Міністерство освіти України

Ужгородський державний університет

В. Ф. Баранник, Е. С. Дроботенко,
В. П. Рудько, І. В. Шапочка

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Навчальний посібник

Ужгород 1999

ББК В143я73
Л 59
УДК 512.8

Лінійна алгебра / Баранник В. Ф., Дроботенко Е. С., Рудько В. П., Шапочка І. В. – Ужгород: Ужгород. держ. ун-т, 1999. – 92 с. – ISBN 966-7400-05-0.

В основі навчального посібника лежить курс лекцій по лінійній алгебрі, що читався на протязі багатьох років на математичному факультеті УжДУ.

Посібник розрахований на студентів механіко-математичних факультетів університетів.

Р е ц е н з е н т и:

доктор фізико-математичних наук, професор *П. М. Гудивок*
кандидат фізико-математичних наук, доцент *І. В. Семйон*

Рекомендовано до друку редакційно-видавничою радою Ужгородського національного університету (протокол №2 від 6 квітня 1999 року).

ISBN 966-7400-05-0

Зміст

Передмова

Цей посібник написано в допомогу студентам математичного факультету денної та заочної форм навчання, які повинні вивчити загальний курс "Лінійна алгебра" і здати відповідні заліки та іспити.

Студент, що прослухав і вивчив цей курс має знати і вільно володіти такими основними поняттями лінійної алгебри: лінійні простори над довільним полем, підпростори, фактор-простори, лінійні відображення і оператори лінійного простору, нормальні форми матриць, евклідові і унітарні простори, білінійні і квадратичні форми.

Всі ці поняття в тій чи іншій мірі зустрічаються в будь-якому розділі математики. Приклади застосувань лінійної алгебри в геометрії, математичному аналізі і в теорії диференціальних рівнянь розглянуті в останніх трьох параграфах цього посібника.

Відмітимо, що для успішної роботи над посібником необхідні знання теорії детермінантів, теорії систем лінійних рівнянь, алгебри матриць, теорії многочленів над довільним полем в об'ємі курсу "Алгебра і теорія чисел що читається в першому семестрі.

Об'єм кожного параграфа посібника можна умовно розбити на дві частини. Перша частина має довідковий характер, тут даються означення і формулюються основні твердження. Друга частина параграфа складається з вправ, самостійне розв'язання яких дасть можливість читачу зрозуміти та запам'ятати першу частину і виробити певні навики оперувати розглянутими поняттями лінійної алгебри. Таким чином, посібник має характер довідника і самовчителя по курсу "Лінійна алгебра".

Автори щиро вдячні завідувачу кафедрою алгебри Ужгородського державного університету професору П. М. Гудивку за постійну увагу та допомогу, проявлену при написанні цього навчального посібника.

§1. Аксіоми лінійного простору

Нехай P — довільне поле, елементи якого ми будемо позначати малими грецькими літерами, 1 — одиниця поля P, 0 — нуль поля P.

Нехай L — непорожня множина елементів довільної природи, які ми будемо позначати в основному латинськими літерами.

Множина L називається *лінійним простором над полем* P, якщо в множині L введено дії, що задовольняють певним вимогам (аксіомам лінійного простору):

I. *Дія додавання* кожній впорядкованій парі a, b елементів множини L ставить у відповідність єдиний елемент цієї ж множини, який називається *сумою елементів* a *і* b і позначається через $a + b$;

II. *Дія множення* елементів поля P на елементи множини L ставить у відповідність кожному елементу $\alpha \in P$ і кожному елементу $a \in L$ єдиний елемент із L, що називається *добутком* α *на* a і позначається через αa;

III. Аксіоми ЛП (лінійного простору):

1) $(a + b) + c = a + (b + c)$,
2) $a + b = b + a$,
3) існує такий елемент $\bar{0}$ із L, що $a+\bar{0} = a$ для довільного елемента a із L,
4) для будь-якого $a \in L$ існує такий елемент $a' \in L$, що $a + a' = \bar{0}$,
5) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$,
6) $1a = a$,
7) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$,
8) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$

$(a, b, c \in L; \alpha, \beta \in P)$.

Вправа 1. *Користуючись аксіомами ЛП довести:*

a) *існує тільки один елемент* $\bar{0}$ *в* L*, що задовольняє аксіомі* 3)*;*

b) *для кожного* $a \in L$ *існує тільки один елемент* $a' \in L$*, що задовольняє аксіомі* 4)*.*

Елементи ЛП L будемо називати векторами (незалежно від природи цих елементів). Єдиний елемент $\bar{0}$ в L будемо називати *нульовим вектором* простору L. Для кожного вектора $a \in L$ єдиний елемент $a' \in L$, що задовольняє аксіомі 4) будемо називати *протилежним вектором до вектора* a і позначати його через "$-a$".

Вправа 2. *Користуючись аксіомами ЛП, довести:*

1) $0a = \bar{0}$;
2) $\alpha\bar{0} = \bar{0}$;
3) $\alpha a = \bar{0} \Leftrightarrow \alpha = 0$ або $a = \bar{0}$;
4) $(-1)a = -a$.

