утворюють геометричну прогресію. Знайти знаменник цієї геометричної прогресії.

48. Сума трьох чисел, що утворюють арифметичну прогресію, дорівнює 45. Знайти найбільше з цих чисел, якщо перше з заданих чисел є арифметичним квадратним коренем третього числа.

49. Перший член зростаючої геометричної прогресії дорівнює 0,5, а сума перших п'яти її членів в чотири рази більша за суму їх обернених величин. Знайти знаменник геометричної прогресії.

50. Знайти число членів геометричної прогресії b_1, b_2, \dots, b_n , якщо $b_1 + b_5 = 17$, $b_2 + b_6 = 34$, $b_1 + b_2 + \dots + b_n = 1023$.

Група 6

51. Обчислити суму

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_9 a_{10}},$$

де (a_n) — арифметична прогресія, загальний член якої задається формулою $a_n = 10 + 5n$.

52. Обчислити суму

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{15}} + \sqrt{a_{16}}},$$

де (a_n) — арифметична прогресія і $a_1 = 49$, $a_{16} = 169$.

53. Знайти спільний член двох нескінченних геометричних прогресій 151, 875; 101, 25; 67, 5; ... і 781, 25; 312, 5; 125; ...

54. Знайти найменший спільний член двох нескінченних арифметичних прогресій $-12, 8$; $-11, 4$; -10 ; ... і $-11, 7$; $-9, 4$; $-7, 1$; ...

55. Сума членів нескінченно спадної геометричної прогресії на 8 більша від суми перших трьох її членів, а сума перших шести її членів дорівнює 63. Знайти знаменник цієї прогресії.

56. Знайти перший член нескінченно спадної геометричної прогресії, у якій сума її членів дорівнює 15, а кожен член, починаючи з другого, в 5, 2 рази менший від суми сусідніх з ним членів.

57. Знайти найбільший цілий від'ємний розв'язок рівняння

$$1 - \sin \frac{\pi x}{6} + \sin^2 \frac{\pi x}{6} - \sin^3 \frac{\pi x}{6} + \dots = \frac{2}{3}.$$

58. Знайти найменший натуральний розв'язок рівняння

$$1 + \cos \frac{\pi x}{12} + \cos^2 \frac{\pi x}{12} + \cos^3 \frac{\pi x}{12} + \dots = \frac{2}{3}.$$

59. Знайти найбільший натуральний розв'язок нерівності

$$2^1 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \dots 2^{2x-1} < 0,25^{-32}.$$

60. Обчислити суму натуральних розв'язків нерівності

$$\log_{125} x + \log_{125}^2 x + \log_{125}^3 x + \dots \leq \frac{1}{2}.$$

§ 9. Планіметрія

Група 1

1. На відрізку AB завдовжки 24 см вибрано точку C . Знайти довжину відрізка AC , якщо $AC : BC = 3 : 5$.

2. На відрізку AB завдовжки 36 см вибрано точку C . Знайти довжину відрізка BC , якщо $AC : AB = 7 : 9$.

3. На відрізку AB завдовжки 45 см вибрано точку C . Знайти довжину відрізка BC , якщо $AC : BC = \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$.

4. На відрізку AB завдовжки 26 см вибрано точку C . Знайти довжину відрізка AC , якщо $AC : AB = 1\frac{1}{8} : 3\frac{3}{4}$.

5. На відрізку AB завдовжки 16 см вибрано точку C . Знайти довжину відрізка BC , якщо $5AC = 3BC$.

6. На відрізку AB завдовжки 18 см вибрано точку C . Знайти довжину відрізка AC , якщо $2AC + 5BC = 4AB$.

7. На відрізку AB завдовжки 15 см вибрано точку C . Знайти довжину відрізка AC , якщо $\frac{1}{2}AC = \frac{1}{4}BC$.

8. На відрізку AB вибрано точку C так, що $BC = 7$ см. Знайти довжину відрізка AC , якщо $2AC + 5BC = 3AB$.

9. На відрізку AB завдовжки 40 см вибрано точку C . Знайти відстань між серединами відрізків AC і BC .

10. На відрізку AB вибрано точку C . Відстань між серединами відрізків AC і BC дорівнює 7 см. Знайти довжину відрізка AB .

11. На відрізку AB вибрано точку C так, що $AC = 2$ см, а AB становить 140% відрізка BC . Знайти довжину відрізка AB .

12. На відрізку AB довжиною 11 см вибрано точку C так, що відрізок BC на 20% довший відрізка AC . Знайти довжину відрізка BC .

13. На відрізку AB довжиною 80 см відкладено відрізки $AC = 36$ см, $CD = 42$ см, $DE = 50$ см. Обчислити відстань від точки B до середини відрізка CE .

14. На відрізку AB довжиною 90 см відкладено відрізки $AC = 22$ см, $CD = 32$ см, $DE = 48$ см, $BF = 78$ см. Обчислити довжину відрізка EF .

15. Відрізок довжиною 35 см поділено на три різні за довжиною частини. Відстань між серединами крайніх частин дорівнює 25 см.

Знайти довжину середньої частини.

16. Знайти довжину відрізка, який поділено на три різні за довжиною частини, якщо відомо, що довжина середньої частини дорівнює 11 см, а відстань між серединами крайніх частин дорівнює 19 см.

17. Відрізок довжиною 28 см поділено на чотири різні за довжиною відрізки. Відстань між серединами крайніх частин дорівнює 22 см. Знайти відстань між серединами середніх частин.

18. Знайти довжину відрізка, який поділено на чотири різні за довжиною частини і при цьому відстань між серединами крайніх частин дорівнює 24 см, а відстань між серединами середніх частин дорівнює 9 см.

19. Відрізок AB поділено на три частини, довжини яких обернено пропорційні відповідно числам 3; 4 і 5. Знайти довжину відрізка AB , якщо різниця довжин найбільшої та найменшої частин дорівнює 16 см.

20. Відрізок AB довжиною 65 см поділено на три частини, довжини яких обернено пропорційні відповідно числам 2; 3 і 4. Знайти довжину найменшої з цих частин.

Група 2

21. У півплощині розгорнутого кута $\angle AOB$ побудовано кути: $\angle AOC = 32^\circ$, $\angle COD = 72^\circ$, $\angle DOE = 84^\circ$, $\angle EOF = 112^\circ$. Обчислити $\angle COF$.

22. У півплощині розгорнутого кута $\angle AOB$ побудовано кути: $\angle BOC = 44^\circ$, $\angle AOD = 36^\circ$, $\angle COE = 52^\circ$, $\angle DOF = 78^\circ$. Обчислити $\angle EOF$.

23. З вершини кута проведено промінь, перпендикулярний до його бісектриси. Цей промінь утворює із стороною даного кута кут, що дорівнює 25° . Знайти даний кут.

24. З вершини кута проведено промінь, перпендикулярний до його бісектриси. Цей промінь утворює із стороною даного кута кут, що дорівнює 130° . Знайти даний кут.

25. Промінь OC проходить між сторонами кута AOB , який дорівнює 120° . Знайти більший з утворених кутів, якщо їх різниця становить $\frac{2}{5}$ їх суми.

26. Промінь OC проходить між сторонами кута AOB , градусна міра якого 135° . Знайти $\angle AOC$, якщо його градусна міра становить

$\frac{2}{5}$ різниці градусних мір кутів COB та AOC .

27. Промені OB та OC поділяють кут AOD на три попарно різних кути AOB , BOC та COD . Знайти градусну міру кута BOC , якщо $\angle AOD = 70^\circ$, а кут між бісектрисами кутів AOB та COD дорівнює 55° .

28. Промені OB та OC поділяють кут AOD на три попарно різних кути AOB , BOC та COD . Знайти градусну міру кута AOD , якщо $\angle BOC = 75^\circ$, а кут між бісектрисами кутів AOB та COD дорівнює 90° .

29. $\frac{2}{5}$ одного з даних суміжних кутів в сумі з іншим дають 90° . Знайти більший із цих кутів.

30. $\frac{2}{3}$ одного з даних суміжних кутів та $\frac{7}{15}$ другого з цих кутів в сумі дають 90° . Знайти менший із цих кутів.

31. Більший із суміжних кутів становить $\frac{8}{7}$ їх різниці. Знайти градусну міру цього кута.

32. Більший із суміжних кутів у п'ять раз більший за їх різницю. Знайти градусну міру цього кута.

33. Сума вертикальних кутів у чотири рази менша від суміжного з кожним із цих кутів. Знайти градусні міри кожного із заданих вертикальних кутів.

34. Сума вертикальних кутів на 255° більша від градусної міри суміжного з кожним із цих кутів. Знайти градусні міри кожного із заданих вертикальних кутів.

35. Сума трьох кутів, які утворені при перетині двох прямих на 300° більша від четвертого кута. Знайти градусну міру цього кута.

36. Знайти менший із кутів, утворених перетином двох прямих, якщо сума двох із них в чотири рази більша від суми двох інших.

37. При перетині двох паралельних прямих січною один із утворених кутів дорівнює 98° . Знайти менший із кутів, утворених при перетині цих прямих прямою, перпендикулярною до січної.

38. При перетині двох паралельних прямих січною утворені кути, сума трьох з яких дорівнює 213° . Яке найменше значення (у градусах) може мати один із гострих кутів, утворених січною та паралельними прямими?

39. Кут між бісектрисою кута AOB та доповняльною півпрямною до сторони цього кута становить $\frac{3}{4}$ градусної міри даного кута AOB . Знайти $\angle AOB$.

40. Нехай OC — бісектриса кута AOB , кут DOC — суміжний до кута AOC і становить $0,94$ кута AOB . Знайти $\angle DOB$.

Група 3

41. Зовнішній кут трикутника дорівнює 140° , а внутрішні кути, не суміжні з ним, пропорційні 3 і 4. Знайти найбільший внутрішній кут заданого трикутника.

42. Внутрішній кут трикутника дорівнює 60° , а зовнішні не суміжні з ним кути, відносяться як 3 : 5. Визначити найменший внутрішній кут трикутника.

43. Один з кутів рівнобедреного трикутника на 80° менший від суми двох інших. Знайти найменший внутрішній кут трикутника.

44. Знайти кут при основі рівнобедреного трикутника, якщо один з його кутів у сім раз менший від різниці двох інших кутів.

45. Нехай бісектриси AM і BN відповідно кутів A та B трикутника ABC перетинаються в точці O . Знайти градусну міру кута C , якщо $\angle AOB = 110^\circ$.

46. Нехай бісектриси AM і BN відповідно кутів A та B трикутника ABC перетинаються в точці O . Знайти градусну міру кута AOB , якщо $\angle C = 80^\circ$.

47. Бісектриси кутів трикутника ABC , проведені з вершин A і B , перетинають протилежні сторони відповідно в точках A_1 і B_1 . Знайти градусну міру кута C , якщо $\angle AA_1B = 55^\circ$, $\angle BB_1A = 80^\circ$.

48. Бісектриси кутів трикутника ABC , проведені з вершин A і B , перетинаються в точці D і перетинають протилежні сторони відповідно в точках A_1 і B_1 . Знайти градусну міру кута ADB , якщо $\angle AA_1B = 60^\circ$, $\angle BB_1A = 75^\circ$.

49. З вершини прямого кута прямокутного трикутника проведено промені через центри вписаного та описаного навколо даного трикутника кіл. Кут між цими променями дорівнює 10° . Обчислити градусну міру найменшого кута трикутника.

50. Гострий кут прямокутного трикутника дорівнює 25° . Обчислити градусну міру кута між променями, проведеними з вершини прямого кута через центри вписаного та описаного навколо трикутника кіл.

51. Обчислити суму кутів опуклого многокутника, якщо з однієї його вершини можна провести 6 діагоналей.

52. Скільки діагоналей можна провести з однієї вершини опуклого многокутника, сума кутів якого дорівнює 1080° .

53. Визначити число сторін опуклого многокутника, у якого п'ять кутів по 130° , а решта — по 170° .

54. Число сторін опуклого многокутника є непарним. Два кути у нього по 107° , а решта рівні між собою, і їх градусна міра є цілим числом. Знайти градусну міру цих кутів.

55. Різниця внутрішнього та зовнішнього кутів правильного многокутника дорівнює 108° . Знайти число сторін цього многокутника.

56. Визначити число сторін правильного n -кутника, якщо різниця градусних мір внутрішнього кута цього многокутника та внутрішнього кута правильного $(n - 1)$ -кутника дорівнює 4° .

57. Визначити число сторін правильного многокутника, якщо сума його внутрішніх кутів разом з одним зовнішнім дорівнює 1300° .

58. Визначити число сторін правильного многокутника, якщо сума його зовнішніх кутів, взятих по одному при кожній з його вершин, разом з одним внутрішнім дорівнює 520° .

59. Визначити число сторін опуклого многокутника, найменший кут якого дорівнює 120° , а кожен наступний більший від попереднього на 5° і число діагоналей, що виходять з однієї вершини є парним.

60. Внутрішні кути опуклого многокутника утворюють арифметичну прогресію з різницею 10. Знайти найменший кут многокутника, якщо сума всіх внутрішніх кутів дорівнює 1800° .

Група 4

61. Сума довжин двох відповідних сторін подібних трикутників дорівнює 24 см, а різниця довжин двох інших відповідних сторін дорівнює 8 см. Знайти периметр більшого трикутника, якщо довжини третіх сторін відповідно дорівнюють 5 см і 15 см.

62. Периметри двох подібних трикутників відносяться як 8 : 5, а різниця довжин двох відповідних сторін цих трикутників дорівнює 15,3 см. Знайти довжину більшої з цих сторін.

63. Периметр трикутника становить 140% периметра подібного йому трикутника, а сума довжин двох відповідних сторін цих трикутників дорівнює 12 см. Знайти периметр більшого трикутника, якщо сума довжин решти сторін даних трикутників дорівнює 36 см.

64. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 24 см. Через середину його висоти, проведеної до його основи, проходить пряма, паралельна до бічної сторони. Знайти периметр трикутника, утвореного даною прямою та відрізками, на які вона ділить основу та бічну сторону цього трикутника.

65. Трикутник поділено прямими паралельними до основи на три рівновеликі частини. Визначити довжину найбільшої частини бічної сторони, утвореної цими прямими, якщо її довжина дорівнює $6\sqrt{3}$ см.

66. Пряма, паралельна основі трикутника, ділить його бічну сторону у відношенні 2 : 3 (рахуючи від вершини), а площу — на частини, різниця яких дорівнює 34 см^2 . Знайти площу даного трикутника.

67. У трапеції $ABCD$ довжини основ AD і BC відповідно дорівнюють 30 см і 20 см, а довжини діагоналей AC і BD — відповідно 41 см і 24 см. Знайти периметр трикутника AOD , де O — точка перетину діагоналей.

68. У трапеції $ABCD$ довжини основ AD і BC відповідно дорівнюють 15 см і 5 см, а довжини діагоналей AC і BD — відповідно 12 см і 16 см. Знайти периметр трикутника BOC , де O — точка перетину діагоналей.

69. У рівнобедрений трикутник ABC ($AB = BC$) вписано рівнобедрений прямокутний трикутник так, що його прямий кут лежить на основі AC , а гіпотенуза паралельна до основи. Знайти гіпотенузу цього трикутника, якщо $AC = 60$ см, а висота трикутника ABC , опущена на його основу, дорівнює 20 см.

70. У трикутник, основа якого дорівнює 15 см, а висота, опущена на неї, — 5 см, вписано рівнобедрений прямокутний трикутник так, що його гіпотенуза паралельна основі даного трикутника, а вершина прямого кута лежить на його основі. Визначити довжину гіпотенузи вписаного трикутника.

71. Два кола ззовні дотикаються одне до одного. Січна, яка проходить через точку дотику, утворює хорди, довжини яких відносяться як 4 : 3. Знайти радіус меншого кола, якщо відстань між центрами кіл дорівнює 7 см.

72. Два кола ззовні дотикаються одне до одного. Січна, яка проходить через точку дотику, утворює хорди, довжини яких відносяться як 8 : 3. Знайти радіус більшого кола, якщо відстань між центрами кіл дорівнює 11 см.

73. Пряма, що проходить через точку перетину діагоналей трапеції і паралельно до її основи перетинає бічні сторони в точках M і N . Знайти довжину відрізка MN , якщо основи трапеції дорівнюють відповідно 6 см і 3 см.

74. Бічну сторону AB трапеції $ABCD$ поділено точкою M так, що $AM : MB = 2 : 3$ і через точку M проведено пряму паралельну основам трапеції. Обчислити довжину відрізка цієї прямої розміщеної між бічними сторонами трапеції, якщо її основи дорівнюють 7 см і 3 см.

75. Довжини сторін трикутника відповідно дорівнюють 6 см, 7 см і 8 см. Пряма, паралельна до найбільшої сторони трикутника, відтинає трапецію, периметр якої дорівнює 20 см. Знайти довжину меншої основи цієї трапеції.

76. Дві паралельні прямі перетинають сторони кута O в точках A, B, C, D , що є вершинами трапеції $ABCD$ (BC — менша основа). Знайти довжину більшої основи трапеції, якщо її периметр дорівнює 58 см, а $OC = 7$ см, $OB = 6$ см, $BC = 8$ см.

77. Обчислити довжину сторони BC трикутника ABC , якщо $AB = 35$ см, $AC = 28$ см, $\angle A = 2\angle B$.

78. У трикутнику ABC на стороні AC вибрано точку D так, що $AD = 5$ см, $CD = 4$ см і $\angle DBC = \angle CAB$. Знайти довжину сторони BC .

79. У гострокутному трикутнику ABC висоти BD та AE перетинаються в точці O так, що $OD = 6$ см. Знайти довжину висоти BD , якщо $AD = 15$ см, а $CD = 14$ см.

80. Бісектриса AC кута A трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) ділить її на два подібних трикутники ABC і ACD . Знайти периметр трапеції, якщо $AB = 18$ см, $CD = 24$ см.

Група 5

81. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 6 см, а бісектриса кута трикутника ділить бічну сторону на відрізки, з яких прилеглий до цієї основи дорівнює 4 см. Знайти периметр трикутника.

82. У рівнобедреному трикутнику основа менша за бічну сторону на 4,8 см, а бісектриса кута трикутника ділить бічну сторону на відрізки, які відносяться як 3 : 5. Знайти периметр трикутника.

83. У трикутнику ABC проведено висоту BD та бісектрису AE .

З точки E опущено перпендикуляр EF на сторону AC . Знайти довжину відрізка EF , якщо $BD = 24$ см і $AB : AC = 3 : 5$.

84. У трикутнику ABC пряма, що проходить через точку D бісектриси CD трикутника паралельно стороні AC , перетинає сторону BC в точці E . Знайти довжину відрізка DE , якщо $BC = 6$ см і $AC = 4$ см.

85. У прямокутному трикутнику бісектриса гострого кута ділить протилежний катет на відрізки 10 см і 6 см. Обчислити периметр трикутника.

86. У прямокутному трикутнику бісектриса гострого кута ділить менший катет на відрізки у відношенні 12 : 13. Обчислити периметр трикутника, якщо довжина його більшого катета дорівнює 24 см.

87. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника ділить гіпотенузу у відношенні 5 : 12. Обчислити периметр цього трикутника, якщо медіана, проведена до гіпотенузи дорівнює 13 см.

88. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на відрізки 20 см і 15 см. Обчислити периметр цього трикутника.

89. У трикутник із сторонами 14 см і 28 см вписано півкруг з діаметром на третій стороні. Центр півкруга ділить цю сторону на відрізки, різниця довжин яких дорівнює 5 см. Знайти довжину цієї сторони.