Різницю двох векторів, суму 3-х векторів, суму 4-х векторів і т. д. визначимо за правилами:

$$a - b = a + (-b) \qquad (a + (-b) = a + (-1)b);$$
$$a + b + c = (a + b) + c;$$
$$a + b + c + d = (a + b + c) + d$$

і т. д.

Будь-яку впорядковану множину векторів із ЛП L будемо називати *системою векторів.* Нехай $a_1, \ldots, a_s$ — система векторів із L, $\alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_s$ — довільні елементи поля P. Вектор $\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_s a_s$ простору L називається *лінійною комбінацією векторів* $a_1, \ldots, a_s$ *відповідно з коефіцієнтами* $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$.

Приклади ЛП

1. *Нульовий простір* $L = \{a\}$ складається із одного вектора a, дії над яким виконуються за правилами:

$$a + a = a, \qquad \alpha a = a \quad (\alpha \in P).$$

Очевидно, елемент a є нульовим вектором.

2. *Простір* P^n. Будь-яка впорядкована сукупність n елементів поля P називається *n-вимірним вектором над полем P.* n-вимірний вектор над полем P, утворений елементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ поля P, будемо позначати через $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ і називати α_1 — 1-ю компонентою, α_2 — 2-ю компонентою і т.д., α_n — n-ю компонентою цього вектора. Два n-вимірні вектори над полем P називаються рівними, якщо рівні відповідні компоненти цих векторів. Позначимо через P^n — множину всіх n-вимірних векторів над полем P. Введемо в множині P^n дії:

I. Якщо $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in P^n$ і $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in P^n$, то визначимо суму $a + b$ за правилом

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n).$$

Очевидно, $a + b \in P^n$.

II. Якщо $\gamma \in P$ і $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in P^n$, то добуток γa визначимо за правилом

$$\gamma a = (\gamma\alpha_1, \ldots, \gamma\alpha_n).$$

Очевидно, $\gamma a \in P^n$.

Вправа 3. *Користуючись аксіомами поля P показати, що вказані дії над елементами із P^n задовольняють аксіомам* 1)–8) *лінійного простору.*

Лінійний простір P^n з вказаними діями над n-вимірними векторами називається *n-вимірним векторним простором над полем P*. В процесі перевірки аксіом ЛП буде встановлено, що нульовим вектором простору P^n буде n-вимірний вектор $(0, \ldots, 0)$, а протилежним вектором $-a$ до n-вимірного вектора $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in P^n$ буде n-вимірний вектор $(-\alpha_1, \ldots, -\alpha_n)$.

3. *Простір $C_{[\alpha,\beta]}$*. Нехай $P = \mathbb{R}$ — поле дійсних чисел, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ і $\alpha < \beta$. Через $C_{[\alpha,\beta]}$ позначимо множину всіх функцій $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, неперервних на сегменті $[\alpha, \beta]$. Дві функції f, $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ називаються рівними, якщо

$$f(x) = g(x) \qquad (x \in [\alpha, \beta]).$$

Введемо дії над елементами із $C_{[\alpha,\beta]}$:

I. Якщо $f, g \in C_{[\alpha,\beta]}$, то суму $f + g$ визначимо за правилом

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (x \in [\alpha, \beta]).$$

II. Якщо $\gamma \in \mathbb{R}$ і $f \in C_{[\alpha,\beta]}$, то добуток γf визначимо за правилом

$$(\gamma f)(x) = \gamma f(x) \qquad (x \in [\alpha, \beta]).$$

Із відомих теорем матаналізу слідує, що $f + g$ і γf — неперервні функції на $[\alpha, \beta]$, тобто $f + g \in C_{[\alpha,\beta]}$ і $\gamma f \in C_{[\alpha,\beta]}$.

Вправа 4. *Показати, що $C_{[\alpha,\beta]}$ є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$ відносно вказаних дій над елементами із $C_{[\alpha,\beta]}$.*

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина в L. Будемо говорити, що множина A *замкнена відносно дій* над векторами, якщо виконуються умови:

1) сума будь-яких векторів із A є також вектором із A;

2) добуток будь-якого елемента із P на будь-який вектор із A є також вектор із A.

Вправа 5. *Показати, що непорожня підмножина A в ЛП L над полем P є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які визначені в просторі L тоді і тільки тоді, коли множина A замкнена відносно дій над векторами.*

§2. Лінійна залежність векторів. Базис і розмірність простору

Нехай L — лінійний простір над полем P. Система векторів $a_1, \ldots, a_s$ простору L називається *лінійно залежною системою*, якщо існують такі елементи $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ поля P, які не рівні нулю одночасно, що виконується рівність

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_s a_s = \bar{0} \quad (\text{нульовий вектор в } L).$$

Система векторів $a_1, \ldots, a_s$ простору L називається *лінійно незалежною системою*, якщо для будь-яких елементів $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ поля P, які не рівні нулю одночасно, лінійна комбінація $\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_s a_s$ не є нульовим вектором простору L.