90. У трикутник, різниця довжин двох сторін якого дорівнює 8 см, вписано півкруг з діаметром на третій стороні. Центр цього півкруга ділить цю сторону на відрізки 18 см і 14 см. Обчислити периметр цього трикутника.

91. Довжина кола, вписаного в ромб, дорівнює 12π см. Знайти сторону ромба, якщо його сторона точкою дотику ділиться на відрізки, різниця довжин яких дорівнює 5 см.

92. Площа круга, вписаного в ромб, дорівнює 144π см². Знайти сторону ромба, якщо його сторона точкою дотику ділиться на відрізки у відношенні 9 : 16.

93. З вершини прямого кута трикутника проведені висота і медіана, які відповідно дорівнюють 4,8 см 5 см. Обчислити периметр цього трикутника.

94. Катети прямокутного трикутника відносяться як 3 : 4, а висота ділить гіпотенузу на відрізки, різниця довжин яких дорівнює 7 см. Визначити довжину гіпотенузи.

95. Обчислити довжину основи рівнобедреного трикутника, довжина бічної сторони якого дорівнює 25 см, а проекція основи на цю сторону дорівнює 18 см.

96. Обчислити довжину основи рівнобедреного трикутника, довжина бічної сторони якого дорівнює 25 см, а проекція висоти, проведеної до основи, на бічну сторону дорівнює 21 см.

97. З точки кола до діаметра проведено перпендикуляр довжиною $\frac{6}{\pi}$ см, який ділить діаметр на відрізки, довжини яких відносяться як 4 : 9. Обчислити довжину кола.

98. З границі круга, площа якого дорівнює $56,25\pi$ см², до діаметра проведено перпендикуляр довжиною 7,2 см. Знайти модуль різниці довжин відрізків, на які ділить основа цього перпендикуляра діаметр.

99. Діагоналі паралелограма дорівнюють відповідно 17 см і 19 см, а його сторони відносяться як 2 : 3. Обчислити периметр паралелограма.

100. Діагоналі паралелограма дорівнюють відповідно 6 см і 7 см, а різниця довжин його сторін дорівнює 2 см. Обчислити периметр паралелограма.

Група 6

101. Катети прямокутного трикутника відповідно дорівнюють 3 см та 4 см. Знайти відстань від точки перетину медіан трикутника до гіпотенузи.

102. Проекції катетів на гіпотенузу відповідно дорівнюють 9 см та 16 см. Знайти відстань від точки перетину медіан трикутника до гіпотенузи.

103. У трикутнику дві сторони відповідно дорівнюють 10 см та 15 см, а медіана, проведена до третьої сторони, — 9,5 см. Обчислити периметр трикутника.

104. У трикутнику одна із сторін дорівнює 19 см, а медіана, проведена до неї, дорівнює 8,5 см. Дві інші сторони цього трикутника відносяться як 2 : 3. Обчислити периметр трикутника.

105. Основа трикутника дорівнює 26 см, а медіани, проведені до бічних сторін, відповідно дорівнюють 15 см та 30 см. Знайти довжину третьої медіани.

106. Знайти довжину основи трикутника, якщо медіана, проведена до неї, має довжину 12 см, а медіани проведені до бічних сторін

відповідно дорівнюють 13,5 см та 10,5 см.

107. Медіана, проведена до бічної сторони рівнобедреного трикутника, дорівнює 13,5 см. Знайти периметр трикутника, якщо його основа дорівнює 10 см.

108. Основа рівнобедреного трикутника на 6 см менша за його бічну сторону. Знайти периметр трикутника, якщо медіана, проведена до бічної сторони, дорівнює 9 см.

109. У паралелограмі одна з діагоналей дорівнює 21 см, а протилежний кут дорівнює 120° . Сторони паралелограма відносяться як 3 : 5. Обчислити периметр паралелограма.

110. У паралелограмі одна з діагоналей дорівнює 7 см, а протилежний кут дорівнює 60° . Одна із сторін паралелограма дорівнює 5 см. Обчислити периметр паралелограма.

111. У прямокутній трапеції менша діагональ дорівнює 15 см і перпендикулярна до бічної сторони. Знайти більшу основу трапеції, якщо її менша бічна сторона дорівнює 12 см.

112. У прямокутній трапеції менша діагональ дорівнює 15 см і перпендикулярна до бічної сторони. Обчислити периметр трапеції, якщо її більша основа дорівнює 25 см.

113. У трапеції $ABCD$ основи BC та AD відносяться як 1 : 2, $\angle A + \angle D = 90^\circ$. Точка E основи AD така, що $AE : ED = 1 : 3$, $BE = 10$ см, $\angle ABE = 15^\circ$. Знайти висоту трапеції.

114. Основи трапеції дорівнюють 4 см, 12 см. Середини основ трапеції з'єднано з кінцями другої основи. Знайти відстань між точками перетину даних відрізків.

115. У прямокутній трапеції $ABCD$ менша основа BC відноситься до меншої бічної сторони як 1 : 3. Діагоналі трапеції взаємно перпендикулярні. Середня лінія трапеції дорівнює 15 см. Знайти більшу основу трапеції.

116. У прямокутній трапеції $ABCD$ основи BC та AD відносяться як 9 : 16. Діагоналі трапеції взаємно перпендикулярні. Менша бічна сторона дорівнює 12 см. Знайти середню лінію трапеції.

117. У рівнобічній трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) діагоналі взаємно перпендикулярні. Відстань від точки A до прямої CD у чотири рази більша за відстань від точки B до цієї ж прямої. Висота трапеції дорівнює 15 см. Знайти більшу основу трапеції.

118. У прямокутній трапеції бічні сторони відповідно дорівнюють 20 см і 12 см, більша основа дорівнює 21 см. Знайти відстань від вершини прямого кута при меншій основі до прямої, що проходить через протилежну бічну сторону.

119. У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) бісектриси зовнішніх кутів A і B , прилеглих до сторони AB , перетинаються в точці M , а бісектриси зовнішніх кутів C і D , прилеглих до сторони CD , перетинаються в точці N . Довжина відрізка MN дорівнює 30 см. Обчислити периметр трапеції.

120. У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) бісектриса кута A ділить бічну сторону CD на дві рівні частини. Знайти висоту трапеції, якщо її бічні сторони AB і CD відповідно дорівнюють 30 см і 26 см, а більша основа AD дорівнює 19 см.

Група 7

121. Із збільшенням діагоналі квадрата на 2 см, його площа збільшилась на 18 см^2 . Якою була площа квадрата?

122. Із зменшенням діагоналі квадрата на 4 см, його площа зменшилась на 40 см^2 . Якою стала площа квадрата?

123. Бісектриса кута прямокутника ділить його діагональ у відношенні $5 : 12$. Периметр прямокутника дорівнює 68 см. Знайти його площу.

124. Бісектриса кута прямокутника ділить його діагональ на відрізки 15 см та 20 см. Знайти його площу.

125. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 40 см, а його площа 60 см^2 . Знайти довжину його гіпотенузи.

126. У рівнобедреному прямокутному трикутнику медіана, проведена до катета дорівнює 10 см. Знайти його площу.

127. Знайти площу рівнобедреного трикутника, якщо висота, проведена з його вершини до основи, дорівнює 20 см, а висота, проведена до його бічної сторони, дорівнює 24 см.

128. Знайти площу правильного трикутника, вписаного в коло, якщо сторона квадрата, вписаного в це коло, дорівнює $10\sqrt{12}$

129. Дві сторони гострокутного трикутника відповідно дорівнюють 5 см та 8 см, а його площа — $10\sqrt{3} \text{ см}^2$. Знайти довжину третьої сторони трикутника.

130. Дві сторони тупокутного трикутника відповідно дорівнюють

10 см та 6 см, а його площа — $15\sqrt{3}$ см². Знайти довжину третьої сторони трикутника, що лежить проти його тупого кута.

131. Периметр паралелограма дорівнює 30 см. Обчислити його площу, якщо висоти паралелограма відповідно дорівнюють 2 см і 3 см.

132. Висоти паралелограма відповідно дорівнюють 3 см і 5 см, а кут між ними — 30° . Знайти площу паралелограма.

133. Знайти площу паралелограма, сторони якого відповідно дорівнюють 12 см і 20 см, а сума висот — 28 см.

134. Знайти площу паралелограма, сторони якого відповідно дорівнюють 8 см і 12 см, а різниця довжин його висот — 2 см.

135. Висота ромба дорівнює 6 см, а його діагональ дорівнює 10 см. Обчислити площу ромба.

136. Діагональ ромба дорівнює 10 см, а довжина вписаного в нього кола дорівнює 6π см. Обчислити площу ромба.

137. Діагоналі ромба відносяться як 3 : 4. Обчислити площу ромба, якщо довжина вписаного в нього кола дорівнює 12π см.

138. Різниця довжин діагоналей ромба дорівнює 10 см. Обчислити площу ромба, якщо площа вписаного в нього круга дорівнює 144π см².

139. Основи трапеції відповідно дорівнюють 16 см і 44 см, а бічні сторони відповідно — 17 см і 25 см. Обчислити площу трапеції.

140. Основи трапеції відповідно дорівнюють 18 см і 2 см, а діагоналі відповідно — 7 см і 15 см. Обчислити площу трапеції.

Група 8

141. Знайти площу трикутника, у якого висоти дорівнюють 8 см і 9 см і перетинаються під кутом 30° .

142. Знайти площу трикутника, у якого дві медіани дорівнюють 12 см і 15 см і перетинаються під кутом 30° .

143. Обчислити площу прямокутного трикутника, якщо радіус вписаного в нього кола дорівнює 2 см, а радіус описаного навколо нього кола — 5 см.

144. Знайти довжину гіпотенузи прямокутного трикутника, катет якого дорівнює 5 см, а радіус вписаного в нього кола — 2 см.

145. У трикутнику одна сторона дорівнює 11 см, а друга сторона точкою дотику вписаного в нього кола ділиться на відрізки 22 см і 3 см. Обчислити радіус цього кола.

146. Коло, вписане в трикутник ABC , дотикається сторони AB в точці D , а сторони BC — у точці E . Знайти довжину сторони AC , якщо площа трикутника 360 см^2 , а $AD : DB = 5 : 4$, $BE : EC = 16 : 9$.

147. Точка дотику вписаного в трикутник кола ділить сторону на відрізки 3 см та 4 см . Радіус цього кола дорівнює 2 см . Знайти периметр трикутника.

148. Відстань від центра кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, до вершини протилежної основи дорівнює 5 см . Бічна сторона трикутника дорівнює 10 см . Знайти радіус цього кола.

149. З вершини прямого кута трикутника ABC проведено висоту CD . Відстані від точки D до катетів AC та BC відповідно дорівнюють 18 см та 24 см . Знайти радіус кола вписаного в цей трикутник.

150. У трикутнику ABC , висота AA_1 на 2 см менша від сторони BC . Сторона AB дорівнює 15 см . Знайти радіус описаного навколо трикутника кола, якщо площа трикутника дорівнює 84 см^2 .

151. Радіус кола, вписаного в прямокутну трапецію, дорівнює 2 см . Менша основа трапеції дорівнює 3 см . Знайти площу трапеції.

152. Знайти площу рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, якщо її бічна сторона дорівнює 10 см , а основа — 2 см .

153. Коло, вписане в трапецію, ділить точкою дотику бічну сторону на відрізки 12 см і 3 см . Менша основа трапеції дорівнює 11 см . Знайти площу трапеції.

154. Відстань від центра кола, вписаного в прямокутну трапецію, до кінців більшої бічної сторони дорівнюють 15 см та 20 см . Знайти площу трапеції.

155. Обчислити радіус кола, описаного навколо трапеції, основи якої 6 см і 8 см , а висота 1 см .

156. Довжини основ вписаної в коло трапеції дорівнюють 25 см і 7 см , а довжина діагоналі — 20 см . Знайти її площу.

157. Точки M і N ділять бічну сторону трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) на три рівні частини. Прямі, що проходять через ці точки і паралельні до основ трапеції, ділять її на три трапеції. Знайти площу середньої трапеції, якщо площі крайніх дорівнюють 9 см^2 та 21 см^2 .

158. Точки M і N ділять бічну сторону трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) на три рівні частини. Прямі, що проходять через ці точки і паралельні до основ трапеції, ділять її на три трапеції. Знайти площу трапеції, прилеглої до меншої основи, якщо площа середньої трапеції дорівнює

35 см², а площа трапеції прилеглої до більшої основи — 45 см².

159. У трапеції відстані від центра вписаного в неї кола до кінців меншої основи дорівнюють $4\sqrt{13}$ см та 15 см, а до кінців бічної сторони — 15 см і 20 см. Обчислити площу трапеції.

160. У трапеції відстані від центра вписаного в неї кола до кінців більшої основи дорівнюють $3\sqrt{13}$ см та 10 см, а до кінців бічної сторони — $2\sqrt{13}$ см і $3\sqrt{13}$ см. Обчислити площу трапеції.

Група 9

161. Знайти площу трикутника ABC , вписаного в коло, якщо відстані від вершин A і C до дотичної, проведеної через точку B , дорівнюють 9 см і 16 см, а сторона AC дорівнює 25 см.

162. Трикутник ABC вписано в коло. Через точку B проведено дотичну до цього кола, відстані до якої від точок A і C дорівнюють 9 см і 16 см. Знайти довжину сторони AC трикутника, якщо його площа 216 см².

163. Знайти радіус вписаного в трикутник кола, якщо його висоти дорівнюють 10, 4 см, 12 см і 39 см.

164. Знайти площу трикутника, медіани якого дорівнюють 3 см, $3\sqrt{5}$ см і 6 см.

165. У ромбі $ABCD$ радіус кола, описаного навколо трикутника ABD , дорівнює 6, 25 см, а радіус кола описаного навколо трикутника ABC дорівнює $8\frac{1}{3}$ см. Знайти площу ромба.

166. У ромбі $ABCD$ довжини діагоналей BD і AC відповідно дорівнюють 14,4 см і 19,2 см. Навколо трикутників ABD та ABC описані кола. Знайти відстань між їх центрами.

167. Перпендикуляр, проведений із вершини тупого кута паралелограма до його діагоналі, ділить цю діагональ на відрізки 8, 2 см і 21, 8 см. Різниця довжин сторін паралелограма дорівнює 12 см. Знайти довжину другої діагоналі паралелограма.

168. Перпендикуляр проведений із вершини гострого кута паралелограма до його діагоналі, ділить цю діагональ на відрізки 9 см і 3 см. Сума довжин сторін паралелограма дорівнює 18 см. Знайти довжину другої діагоналі паралелограма.

169. У коло вписано трикутник ABC . До кола в точці A проведено дотичну. Промінь CB перетинає цю дотичну в точці D . Радіус кола, описаного навколо трикутника ABD , дорівнює 5 см. Знайти

радіус кола, описаного навколо трикутника ADC , якщо $BD = 4$ см, а $BC = 5$ см.

170. Через вершину A трикутника ABC , провели пряму, дотичну до кола, описаного навколо цього трикутника. Промінь BC перетинає цю дотичну в точці D . Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника ACD , якщо радіус кола, описаного навколо трикутника ABD дорівнює 20 см, $AD = 12$ см, $BC = 7$ см.

171. Діагоналі опуклого чотирикутника ділять його на чотири трикутники. Знайти площу одного із утворених трикутників, якщо площі сусідніх з ним трикутників відповідно дорівнюють 6 см² та 20 см², а площа протилежного — 10 см².

172. В опуклому чотирикутнику діагоналі дорівнюють 10 см та 12 см. Відрізки, що з'єднують середини протилежних сторін рівні. Знайти площу чотирикутника.

173. Нехай O — точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Площі трикутників AOD та BOC відповідно дорівнюють 90 см² і 40 см². Знайти площу трапеції.

174. Нехай O — точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Площі трикутників AOB та BOC відповідно дорівнюють 100 см² і 40 см². Знайти площу трапеції.

175. Висота ромба, проведена з вершини тупого кута, ділиться діагоналлю ромба на відрізки 13 см 5 см. Обчислити площу ромба.

176. Висота ромба, проведена з вершини тупого кута, ділиться діагоналлю ромба у відношенні 13 : 5. Обчислити площу ромба, якщо його сторона дорівнює 13 см.

177. Довжина кола радіуса 3 см дорівнює довжині дуги AB кола радіуса 12 см. Знайти градусну міру центрального кута, що відповідає дузі AB .

178. Площа сектора, центральний кут якого 40° і радіусом круга 6 см, дорівнює площі круга радіуса r . Знайти r .

179. Через кінці хорди, довжина якої 24 см, проведено до кола дві дотичні. Знайти відстань від точки перетину цих дотичних до кола, якщо радіус кола дорівнює 15 см.

180. З точки поза колом проведено до цього кола дві дотичні. Довжина кожної дотичної 20 см, а відстань між точками дотику 24 см. Знайти радіус кола.

§ 10. Декартові координати

Група 1

1. Точки $A(4; 2)$ і $B(-2; y)$ розміщені на прямій паралельній до осі Ox . Знайти значення y .

2. Точки $C(5; -3)$ і $D(x; 5)$ розміщені на прямій паралельній до осі Oy . Знайти значення x .

3. Обчислити площу фігури обмеженої прямими $x = -6$, $x = 4$, $y = 2$, $y = -5$.

4. Обчислити площу фігури обмеженої прямими $x = -1$, $x = -9$, $y = -2$, $y = -7$.

5. Визначити відстань від точки $A(-5; 3)$ до осі Ox .

6. Визначити відстань від точки $A(-9; -7)$ до осі Oy .

7. Точка $M(-5; 4)$ є серединою відрізка AB . Точка A лежить на осі Ox , B — на осі Oy . Знайти довжину відрізка OA .

8. Точка $N(4; -3)$ є серединою відрізка CD . Точка C лежить на осі Ox , D — на осі Oy . Знайти довжину відрізка OD .

9. Точка C є серединою відрізка AB і лежить на осі Oy , а точка B — на осі Ox . Знайти довжину відрізка OB , якщо координати точки A дорівнюють $(4; 6)$.

10. Точка C є серединою відрізка AB і лежить на осі Ox , а точка B — на осі Oy . Знайти довжину відрізка OB , якщо координати точки A дорівнюють $(-6; 8)$.

Група 2

11. Точки $A(-2; -3)$, $B(1; -6)$, $C(0; -3)$ є вершинами паралелограма $ABCD$. Знайти абсцису точки D .

12. Точки $B(0; -4)$, $C(-1; -1)$, $D(-4; 2)$ є вершинами паралелограма $ABCD$. Знайти ординату точки A .

13. Точки $A(-1; 2)$, $B(3; 4)$ і $C(5; 0)$ є серединами сторін трикутника. Знайти суму абсцис вершин трикутника.

14. Точки $M(-3; 1)$, $N(1; 3)$ і $P(3; -1)$ є серединами сторін трикутника. Знайти суму ординат вершин трикутника.

15. Знайти абсцису точки C , що лежить на осі Ox і рівновіддалена від точок $A(1; 1)$ і $B(4; 2)$.

16. Знайти ординату точки C , що лежить на осі Oy і рівновіддалена від точок $A(-2; 3)$ і $B(-5; 2)$.

17. Знайти діаметр кола, описаного навколо прямокутного трикутника з вершинами в точках $A(7; 3)$, $B(9; 4)$ і $C(11; 0)$.

18. Знайти радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник з вершинами в точках $A(-10; -15)$, $B(5; 5)$ і $C(38; -51)$.

19. Точки $A(-4; 3)$, $B(7; -5)$ і $C(9; 1)$ є вершинами трикутника. Знайти довжину його медіани, проведеної з вершини A .

20. Точки $A(5; 2)$, $B(-1; -2)$ і $C(9; 24)$ є вершинами трикутника. Знайти довжину його медіани, проведеної з вершини B .

Група 3

21. Знайти площу прямокутного трикутника, вершинами гострих кутів якого є точки $A(5; -1)$ і $B(9; -4)$, а вершина прямого кута C лежить на осі абсцис.

22. Знайти площу прямокутного трикутника, вершинами гострих кутів якого є точки $A(-1; 2)$ і $B(-4; 6)$, а вершина прямого кута C лежить на осі ординат.

23. Знайти площу прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$), вершина A якого лежить на осі Ox , а координати інших вершин B і C відповідно дорівнюють $(3; 2)$ і $(-1; 4)$.

24. Знайти площу прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$), вершина A якого лежить на осі ординат, а координати інших вершин B і C відповідно дорівнюють $(9; 5)$ і $(-1; 3)$.

25. Знайти площу рівнобедреного трикутника ABO ($AB = BO$), якщо вершина O є початком координат, координати вершини A дорівнюють $(8; 4)$, а вершина B лежить на осі абсцис.

26. Знайти площу рівнобедреного трикутника ABO ($AB = BO$), якщо вершина O є початком координат, координати вершини A дорівнюють $(18; 6)$, а вершина B лежить на осі ординат.

27. Визначити довжину найбільшої сторони трикутника, площа якого дорівнює 48 см^2 та вершини якого знаходяться в точках $A(1; 3)$, $B(9; 3)$ і C , яка лежить на осі ординат.

28. Визначити довжину найменшої сторони трикутника, площа якого дорівнює 52 см^2 та вершини якого знаходяться в точках $A(-3; 6)$, $B(-3; -7)$ і C , яка лежить на осі абсцис.

29. Знайти найменше значення довжини ламаної ACB , якщо точки A і B мають відповідно координати $(3; 2)$ і $(15; 3)$, а точка C лежить на осі абсцис.

30. Знайти найменше значення довжини ламаної ACB , якщо точки A і B мають відповідно координати $(-6; -7)$ і $(-2; 8)$, а точка C лежить на осі ординат.

Група 4

31. Визначити відстань від точки A до початку координат, якщо відстані від цієї точки до координатних площин дорівнюють 4 см, 12 см і 6 см.

32. Знайти найменше значення абсциси точки, якщо відстань від цієї точки до координатних площин Oxy та Oxz дорівнюють 6 см, а до початку координат — 11 см.

33. Визначити відстань від точки $A(12; -3; -5)$ до осі ординат.

34. Визначити відстань від точки $B(-15; 8; 6)$ до осі аплікату.

35. Відрізок OA довжиною 10 см утворює з осями Ox і Oy відповідно кути 60° і 45° . Знайти найменш можливе значення аплікату точки A .

36. Пряма, що проходить через початок координат, утворює з осями Ox і Oy кути величиною 60° . Знайти градусну міру гострого кута утвореного цією прямою з віссю Oz .

37. Точка C осі Ox рівновіддалена від точок $A(6; 6; 3)$ і $B(-2; 3; 2)$. Знайти довжину відрізка AC .

38. Точка C осі Oy рівновіддалена від точок $A(1; 1; 8)$ і $B(1; 4; 5)$. Знайти ординату точки C .

39. Точка $C(6; 6; 7)$ є серединою відрізка, кінці якого знаходяться на осі Ox і в площині Oyz . Знайти довжину цього відрізка.

40. Точка $C(4; 4; 2)$ є серединою відрізка, кінці якого знаходяться на осі Oz і в площині Oxy . Знайти довжину цього відрізка.

Група 5

41. Знайти периметр трикутника ABC , дві вершини A і B якого мають відповідно координати $(-4, -2, -2)$ і $(0; -6; -4)$, а середини сторін AC і BC лежать відповідно на осі Oy та в площині Oxz .

42. Знайти периметр трикутника ABC , дві вершини A і B якого мають відповідно координати $(1, -2, 1)$ і $(3; 0; 2)$, а середини сторін AC і BC лежать відповідно на осі Ox та в площині Oyz .

43. Знайти найменше значення суми квадратів відстаней від точки C , що належить площині Oxy до точок $A(1; 3; 5)$ і $B(7; -1; 4)$.

44. Точки $C(5; 1; 3)$ і $D(-3; 1; 1)$ ділять відрізок AB на три рівні частини. Знайти аплікату точки M , що лежить на осі Oz , і модуль різниці квадратів відстаней від якої до точок A і B є найменшим.

45. Визначити відстань від точки A до початку координат, якщо відстані від точки A до координатних осей Ox , Oy і Oz відповідно дорівнюють $\sqrt{65}$ см, $\sqrt{80}$ см і $\sqrt{17}$ см.

46. Знайти найменше значення ординати точки, якщо відстані від цієї точки до координатних осей Ox і Oz дорівнюють $\sqrt{85}$ см, а до початку координат -11 см.

47. Знайти відстань від точки $A(8; 4; 6)$ до сфери, заданої рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y + 2z = 0$.

48. Визначити радіус круга, утвореного перерізом кулі, заданої нерівністю $x^2 + y^2 + z^2 + 14x - 10y - 2z + 25 \leq 0$, та площини Oyz .

49. Визначити відстань від площини Oxz до сфери, заданої рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 9y + 16z + 109 = 0$.

50. Визначити відстані між центрами двох сфер, заданими відповідно рівняннями $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 4z + 28 = 0$ і $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z = 3$.

Група 6

51. Визначити відстань від точки перетину прямої AB з площиною Oxy до початку координат, якщо точки A і B мають відповідно координати $(-1; -1; 1)$ і $(-28; -49; 4)$.

52. Визначити відстань від точки перетину прямої AB з площиною Oxz до початку координат, якщо точки A і B мають відповідно координати $(-7; -2; -6)$ і $(-5; -1; -1)$.

53. Знайти найменше значення довжини ламаної ACB , якщо точки A і B мають відповідно координати $(1; 3; 5)$ і $(5; -9; 1)$, а точка C лежить в площині Oxy .

54. Знайти найменше значення довжини ламаної ACB , якщо точки A і B мають відповідно координати $(3; 4; 5)$ і $(4; 4; 1)$, а точка C лежить в площині Oxz .

55. Знайти ординату точки C , що лежить в площині Oxy і сума відстаней від якої до точок $A(1; 3; 5)$ і $B(5; -9; 1)$ є найменшою.

56. Знайти аплікату точки C , що лежить в площині Oxz і сума відстаней від якої до точок $A(3; 4; 5)$ і $B(4; 4; 1)$ є найменшою.

57. Знайти найменше значення довжини ламаної ACB , якщо точки A і B мають відповідно координати $(3; 4; 2)$ і $(1; 2; 1)$, а точка C лежить на осі абсцис.

58. Знайти найменше значення довжини ламаної ACB , якщо точки A і B мають відповідно координати $(6; 3; 2)$ і $(2; 1; 1)$, а точка C лежить на осі аплікату.

59. Знайти абсцису точки C , що лежить на осі Ox і сума відстаней від якої до точок $A(9; 12; 6)$ і $B(3; 6; 3)$ є найменшою.

60. Знайти аплікату точки C , що лежить на осі Oz і сума відстаней від якої до точок $A(6; 3; 2)$ і $B(2; 1; 1)$ є найменшою.

§ 11. Вектори

Група 1

1. Дано паралелограм $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O . Які з наступних рівностей правильні?

- 1) $\overline{OA} = \overline{OC}$, 2) $\overline{AB} + \overline{BD} = \overline{BC}$,
 3) $\overline{AC} + \overline{BA} = \overline{CB}$, 4) $\overline{OD} + \overline{OB} = \overline{OA} + \overline{OC}$,
 5) $2\overline{OD} + \overline{AB} = \overline{BC}$.

2. Дано паралелограм $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O . Які з наступних рівностей правильні?

- 1) $\overline{BO} = \overline{OD}$, 2) $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{BD}$,
 3) $\overline{BO} + \overline{AO} = \overline{AD}$, 4) $\overline{OD} + \overline{AO} = \overline{OC} + \overline{BO}$,
 5) $2\overline{BO} + \overline{DA} = \overline{CD}$.

3. Дано паралелограм $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O . Які з наступних рівностей правильні?

- 1) $\overline{BO} - \overline{OC} = \overline{BA}$, 2) $\overline{OC} - \overline{OD} = \overline{BA}$,
 3) $2\overline{AO} = -\overline{CA}$, 4) $-\overline{BC} - \overline{AB} = \overline{AC}$,
 5) $\overline{OC} - \overline{AO} = \overline{BO} - \overline{OD}$.

4. Дано паралелограм $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O . Які з наступних рівностей правильні?

- 1) $\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{DA}$, 2) $\overline{OB} - \overline{OA} = \overline{CD}$,
 3) $2\overline{OD} = -\overline{DB}$, 4) $-\overline{AO} - \overline{CB} = \overline{OD}$,
 5) $\overline{BD} - \overline{AD} = \overline{BC} + \overline{CA}$.

5. Дано точки $A(4; 1)$, $B(1; 2)$, $C(-3; 7)$. Знайти модуль вектора $2\overline{OA} - 3\overline{OB} + 4\overline{OC}$, де O — початок координат.

6. Дано точки $A(-7; -1)$, $B(-1; 14)$, $C(4; -6)$. Знайти модуль вектора $3\overline{OA} - 2\overline{OB} - 0,5 \cdot \overline{OC}$, де O — початок координат.

7. Знайти модуль вектора $\overline{m}(x; y)$, якщо

$$2 \cdot \overline{a}(x + 1; 1, 5 \cdot y) - 3 \cdot \overline{b}(y; 7 - x) = \overline{c}(1; 0).$$

8. Знайти модуль вектора $\overline{m}(x; y)$, якщо

$$2 \cdot \overline{a}(x + 1; y) + \overline{b}(5y; x - 2) = \overline{c}(1; 0).$$

9. Знайти модуль вектора $\overline{m}(5x; 3y)$, якщо

$$\overline{c}(2; 14) = x \cdot \overline{a}(3; 1) + y \cdot \overline{b}(-2; 2).$$

10. Знайти модуль вектора $\overline{m}(x; y)$, якщо

$$\overline{c}(-3; 18) = x \cdot \overline{a}(2; 3) + y \cdot \overline{b}(3; 2).$$

Група 2

11. Знайти периметр трикутника ABC , знаючи координати векторів $\overline{OA}(1; 5)$, $\overline{OB}(1; 8)$, $\overline{OC}(5; 8)$, де O — початок координат.

12. Знайти довжину найбільшої сторони трикутника ABC , знаючи координати векторів $\overline{MA}(-2; 1)$, $\overline{MB}(4; 9)$, $\overline{MC}(10; 6)$, де M — точка з координатами $(-3; -4)$.

13. Нехай для ненульових векторів \overline{a} і \overline{b} виконується рівність $(3x^3 + x)\overline{a} = (7x^2 + 7x)\overline{b}$, де x — деяке дійсне число. Обчислити добуток всіх значень параметра x , для яких із даної рівності випливає рівність векторів \overline{a} і \overline{b} .

14. Нехай для ненульових векторів \overline{a} і \overline{b} виконується рівність $(x - 2)\overline{a} = (x^3 - 2x^2)\overline{b}$, де x — деяке дійсне число. Обчислити добуток всіх значень параметра x , для яких із даної рівності випливає рівність векторів \overline{a} і \overline{b} .

15. Нехай для ненульових векторів \overline{a} і \overline{b} виконується рівність $(4x^2 - 5)\overline{a} = 8x\overline{b}$, де x — деяке дійсне число. Обчислити суму всіх значень параметра x , для яких із даної рівності випливає, що вектор \overline{a} протилежний вектору \overline{b} .

16. Нехай для ненульових векторів \overline{a} і \overline{b} виконується рівність $(3x^2 - 20x)\overline{a} = 12\overline{b}$, де x — деяке дійсне число. Обчислити добуток всіх значень параметра x , для яких із даної рівності випливає, що вектор \overline{a} протилежний вектору \overline{b} .

17. Від точки $A(-1; 10)$ відкладено вектор $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{a}(-3; 7)$. Знайти відстань від точки B до початку координат.

18. Від точки $A(-5; 4)$ відкладено вектор $\overline{AB} = -\frac{2}{3} \cdot \overline{a}(15; -6)$. Знайти відстань від точки B до початку координат.

19. Знайти число дійсних значень параметра x , для яких вектори $\overline{a}(x^3; x - 8)$ і $\overline{b}(4x; x - 8)$ рівні і мають модулі, що є цілими числами.

20. Знайти ціле значення параметра x , для якого вектори $\overline{a}(2x^2 + x; 5 - 2x^2)$ і $\overline{b}(12 - 3x^2; x^2 + 4)$ взаємно протилежні.

Група 3

21. Нехай \vec{a} і \vec{b} — вектори, для яких виконуються умови: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \perp \vec{b}$. Знайти градусну міру кута між векторами \vec{a} і $\vec{a} + \vec{b}$.

22. Нехай \vec{a} і \vec{b} — вектори, для яких виконуються умови: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Знайти градусну міру кута між векторами \vec{b} і $\vec{a} - \vec{b}$.

23. Нехай \vec{a} і \vec{b} — вектори, для яких виконуються умови: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Знайти градусну міру кута між векторами \vec{a} і $\vec{a} + \vec{b}$.

24. Нехай \vec{a} і \vec{b} — вектори, для яких виконуються умови: $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3\sqrt{3}$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Знайти градусну міру кута між векторами \vec{a} і $\vec{a} - \vec{b}$.

25. Знайти модуль вектора \vec{a} , якщо $(\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$, $|\vec{b}| = 4\sqrt{3}$ і скалярний добуток векторів \vec{a} і $\vec{a} + \vec{b}$ дорівнює 16.

26. Знайти модуль вектора \vec{a} , якщо $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$, $|\vec{b}| = 20$ і скалярний добуток векторів \vec{a} і $\vec{a} - \vec{b}$ дорівнює 24.

27. Знайти модуль вектора \vec{b} , якщо $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$, $|\vec{a}| = 5$ і скалярний добуток векторів \vec{a} і $\vec{a} + \vec{b}$ дорівнює 15.

28. Знайти модуль вектора \vec{b} , якщо $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$, $|\vec{a}| = \sqrt{3}$ і скалярний добуток векторів \vec{a} і $\vec{a} - \vec{b}$ дорівнює $-1, 5$.

29. Знайти градусну міру кута між векторами \vec{a} і \vec{b} , якщо $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$ і скалярний добуток векторів \vec{a} і $\vec{a} + \vec{b}$ дорівнює 26.

30. Знайти градусну міру кута між векторами \vec{a} і \vec{b} , якщо $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 5$ і скалярний добуток векторів \vec{a} і $\vec{a} - \vec{b}$ дорівнює -3 .

Варіант Б

Група 1

1. Дано вектор $\vec{a}(-1; 2; 2)$ і точки $A(3; 5; -2)$ та $B(12; 6; -2)$. Знайти модуль вектора $\vec{c} = 3 \cdot \vec{a} + \vec{AB}$.

2. Дано вектор $\vec{a}(-3; 2; 1)$ і точки $A(-1; 4; 1)$, $B(2; 0; 8)$ та C . Знайти модуль вектора $\vec{c} = 5 \cdot \vec{a} - \vec{BC} + \vec{AC}$.

3. Координати вершин A , B , C правильного шестикутника $ABCDEF$ відповідно дорівнюють $(4; -1; 7)$, $(-1; 2; 9)$, $(-3; 7; 6)$. Знайти модуль вектора \vec{OT} , де O — початок координат, а T — центр шестикутника.

4. Координати вершин A , C , D правильного шестикутника $ABCDEF$ відповідно дорівнюють $(11; 3; 5)$, $(4; 11; 4)$, $(7; 13; -1)$. Знайти модуль вектора \overline{OB} , де O — початок координат.

5. В паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ задано координати вершини $D(-2; 3; 5)$ і точки $S(0; 9; 8)$ перетину його діагоналей. Знайти модуль вектора $\vec{d} = \overline{A_1 D_1} + \overline{C B_1} + \overline{C B} + \overline{B A} + \overline{A C} + \overline{D A} + \overline{D C}$.

6. В паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ задано координати вершини $C(-3; 1; 4)$ і точки $S(5; 5; 5)$ перетину його діагоналей. Знайти модуль вектора $\vec{d} = \overline{B A} + \overline{B D} + \overline{C B} + \overline{D D_1} + \overline{A_1 B_1} + \overline{D A_1} + \overline{B_1 B}$.

7. Знайти довжину медіани AM трикутника ABC , якщо відомо координати векторів $\overline{AB}(-3; 0; 4)$ та $\overline{AC}(7; -4; -2)$.

8. Нехай M — середина сторони BC трикутника ABC . Знайти модуль вектора $\vec{d} = \overline{AB} + \overline{AC}$, якщо координати вектора \overline{AM} дорівнюють $(4; -1; 8)$.

9. Прямокутник $ABCD$ вписано в коло. Знайти модуль вектора $\vec{d} = \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD}$, де M — точка цього кола, а точки A і C мають відповідно координати $(2; -3; 6)$ і $(10; 5; 10)$.

10. Правильний шестикутник $ABCDEF$ вписано в коло. Знайти модуль вектора $\vec{d} = \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} + \overline{ME} + \overline{MF}$, де M — точка цього кола, а точки A і B мають відповідно координати $(6; 2; 5)$ і $(8; 8; 8)$.

Група 2

11. Дано точки $A(1; 1; 2)$, $B(3; 3; 3)$, $C(9; 2; 3)$. Точка D лежить у координатній площині Oxy таким чином, що вектор \overline{CD} колінеарний вектору \overline{AB} . Знайти відстань від точки D , до початку координат.

12. Дано вектор $\vec{a}(1; 2; 2)$. Знайти модуль колінеарного йому вектора з початком у точці $A(1; 1; -8)$ і кінцем, що належить координатній площині Oxy .

13. Знайти довжину більшої з частин, на які ділиться відрізок з кінцями $A(3; 4; 6)$ і $B(9; 13; -12)$ координатною площиною Oxy .

14. Знайти довжину меншої з частин, на які ділиться відрізок з кінцями $A(6; -12; 7)$ і $B(15; 8; -5)$ координатною площиною Oxz .

15. Дано точки $A(1; 0; 1)$, $B(-1; 1; 2)$, $C(-4; 2; 1)$. Точка D лежить на координатній осі Oz таким чином, що вектор \overline{CD} колінеарний вектору \overline{AB} . Знайти аплікату точки D .

16. Дано вектор $\bar{a}(1; -1; 0; 5)$. Знайти модуль колінеарного йому вектора з початком у точці $A(6; 1; 3)$ і кінцем, що належить осі ординат.

17. Для якого дійсного значення параметра x вектори $\bar{a}(x^2 - 8; 24; 2x - 4)$ і $\bar{b}(7; x^2 - 5x; 2)$ колінеарні?

18. Знайти дійсне значення параметра x , для якого вектори $\bar{a}(1 - 4x; -x - 2; 1 - 4x)$ і $\bar{b}(x + 1; 2; 2x - 3)$ протилежно напрямлені.

19. Знайти відстань від точки перетину прямої AB з координаційною площиною Oyz до осі Ox , якщо точки A і B мають відповідно координати $(5; 15; 3)$ і $(1; 7; -9)$.

20. Знайти відстань від точки перетину прямої AB з координаційною площиною Oxz до осі Oz , якщо точки A і B мають відповідно координати $(11; 10; 8)$ і $(-1; 2; 4)$.

Група 3

21. Знайти градусну міру кута A трикутника ABC , якщо відомо координати його вершин $A(2; 1; -1)$, $B(3; 2; -1)$, $C(3; 1; 0)$.