Система векторів $a_1, \ldots, a_s$ простору L є лінійно незалежною, якщо рівність $\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_s a_s = \bar{0}$ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in P)$ виконується тільки в тому випадку, коли $\alpha_1 = \ldots = \alpha_s = 0$.

Система векторів $a_1, \ldots, a_s$ простору L є лінійно залежною (лінійно незалежною), якщо рівняння $x_1 a_1 + \cdots + x_s a_s = \bar{0}$ з невідомими $x_1, \ldots, x_s$ над полем P має хоча б один ненульовий розв'язок (тільки нульовий розв'язок).

Будемо говорити, що дані вектори $a, b, \ldots, c$ простору L є лінійно залежні (лінійно незалежні), якщо система векторів з них утворена є лінійно залежною (лінійно незалежною).

Ознака лінійної залежності. *Дана система векторів простору L є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли один із векторів цієї системи можна представити у вигляді лінійної комбінації інших векторів даної системи.*

Дві теореми про систему і підсистеми.

1. *Якщо деяка підсистема даної системи векторів лінійного простору L є лінійно залежною, то і вся система також лінійно залежна.*

2. *Якщо дана система векторів лінійного простору L є лінійно незалежною, то і будь-яка підсистема цієї системи також лінійно незалежна.*

Нехай L — лінійний простір над полем P. Простір L називається *нескінченновимірним*, якщо для будь-якого натурального числа n в просторі L існують n лінійно незалежних векторів. Якщо для деякого натурального числа m будь-які m векторів простору L є лінійно залежні, то простір L називається *скінченновимірним* простором. *Розмірністю* скінченновимірного лінійного простору L над полем P називають число, що рівне найбільшій кількості лінійно незалежних векторів простору L. Якщо L — нульовий простір, то вважають, що його розмірність рівна нулю. Розмірність нескінченновимірного простору вважають умовно рівною ∞. Розмірність лінійного простору L над полем P позначають через $\dim_P L$ (або $\dim L$).

Вправа 1. 1) *Показати, що поле P є лінійним простором над полем P. Знайти* $\dim_P P$. 2) *Показати, що поле комплексних чисел $\mathbb{C}$ є лінійним простором над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ і $\mathbb{C}$ є лінійним простором над полем раціональних чисел $\mathbb{Q}$. Знайти* $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ *і* $\dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}$.

Нехай L — лінійний простір над полем P. Система векторів a_1, $a_2, \ldots, a_s$ простору L називається *базисом простору* L, якщо виконуються такі дві умови:

1) система $a_1, \ldots, a_s$ є лінійно незалежною;

2) будь-який вектор простору L є лінійною комбінацією системи $a_1, \ldots, a_s$.

Теорема про лінійні комбінації. *Серед лінійних комбінацій даних s векторів існує не більше як s лінійно незалежних.*

Наслідок 1 (Теорема про базис і розмірність). *В скінченновимірному ненульовому лінійному просторі L над полем P існують базиси. Число векторів будь-якого базиса простору L рівне* $\dim_P L$.

Простір P^n є скінченновимірним лінійним простором над полем P, $\dim_P P^n = n$. Система n-вимірних векторів:

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, \ldots, 0, 0), \quad \ldots, \quad e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

є базисом простору P^n. Цей базис називається *канонічним базисом* простору P^n.

Вправа 2. *Показати, що дані n n-вимірних вектори простору P^n утворюють базис цього простору тоді і тільки тоді, коли детермінант, складений з компонент даних векторів, відмінний від нуля.*

Вправа 3. *Нехай $a_1, \ldots, a_s$ довільна система векторів простору L. Показати, що справедливе лише одне із наступних тверджень:*

1) *система $a_1, \ldots, a_s$ — лінійно залежна;*

2) *система $a_1, \ldots, a_s$ — базис простору L;*

3) *існує вектор $a \in L$ такий, що система $a_1, \ldots, a_s, a$ є лінійно незалежною.*

Наслідок. *Будь-яку лінійно незалежну систему векторів скінченновимірного простору L над полем P можна включити в деякий базис цього простору.*

§3. Розклад вектора по базису. Формули перетворення координат

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P і система векторів $a_1, \ldots, a_n$ — базис простору L ($n = \dim_P L$).

Теорема про розклад. *Для кожного вектора a простору L існує і причому тільки одна система елементів $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ поля P така, що вектор a представляється у вигляді $a = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n$.*

Одержане представлення вектора a називається *розкладом вектора по базису $a_1, \ldots, a_n$* простору L. Коефіцієнти $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ називаються *координатами вектора a в базисі $a_1, \ldots, a_n$* (α_1 — 1-ша координата, α_2 — 2-га координата і т.д., α_n — n-а координата вектора a). n-вимірний вектор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ будемо називати координатним рядком вектора a. Відмітимо, що координатні рядки базисних векторів $a_1, \ldots, a_n$ співпадають відповідно з векторами $e_1, \ldots, e_n$ канонічного базиса в P^n.