22. Знайти градусну міру кута C трикутника ABC , якщо відомо координати його вершин $A(4; 0; 4)$, $B(3; 2; 2)$, $C(2; 1; 6)$.

23. Знайти градусну міру зовнішнього кута при вершині B трикутника ABC , якщо відомо координати його вершин $A(3; 3; -2)$, $B(3; 0; 1)$, $C(4; 0; 0)$.

24. Знайти градусну міру зовнішнього кута при вершині C трикутника ABC , якщо відомо координати його вершин $A(4; 3; 1)$, $B(3; 1; -1)$, $C(2; 2; 3)$.

25. Знайти градусну міру кута між прямими, що містять відповідно сторону AB та медіану CM трикутника ABC , якщо відомо координати вершин $A(2; 2; -4)$, $B(2; -4; 2)$, $C(3; -1; -2)$.

26. Знайти градусну міру кута між прямими, що містять відповідно сторону BC та медіану AM трикутника ABC , якщо відомо координати вершин $A(4; 0; 2)$, $B(3; 2; 0)$, $C(1; 0; 8)$.

27. Знайти градусну міру кута між прямими, що містять діагоналі паралелограма $ABCD$, якщо відомо координати трьох його вершин $A(-3; 1; 0)$, $B(3; 0; 1)$, $C(5; 3; 2)$.

28. Знайти градусну міру кута між прямими, що містять діагоналі паралелограма $ABCD$, якщо відомо координати трьох його

вершин $A(-3; 2; 2)$, $B(0; 0; 4)$, $C(-1; 0; 2)$.

29. Знайти градусну міру тупого кута між діагоналями паралелограма $ABCD$, побудованого на векторах $\overline{AB}(6; -1; 1)$ і $\overline{AD}(2; 3; 1)$.

30. Знайти градусну міру тупого кута між діагоналями паралелограма $ABCD$, побудованого на векторах $\overline{AB}(2; 0; 1)$ і $\overline{AD}(2; -2; 3)$.

Група 4

31. Точка M розміщена на відстані 9 см від точки перетину діагоналей паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Знайти модуль вектора $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} + \overline{MA}_1 + \overline{MB}_1 + \overline{MC}_1 + \overline{MD}_1$.

32. Точка M розміщена на відстані 9 см від точки перетину діагоналей паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точки $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6$ — центри симетрії його бічних граней та основ. Знайти модуль вектора $\overline{MN}_1 + \overline{MN}_2 + \overline{MN}_3 + \overline{MN}_4 + \overline{MN}_5 + \overline{MN}_6$.

33. У колі з центром у точці O проведено дві взаємно перпендикулярні хорди AB і CD . Прямі, що містять ці хорди перетинаються у точці M , відстань від якої до центра кола дорівнює 9 см. Знайти модуль вектора $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}$.

34. Точки $A(-4; 2; -5)$, $B(1; -2; 4)$ і $C(3; -6; 0)$ є вершинами трикутника, на стороні BC якого взято точку M . Пряма, що проходить через цю точку і паралельна до медіани AA_1 цього трикутника, перетинає прямі AB та AC відповідно в точках N і P . Знайти модуль вектора $\overline{PM} + \overline{NM}$.

35. Точки $A(2; 1; -3)$, $B(4; 7; 0)$ і $C(3; 3; -1)$ є вершинами трикутника. Обчислити скалярний добуток $\overline{AA}_1 \cdot \vec{i}$, де AA_1 — бісектриса трикутника ABC , а \vec{i} — вектор з координатами $(1; 0; 0)$.

36. Точки $A(3; 5; 2)$, $B(8; 7; 1)$ і $C(2; 1; -6)$ є вершинами трикутника. Обчислити скалярний добуток $\overline{CC}_1 \cdot \vec{j}$, де CC_1 — бісектриса трикутника, а \vec{j} — вектор з координатами $(0; 1; 0)$.

37. Точки $A(2; -3; 1)$, $B(3; -2; 2)$, $C(7; 0; 6)$ і $D(8; 0; 7)$ є вершинами трапеції ($AD \parallel BC$). Через точку перетину діагоналей трапеції $ABCD$, паралельно до її основ, проведено пряму, яка перетинає бічні сторони AB і CD відповідно в точках M і N . Обчислити скалярний добуток $\overline{MN} \cdot \vec{i}$, де \vec{i} — вектор з координатами $(1; 0; 0)$.

38. Точки $A(3; 2; 2; 9)$, $B(4; 3; 2; 10)$, $C(8; 5; 2; 14)$ і $D(9; 5; 2; 15)$ є вершинами трапеції ($AD \parallel BC$). Обчислити $7 \cos \varphi$, де φ — кут між вектором \overline{OT} та віссю аплікату, T — точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$, O — початок координат.

39. Точки $A(9; -6; 3)$, $B(-6; 3; 9)$, $C(3; 9; -6)$ і $D(22; 22; 22)$ є вершинами правильної піраміди з основою ABC . Обчислити $H\sqrt{3}$, де H — довжина висоти піраміди, проведеної до основи.

40. Точки $A(4; -1; 2)$ і $C(5; 1; 4)$ є вершинами піраміди. Знайти відстань між точками перетину медіан відповідно граней ADB і BDC .

Група 5

41. Обчислити $\bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c} - \bar{a}\bar{b}$, якщо $\bar{a} + \bar{b} = \bar{c} + \bar{d}$, $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 4$, $|\bar{c}| = 2$, $|\bar{d}| = 3$.

42. Обчислити $\bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} - \bar{b}\bar{c}$, якщо $\bar{a} - \bar{b} = \bar{c} - \bar{d}$, $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 2$, $|\bar{c}| = 3$, $|\bar{d}| = 4$.

43. Обчислити $|\bar{a} - \bar{b}|$, якщо $|\bar{a}| = 6$, $|\bar{b}| = 7$, $|\bar{a} + \bar{b}| = 11$.

44. Обчислити $|\bar{a} + \bar{b}|$, якщо $|\bar{a}| = 10$, $|\bar{b}| = 15$, $|\bar{a} - \bar{b}| = 19$.

45. Обчислити $|\bar{b}|$, якщо $|\bar{a}| = 11$, $|\bar{a} + \bar{b}| = 19$, $|\bar{a} - \bar{b}| = 13$.

46. Обчислити $|\bar{a}|$, якщо $|\bar{b}| = 7$, $|\bar{a} + \bar{b}| = 12$, $|\bar{a} - \bar{b}| = 14$.

47. Знайти довжину меншої діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $3\bar{b} - 5\bar{a}$ і $2\bar{b} + \bar{a}$, якщо $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 1$, $(\bar{a}, \bar{b}) = 60^\circ$.

48. Знайти довжину більшої діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a} - 4\bar{b}$ і $\bar{a} + \bar{b}$, якщо $|\bar{a}| = 6\sqrt{2}$, $|\bar{b}| = 1$, $(\bar{a}, \bar{b}) = 45^\circ$.

49. Знайти довжину меншої сторони паралелограма, діагоналі якого співпадають з векторами $4\bar{a} + 2\bar{b}$ і $3\bar{b} - 2\bar{a}$, якщо відомо, що $|\bar{a}| = 4$, $|\bar{b}| = 1$, $(\bar{a}, \bar{b}) = 120^\circ$.

50. Знайти довжину більшої сторони паралелограма, діагоналі якого співпадають з векторами $4\bar{a} - 2\bar{b}$ і $2\bar{a} - 4\bar{b}$, якщо відомо, що $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 3$, $(\bar{a}, \bar{b}) = 120^\circ$.

Група 6

51. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, довжина ребра якого дорівнює 1. Знайти градусну міру кута $B_1 C M$, де M — середина ребра AA_1 .

52. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, довжина ребра якого дорівнює 1. Знайти градусну міру кута між векторами \overline{CM} і \overline{BN} , якщо точка M — середина ребра AA_1 , а точка N — середина ребра $C_1 D_1$.

53. Точки $A(0; 1; 1)$, $B(-1; 8; 3)$, $C(2; -2; 2)$ і $D(2; -3; 1)$ є вершинами трикутної піраміди. Знайти градусну міру кута між векторами \overline{AO} і \overline{CD} , де O є точкою перетину медіан грані $B C D$.

54. Знайти градусну міру кута між прямими AN і DM , якщо точки M і N є відповідно точками перетину медіан трикутників ABP та CDP , заданих координатами вершини: $A(1; 2; -1)$, $B(3; 5; 4)$, $C(7; 8; -9)$, $D(0; -1; 0)$, $P(2; 2; 3)$.

55. Нехай $\overline{MN}(0, 2; 0, 4; 0)$ — вектор, початок якого лежить на осі Oz , а кінець — в площині, що задається трьома точками: $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$. Знайти аплікату точки M .

56. Нехай $\overline{MN}(0, 2; 0, 4; 0)$ — вектор, початок якого лежить на осі Oy , а кінець — в площині, що задається трьома точками: $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$. Знайти ординату точки M .

57. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}(4; -2; 4)$ та $\overline{AD}(2; -2; 0)$.

58. Обчислити площу трикутника з вершинами в точках $A(5; 4; 2)$, $B(4; 2; 0)$, $C(2; 4; 8)$.

59. Знайти відстань від точки $A(14; -8)$ до прямої $4x - 3y = 5$.

60. Знайти відстань між паралельними прямими $12x - 5y = 140$ і $24x - 10y = 111$.

§ 12. Стереометрія

Група 1

1. Вкажіть, які з наступних фігур (понять) є основними (невизначеними) фігурами стереометрії: 1) призма, 2) пряма, 3) піраміда, 4) куля, 5) площина, 6) трикутник, 7) чотирикутник, 8) коло, 9) точка?

2. Через три різні точки проведено дві різні площини. Яке з наступних тверджень є правильним?

- 1) Задані точки є вершинами трикутника.
- 2) Задані точки лежать на одній прямій.
- 3) Жодне з попередніх двох тверджень не правильне.

3. Дано три точки A , B , C . Скільки площин можна провести через ці точки, якщо $AB = 3$ см, $BC = 2$ см, $AC = 5$ см?

- 1) Одну. 2) Дві. 3) Три. 4) Безліч.

4. Дано площину α і прямокутник $ABCD$, точка перетину діагоналей якого належить цій площині. Яке з наступних взаємних розміщень площини і прямокутника є можливим?

- 1) Тільки одна вершина прямокутника належить площині α .
- 2) Тільки дві вершини прямокутника належать площині α .
- 3) Тільки три вершини прямокутника належать площині α .

5. Нехай H — точка перетину висот трикутника ABC . Яке з наступних тверджень є правильним?

- 1) Через точку H і вершину A можна провести тільки одну пряму.
- 2) Через точку H і вершину A можна провести тільки одну пряму або безліч прямих.
- 3) Через точку H і вершину A можна провести безліч прямих.

6. Яке з наступних тверджень є правильним?

- 1) Всі точки кола належать площині, якщо цій площині належить одна точка кола і його центр.
- 2) Всі точки кола належать площині, якщо цій площині належать дві точки кола і його центр.
- 3) Всі точки кола належать площині, якщо цій площині належать три точки кола.

7. Дано дві прямі що перетинаються. Яке з наступних тверджень є правильним?

- 1) Всі прямі, що перетинають задані прямі, лежать в одній площині.
- 2) Всі прямі, що перетинають задані прямі, не лежать в одній площині.
- 3) Не існує прямих, що перетинають задані дві прямі.

8. Дано дві прямі, що не лежать в одній площині. Через кожну з них проведено площину, яка перетинається з іншою прямою. Яке з наступних тверджень є правильним?

- 1) Лінія перетину заданих площин перетинає тільки одну з даних прямих.
- 2) Лінія перетину заданих площин перетинає обидві дані прямі.
- 3) Лінія перетину заданих площин не перетинає дані прямі.
- 4) Задані площини не перетинаються.

9. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Яка з наступних прямих є прямою перетину площин $(AD_1 C)$ і (BDC) : 1) BC , 2) DC , 3) AC , 4) CC_1 , 5) DD_1 ?

10. Дано паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Яка з наступних прямих є прямою перетину площин $(BB_1 D)$ і (ABC) : 1) BC , 2) DC , 3) AB , 4) BD , 5) BB_1 ?

11. Відрізок AB перетинає площину α . Через точки A , B і середину C відрізка AB проведено паралельні прямі, які перетинають площину α відповідно у точках A_1 , B_1 , C_1 . Знайти довжину відрізка CC_1 , якщо $AA_1 = 14$ см, $BB_1 = 6$ см.

12. Відрізок AB перетинає площину α . Через точки A , B і середину C відрізка AB проведено паралельні прямі, які перетинають площину α відповідно у точках A_1 , B_1 , C_1 . Знайти довжину відрізка AA_1 , якщо $CC_1 = 3$ см, $BB_1 = 12$ см і точка C розміщена в одному півпросторі з точкою A відносно площини α .

13. Відрізок довжиною 15 см перетинає площину α . Знайти довжину проєкції цього відрізка на площину α , якщо його кінці знаходяться відповідно на відстані 2 см і 7 см від неї.

14. Кінці відрізка AB лежать по один бік від площини α . Через точки A і B проведені паралельні прямі, які перетинають площину α відповідно в точках A_1 і B_1 . Пряма AB перетинає площину α в точці C . Знайти довжину відрізка AB , якщо $AA_1 = 8$ см, $BB_1 = 6$ см,

$BC = 12$ см.

15. Паралельні прямі, що проходять через вершини паралелограма $ABCD$ перетинають площину α відповідно в точках A_1, B_1, C_1, D_1 . Знайти довжину відрізка DD_1 , якщо $AA_1 = 8$ см, $BB_1 = 1$ см, $CC_1 = 4$ см і площина α не перетинає паралелограм $ABCD$.

16. Через вершину A паралелограма $ABCD$ проведено площину α , яка не перетинає його в інших точках. Через точки B, C і D проведено паралельні прямі, які перетинають цю площину відповідно в точках B_1, C_1, D_1 . Знайти CC_1 , якщо $BB_1 = 7$ см, $DD_1 = 4$ см.

17. Точки A і B належать площині α , а точки C і D належать іншій, паралельній їй площині β . Проекції відрізків AC і BD на одну з цих площин відносяться відповідно як $5 : 2$. Знайти відстань між площинами α і β , якщо $AC = 17$ см, $BD = 10$ см.

18. Точки A і B належать площині α , а точки C і D належать іншій, паралельній їй площині β . Проекція відрізка BD на одну з цих площин дорівнює 18 см. Чому дорівнює довжина проекції відрізка AC на цю площину, якщо $AC = 25$ см, а $BD = 30$ см?

19. Кінці відрізка AB належать двом взаємно перпендикулярним площинам. З цих кінців проведено перпендикуляри AA_1 і BB_1 до прямої перетину даних площин. Знайти довжину відрізка AB , якщо $AA_1 = 2$ см, $BB_1 = 3$ см і $A_1B_1 = 6$ см.

20. Кінці відрізка AB належать двом взаємно перпендикулярним площинам. З цих кінців проведено перпендикуляри AA_1 і BB_1 до прямої перетину даних площин. Знайти довжину відрізка A_1B_1 , якщо $AB = 25$ см, $AA_1 = 15$ см і $BB_1 = 16$ см.

Група 2

21. Кінці відрізка AB лежать по один бік відносно площини α . Через точки A і B проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1 і B_1 . Точка C є точкою перетину прямої AB з площиною α . Знайти довжину відрізка AA_1 , якщо $A_1B_1 : B_1C = 5 : 3$ і $AA_1 + BB_1 = 44$ см.

22. Відрізок AB перетинає площину α в точці C . Через точки A і B проведені паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1 і B_1 . Знайти довжину відрізка AA_1 , якщо $AA_1 - BB_1 = 2$ см і $A_1C : A_1B_1 = 4 : 7$.

23. Через одну з сторін ромба проведено площину на відстані 4 см від протилежної сторони. Проекції діагоналей ромба на цю площину

дорівнюють 8 см і 2 см. Знайти периметр чотирикутника утвореного ортогональною проекцією ромба на цю площину.

24. З кінців відрізка AB , який паралельний до площини α , проведені до неї перпендикуляр AC і похила BD . Знайти відстань між серединами перпендикуляра AC та похилої BD , якщо $AB = 24$ см, $AC = 15$ см, $BD = 25$ см, $\angle ABD = 90^\circ$.

25. Точки A і B належать площині α , а точки C і D належать іншій, паралельній їй площині β , причому відрізок AC перпендикулярний до цих площин. Знайти відстань між серединами відрізків AC і BD , якщо $AC = 8$ см, $BD = 10$ см, $AB = CD = 5$ см.

26. Точки A і B належать площині α , а точки C і D належать іншій, паралельній їй площині β . Довжини відрізків AC і BD відповідно дорівнюють 13 см і 15 см, а сума довжин їх проекцій на одну з даних площин дорівнює 14 см. Знайти відстань між площинами α і β .

27. Кінці відрізка AB лежать по один бік відносно площини α . Точка C належить відрізку AB . Через точки A , B і C проведено паралельні прямі, які перетинають площину α відповідно в точках A_1 , B_1 , C_1 . Знайти довжину відрізка CC_1 , якщо $A_1C_1 : B_1C_1 = 7 : 3$, $AA_1 = 4$ см, $BB_1 = 5$ см.

28. Кінці відрізка AB лежать по різні боки від площини α . Точка C належить відрізку AB . Через точки A , B і C проведені прямі, які перетинають площину α відповідно у точках A_1 , B_1 , C_1 . Знайти довжину відрізка CC_1 , якщо $AA_1 = 9$ м, $BB_1 = 12$ м і $AC : BC = 4 : 3$.

29. Через вершину A трикутника ABC проведено площину α , яка не перетинає його в інших точках. Через точки B , C і точку M перетину медіан трикутника, проведено паралельні прямі, які перетинають площину α відповідно в точках B_1 , C_1 і M_1 . Знайти довжину відрізка MM_1 , якщо $BB_1 = 5$ см, $CC_1 = 7$ см.

30. Паралельні прямі, що проходять через вершини трикутника ABC і точку M перетину його медіан, перетинають площину α відповідно в точках A_1 , B_1 , C_1 і M_1 . Знайти довжину відрізка MM_1 , якщо $AA_1 = 13$ см, $BB_1 = 18$ см, $CC_1 = 20$ см і площина α не перетинає трикутник ABC .

31. Відрізок AM довжиною 10 см перпендикулярний до площини прямокутника $ABCD$. Знайти відстань від точки M до діагоналі BD прямокутника, якщо його сторони дорівнюють 30 см і 40 см.

32. Відрізок BM перпендикулярний до площини прямокутника $ABCD$. Точка M віддалена від вершин A , C і D відповідно на 6 см, 7 см і 9 см. Знайти відстань від точки M до площини прямокутника.

33. Сторони паралелограма $ABCD$ дорівнюють 29 см і 25 см, а його діагональ 6 см. З вершини гострого кута паралелограма проведено відрізок AM , перпендикулярний до площини паралелограма. Знайти відстань від точки M до прямої BD , якщо довжина відрізка AM дорівнює 15 см.

34. Сторона паралелограма $ABCD$ дорівнює 15 см, а його діагоналі дорівнюють 26 см і 28 см. З вершини тупого кута паралелограма проведено відрізок BM , перпендикулярний до площини паралелограма. Знайти відстань від точки M до прямої AC , якщо довжина відрізка BM дорівнює 5 см.

35. Відрізок BM перпендикулярний до площини рівностороннього трикутника ABC . Знайти відстань від точки M до сторони AC , якщо $BM = 1$ см, а $AC = 2$ см.

36. Відрізок BM перпендикулярний до площини трикутника ABC . Знайти відстань від точки M до сторони трикутника AC , якщо $BM = 9$ см, $AB = 13$ см, $BC = 15$ см, $AC = 4$ см.

37. З вершини B ромба $ABCD$ проведено перпендикулярний до площини ромба відрізок BK довжиною 8 см. Знайти відстань від точки K до сторони AD ромба, якщо площа ромба дорівнює $36\sqrt{2}$ см² і $\angle B = 135^\circ$.

38. Відрізок CM перпендикулярний до площини ромба $ABCD$. Основа перпендикуляра — вершина гострого кута ромба. Сторона ромба дорівнює 10 см, а менша діагональ — 12 см. Знайти відстань від точки M до прямої, що містить меншу діагональ ромба, якщо відстань від точки M до вершини протилежного гострого кута дорівнює $\sqrt{481}$ см.

39. Відрізок BM перпендикулярний до площини трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Знайти відстань від точки M до сторони AD трапеції, якщо $BM = 7$ см, $BC = 11$ см, $AD = 28$ см, $AB = 25$ см, $CD = 26$ см.

40. Відрізок BM перпендикулярний до площини трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Знайти відстань від точки M до сторони AD трапеції, якщо $BM = 28$ см, $BC = 10$ см, $AD = 90$ см, $AC = 75$ см, $BD = 35$ см.

Група 3

41. Точка M рівновіддалена від усіх вершин трикутника ABC і віддалена від його площини на 6 см. Знайти відстань від точки M до вершин трикутника, якщо $AB = 8\sqrt{3}$ см, $\angle ACB = 60^\circ$.

42. Точка M віддалена від усіх вершин рівнобедреного трикутника на 13 см. Бічні сторони цього трикутника дорівнюють 5 см, а кут при основі — 30° . Знайти відстань від цієї точки до площини трикутника.

43. Точка M рівновіддалена від усіх вершин прямокутного трикутника і віддалена від його площини на 24 см. Знайти відстань від точки M до вершин трикутника, якщо його катети відносяться як 3 : 4, а площа дорівнює 96 см^2 .

44. Гострий кут прямокутного трикутника дорівнює 30° , а протилежний до нього катет — 24 см. Точка M віддалена від усіх вершин цього трикутника на $\sqrt{601}$ см. Знайти відстань від точки M до катета, прилеглого до даного гострого кута.

45. Довжини двох сторін трикутника дорівнюють відповідно 20 см і $10\sqrt{3}$ см, а кут між цими сторонами дорівнює 30° . Знайти відстань від точки до площини трикутника, якщо ця точка знаходиться на відстані 26 см до кожної із його вершин.

46. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 108 см, а висота, проведена до його основи, дорівнює 18 см. Точка M рівновіддалена від усіх вершин трикутника і віддалена від його площини на 24 см. Знайти відстань від точки M до основи трикутника.

47. Точка M знаходиться на відстані 5 см від площини прямокутника і на відстані 13 см від кожної із його вершин. Знайти площу цього прямокутника, якщо його діагоналі перетинаються під кутом 30° .

48. Основи рівнобічної трапеції відповідно дорівнюють 24 см і 18 см, а висота — 21 см. Точка M рівновіддалена від усіх вершин трапеції і знаходиться на відстані 5 см від її площини. Знайти відстань від цієї точки до меншої основи трапеції.

49. Основи рівнобічної трапеції відповідно дорівнюють 10 см і 26 см, а її діагоналі перпендикулярні до бічних сторін. Точка M рівновіддалена від усіх вершин трапеції і знаходиться на відстані 20 см до меншої основи. Знайти відстань від цієї точки до площини трапеції.

50. Точка M рівновіддалена від вершин трапеції, гострий кут якої дорівнює 60° , а довжина протилежної до нього діагоналі дорівнює $5\sqrt{3}$ см. Знайти відстань від точки M до площини трапеції, якщо відомо, що вона менша від відстані до її вершин на 1 см.

51. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 15 см, а основа — 24 см. Точка M рівновіддалена від сторін трикутника і знаходиться на відстані 12 см від його площини. Знайти відстань від точки M до вершини трикутника, протилежної до його основи.

52. Точка M рівновіддалена від сторін прямокутного трикутника і знаходиться на відстані 2 см від його площини. Катети прямокутного трикутника відповідно дорівнюють 9 см і 12 см. Знайти відстань від точки M до вершини трикутника, протилежної катету довжиною 12 см.

53. Точка M рівновіддалена від сторін прямокутного трикутника і не лежить в його площині. Перпендикуляр, опущений з цієї точки на гіпотенузу, ділить її на частини довжиною 24 см і 16 см і дорівнює 17 см. Знайти відстань від точки M до площини трикутника.

54. Точка M рівновіддалена від сторін рівнобедреного трикутника і не лежить в його площині. Перпендикуляр, опущений з цієї точки на бічну сторону, ділить її на відрізки відповідно довжиною 9 см і 8 см, починаючи від вершини рівнобедреного трикутника. Знайти відстань від точки M до площини трикутника, якщо відстань від цієї точки до кожної його сторони дорівнює 6 см.

55. Довжини двох сторін трикутника дорівнюють відповідно 25 см і 6 см. Точка M рівновіддалена від сторін цього трикутника і не лежить в його площині. Перпендикуляр, опущений з цієї точки на більшу із даних сторін, ділить її на відрізки довжиною 24 см і 1 см. Знайти відстань від цієї точки до сторін трикутника, якщо відстань від неї до площини трикутника дорівнює 1,5 см.

56. Площа ромба дорівнює $96\sqrt{3}$ см², а один з його кутів — 120° . Знайти відстань від точки, віддаленої від кожної з сторін ромба на 6,5 см, до його площини.

57. Діагоналі ромба відносяться як 3 : 4, а його периметр дорівнює 40 см. Точка M віддалена від кожної з сторін ромба на 8 см. Знайти відстань від цієї точки до площини ромба.

58. Точка M рівновіддалена від сторін рівнобічної трапеції і віддалена від її площини на відстані 24 см. Знайти відстань від точки M до сторін трапеції, якщо різниця довжин її основ дорівнює 30 см,

а її периметр — 156 см.

59. У прямокутній трапеції довжини основ відповідно дорівнюють 20 см і 12 см. Точка M рівновіддалена від сторін трапеції і знаходиться на відстані 10 см від її площини. Знайти відстань від точки M до сторін трапеції.

60. Відношення довжин основ рівнобічної трапеції дорівнює 4, а її площа — 80 см^2 . На відстані 7,5 см від площини трапеції знаходиться точка M , яка рівновіддалена від сторін трапеції. Знайти відстань від точки M до сторін трапеції.

Група 4

61. В середині двогранного кута, градусна міра якого дорівнює 120° , дано точку M , яка віддалена від кожної з його граней на $8\sqrt{3}$ см. Знайти відстань від цієї точки до ребра кута.

62. В середині двогранного кута, градусна міра якого дорівнює 60° , дано точку M , яка віддалена від кожної з його граней на $5\sqrt{3}$ см. Знайти відстань між основами перпендикулярів, опущених з цієї точки на грані кута.

63. Площа поверхні куба дорівнює 162 см^2 . Знайти довжину його діагоналі.

64. Діагональ куба дорівнює 11 см. Знайдіть площу поверхні куба.

65. Площі трьох граней прямокутного паралелепіпеда відповідно дорівнюють 40 см^2 , 56 см^2 , 140 см^2 . Знайти об'єм паралелепіпеда.

66. Діагональ куба дорівнює $6\sqrt{3}$ см. Знайдіть його об'єм.

67. Виміри прямокутного паралелепіпеда відносяться як $2 : 3 : 6$, а довжина його діагоналі дорівнює 14 см. Обчислити суму довжин всіх його ребер.

68. Довжини діагоналей граней прямокутного паралелепіпеда, що виходять з однієї його вершин, відповідно дорівнюють 20 см, 31 см і 33 см. Знайти довжину діагоналі паралелепіпеда.

69. Основа прямого паралелепіпеда — ромб. Площі діагональних перерізів паралелепіпеда відповідно дорівнюють 7 см^2 і 24 см^2 . Знайти площу бічної поверхні паралелепіпеда.

70. Площа основи та площі бічних граней прямої трикутної призми відповідно дорівнюють 84 см^2 , 91 см^2 , 105 см^2 , 98 см^2 . Знайти довжину висоти призми.

71. Бічні ребра однієї з граней піраміди — взаємно перпендикулярні, а довжини їх проєкцій на основу піраміди відповідно дорівнюють 32 см і 18 см. Довжина ребра основи піраміди, що належить цій грані, дорівнює 50 см. Знайти довжину висоти піраміди.

72. Бічні ребра однієї з граней піраміди відповідно дорівнюють 20 см і 13 см, а їх проєкції на основу піраміди — взаємно перпендикулярні. Довжина ребра основи піраміди, що належить цій грані, дорівнює $\sqrt{281}$. Знайти довжину висоти піраміди.

73. У правильній чотирикутній піраміді сторона основи дорівнює 14 см, а бічне ребро — 10 см. Знайти площу діагонального перерізу піраміди.

74. Основа піраміди — трикутник з сторонами 6 см, 10 см і 14 см. Кожний двогранний кут при основі піраміди дорівнює 30° . Знайти довжину висоти піраміди.

75. Висота правильної зрізаної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а сторони її основ — 6 см і 10 см. Знайти довжину діагоналі зрізаної піраміди.

76. Основи зрізаної піраміди є правильними трикутниками із сторонами 8 см і 4 см. Одна з її бічних граней, що є рівнобедреною трапецією, перпендикулярна до площин основ, а протилежне до неї ребро утворює з площиною основи кут 60° . Знайти довжину висоти піраміди.

77. Основа прямої призми — прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см, а довжина бічного ребра призми — 9 см. Обчислити площу осьового перерізу циліндра, вписаного в цю призму.

78. У циліндрі паралельно осі проведено площину, яка відтинає від кола основи дугу в 60° . Висота циліндра дорівнює 2 см, а відстань від січної площини до осі циліндра дорівнює 3 см. Знайти довжину діагоналі перерізу.

79. Основа піраміди — прямокутний трикутник з катетами 12 см і 16 см. Всі бічні ребра піраміди рівні і їх довжини дорівнюють 12, 5 см. Обчислити площу осьового перерізу конуса, описаного навколо піраміди.

80. Через середину висоти конуса проведено пряму, паралельну твірній конуса, довжина якої дорівнює 12 см. Знайти довжину відрізка цієї прямої, який міститься всередині конуса.

Група 5

81. Через точку, що лежить на ребрі двогранного кута мірою 90° , на кожній з його граней проведено по прямій під кутом 45° до ребра двогранного кута. Знайти величину кута між проведеними прямими.

82. Величина двогранного кута дорівнює 120° . Дві прямі, що лежать на різних гранях цього кута паралельні до його ребра. Відстані від ребра двогранного кута до прямих відповідно дорівнюють $21\sqrt{3}$ см і $35\sqrt{3}$ см. Знайти відстань від ребра двогранного кута до площини, що проходить через дані дві паралельні прямі.

83. У тригранному куті два плоских кути дорівнюють по 60° , а третій — прямий. На спільному ребрі рівних плоских кутів від вершини тригранного кута відкладено відрізок довжиною $6\sqrt{2}$ см. Знайти довжину проекції цього відрізка на прямий плоский кут.

84. У тригранному куті два плоских кути дорівнюють по 60° , а третій плоский кут дорівнює 90° . Знайти кут між спільним ребром рівних плоских кутів та площиною, що містить протилежну грань.

85. Всередині тригранного кута з прямими плоскими кутами взято точку. Знайти відстань від цієї точки до вершини кута, якщо відстані від цієї точки до ребер тригранного кута відповідно дорівнюють 4 см, 6, 2 см і 6, 6 см.

86. Всередині тригранного кута з двома плоскими прямими кутами і третім, величина якого 120° , взято точку, яка віддалена від рівних плоских кутів на $2,5 \cdot \sqrt{3}$ см, а від третього плоского кута на 12 см. Знайти відстань від цієї точки до вершини тригранного кута.

87. Виміри прямокутного паралелепіпеда відповідно дорівнюють 9 см, 12 см і 16 см. Знайти найкоротшу з відстаней від ребра паралелепіпеда довжиною 9 см до його діагоналей, які не перетинають це ребро.

88. Виміри прямокутного паралелепіпеда відповідно дорівнюють 9 см, 12 см і 16 см. Знайти найкоротшу з відстаней від ребра паралелепіпеда довжиною 16 см до його діагоналей, які не перетинають це ребро.

89. Діагональ прямокутного паралелепіпеда має довжину $5\sqrt{6}$ см і нахилена до площини основи під кутом 45° . Знайти площу бічної поверхні паралелепіпеда, якщо площа його основи дорівнює 36 см².

90. Сторона основи прямокутного паралелепіпеда дорівнює 16 см. Знайти довжину другої сторони основи, якщо відстань від бічного

ребра паралелепіеда до діагоналі, що не перетинає його, дорівнює 9,6 см.

91. Основа прямого паралелепіеда — паралелограм з сторонами 3 см, 5 см і кутом 60° між ними. Площа більшого діагонального перерізу дорівнює 28 см^2 . Знайти площу бічної поверхні паралелепіеда.

92. Основа прямої призми — рівнобічна трапеція з основами 11 см і 21 см і бічною стороною 13 см. Площа діагонального перерізу дорівнює 100 см^2 . Знайти площу бічної поверхні призми.

93. Основа прямого паралелепіеда — паралелограм з сторонами 4 см, 8 см і кутом 60° між ними. Площина перерізу паралелепіеда, що проходить через більші протилежні ребра основ, утворює з основою паралелепіеда кут 45° . Знайти об'єм паралелепіеда.

94. У похилій трикутній призмі відстані між бічними ребрами відповідно дорівнюють 10 см, 17 см і 21 см. Знайти відстань від більшої бічної грані до протилежного бічного ребра.

95. Двогранний кут при одному з бічних ребер похилої трикутної призми дорівнює 120° . Відстані від цього ребра до інших бічних ребер призми відповідно дорівнюють 8 см і 7 см. Знайти площу бічної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює 10 см.

96. Площина перерізу (ABC_1) прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ нахилена до площини основи (ABC) під кутом 60° . Знайти об'єм призми, якщо $AC = 2\sqrt{3}$ см, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle CBA = 30^\circ$.

97. Висота правильної трикутної призми дорівнює 4 см. Площина, проведена через середню лінію верхньої основи і паралельну їй сторону нижньої основи, утворює з площиною основи кут 30° . Знайти площу утвореного перерізу.

98. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник з основою 12 см і синусом кута при цій основі 0,6. Обчислити об'єм призми, якщо площа її бічної поверхні дорівнює сумі площ основ.

99. Основою прямої призми є рівнобедрений прямокутний трикутник з катетом 6 см. Діагональ бічної грані, що проходить через катет, утворює з гранню, що проходить через гіпотенузу, кут 30° . Знайти об'єм призми.

100. Діагональ бічної грані правильної трикутної призми має довжину 6 см і утворює з площиною другої бічної грані кут 45° . Знайти об'єм призми.

Група 6

101. Основа піраміди — паралелограм з сторонами 3 см та 7 см, і з одною з діагоналей 6 см. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей і її довжина дорівнює 4 см. Знайти довжину більшого бічного ребра піраміди.

102. Довжина бічного ребра правильної чотирикутної піраміди дорівнює $\sqrt[4]{108}$ см, а плоский кут при вершині — 30° . Знайти довжину висоти піраміди.

103. Основа піраміди — трикутник з сторонами 6 см, 10 см і 14 см. Кожний з двогранних кутів при основі піраміди дорівнює 60° . Знайти довжину висоти піраміди.

104. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди $SABCD$ дорівнює 3 м, а висота — 6 м. Знайти відстань між прямими SA і BD .

105. Основою піраміди є квадрат з стороною $\sqrt{3 - \sqrt{3}}$. Дві бічні грані, які мають спільне ребро перпендикулярні до основи, а дві інші нахилені до площини основи під кутом 60° . Обчислити площу повної поверхні піраміди.

106. Основа піраміди — ромб. Всі її бічні грані нахилені до площини основи під кутом 45° . Знайти об'єм піраміди, якщо сторона ромба дорівнює 8 см, а його гострий кут — 60° .

107. Основою піраміди $PABCD$ є квадрат $ABCD$ із стороною 6 см. Ребро PB дорівнює 12 см і перпендикулярне до площини основи. Знайти довжину найбільшої сторони чотирикутника, утвореного перерізом піраміди площиною, що проходить через ребро AD і середину ребра PB .

108. Переріз правильної трикутної піраміди проходить через центр основи, паралельно ребру основи і мимобіжного до нього бічного ребра. Знайти площу цього перерізу, якщо довжина ребра основи 6 см, а бічного ребра 18 см.

109. Основа піраміди — ромб. Всі її бічні грані нахилені до основи під кутом 60° . Знайти об'єм піраміди, якщо сторона ромба дорівнює $6\sqrt{3}$ см, а його гострий кут — 60° .

110. Основою піраміди є прямокутник, площа якого 36 см^2 . Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, а дві інші утворюють з нею відповідно кути 30° і 60° . Знайти об'єм піраміди.

111. Об'єм правильної чотирикутної піраміди дорівнює 48 см^3 , сторона її основи — 6 см . Знайти площу бічної поверхні піраміди.

112. Основою піраміди є прямокутний трикутник з гострим кутом 30° . Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут 60° . Знайти об'єм піраміди.

113. Основа піраміди — прямокутний трикутник з гострим кутом 60° та площею $18\sqrt{3} \text{ см}^2$. Бічна грань піраміди, яка проходить через катет, протилежний даному куту основи, перпендикулярна до площини основи, а дві інші утворюють з основою кути по 45° . Знайти об'єм піраміди.

114. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з бічною стороною 12 см і кутом при вершині 120° . Бічні ребра піраміди утворюють з його висотою кути по 30° . Знайти об'єм піраміди.

115. Основа піраміди — ромб з стороною 12 см і гострим кутом 45° . Відстань від основи висоти піраміди до її бічних граней дорівнює 3 см . Знайти об'єм піраміди.

116. Основа піраміди — прямокутний трикутник з гострим кутом 15° . Висота піраміди дорівнює 9 м . Всі бічні ребра піраміди утворюють з площиною основи кут 60° . Знайти об'єм піраміди.

117. Сторона меншої основи правильної зрізаної трикутної піраміди дорівнює $2\sqrt{3} \text{ см}$, двогранний кут утворений бічною гранню піраміди з меншою основою дорівнює 120° , а висота піраміди дорівнює $\sqrt{3} \text{ см}$. Знайти об'єм зрізаної піраміди.

118. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 40 см . Площина, паралельна до основи, ділить висоту піраміди у відношенні $2 : 3$ (рахуючи від вершини). Знайти об'єм, утвореної зрізаної піраміди, якщо її бічна грань утворює з площиною нижньої основи кут 45° .

119. У правильній чотирикутній зрізаній піраміді сторони основ відповідно дорівнюють 5 см і 11 см , а довжина її діагоналі — 12 см . Знайти площу бічної поверхні піраміди.

120. Основами зрізаної піраміди є ромби відповідно з сторонами 6 см і 2 см , та гострими кутами по 30° . Всі двогранні кути, утворені бічними гранями і більшою основою піраміди, рівні. Бічна поверхня зрізаної піраміди дорівнює 32 см^2 . Знайти градусну міру двогранного кута з ребром при меншій основі піраміди.