Теорема про дії над векторами в координатній формі. *Нехай в просторі L вибрано базис і вектори простору розкладені по цьому базису. Тоді координати суми векторів рівні сумам відповідних координат цих векторів. Щоб одержати координати добутку елемента поля на вектор простору потрібно координати цього вектора помножити на цей елемент поля.*

Нехай $L = P^n$ і $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in P^n$. Тоді $a = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$. Канонічний базис $e_1, \ldots, e_n$ простору P^n це єдиний базис в якому координати довільного n-вимірного вектора співпадають з відповідними компонентами цього вектора.

Нехай L — лінійний простір розмірності n над полем P, а системи векторів $a_1, \ldots, a_n$; $a'_1, \ldots, a'_n$ — два базиси простору L. Розкладемо вектори одного базиса по другому базису:

$$\begin{gathered}
a'_1 = \tau_{11} a_1 + \tau_{21} a_2 + \cdots + \tau_{n1} a_n, \\
a'_2 = \tau_{12} a_1 + \tau_{22} a_2 + \cdots + \tau_{n2} a_n, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a'_n = \tau_{1n} a_1 + \tau_{2n} a_2 + \cdots + \tau_{nn} a_n,
\end{gathered}$$

де $\tau_{ij} \in P$ $(1 \leq i, j \leq n)$. Тоді матриця

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix}$$

називається *матрицею переходу* від базиса $a_1, \dots, a_n$ до базиса a'_1, $a'_2, \dots, a'_n$ (звернути увагу, як виписується матриця T). Матриця T є невиродженою, а матриця T^{-1} є матрицею переходу від базиса a'_1, $a'_2, \dots, a'_n$ до базиса $a_1, \dots, a_n$. Розкладемо довільний вектор $a \in L$ по обох базисах:

$$a = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n \quad (\alpha_i \in P),$$
$$a = \alpha'_1 a'_1 + \dots + \alpha'_n a'_n \quad (\alpha'_i \in P).$$

Нехай

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \qquad X' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}$$

— координатні стовпці вектора a. Тоді

$$X = TX'.$$

Одержана формула називається формулою (або формулами в розгорнутому вигляді) *перетворення координат* вектора при переході від одного базиса простору до іншого базиса.

Нехай $L = P^n$ і $a_1, \dots, a_n$ — довільний базис із n-вимірних векторів. Записавши ці вектори в стовпці матриці, ми одержимо матрицю переходу від канонічного базиса $e_1, \dots, e_n$ до базиса $a_1, \dots, a_n$.

§4. Ізоморфізм лінійних просторів

Нехай L і L' два лінійні простори над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множин називається *лінійним відображенням* простору L в простір L', якщо виконуються наступні умови:

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \qquad (a, b \in L),$$

$$\varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(a) \qquad (\alpha \in P, a \in L).$$

Відображення $\varphi : L \to L'$ ЛП L в ЛП L' називається *ізоморфізмом*, якщо φ — лінійне відображення лінійних просторів і φ — взаємно однозначне відображення множини L на множину L'. Взаємна однозначність φ означає, що кожний вектор із L' є образом деякого вектора із L і образи різних векторів із L є різними векторами в L'.

Будемо говорити, що лінійний простір L ізоморфний лінійному простору L', якщо існує ізоморфізм $\varphi : L \to L'$ лінійних просторів. Запис $L \cong L'$ означає, що простір L ізоморфний простору L'. Відношення "бути ізоморфними" має такі властивості:

1) $L \cong L$ (рефлексивність);

2) $L \cong L' \Leftrightarrow L' \cong L$ (симетричність);

3) $L \cong L'$, $L' \cong L'' \Rightarrow L \cong L''$ (транзитивність)

(L'' — лінійний простір над полем P).

Класифікаційна теорема. *Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P і $\dim_P L > 0$. Тоді $L \cong P^{\dim_P L}$. Якщо $n \neq m$, то простір P^n не ізоморфний простору P^m.*

Вправа 1. *Нехай $\varphi : L \to L'$ ізоморфізм лінійних просторів L і L' над полем P і $a_1, \dots, a_s$ — система векторів простору L. Показати, що ця система лінійно залежна, або лінійно незалежна, або є базисом в L тоді і тільки тоді, коли система образів $\varphi(a_1), \dots$ $\dots, \varphi(a_s)$ лінійно залежна, або лінійно незалежна, або є базисом в L'.*

Вправа 2. *Нехай $\mathbb{R}^{n*}$ — множина всіх n-вимірних векторів над полем $\mathbb{R}$, компоненти яких є додатні дійсні числа. Введемо в $\mathbb{R}^{n*}$ дії:*

i) якщо $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $b = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{n*}$, то $a + b = (\alpha_1\beta_1, \dots, \alpha_n\beta_n)$;

ii) якщо $\gamma \in \mathbb{R}$ і $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n*}$, то $\gamma a = (\alpha_1^\gamma, \dots, \alpha_n^\gamma)$.