Група 7

121. З точок A і B , що лежать на різних гранях двогранного кута величиною 120° , опущено перпендикуляри AA_1 і BB_1 на ребро кута. Знайти довжину відрізка AB , якщо $AA_1 = 5$ м, $BB_1 = 3$ м, $A_1B_1 = 24$ м.

122. Кінці відрізка AB довжиною 9 м належать різним граням двогранного кута. З точок A і B опущено перпендикуляри AA_1 і BB_1 на ребро кута. Знайти градусну міру двогранного кута, якщо $AA_1 = 1$ м, $BB_1 = 4$ м, $A_1B_1 = 8$ м.

123. З точок A і B , що лежать на різних гранях двогранного кута величиною 60° , опущено перпендикуляри AA_1 і BB_1 на ребро кута. Знайти довжину перпендикуляра AA_1 , якщо $AB = 25$ м, $BB_1 = 3$ м, $A_1B_1 = 24$ м.

124. З точок A і B , що лежать на різних гранях двогранного кута величиною 60° , опущено перпендикуляри AA_1 і BB_1 на ребро кута. Знайти відстань між основами цих перпендикулярів, якщо $AB = 25$ м, $AA_1 = 5$ м, $BB_1 = 8$ м.

125. Сторона основи правильної шестикутної піраміди в два рази більша за її висоту. Знайти градусну міру двогранного кута при основі піраміди.

126. У прямий паралелепіпед вписано циліндр, об'єм якого в $\frac{8}{\pi}$ рази менший за об'єм паралелепіпеда. Знайти градусну міру більшого з двограних з кутів при бічних ребрах паралелепіпеда.

127. Висота циліндра на 10 см більша за радіус основи, а площа його повної поверхні дорівнює 144π см². Знайти радіус основи циліндра.

128. Вершини прямокутника лежать на границях основ циліндра, радіуси яких дорівнюють 17 см, а довжина твірної циліндра дорівнює 12 см. Сторони прямокутника відносяться як 2 : 3, а його площа перетинає вісь циліндра. Знайти площу прямокутника.

129. Точки $A(3; 1; 0)$, $B(3; 5; 0)$, $C(6; 1; 0)$ належать границі однієї з основ циліндра, а точка $D(3; 1; 6)$ — границі другої основи. Знайти площу осевого перерізу циліндра.

130. Навколо циліндра описано сферу. Знайти відношення площі поверхні циліндра до площі сфери, якщо відомо, що висота циліндра дорівнює діаметру його основи.

131. Знайти відношення площі сфери, описаної навколо циліндра, до площі сфери, вписаної в цей циліндр.

132. В циліндр вписано кулю. Знайти об'єм кулі, якщо об'єм циліндра дорівнює 30 см^3 .

133. Розгортка бічної поверхні циліндра — квадрат з стороною $6\sqrt[3]{\pi}$. Знайти об'єм циліндра.

134. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює 100 см^2 . Діагоналі його осьового перерізу взаємно перпендикулярні. Знайти площу поверхні циліндра.

135. Точки $A(1; 1; 1)$, $B(1; 5; 1)$, $C(1; 1; 4)$ належать границі основи конуса, а точка $P(7; 3; 2, 5)$ є його вершиною. Обчислити площу осьового перерізу конуса.

136. Площа поверхні конуса дорівнює 27 см^2 . Знайти площу бічної поверхні конуса, якщо твірна конуса дорівнює діаметру його основи.

137. Площі основ зрізаного конуса відповідно дорівнюють $36\pi \text{ см}^2$ і $12\pi \text{ см}^2$, а площа його бічної поверхні дорівнює сумі площ основ. Знайти градусну міру кута між твірною зрізаного конуса та площиною більшої основи конуса.

138. У зрізаний конус, радіуси основ якого дорівнюють 25 см і 16 см , вписано кулю. Знайти радіус кулі.

139. Кулю перетнуто двома паралельними площинами. Радіуси кругів утворених перерізів відповідно дорівнюють 10 см і 12 см . Відстань між площинами перерізів дорівнює 11 см . Знайти радіус кулі.

140. Кулю перетнуто двома паралельними площинами. Радіуси кругів утворених перерізів відповідно дорівнюють 6 см і 8 см . Відстань між площинами перерізів дорівнює 2 см . Знайти радіус кулі.

Група 8

141. Куб вписано в циліндр. Дві вершини куба є центрами основ циліндра, а інші лежать на його бічній поверхні. Знайти відношення площі осьового перерізу циліндра до площі діагонального перерізу куба.

142. Октаедр вписано в циліндр. Дві вершини октаедра є центрами основ циліндра, а інші лежать на його бічній поверхні. Знайти відношення площі перерізу октаедра площиною, що проходить через дві його осі симетрії, до площі осьового перерізу циліндра.

143. Твірна конуса дорівнює 17 см, а його висота — 8 см. Конус перетнуто прямою, паралельною основі. Відстань від цієї прямої до основи дорівнює 4 см, а до висоти конуса — 6 см. Знайти довжину відрізка цієї прямої, що міститься всередині конуса.

144. Два конуси, центри основ яких співпадають, мають висоти відповідно 14 см і 8 см, причому вершина другого конуса належить висоті першого. Радіуси основ цих конусів відповідно дорівнюють 7 см і 12 см. Знайти радіус кола, по якому перетинаються поверхні заданих конусів.

145. Два конуси, діаметри основ яких відповідно дорівнюють 18 см і 9 см мають спільну висоту і при цьому вершина першого конуса є центром основи другого і навпаки. Знайти діаметр кола, по якому перетинаються поверхні заданих конусів.

146. Діагоналі осьового перерізу зрізаного конуса діляться точкою перетину на відрізки довжиною $11\frac{2}{3}$ см і $3\frac{1}{3}$ см. Довжина твірної зрізаного конуса дорівнює 13 см. Знайти радіус більшої основи конуса.

147. Переріз кулі площиною є круг, радіус якого на 1 см менший за радіус кулі і довжиною границі (кола), що становить 0,96 довжини границі (кола) великого круга кулі. Знайти відстань від центра кулі до площини перерізу.

148. Площини двох перерізів кулі взаємно перпендикулярні, а спільна хорда цих перерізів дорівнює 32 см. Відстані від центра кулі до площин перерізів відповідно дорівнюють 12 см і 9 см. Знайти радіус більшого перерізу кулі.

149. В кулі радіусом 25 см проведено два взаємно перпендикулярних перерізи, радіуси яких відносяться, як 6 : 5. Спільна хорда цих перерізів дорівнює $6\sqrt{39}$ см. Знайти радіус меншого із утворених перерізів.

150. Площі двох взаємно перпендикулярних перерізів кулі відповідно дорівнюють 740π см² і 1280π см², а довжина їх спільної хорди — 32 см. Знайти радіус кулі.

151. Сфери радіусами 17 см і 10 см перетинаються. Спільна дотична площина і пряма, що проходить через центри сфер, перетинаються в точці, що знаходиться на відстані 30 см від центра меншої сфери. Знайти радіус кола перетину сфер.

152. Якою може бути найменша відстань між центрами двох сфер, якщо їх радіуси відповідно дорівнюють 17 см і 25 см, а дов-

жина лінії їх перетину дорівнює 30π см?

153. Кулю вписано в конус, висота якого дорівнює 16 см, а радіус основи — 12 см. Знайти радіус кулі.

154. Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює 120° , а його висота — $(3 + 2\sqrt{3})$ см. Знайти радіус кулі, вписаної в конус.

155. Навколо кулі з радіусом 12 см описано конус з радіусом основи 24 см. Знайти висоту конуса.

156. Куля, вписана в конус, точками дотику до бічної поверхні ділить твірні конуса у відношенні 9 : 8, починаючи від вершини конуса. Знайти радіус основи конуса, якщо радіус кулі дорівнює 6 см.

157. Куля, вписана в конус, точками дотику до бічної поверхні ділить твірні конуса на відрізки довжиною 18 см і 16 см, починаючи від вершини конуса. Знайти радіус кулі.

158. Навколо сфери, площа поверхні якої 576π см², описано конус з висотою 32 см. Знайти радіус кола, утвореного точками дотику сфери до бічної поверхні конуса.

159. У конусі, твірна якого дорівнює діаметру основи, розміщені три кулі, які дотикаються до бічної поверхні конуса, причому одна з куль дотикається до двох інших. Центри цих куль належать висоті конуса, а її основа лежить на поверхні найбільшої кулі. Знайти висоту конуса, якщо радіус найменшої кулі дорівнює 1 см.

160. Навколо кулі описано зрізаний конус. Радіус однієї з основ зрізаного конуса в два рази більший за радіус другої основи. Знайти відношення об'єму конуса до об'єму кулі.

Група 9

161. У правильній чотирикутній піраміді висота дорівнює 3 м, сторона основи — 8 м. Знайти площу перерізу піраміди площиною, що проходить через середину висоти паралельно бічній грані.

162. У правильній чотирикутній піраміді двогранний кут при ребрі основи дорівнює 60° . Переріз піраміди площиною, що проходить через середину висоти і паралельно бічній грані має площу 40 см². Знайти висоту піраміди.

163. Знайти відношення площі поверхні сфери, описаної навколо правильної трикутної призми, до площі поверхні сфери, вписаної у цю призму.

164. Висота конуса дорівнює 8 м, радіус його основи — 10 м. У конус вписано прямокутний паралелепіпед, сторони основи якого і висота відповідно пропорційні числам 3; 4 і 14. Знайти об'єм паралелепіпеда.

165. Відношення висоти конуса до радіуса описаної навколо нього кулі дорівнює 1,2. Знайти відношення об'єму конуса до об'єму кулі.

166. Відношення висоти конуса до радіуса описаної навколо нього сфери дорівнює 1,28. Знайти відношення площі бічної поверхні конуса до площі поверхні сфери.

167. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює $14\sqrt{3}$ см, а радіус кола, описаного навколо бічної грані, дорівнює 15,44 см. Знайти радіус кулі, вписаної у цю піраміду.

168. Основа чотирикутної піраміди — квадрат, сторона якого дорівнює 15 см. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до основи, а висота піраміди дорівнює 36 см. Знайти радіус кулі, вписаної у цю піраміду.

169. Основа піраміди — правильний трикутник із стороною 6 м. Одне з бічних ребер перпендикулярне до площини основи і дорівнює 4 м. Знайти радіус сфери, описаної навколо піраміди.

170. Навколо кулі радіуса 2 м описано чотирикутну піраміду. В основі піраміди лежить ромб, величина гострого кута якого 30° . Кожна бічна грань піраміди нахилена до площини основи під кутом, величина якого 60° . Знайти об'єм піраміди.

171. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює $4(3 + \sqrt{3})$ м і утворює з площиною основи кут 60° . У піраміду вписано циліндр, діаметр основи якого дорівнює висоті, так, що його основа лежить у площині основи піраміди, а друга основа дотикається до кожного з бічних граней. Знайти висоту циліндра.

172. У правильну чотирикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює $8\sqrt{2\sqrt{2} + 2}$ см, а плоский кут при вершині — 45° , вписано півсферу основа якої лежить на основі піраміди. Знайти радіус півсфери.

173. Конус вписано у піраміду, основа якої є прямокутний трикутник з гострим кутом 60° . Радіус основи конуса дорівнює $\sqrt[3]{40 - 20\sqrt{3}}$, а кут між площиною основи і твірною — 60° . Знайти об'єм піраміди.

174. У конус вписано циліндр, висота якого дорівнює радіусу основи конуса. Знайти кут у градусах між віссю та твірною конуса, якщо повна поверхня циліндра відноситься до площі основи конуса, як $(14 - 6\sqrt{3}) : 3$.

175. В основі трикутної піраміди лежить трикутник, довжини сторін якого відповідно дорівнюють 10 см, 17 см і 21 см. Двогранні кути при ребрах основи довжиною 10 см і 17 см дорівнюють 45° , а при ребрі основи довжиною 21 см дорівнює 135° . Знайти об'єм піраміди.

176. У півкулю радіуса $6\sqrt{\frac{3}{\pi^2}}$ вписано конус найбільшого об'єму так, що його вершина розміщена в центрі півкулі, а вісь співпадає з віссю півкулі. Знайти об'єм конуса.

177. У півкулю радіуса $6\sqrt{\frac{27}{\pi^2}}$ вписано циліндр найбільшого об'єму так, що їх осі співпадають. Знайти об'єм циліндра.

178. У конус вписано циліндр найбільшого об'єму. Знайти відношення об'єму цього конуса до об'єму циліндра.

179. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро дорівнює $2(\sqrt{3} + 3)$ см і нахилене до площини основи під кутом 30° . У піраміді вписано куб, так, що його чотири вершини лежать на основі піраміди, а інші чотири — на апофемах піраміди. Знайти об'єм куба.

180. У правильній чотирикутній піраміді ребро основи дорівнює $2\sqrt{3} + 3$ см. Усі бічні грані піраміди нахилені до основи під кутом 60° . У піраміді вписано куб, так, що його чотири вершини лежать на основі піраміди, а інші чотири — на бічних ребрах піраміди. Знайти об'єм куба.

§ 13. Функції та їх властивості

Група 1

1. Функція $y = f(x)$ визначена на множині $X = \{2; 5; 7; 8\}$ наступним чином: $f(2) = 7$, $f(5) = 9$, $f(7) = 20$, $f(8) = 4$. Обчислити $f(f(7) - 2f(5))$.

2. Функція $y = f(x)$ визначена на множині $X = \{2; 5; 7; 8\}$ наступним чином: $f(2) = 7$, $f(5) = 9$, $f(7) = 20$, $f(8) = 4$. Обчислити $f(2f(5) - 2, 5f(8))$.

3. Функція $y = f(x)$ визначена на множині $X = \{-3; 1; 2; 4\}$ наступним чином: $f(-3) = 10$, $f(2) = 5$, $f(4) = 17$, $f(1) = 2$. Функція $y = g(x)$ — обернена до функції $y = f(x)$. Обчислити $g(3g(5) - g(17))$.

4. Функція $y = f(x)$ визначена на множині $X = \{1; 2; 10; 17\}$ наступним чином: $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(10) = 5$, $f(17) = 6$. Функція $y = g(x)$ — обернена до функції $y = f(x)$. Обчислити $g(2g(5) - g(6))$.

5. Функція $y = f(x)$ визначена на множині $X = \{2; 5; 7; 8\}$ наступним чином: $f(2) = 7$, $f(5) = 9$, $f(7) = 20$, $f(8) = 4$. Функція $y = g(x)$ — обернена до функції $y = f(x)$. Знайти відношення найменшого значення функції $y = g(x)$ до найбільшого значення функції $y = f(x)$.

6. Функція $y = f(x)$ визначена на множині $X = \{-4; 1; 3; 9\}$ наступним чином: $f(-4) = -12$, $f(1) = 6$, $f(3) = -2$, $f(9) = 7$. Функція $y = g(x)$ — обернена до функції $y = f(x)$. Знайти відношення найбільшого значення функції $y = g(x)$ до найменшого значення функції $y = f(x)$.

7. Обчислити значення функції $f(x) = x^2 + D(x)$ при $x = \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2 + \sqrt{3}}$, де

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ — раціональне число;} \\ 0, & \text{якщо } x \text{ — ірраціональне число.} \end{cases}$$

8. Обчислити значення функції $f(x) = x^2 - D(x)$ при $x = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2 - \sqrt{3}}$, де

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ — раціональне число;} \\ 0, & \text{якщо } x \text{ — ірраціональне число.} \end{cases}$$

9. Обчислити значення функції $f(x) = \{x\} + [2x] + |3x|$ при $x = -2, 8$, де $[b]$, $\{b\}$ — відповідно ціла та дробова частини числа b , а $|b|$ — модуль числа b .

10. Обчислити значення функції $f(x) = |x| + \{2x\} + [3x]$ при $x = -1, 9$, де $[b]$, $\{b\}$ — відповідно ціла та дробова частини числа b , а $|b|$ — модуль числа b .

Група 2

11. При якому значенні змінної x функції $f(x) = x - 4$ і $g(x) = 2\sqrt{x-1}$ набувають рівних значень?

12. При якому значенні змінної x функції $f(x) = x - 5$ і $g(x) = \sqrt{x+1}$ набувають рівних значень?

13. Знайти значення змінної x , при якому функції $y = \frac{2x+49}{x} - 3$ і $y = 2\sqrt{2 + \frac{49}{x}}$ набувають рівних значень.

14. Знайти значення змінної x , при якому функції $y = \sqrt{3x+8}$ і $y = \frac{x+8}{\sqrt{x}}$ набувають рівних значень.

15. Знайти абсциси точок перетину графіків функцій

$$y = \lg(10(x-3)^2) \text{ і } y = \lg(1+x^2) + 2\lg(3-x).$$

16. Знайти ординати точок перетину графіків функцій

$$y = 2\lg(1-3x) + \lg(1+x^2) \text{ і } y = 1 + \lg(1-6x+9x^2).$$

17. Визначити абсцису точки перетину графіка функції $y = 1 - \lg x - \lg(x-9)$ з віссю Ox .

18. Визначити абсцису точки перетину графіка функції $y = \log_5 x + \log_5(x-4) - 1$ з віссю Ox .

19. При якому значенні аргументу x значення функція $y = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ дорівнює \sqrt{e} ?

20. При якому значенні аргументу x значення функція $y = 3^{\frac{x+1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}}$ дорівнює 36?

Група 3

21. Визначити число цілих значень аргументу x , що належить області визначення функції $y = \sqrt{16-x^2} + \frac{4}{|x|-3}$.

22. Визначити найменше значення аргументу x , що належить області визначення функції

$$y = \frac{\sqrt{2x^2 - 7x + 5}}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}.$$

23. Знайти суму цілих значень аргументу x , що належить області визначення функції

$$y = \frac{\sqrt{5 - |x|}}{(x + 5)(16 - x^2)}.$$

24. Визначити найменше значення аргументу x , що належить області визначення функції $y = \sqrt{85 + 8x - 5x^2} + \lg(4 - 2x)$.

25. Знайти середину відрізка, що є областю визначення функції $y = \sqrt{x + 3} \cdot (\sqrt{x + 5} + \sqrt{9 - x})$.

26. Знайти довжину відрізка, що є областю визначення функції $y = \sqrt{\log_2(5 - |x|) - 1}$.

27. Визначити число цілих значень аргументу x , що належить області визначення функції

$$y = \frac{4}{|2x^2 - 98| - 2x^2 + 98}.$$

28. Знайти суму цілих значень аргументу x , що належить області визначення функції $y = \sqrt{\log_{0,5}(x - 5)^2 + 2}$.

29. Визначити найбільше ціле значення аргументу x , що належить області визначення функції $y = \lg \log_{0,3} \log_3(0, 2x - 5)$.

30. Визначити найменше ціле значення аргументу x , що належить області визначення функції $y = \ln \log_{0,2} \log_5(0, 25x + 6)$.

Група 4

31. Точка $A(1; -4)$ є вершиною параболи $y = x^2 + px + q$. Знайти довжину проміжку значень аргументу x , на якому задана функція набуває від'ємні значення.

32. Парабола $y = x^2 + px + q$ перетинає вісь Ox в точках $M(1; 0)$ і $N(5; 0)$. Знайти відстань від початку координат до вершини цієї параболи.

33. Точка $A(1; 18)$ є вершиною параболи $y = ax^2 + bx + c$, яка перетинає вісь ординат в точці $B(0; 16)$. Визначити середину проміжку значень аргументу x , на якому задана функція набуває додатні значення.

34. Знайти найменше значення функції $y = ax^2 + bx + c$, графік якої перетинає вісь Ox в точках $A(-1; 0)$ і $B(5; 0)$, а вісь Oy в точці $C(0; -10)$.

35. Точка $A(2; 3)$ є центром симетрії графіка функції $y = \frac{k}{x-a} + b$. Знайти абсцису точки перетину графіка, заданої функції, з віссю Ox , якщо ордината точки перетину цього графіка з віссю Oy дорівнює 6.

36. Точка $A(-3; 2)$ є центром симетрії графіка функції $y = \frac{k}{x-a} + b$, якому належить точка $B(0; 6)$. Знайти середину проміжку значень аргументу x , на якому задана функція набуває від'ємні значення.

37. Точка $A(-3; -5)$ є вершиною графіка функції $y = k \cdot |x - a| + b$, який перетинає вісь Oy в точці з ординатою -2 . Знайти довжину проміжку значень аргументу x , на якому задана функція набуває від'ємні значення.

38. Пряма $x = 4$ є віссю симетрії графіка функції $y = k \cdot |x - a| + b$, який проходить через початок координат і перетинає вісь симетрії в точці з ординатою 2. Знайти k .

39. Графік функції $y = \frac{16}{(x-a)^2} + b$ перетинає вісь Oy в точці з ординатою -4 і симетричний відносно прямої $x = 4$. Визначити найбільше значення параметра c , для якого пряма $y = c$ не перетинає графік даної функції.

40. Графік функції $y = -\frac{36}{(x+a)^2} + b$ перетинає вісь Ox у двох точках, відстань між якими дорівнює 4, і симетричний відносно прямої $x = -3$. Визначити ординату точки перетину графіка даної функції з віссю Oy .

Група 5

41. Обчислити добуток значень параметрів a і b , для яких функція $y = (a - 2b - 3)x^3 - (a + b - 6)x^2 + (6a - b - 7)x + 3a - 5b - 2$ є парною.

42. Обчислити добуток значень параметрів a і b , для яких функція $y = (a - 2b - 1)x^3 - (a + b - 6)x^2 + (6a - b - 7)x + 3a - 5b - 2$ є непарною.

43. Нехай f — функція, що задається формулою $y = f(x) = 3x + 6$. Знайти значення параметра a , для якого функція $y = f(x - a)$ є непарною.

44. Нехай f — функція, що задається формулою $y = f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$. Знайти значення параметра a , для якого функція $y = f(x + a)$ є непарною.

45. Нехай f — функція, що задається формулою $y = f(x) = 3|2x - 5| - 1$. Знайти значення параметра a , для якого функція $y = f(x + a)$ є парною.

46. Нехай f — функція, що задається формулою $y = f(x) = 7 - 2|5x + 8|$. Знайти значення параметра a , для якого функція $y = f(x - a)$ є парною.

47. Нехай f — функція, що задається формулою $y = f(x) = -2x^2 + 4x + 1$. Знайти значення параметра a , для якого функція $y = f(x + a)$ є парною.

48. Нехай f — функція, що задається формулою $y = f(x) = \frac{4}{x+1} - 3$; g — непарна функція, що задається формулою $y = g(x) = f(x - a) + b$, де a і b — деякі дійсні числа. Обчислити $g(1)$.

49. Нехай f — функція, що задається формулою $y = f(x) = \frac{12}{(x-4)^2} + 6$; g — парна функція, що задається формулою $y = g(x) = f(x - a)$, де a — деяке дійсне число. Обчислити $g(1)$.

50. Нехай f — функція, що задається формулою $y = f(x) = (x + 1, 5)^3 + 4$; g — непарна функція, що задається формулою $y = g(x) = f(x - a) - b$, де a і b — деякі дійсні числа. Обчислити $g(1)$.

Група 6

51. Знайти номер найбільшого члена послідовності $\{a_n\}$ дійсних чисел, заданої формулою її n -го члена $a_n = -3n^2 + 160n - 9$.

52. Знайти номер найменшого члена послідовності $\{a_n\}$ дійсних чисел, заданої формулою її n -го члена $a_n = 5n^2 - 192n + 5$.

53. Знайти найменше значення функції $y = x^2 - 4(\sqrt{1+x})^2 - 1$.

54. Знайти найбільше значення функції $y = 10 - 4(\sqrt{x-4})^2 - x^2$.

55. Знайти найменше значення функції $y = (0, 5)^{x(2-x)-4}$.

56. Знайти найбільше значення функції $y = (\sqrt{3})^{2+x(4-x)}$.

57. Знайти найменше значення функції $y = 10^{\lg(x^2-4x+8)}$.

58. Знайти найбільше значення функції $y = 10^{\lg(8-2x-x^2)}$.

59. Знайти добуток найбільшого та найменшого значень функції $y = 2 \cos 2x - 3 \sin^2 x$.

60. Знайти найбільше значення функції $y = 8 \cos^2 x - \cos 4x$.

Група 7

61. Нехай $y = f(x)$ — функція, областю визначення якої є множина дійсних чисел і для якої справедлива рівність $2f(x) + 3f(-x) = 5x^2 + 2x$. Обчислити $f(-2)$.

62. Нехай $y = f(x)$ — функція, областю визначення якої є множина всіх ненульових дійсних чисел і для якої справедлива рівність $4f(x) + f(\frac{1}{x}) = 5x + \frac{10}{x}$. Обчислити $f(\frac{1}{2})$.

63. Знайти довжину найбільшого проміжку, на якому графік функції $y = x^2 - 4x - (\sqrt{2x+4})^2$ є симетричним відносно прямої $x = 3$.

64. Знайти значення параметра a , для якого графік функції $y = a^2x^2 - (6a+10)x + 4$ має вісь симетрії, що є прямою $x = 2$, і вершину, ордината якої є від'ємним числом.

65. Нехай $f(x) = \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}$. Обчислити $\frac{f(0,501)}{f(-0,501)}$.

66. Нехай $f(x) = \frac{1}{2}(3^{\sin x} - 3^{-\sin x}) : (3^{\sin x} + 3^{-\sin x})$. Обчислити $\frac{f(-1)}{f(1)}$.

67. Обчислити добуток значень параметра a , для яких центр симетрії гіперболи $y = \frac{8}{ax-6} + a - 1$ знаходиться на відстані $\sqrt{17}$ від точки $A(-1; 0)$.

68. Для якого найменшого значення параметра a вершина параболи $y = ax^2 + 6x + 9$ знаходиться на відстані 5 від початку координат?

69. Для якого найменшого додатного значення параметра a графіки функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = \frac{1}{4}x + a$ мають лише одну спільну точку?

70. Для якого найбільшого від'ємного значення параметра a графіки функцій $y = -\sqrt{-x}$ і $y = \frac{1}{6}x + a$ мають лише одну спільну точку?

Група 8

71. Знайти найменший додатний період функції

$$y = 3 \cos \frac{\pi x}{3} - 2 \sin \frac{\pi x}{2} + 4.$$

72. Знайти найменший додатний період функції

$$y = \sin \frac{5\pi x}{4} - 4 \sin \frac{5\pi x}{8} + 2 \cos 5\pi x.$$

73. Знайти найменший додатний період функції

$$y = 2 \operatorname{tg} 2\pi x + 3 \operatorname{ctg} \frac{4\pi x}{3} + 5.$$

74. Знайти найменший додатний період функції

$$y = 3 \operatorname{tg} 3\pi x + 5 \operatorname{ctg} \frac{2\pi x}{5} - 1.$$

75. Знайти найменший додатний період функції $y = \sin(0, 2x - [0, 2x])$, де $[x]$ — ціла частина числа x .

76. Знайти найменший додатний період функції $y = \cos(\{0, 4x\})$, де $\{x\}$ — дробова частина числа x .

77. Знайти найменший додатний період функції

$$y = \ln \left(\sin \frac{\pi x}{3} \right) - \ln \left(\cos \frac{\pi x}{3} \right) - \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{3} \right).$$

78. Знайти найменший додатний період функції

$$y = \ln(2 \sin 0, 2\pi x) + \ln(\cos 0, 2\pi x) - \ln(\sin 0, 4\pi x).$$

79. Знайти найменший додатний період функції

$$y = \sin \frac{2\pi x}{5} + \left| \sin \frac{2\pi x}{5} \right|.$$

80. Знайти найменший додатний період функції

$$y = \frac{|\cos \frac{2\pi x}{7}|}{\cos \frac{2\pi x}{7}}.$$

Група 9

81. Розв'язати рівняння $f(g(x)) = g(f(x))$, якщо $f(x) = 2x + 2$, $g(x) = 2^x + 10$.

82. Розв'язати рівняння $f(g(x)) = g(f(x))$, якщо $f(x) = 2^x - 1$, $g(x) = 2x + 1$.

83. Нехай функцію

$$y = \sqrt{4 \sin^4 \pi x - 4 \sin^2 \pi x + 1} - 2\sqrt{\sin^4 \pi x}$$

задано на відрізку $[0; 1]$. Знайти довжину проміжку, на якому дана функція є сталою.

84. Знайти різницю найбільшого та найменшого значень функції

$$y = \sqrt{4 \cos^4 \pi x - 4 \cos^2 \pi x + 1} - 2\sqrt{\cos^4 \pi x}.$$

85. Нехай $f(\operatorname{tg} 2x) = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$. Знайти найменше значення виразу $f(\sin x) + f(\cos x)$, якщо $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

86. Знайти значення параметра a , для якого областю допустимих значень змінної x

$$y = \sqrt[4]{x^2 - 10x - 24} + \sqrt[4]{a + 2x - x^2}$$

є одна точка.

87. Знайти найменшу відстань між точками відповідно графіків функцій $y = -x^2 - 1, 25x - 3$ і $y = 0, 75x + 3$.

88. Знайти найменшу відстань між точками відповідно графіків функцій $y = x^2 - 1, 6x + 5$ і $y = 2, 4x - 12$.

89. Знайти найбільше значення виразу $x - 2y$, якщо

$$x^2 - xy + 2y^2 - 63 = 0.$$

90. Знайти найбільше значення виразу $3x + 2y$, якщо

$$8x^2 - 4xy + 4y^2 - 161 = 0.$$

§ 14. Початки аналізу

Група 1

1. Розв'язати рівняння $f'(x) = 0$, якщо $f(x) = -4x^3 - 6x^2 - 3x + 3$.
2. Розв'язати рівняння $f'(x) = 0$, якщо $f(x) = 4x^3 - 30x^2 + 75x - 7$.
3. Обчислити $f'(1)$, якщо

$$f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2} + 4.$$

4. Обчислити $f'(1)$, якщо

$$f(x) = 8\sqrt[4]{x^3} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + 8.$$

5. Розв'язати рівняння $f'(x) = 0$, якщо

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 7}{x^2 - 10x + 25}.$$

6. Розв'язати рівняння $f'(x) = 0$, якщо

$$f(x) = \frac{5 + 4x + x^2}{16 + 8x + x^2}.$$

7. Розв'язати рівняння $f'(x) = 0$, якщо

$$f(x) = (x + 1)(4x^2 + 26x + 49).$$

8. Розв'язати рівняння $f'(x) = 0$, якщо

$$f(x) = (x + 1)(x - 2)(2x^2 - 2x + 5).$$

9. Розв'язати рівняння $f'(x) = 0$, якщо $f(x) = \sqrt{x}(20 - x^2)$.

10. Обчислити $f'(0, 25)$, якщо

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + 2}{x - \sqrt{x}}.$$

Група 2

11. Обчислити значення похідної функції

$$y = 5 \cos(x - 1) \cdot (3x + \ln x)$$

в точці $x = 1$.

12. Нехай $f(x) = a\sqrt{x+4} + e^x \sin x$, де a — деяке дійсне число. Знайти значення параметра a , для якого $f'(0) = 4$.

13. Знайти значення параметра a , для якого значення похідної функції $y = 1 + a \sin 2x \cos 2x$ в точці $x = \frac{\pi}{4}$ дорівнює -20 .

14. Знайти значення параметра a , для якого значення похідної функції

$$y = \frac{\sin 2x}{\cos 2x - a}$$

в точці $x = \frac{\pi}{2}$ дорівнює $\frac{1}{3}$.

15. Знайти значення параметра a , для якого значення похідної функції $y = \cos 2x + \sin 2x + a \cos^2 x$ в точці $x = \frac{\pi}{4}$ дорівнює 0.

16. Знайти значення параметра a , для якого значення похідної функції $y = a \sin 2x - 14 \cos x + \sin^2 x$ в точці $x = \frac{\pi}{2}$ дорівнює 0.

17. Обчислити $f(4)$, якщо $f(x) = (a - x)\sqrt{1 + 2x}$, де a — деяке дійсне число, і $f'(4) = -\frac{7}{3}$.

18. Обчислити $f(1)$, якщо $f(x) = a\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2x - 3}$, де a — деяке дійсне число, і $f'(1) = 2\frac{1}{3}$.

19. Обчислити $f(-2)$, якщо $f(x) = \sqrt{ax^2 - x^4}$, де a — деяке дійсне число, і $f'(-2) = 0$.

20. Обчислити $f(1)$, якщо

$$f(x) = \frac{\sqrt{ax}}{11 - x^2},$$

де a — деяке дійсне число, і $f'(1) = 0,07$.

Група 3

21. До графіка функції $y = 6\sqrt{2x - 1} + 3$ проведено дотичну, яка утворює з віссю абсцис кут 60° . Знайти абсцису точки дотику.

22. Для якого значення параметра a дотична, проведена до графіка функції $y = ax^2 - 3x + 5$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$, паралельна до прямої $y = 5x - 7$?

23. Обчислити добуток координат точок дотику дотичних до графіка функції $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + 1$, паралельних до прямої $y = 2x - 5$.

24. Знайти відстань від початку координат до точки дотику дотичної до графіка функції $y = x^2 - 4x - 1$, яка паралельна прямій $y = 2x - 5$.

25. На параболі $y = x^2 - 6x + 9$ задано точку M , абсциса якої $x_0 = 2$. Знайти площу трикутника, утвореного дотичною до параболи в точці M та осями координат.

26. На гіперболі $y = \frac{8}{x}$ задано точку M , абсциса якої $x_0 = 4$. Знайти площу трикутника, утвореного дотичною до гіперболи в точці M та осями координат.

27. Знайти найменше значення функції $y = 9\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x^4} + 10$ на відрізку $[-1; 8]$.

28. Знайти найменше значення функції $y = 12\sqrt[3]{x^2} - x^2 - 12$ на відрізку $[-1; 3\sqrt{3}]$.

29. Обчислити суму значень параметра a , для яких один із екстремумів функції $y = x^5 - x^3 - 2x + a$ дорівнює 5.

30. Обчислити суму значень параметра a , для яких один із екстремумів функції $y = 3x^5 - 5x^3 + a$ дорівнює 4.

Група 4

31. Знайти середину найбільшого проміжку, на якому функція $y = 10 + 15x^4 - x^5$ є зростаючою.

32. Знайти середину найбільшого проміжку, на якому функція

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$$

є спадною.

33. Знайти довжину найбільшого проміжку, на якому функція

$$y = 5 - 2x - \frac{1}{x^2}$$

є зростаючою.

34. Знайти довжину найбільшого проміжку, на якому функція

$$y = x - \frac{4}{x^2}$$

є спадною.

35. Знайти найбільше ціле значення аргументу функції

$$y = 6\sqrt[3]{x^2} - x,$$

що належить проміжку зростання заданої функції.

36. Знайти довжину найбільшого проміжку, на якому функція $y = x + \sqrt{3-x}$ є спадною.

37. Визначити число цілих значень аргументу функції

$$y = \frac{x}{x^2 + 4},$$

що належать проміжку зростання цієї функції.

38. Визначити середину найбільшого проміжку, на якому функція

$$y = \frac{(x-2)^3}{(3-x)^2}$$

є спадною.

39. Визначити середину найбільшого проміжку, на якому функція

$$y = (1-x)\sqrt{1+2x}$$

є зростаючою.

40. Визначити середину найбільшого проміжку, на якому функція

$$y = (2+x)\sqrt{1-x}$$

є спадною.

Група 5

41. До графіка функції $y = 5e^{2x-4}(-2x^2 + 6x - 3)$ проведено дотичну в точці її максимуму. Знайти ординату точки перетину цієї дотичної з віссю Oy .

42. До графіка функції $y = -4e^{-3x}(3x^2 + 3x + 1)$ проведено дотичну в точці її мінімуму. Знайти ординату точки перетину цієї дотичної з віссю Oy .

43. Знайти відстань між дотичними до графіка функції

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 15,$$

паралельними до осі абсцис.

44. Знайти відстань між дотичними до графіка функції

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 3,$$

паралельними до осі абсцис.

45. Знайти додатне значення параметра a , для якого графік функції $y = a + 12x - x^3$ дотикається до осі абсцис.

46. Знайти від'ємне значення параметра a , для якого графік функції $y = -x^4 + 8x^2 + a$ дотикається до осі абсцис.

47. Визначити число критичних точок функції

$$y = \cos 2\pi x + \sin 2\pi x + 2\pi x,$$

заданої на відрізьку $[0; 2]$.

48. Знайти критичну точку функції

$$y = 16 \cos \pi x - \sin 2\pi x - 18\pi x,$$

що належить відрізьку $[9, 4; 9, 8]$.

49. Визначити число цілих значень параметра a , для яких функція $y = x^3 + 6x^2 + (a - 3)(a - 2)x - 4$ має критичні точки.

50. Визначити найбільше значення параметра a , для якого функція $y = x^3 - 3x^2 + (a - 3)(a - 5)x + 7$ має критичні точки.

Група 6

51. Знайти на параболі $y = x^2 + 2$ точку, найближче розміщену до точки з координатами $(9; -1)$. Обчислити суму координат цієї точки.

52. Знайти квадрат найменшої відстані від точки $A(7; 1)$ до точки, розміщеної на параболі $y = x^2 + x + 1$.

53. Для якого значення параметра a найбільше значення функції $y = 2x^4 - x + a$ на проміжку $[0; 2]$ дорівнює 10?

54. Для якого значення параметра a найменше значення функції $y = x^4 - 2x^2 + a$ на проміжку $[0; 2]$ дорівнює -5 ?

55. Знайти найбільше значення параметра a , для якого рівняння $x^3 - 27x = a$ має лише два дійсні розв'язки.

56. Знайти найменше значення параметра a , для якого рівняння $x^3 - 75x = a$ має лише два дійсні розв'язки.

57. Знайти площу трикутника, утвореного віссю ординат та двома дотичними, проведеними через точку $M(1; 0)$ до графіка функції $y = x^2 - 4x + 7$.

58. Знайти площу трикутника, утвореного віссю абсцис та двома дотичними, проведеними через точку $M(2; 5)$ до графіка функції $y = 4x - x^2$.

59. Для якого значення параметра a , функція

$$y = -x^3 + 3x^2 - ax + 8$$

є зростаючою тільки на інтервалі $(-1; 3)$?

60. Для якого значення параметра a , функція

$$y = 2x^3 - (a - 3)x - 17$$

є спадною тільки на інтервалі $(-3; 3)$?

Група 7

61. Функція $y = F(x)$ є первісною функції

$$f(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 + 5x}{x}.$$

Обчислити $F(2) - F(1)$.

62. Функція $y = F(x)$ є первісною функції

$$f(x) = \frac{6 - 4x - 3x^2 + 5x^4}{x^4}.$$

Обчислити $F(2) - F(1)$.

63. Графік функції

$$y = \frac{3x^{\frac{1}{2}} - 8x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{5}{6}}}{x^2}$$

та графік її первісної $y = F(x)$ мають спільну точку з абсцисою 1. Обчислити $F(64)$.

64. Графік функції

$$y = \frac{3}{x^2} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{4\sqrt[5]{x}}{x}$$

та графік її первісної $y = F(x)$ мають спільну точку з абсцисою 1. Обчислити $F(-1)$.