1) *Показати, що $\mathbb{R}^{n*}$ є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$ відносно даних дій.*

2) *Який вектор є нульовим в $\mathbb{R}^{n*}$?*

3) *Який вектор є протилежним до вектора $a = (\alpha_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n*}$?*

4) *Показати, що $\mathbb{R}^{n*} \cong \mathbb{R}^n$.*

§5. Підпростори лінійного простору

Нехай L — лінійний простір над полем P. Непуста підмножина A в L називається *підпростором* в L, якщо множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L.

Вправа 1. *Непуста підмножина A в L є підпростором в L тоді і тільки тоді, коли множина A замкнена відносно дій над векторами.*

Ознака підпростору. *Непуста підмножина A в лінійному просторі L над полем P є підпростором в L тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів a та b із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha a + \beta b$ належить A.*

Приклади підпросторів

1. $A = \{\bar{0}\}$ і $A = L$ є підпросторами в L (це так звані тривіальні підпростори).

2. Нехай $a_1, \ldots, a_s$ — система векторів із L. Позначимо через

$$\langle a_1, \ldots, a_s \rangle = \{\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_s a_s \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_s \in P\}$$

— множину всіх лінійних комбінацій системи $a_1, \ldots, a_s$. Тоді множина $\langle a_1, \ldots, a_s \rangle$ є підпростором в L. Цей підпростір називається *лінійною оболонкою*, натягнутою на систему $a_1, \ldots, a_s$.

3. Простір розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь від n невідомих над полем P є підпростором в P^n.

Вправа 2. *Нехай L скінченновимірний лінійний простір над полем P. Показати, що будь-який підпростір в L є лінійною оболонкою, натягнутою на деяку систему векторів простору L.*

Вправа 3. *Показати, що будь-який підпростір в P^n є простором розв'язків деякої системи лінійних однорідних рівнянь від n невідомих над полем P.*

Вправа 4. *Дано систему $a_1, \ldots, a_s$ n-вимірних векторів над полем P. Знайти систему лінійних однорідних рівнянь від n невідомих над полем P, простір розв'язків якої співпадає з $\langle a_1, \ldots, a_s \rangle$.*

Розв'язання. Запишемо систему лінійних однорідних рівнянь від n невідомих, матриця якої складається із рядків $a_1, \ldots, a_s$. Знайдемо фундаментальну систему розв'язків цієї ситеми рівнянь. Нехай $b_1, \ldots, b_k$ — одна з фундаментальних ситем розв'язків. Запишемо вектори $b_1, \ldots, b_k$ в рядки матриці. Система лінійних однорідних рівнянь з одержаною матрицею буде шуканою.

Дії над підпросторами. Нехай A, B — непусті підмножини в ЛП L над полем P. Через $A+B$ позначимо множину всіх векторів вигляду $x+y$, де x пробігає всю множину A, а y пробігає множину B. $A+B$ називається *сумою множин A і B*. Множина всіх векторів спільних для A і B називається *перетином множин A та B* і позначається через $A\cap B$.

Теорема про суму і перетин підпросторів. *Сума і перетин підпросторів в L є підпросторами в L. Якщо A і B скінченновимірні підпростори в L, то* $\dim_P(A+B)=\dim_P A+\dim_P B-\dim_P(A\cap B)$.

Сума $A+B$ підпросторів A і B в L називається *прямою сумою*, якщо для кожного вектора $z\in A+B$ існує тільки один вектор $x\in A$ і тільки один вектор $y\in B$ такі, що $z=x+y$.

Ознака прямої суми. *Сума $A+B$ підпросторів A і B є прямою сумою тоді і тільки тоді, коли перетин $A\cap B$ цих підпросторів є нульовим підпростором.*

Вправа 5. *Довести, що сума $A+B$ підпросторів A і B є прямою сумою тоді і тільки тоді, коли існує тільки один вектор a із A і тільки один вектор b із B такі, що $a+b=\bar{0}$.*

Вправа 6. *Нехай A, B скінченновимірні підпростори в просторі L. Довести, що сума $A+B$ є прямою тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:* 1) $\dim(A\cap B)=0$; 2) $\dim(A+B)=\dim A+\dim B$.

Вправа 7. *Довести, що простір L є прямою сумою своїх підпросторів A і B тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні дві умови:* 1) $A+B=L$; 2) $A\cap B=\{\bar{0}\}$.

Вправа 8. *Нехай A — нетривіальний підпростір скінченновимірного лінійного простору L над полем P. Довести, що існує підпростір B в L, такий, що L є прямою сумою підпросторів A і B.*

Вправа 9. *Нехай дано систему лінійних однорідних рівнянь від n невідомих над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ і матриця A цієї системи відмінна від нульової. Довести, що простір $\mathbb{R}^n$ є прямою сумою простору розв'язків цієї ситеми рівнянь і лінійної оболонки, натягнутої на рядки матриці A.*

Будемо говорити, що лінійний простір L над полем P є прямою сумою своїх ненульових підпросторів $A_1,\ldots,A_s$, якщо для кожного вектора $x\in A$ існує рівно по одному вектору $x_1\in A_1,\ldots,x_s\in A_s$ таких, що $x=x_1+\cdots+x_s$.