65. Функція $y = F(x)$ є первісною функції $f(x) = 3x^2 - 6x - 24$. Знайти локальний максимум функції $y = F(x)$, якщо її локальний мінімум дорівнює -96 .

66. Функція $y = F(x)$ є первісною функції $f(x) = 3x^2 - 6x - 9$. Знайти локальний мінімум функції $y = F(x)$, якщо її локальний максимум дорівнює 9.

67. Швидкість точки, що рухається прямолінійно, задається рівнянням $v(t) = 3t^2 + 2t + 1$ (м/с). Знайти шлях, пройдений точкою за перші 5 секунд руху.

68. Швидкість точки, що рухається прямолінійно, задається рівнянням $v(t) = t^2 + 4t + 3$ (м/с). Знайти шлях, пройдений точкою за проміжок часу між третьою та шостою секундами руху.

69. Точка рухається прямолінійно з прискоренням, що задається рівнянням $a(t) = 6t - 18$ (м/с²). Знайти шлях, пройдений точкою між її зупинками, якщо початкова швидкість точки дорівнює $v(0) = 24$ м/с.

70. Точка рухається прямолінійно і рівносповільнено з прискоренням -6 м/с². Знайти шлях, пройдений точкою до її зупинки, якщо в момент часу $t = 0$ вона знаходилась у початку відліку і мала швидкість 30 м/с.

Група 8

71. Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} \cos^2 x \, dx$.

72. Обчислити інтеграл $\int_0^{\pi} \frac{4}{\pi} \sin^2 x \, dx$.

73. Обчислити інтеграл $\int_0^{\pi} 2 \sin x \cos 3x \, dx$.

74. Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos x \sin 3x \, dx$.

75. Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4 \sin x \cos^3 x \, dx$.

76. Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 8 \cos x \sin^3 x \, dx$.

77. Обчислити інтеграл $\int_0^3 \frac{15x}{\sqrt{5x+1}} \, dx$.

78. Обчислити інтеграл $\int_0^2 \frac{3x}{\sqrt{4x+1}} \, dx$.

79. Обчислити інтеграл $\int_{-\frac{1}{2}}^3 \frac{2x+1}{\sqrt[3]{2x+2}} \, dx$.

80. Обчислити інтеграл $\int_{-2}^2 \frac{6x}{\sqrt{5+2x} + \sqrt{5-2x}} \, dx$.

Група 9

81. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 4x + 8$ і $y = 6x - x^2$.

82. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = -x^2 - 2x + 1$ і $y = 3x + 5$.

83. Обчислити площу фігури, обмеженої віссю ординат, графіком функції $y = 3x^2 - 12x + 15$ і дотичною до цього графіка в точці з абсцисою $x_0 = 2$.

84. Обчислити площу фігури, обмеженої віссю ординат, графіком функції $y = x^2 + 6x + 12$ і дотичною до цього графіка в точці з абсцисою $x_0 = -3$.

85. Обчислити площу фігури, обмеженої віссю ординат, графіком функції $y = 1 + 4x - x^2$ і дотичною до цього графіка в точці з абсцисою $x_0 = 3$.

86. Обчислити площу фігури, обмеженої віссю ординат, графіком функції $y = 5 - 4x - x^2$ і дотичною до цього графіка в точці з абсцисою $x_0 = -3$.

87. Обчислити площу фігури, обмеженої віссю абсцис, графіком функції $y = \sqrt{2x+3}$ і дотичною до цього графіка в точці з ординатою 3.

88. Обчислити площу фігури, обмеженої віссю абсцис, графіком функції $y = \sqrt{15 - 2x}$ і дотичною до цього графіка в точці з ординатою 3.

89. Обчислити площу фігури, обмеженої віссю ординат, графіком функції $y = \frac{3}{2}x^2 + 6$ і дотичною до цього графіка в точці з абсцисою $x_0 = 2$.

90. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції $y = 4x^3 + 2$ і дотичною до цього графіка в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

§ 15. Комбінаторика. Елементи теорії ймовірностей

Зауваження. У цьому параграфі всюди символами P_n , C_n^k , A_n^k позначено відповідно число перестановок з n елементів, число комбінацій (сполучень) з n елементів по k , число розміщень з n елементів по k .

Група 1

1. Обчислити значення виразу $\frac{P_5 + P_6}{A_7^2} + C_5^3$.
2. Обчислити значення виразу $(P_7 - A_6^3 + C_5^2) \cdot 0!$.
3. Обчислити значення виразу $(C_7^3 + A_6^2 - P_5) \cdot C_2^2$.
4. Обчислити значення виразу $C_{10}^8 + C_{10}^9 - C_{11}^9 + A_6^4 + P_4$.
5. Обчислити значення виразу $(P_{15} - C_{15}^{12}) \cdot (3A_7^4 - A_7^5)$.
6. Обчислити значення виразу $C_6^4 + C_{20}^{12} - A_{20}^8 : P_8$.
7. Обчислити значення виразу $(A_7^5 + A_7^4) : (C_7^3 \cdot P_3)$.
8. Обчислити значення виразу $(C_8^5 + A_8^4) : (C_8^3 : P_5)$.
9. Обчислити значення виразу $C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6$.
10. Обчислити значення виразу $C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4$.

Група 2

11. Розв'язати рівняння $A_x^4 = 30A_{x-2}^2$.
12. Розв'язати рівняння $C_x^2 + 2C_x^1 = 90$.
13. Розв'язати рівняння $A_{2x}^3 = 14A_x^3$.
14. Розв'язати рівняння $C_{2x+8}^5 = 13A_{2x+6}^3$.
15. Розв'язати рівняння $C_{4x+9}^5 = 5A_{4x+7}^3$.
16. Обчислити суму розв'язків рівняння $(C_x^{x-2})^2 - 46C_x^2 + 45 = 0$.
17. Розв'язати рівняння $P_{x+2} = 132P_{x-2} \cdot A_x^2$.
18. Розв'язати рівняння $C_x^2 + C_x^3 = 15(x-1)$.
19. Розв'язати рівняння $C_x^2 + C_x^1 = 55$.
20. Розв'язати рівняння $2A_x^2 + 3A_{x-1}^1 = 2C_x^3$.

Група 3

21. Скількома способами можна розмістити 5 чоловік у п'ятимісному автомобілі?

22. Скільки різних триколових прапорів можна виготовити із трьох полотен відповідно червоного, синього та жовтого кольорів так, щоб кожне полотно займало горизонтальну смугу на прапорі?

23. Шість учнів класу грають в шахи. Скількома способами можна створити команду із двох шахістів класу для участі в шкільних змаганнях, якщо в заявці потрібно вказати шахіста, який гратиме на першій дошці?

24. Скільки п'ятицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, якщо кожна з цих цифр можна використати в записі числа не більше одного разу?

25. Скільки різних триколових прапорів можна виготовити із семи полотен різних кольорів так, щоб кожне полотно займало горизонтальну смугу на прапорі?

26. Скільки різних футбольних команд по чотири гравці можна створити із шести юнаків?

27. Скільки існує п'ятицифрових телефонних номерів, у яких всі п'ять цифр попарно різні?

28. Скількома способами можна розподілити три путівки в різні будинки відпочинку між шістьма кандидатами на ці путівки?

29. Скількома способами із десяти різноколових олівців можна вибрати шість олівців?

30. Нехай задано 8 точок площини, ніякі три з яких не лежать на одній прямій. Скільки існує різних прямих, які місять по дві із заданих 8 точок?

Група 4

31. Знайти число розв'язків нерівності $C_{x+1}^2 + C_x^2 \leq 9x + 10$.

32. Обчислити суму розв'язків нерівності $A_x^2 + xA_x^1 \leq 15$.

33. Обчислити суму розв'язків нерівності $A_{x-4}^1 \cdot C_{x-1}^{x-1} \leq C_7^2$.

34. Розв'язати нерівність $2C_{x-1}^2 < A_5^2 - A_x^2 - 2$.

35. Знайти найбільший розв'язок нерівності $\frac{A_x^3 - A_x^2}{A_x^1} < 99$.

36. Знайти найменший розв'язок нерівності $15C_x^3 < 4C_{x+2}^4$.
37. Знайти найбільший розв'язок нерівності $\frac{P_{x+6}}{A_{x+4}^5 \cdot P_{x-1}} \leq 72$.
38. Знайти найменший розв'язок нерівності $\frac{x}{A_x^3} < \frac{1}{20}$.
39. Обчислити суму розв'язків нерівності $(P_x)^2 - 24P_x \leq 25$.
40. Знайти найменший розв'язок нерівності $\frac{P_n}{n \cdot P_{n-3}} > 72$.

Група 5

41. Знайти коефіцієнт при x^5 у многочлені $2x(3 - 2x)^5$.
42. Знайти коефіцієнт при x^9 у многочлені $5x^3(1 + 2x^2)^7$.
43. Знайти коефіцієнт при x^{11} у многочлені $x^2(3x^3 - 2)^4$.
44. Знайти коефіцієнт при x^{12} у многочлені $x^2(5x - 2x^3)^4$.
45. Знайти раціональний доданок у розкладі бінома $(\sqrt[3]{2} + \sqrt{3})^5$.
46. Знайти раціональний доданок у розкладі бінома $(\sqrt[4]{3} - \sqrt[3]{4})^7$.
47. У розкладі бінома $(x^2 + \frac{2}{x})^6$ знайти член, що не залежить від x .
48. У розкладі бінома $(\frac{2}{x^3} + x)^8$ знайти член, що не залежить від x .
49. Знайти показник степеня бінома $(x + y)^n$, якщо коефіцієнт третього члена розкладу дорівнює 231.
50. Знайти коефіцієнт шостого члена розкладу бінома $(x + y)^n$, якщо сума його біноміальних коефіцієнтів дорівнює дорівнює 1024.

Група 6

51. Скількома способами можна розділити комплект з чотирьох різнокольорових ручок та восьми різнокольорових олівців на дві частини так, щоб у кожній частині було по дві ручки та по чотири олівці?
52. Скільки існує чисел, що є добутками або двох, або трьох, або чотирьох, або п'яти попарно різних натуральних простих чисел, менших за 20?
53. Скільки чотирицифрових чисел можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3, 4, використовуючи кожен з цифр у записі числа не більше одного разу?

54. Скільки парних п'ятицифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, використовуючи кожна з цифр у записі числа не більше одного разу?

55. Скільки п'ятицифрових чисел, кратних п'яти, можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3, 5, використовуючи кожна з цифр у записі числа не більше одного разу?

56. Скільки п'ятицифрових чисел, не кратних п'яти, можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, використовуючи кожна з цифр у записі числа по одному разу?

57. Скільки п'ятицифрових чисел, не кратних п'яти, можна утворити з цифр 0, 3, 5, 7, 9, використовуючи кожна з цифр у записі числа по одному разу?

58. У танцювальному гуртку сім хлопців і сім дівчат. Для участі в конкурсі танців потрібно створити команду з трьох танцювальних пар, яка представлятиме гурток у трьох видах танців, причому кожна з пар буде змагатись лише в одному з цих видів. Скількома способами можна це зробити?

59. Скількома способами групу з восьми чоловік можна розбити на три підгрупи, одна з яких складатиметься з двох чоловік, а дві інші — по три чоловіки?

60. Скільки непарних чисел можна утворити з цифр числа 1478, якщо кожна цифру використовувати в записі числа не більше одного разу?

Група 7

61. Яка ймовірність того, що при киданні гральної кості випаде парне число очок?

62. Яка ймовірність того, що при киданні двох монет одночасно на кожній з них випаде герб?

63. Є п'ять відрізків, довжини яких відповідно дорівнюють 1 см, 3 см, 4 см, 7 см і 9 см. Яка ймовірність того, що із навмання взятих трьох відрізків можна побудувати трикутник?

64. Знайти ймовірність появи простого числа, навмання вибраного з списку натуральних чисел, що не перевищують 20.

65. Яка ймовірність того, що навмання вибране число з списку всіх натуральних чисел, що не перевищують 20, буде дільником числа 20?

66. В ящику лежать 20 однакових на дотик кульок: 12 білих і 8 чорних. Яка ймовірність, що взята навмання кулька буде білою?

67. З комплекту доміно беруть одну кісточку. Яка ймовірність того, що хоча б одна з його частин має шість очок?

68. Яка ймовірність того, що навмання вибране число з списку всіх натуральних чисел, що не перевищують 20, буде взаємно простим з 20?

69. Яка ймовірність того, що навмання вибране двоцифрове натуральне число буде кратним 5?

70. Кидають три монети. Яка ймовірність того, що на кожній монеті випав герб?

Група 8

71. Гральний кубик кинули два рази. Записали двоцифрове число, число десятків якого співпадає з кількістю очок, що випало при першому киданні, а число одиниць — з кількістю очок при другому киданні. Яка ймовірність того, що утворене число буде кратним 4?

72. У скільки раз ймовірність випадання в сумі 7 очок більша за ймовірності випадання в сумі 8 очок при киданні двох гральних костей?

73. Кидають чотири монети. Яка ймовірність того, що випало два герби і дві цифри?

74. На окремих картках виписали цифри 1; 2; 3; 4 і 5. Після їх змішування беруть по одній картці і кладуть всі послідовно підряд. Обчислити ймовірність того, що з цих цифр буде складене парне число.

75. На шістнадцяти однакових картках написано числа від 1 до 16. Навмання вибирають дві картки. Яка ймовірність того, що сума цифр, написаних на картках дорівнює 11?

76. На шести однакових картках написано літери З, О, Л, О, Т, О. З цих карток навмання вибирають три. Яка ймовірність того, що із взятих карток можна скласти слово ЛОТ?

77. На шести однакових картках написано літери М, О, Л, О, К, О. З цих карток навмання вибирають три і ставлять у тому ж порядку, як і беруть. Яка ймовірність того, що утворилось слово ЛОМ?

78. У групі 25 студентів. 15 студентів володіють англійською мовою, 13 — німецькою, а 5 студентів не володіють жодною із цих мов.

Яка ймовірність того, що навмання викликаний студент володіє обома мовами?

79. Знайти ймовірність того, що навмання взяте натуральне число не більше за 100 буде кратним або 3, або 5, або 15.

80. Знайти ймовірність того, що навмання взяте натуральне число не більше за 100 не ділиться ні на 3, ні на 5.

Група 9

81. З скриньки, в якій є 12 білих і 4 чорних куль, виймають навмання дві кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі будуть білими?

82. З скриньки, в якій є 6 білих і 10 чорних куль, виймають навмання дві кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі будуть чорними?

83. З скриньки, в якій є 9 білих і 7 чорних куль, виймають навмання дві кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі будуть різних кольорів?

84. Серед десяти освітлювальних електричних лампочок одна ушкоджена. Яка ймовірність того, що серед трьох ввімкнених лампочок не виявиться ушкодженої?

85. У скриньці лежать 21 кулька білого та чорного кольорів. Визначити число білих кульок у скриньці, якщо ймовірність навмання вийняти дві білі кульки дорівнює 0,5.

86. У скриньці лежать 12 чорних кульок і декілька білих. Скільки білих кульок лежить у скриньці, якщо ймовірність навмання вийняти дві чорні кульки дорівнює 0,55?

87. Серед дев'яти лотерейних білетів виграшних є два. Яка ймовірність того, що серед навмання взятих трьох білетів є один виграшний?

88. Серед шістнадцяти лотерейних білетів виграшних є два. Яка ймовірність того, що серед навмання взятих трьох білетів є два виграшних?

89. Серед шести підручників чотири по алгебрі та два по геометрії. Яка ймовірність того, що серед навмання взятих трьох підручників виявиться два по алгебрі і один по геометрії?

90. Із 16 будівельників 9 є штукатурами, а 7 — малярами. Навмання утворюють бригаду з трьох робітників. Яка ймовірність того, що бригада складатиметься з двох штукатурів і одного маляра?

Література

1. *Бевз Г. П.* Методика викладання математики. – К.: Вища школа, 1977.
2. *Вишневський В. А., Перестюк М. О., Самойленко А. М.* Посібник для вступників до вузів. – К.: Либідь, 1990.
3. *Возняк Г. М.* Диференційовані контрольні роботи з математики 6 кл. – Тернопіль: 2001.
4. *Гайшут О. Г., Литвиненко Г. М.* Розв'язування алгебраїчних задач. – К.: Рад. школа, 1991.
5. *Генкін С. А. та ін.* Ленінградські математичні гуртки. I ч. – К.: ТВІМС, 1997.
6. Задачи по алгебре для 6–8 классов / *Фаддеев Д. К. и др.* – М.: Просвещение, 1987.
7. Задачи по математике. Уравнения и неравенства / *Вавилов В.В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И.* – М.: Наука, 1987.
8. Збірник задач республіканських математичних олімпіад / *За редак. В. І. Михайловського.* – К.: Вища школа, 1979.
9. *Коваленко В. Г. та ін.* Алгебра 9 кл. – К.: Освіта, 1996.
10. *Литвиненко Г. М., Мордкович А. Г.* Практикум по решению математических задач: Алгебра. Тригонометрия. – М.: Просвещение, 1991.
11. *Литвиненко Г. М. та ін.* Збірник завдань для екзамену з математики на атестат про середню освіту. Частина I. Алгебра та початки аналізу – Донецьк: ЛИК, 1997.
12. *Ляпин С. Е.* Сборник задач по элементарной алгебре. – М.: Просвещение, 1973.
13. *Маланюк М. П., Лукавецький В. І.* Олімпіади юних математиків. – К.: Рад. школа, 1985.
14. *Петраков И. С.* Математические олимпиады школьников. – М.: Просвещение, 1982.
15. *Погорелов О. В.* Геометрія 7–9: Планіметрія: Підручник для 7–9 кл. серед. шк. – 4-те вид. – К.: Освіта, 2000.

16. *Погорелов О. В.* Геометрія 10–11: Стереометрія: Підручник для 10–11 кл. серед. шк. – 6-те вид. – К.: Освіта, 2001.
17. Сборник задач по элементарной математике / *Антонов Н. П., Выгодский М. Я., Никитин В. В., Санкин А. И.* – М.: Наука, 1961.
18. Сборник задач по математике для поступающих во втузы: Учеб. пособие / *Егеров В. К., Кордемский Б. А., Зайцев В. В. и др.*; Под ред. *Сканави М. И.* – 6-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 1992.
19. *Слепкань З. І.* Збірник завдань для державної підсумкової ате-стації з алгебри. 9 кл. – Харків: Гімназія, 2001.
20. *Фаддеев Д. К. и др.* Элементы высшей математики для школь-ников. – М.: Наука, 1987.
21. *Ципкин О. Г.* Довідник з математики для середніх навчальних закладів. – К.: Вища школа, 1988.
22. *Черкасов О. Ю.* Математика – Московский лицей. – М.: Янтар-ный сказ, 1996.
23. *Шаригин И. Ф.* Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 10 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1989.
24. *Шаригин И. Ф., Голубев В. И.* : Решение задач: Учеб. пособие для 11 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1991.
25. *Шкіль М. І. та ін.* Алгебра і початки аналізу 10–11 кл. – К.: Зодіак-ЕКО, 1995.

ШАПОЧКА Ігор Валерійович,

ШАПОЧКА Валерій Іванович

ЗБІРНИК КОНКУРСНИХ ЗАВДАНЬ З МАТЕМАТИКИ

Частина 2

Здано до складання 01.03.2004. Підписано до друку 23.04.2004.
Формат 60×84/16. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 7,41. Обл.-вид. арк. 6,55.
Тираж 500 пр. Зам. № 22.

Віддруковано з готових форм у ВАТ "Патент".
88000, м. Ужгород, вул. Гагаріна, 101.