§6. Суміжні класи по підпростору. Фактор-простір

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L і $x \in L$. Множина $x + A = \{x + a \,|\, a \in A\}$ називається *суміжним класом* простору L по підпростору A з представником класу x.

Приклад суміжного класу

Нехай дано сумісну систему лінійних неоднорідних рівнянь від n невідомих над полем P і n-вимірний вектор b є розв'язком цієї системи. Нехай A — простір розв'язків відповідної (даній системі) системи лінійних однорідних рівнянь. Тоді A — підпростір в P^n, а суміжний клас $b + A$ є множиною всіх розв'язків даної системи рівнянь.

Вправа 1. *Нехай A — нетривіальний підпростір в P^n і b — довільний n-вимірний вектор із P^n. Знайти таку систему лінійних неоднорідних рівнянь від n невідомих над полем P, щоб множина розв'язків цієї ситеми співпадала б з суміжним класом $b + A$.*

Розв'язання. Знайдемо систему лінійних однорідних рівнянь від n невідомих над полем P, простір розв'язків якої співпадає з A (див. вправу 4 §§5.). Одержана система однорідних рівнянь буде відповідною для шуканої системи неоднорідних рівнянь. Нам залишилось знайти тільки вільні члени цих рівнянь. Для цього в кожне із знайдених рівнянь підставимо вектор b (замість невідомих — відповідні компоненти вектора b). Знайдений при цьому елемент поля P буде вільним членом відповідного неоднорідного рівняння шуканої системи рівнянь.

Властивості суміжних класів по даному підпростору. Нехай A — підпростір в лінійному просторі L і x, $y \in L$. Тоді

1) якщо $x \in A$, то $x + A = A$;
2) якщо $x + A \neq y + A$, то перетин $(x + A) \cap (y + A)$ є пустою множиною;
3) $x + A = y + A \Leftrightarrow x - y \in A$;
4) $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$, тобто сума суміжних класів по підпростору A є суміжний клас по цьому підпростору;
5) $\gamma(x + A) \subseteq \gamma x + A$ $(\gamma \in P)$ і якщо $\gamma \neq 0$, то $\gamma(x + A) = \gamma x + A$.

Введемо позначення $L/A = \{x + A \,|\, x \in L\}$ для множини всіх суміжних класів простору L по даному в ньому підпростору A.

Теорема. *Множина L/A є лінійним простором над полем P відносно дії додавання суміжних класів*

$$(x + A) + (y + B) = (x + y) + A \qquad (x, y \in L)$$

та дії множення суміжних класів на елементи поля P, що виконується за таким правилом

$$\gamma(x + A) = \gamma x + A \qquad (\gamma \in P, x \in L).$$

Лінійний простір L/A над полем P називається *фактор-простором* простору L по його підпростору A.

Теорема про розмірність трьох просторів. *Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P, A — підпростір в L і L/A — фактор-простір простору L по підпростору A. Тоді* $\dim_P L = \dim_P A + \dim_P(L/A)$.

Вправа 2. *Нехай в умовах попередньої теореми система суміжних класів B_1, ..., B_s є базисом в L/A і b_1, ..., b_s — система представників цих класів ($b_i \in L$, $B_i = b_i + A$ $(i = 1, \ldots, s)$). Довести, що якщо систему b_1, ..., b_s доповнити базисом простору A, то ми одержимо деякий базис всього простору L.*

Відмітимо, що $L/\{\bar{0}\} = L$ і L/L — нульовий простір.

§7. Лінійні відображення лінійних просторів

Вправа 1. *Відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L над полем P в лінійний простір L' над полем P є лінійним відображенням тоді і тільки тоді, коли $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$ для довільних векторів x, y простору L та довільних елементів α, β поля P.*

Найпростіші властивості лінійного відображення. Нехай $\varphi : L \to L'$ лінійне відображення ЛП L в ЛП L' над полем P. Тоді

1) $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}'$ ($\bar{0}$ — нуль в L, $\bar{0}'$ — нуль в L');
2) $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ $(x \in L)$;
3) якщо a_1, ..., $a_s \in L$ і α_1, ..., $\alpha_s \in P$, то $\varphi(\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_s a_s) = \alpha_1\varphi(a_1) + \cdots + \alpha_s\varphi(a_s)$;
4) якщо a_1, ..., a_s — лінійно залежна система векторів із L, то система $\varphi(a_1)$, ..., $\varphi(a_s)$ їхніх образів також лінійно залежна;

5) система $a_1, \ldots, a_s$ із L лінійно незалежна, якщо система образів $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_s)$ є лінійно незалежною.

Нехай $\varphi : L \to L'$ — лінійне відображення ЛП L в ЛП L'. Наступна множина

$$Ker\,\varphi = \{x \in L \,|\, \varphi(x) = \bar{0}'\}$$

(тобто множина всіх тих векторів із L образи яких рівні нульовому вектору в L') називається *ядром відображення* φ, а множина

$$Im\,\varphi = \{\varphi(x) \,|\, x \in L\}$$

(тобто множина всіх векторів із L', які є образами векторів із L) називається *образом відображення* φ.

Основна теорема про гомоморфізми для лінійних відображень. *Нехай $\varphi : L \to L'$ лінійне відображення лінійного простору L над полем P в лінійний простір L' над полем P. Тоді*

1) *$Ker\,\varphi$ — підпростір в L;*
2) *$Im\,\varphi$ — підпростір в L';*
3) *$L/Ker\,\varphi \cong Im\,\varphi$.*

Вправа 2. *Нехай L скінченновимірний лінійний простір над полем P, L' — довільний лінійний простір над полем P і $\varphi : L \to L'$ — лінійне відображення. Показати, що*

$$\dim_P L = \dim_P Ker\,\varphi + \dim_P Im\,\varphi.$$

Теорема про існування і єдиність лінійного відображення. *Нехай L скінченновимірний лінійний простір над полем P з базисом $a_1, \ldots, a_n$ і L' — довільний лінійний простір над полем P. Тоді для будь-якої системи n векторів $b_1, \ldots, b_n$ простору L' існує і тільки одне лінійне відображення $\varphi : L \to L'$ таке, що $\varphi(a_1) = b_1$, $\varphi(a_2) = b_2, \ldots, \varphi(a_n) = b_n$.*

Доведення (основний момент). Розкладемо всі вектори простору L по базису $a_1, \ldots, a_n$. Нехай $a \in L$ і $a = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n$ ($\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in P$). Покладемо $\varphi(a) = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$. Залишилось перевірити, що φ задовольняє вимогам теореми. Для цього (як окрема вправа) показати, що

1) φ є відображенням множини L в множину L';
2) для відображення φ виконуються обидві умови лінійності;

3) $\varphi(a_1) = b_1, \ldots, \varphi(a_n) = b_n$;

4) φ є єдиним лінійним відображенням, що задовольняє попередній умові.

Відмітимо, що доводити 2) не перевіривши 1) недопустимо. При доведенні єдиності відображення φ потрібно використати поняття рівності відображень. За означенням два відображення φ і ψ рівні, якщо вони мають спільну множину визначення, спільну множину значень і задовольняють умові $\varphi(x) = \psi(x)$ для всіх x із множини визначення. Наприклад, доведення тотожності є перевіркою на рівність двох відображень.

Матриця лінійного відображення. Нехай L і L' — скінченновимірні лінійні простори над полем P, $\dim L = n$, $\dim L' = m$ і $\varphi : L \to L'$ — лінійне відображення. Виберемо в просторах L і L' по базису: $a_1, \ldots, a_n$ — базис в L; $b_1, \ldots, b_m$ — базис в L'. Розкладемо образи базисних векторів із L по базису простору L':

$$\begin{aligned}
\varphi(a_1) &= \alpha_{11}b_1 + \alpha_{21}b_2 + \cdots + \alpha_{m1}b_m,\\
\varphi(a_2) &= \alpha_{12}b_1 + \alpha_{22}b_2 + \cdots + \alpha_{m2}b_m,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi(a_n) &= \alpha_{1n}b_1 + \alpha_{2n}b_2 + \cdots + \alpha_{mn}b_m
\end{aligned}$$

($\alpha_{ij} \in P$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$). Із коефіцієнтів цих розкладів складемо матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Відмітимо, що i-ий стовпець матриці A є координатним стовпцем вектора $\varphi(a_i)$ ($i = 1, \ldots, n$). Матриця A називається *матрицею лінійного відображення* φ *в базисах* $a_1, \ldots, a_n$ і $b_1, \ldots, b_m$ просторів L і L'. Нехай x довільний вектор із L і $x = x_1a_1 + \cdots + x_na_n$ ($x_i \in P$, $i = 1, \ldots, n$) — розклад вектора x по базису $a_1, \ldots, a_n$. Розкладемо образ $\varphi(x)$ по базису $b_1, \ldots, b_m$ в L': $\varphi(x) = y_1b_1 + \cdots + y_mb_m$ ($y_i \in P$, $i = 1, \ldots, m$). Нехай X — стовпець координат вектора x, а Y — стовпець координат його образу $\varphi(x)$. Тоді

$$Y = AX.$$

Наведена формула називається *формулою для координат образу вектора* при лінійному відображенні φ.

Зв'язок матриць лінійного відображення при заміні базисів. Нехай в просторах L і L' з базисами $a_1, \ldots, a_n$ і $b_1, \ldots, b_m$ вибрані нові базиси: $a'_1, \ldots, a'_n$ і $b'_1, \ldots, b'_m$. Нехай A' — матриця відображення φ в цих базисах. Тоді:

$$A' = S^{-1}AT,$$

де S — матриця переходу від базиса $b_1, \ldots, b_m$ до базиса $b'_1, \ldots, b'_m$ в просторі L', а T — матриця переходу від базиса $a_1, \ldots, a_n$ до базиса $a'_1, \ldots, a'_n$ в L.

Вправа 3. *Нехай L і L' лінійні простори над полем P, $n = \dim L$, $m = \dim L'$ і дано довільну прямокутну $m \times n$-матрицю A над полем P (m рядків і n стовпців). Побудувати лінійне відображення $\varphi : L \to L'$, яке в наперед вибраних базисах просторів L і L' буде мати матрицю A.*

Розв'язання. Нехай в просторах L і L' вибрано базиси: $a_1, \ldots$ $\ldots, a_n$ — базис в L, $b_1, \ldots, b_m$ — базис в L'. Спочатку задамо образи базисних векторів, а саме, покладемо

$$\varphi(a_i) = \alpha_{1i}b_1 + \cdots + \alpha_{mi}b_m,$$

де $\alpha_{1i}, \ldots, \alpha_{mi}$ — i-й стовпець матриці A ($i = 1, \ldots, n$). Розкладемо вектори простору L по базису. Нехай $x \in L$ і $x = x_1a_1 + \cdots + x_na_n$ ($x_i \in P$, $i = 1, \ldots, n$). Тепер покладемо $\varphi(x) = x_1\varphi(a_1) + \cdots + x_n\varphi(a_n)$ ($x \in L$). Відображення φ задано на всіх векторах простору L. Залишилось показати, що φ — лінійне відображення $L \to L'$ і, що його матриця в даних базисах співпадає з матрицею A.

Вправа 4. *Лінійне відображення $\varphi : P^n \to P^m$ в канонічних базисах просторів P^n і P^m має матрицю A. Знайти $Ker\,\varphi$ і $Im\,\varphi$.*

Розв'язання. $Im\,\varphi$ співпадає з лінійною оболонкою, натягнутою на стовпці матриці A, а $Ker\,\varphi$ співпадає з простором розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь з матрицею A.

§8. Дії над лінійними відображеннями та їх зв'язок з діями над матрицями

Нехай L і L' — довільні лінійні простори над одним полем P. Множина всіх лінійних відображень із ЛП L в ЛП L' позначається через $Hom_P(L, L')$. Введемо на цій множині дії додавання відображень і множення відображень на елементи поля P. Нехай φ і ψ лінійні відображення простору L в L'. Сума $\varphi + \psi$ визначається як відображення, що діє за правилом

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) \qquad (x \in L).$$

Нехай $\alpha \in P$. Добуток $\alpha\varphi$ визначається як відображення, що діє за правилом

$$(\alpha\varphi)(x) = \alpha\varphi(x) \qquad (x \in L).$$

Вправа 1. *Показати, що $\varphi+\psi$ і $\alpha\varphi$ є лінійними відображеннями простору L в простір L'.*

Теорема про простір відображень. *Множина $Hom_P(L, L')$ всіх лінійних відображень простору L в простір L' є лінійним простором над полем P відносно дій додавання лінійних відображень і множення лінійних відображень на елементи поля P.*

Доведення полягає в перевірці всіх восьми аксіом лінійного простору. Наприклад, нехай φ, $\psi \in Hom_P(L, L')$. Тоді

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) = \psi(x) + \varphi(x) = (\psi + \varphi)(x) \qquad (x \in L).$$

Отже $\varphi+\psi = \psi+\varphi$. Зупинимось на 3-й і 4-й аксіомах. Нульовим елементом в $Hom_P(L, L')$ є *нульове відображення.* За означенням це відображення кожний вектор простору L переводить у нульовий вектор простору L'. *Протилежним відображенням* до $\varphi \in Hom_P(L, L')$ є (за означенням) відображення φ' таке, що $\varphi'(x) = -\varphi(x)$ $(x \in L)$ (далі φ' буде позначатись через $-\varphi$).

Нехай L'' ще один лінійний простір над полем P і $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — відображення просторів. Поставимо у відповідність кожному вектору $x \in L$ вектор $\psi(\varphi(x))$ простору L''. Ця відповідність є відображенням простору L в простір L''. Це відображення називається *добутком відображень* φ і ψ і позначається через $\psi\varphi$. Отже за означенням

$$(\psi\varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) \qquad (x \in L).$$

Теорема про добуток лінійних відображень. *Якщо $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів, то добуток $\psi\varphi : L \to L''$ є лінійним відображенням ЛП L в ЛП L''.*

Нехай L і L' — скінченновимірні лінійні простори над полем P і $Hom_P(L, L')$ — лінійний простір лінійних відображень $L \to L'$. Виберемо в просторі L і L' по базису: $a_1, \ldots, a_n$ — базис в L ($n = \dim_P L$), $b_1, \ldots, b_m$ — базис в L' ($m = \dim_P L'$). Для кожного лінійного відображення $\varphi : L \to L'$ позначимо через A_φ матрицю цього відображення у вибраних базисах просторів L і L'. Тоді, якщо φ і ψ є лінійними відображеннями простору L в L', то

$$A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi, \qquad A_{\alpha\varphi} = \alpha A_\varphi \quad (\alpha \in P).$$

Ці рівності встановлюють зв'язок дій над лінійними відображеннями з діями над матрицями.

Нехай L'' скінченновимірний простір над полем P і $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення. Виберемо в L'' базис $c_1, \ldots, c_k$ ($k = \dim_P L''$). Нехай A_φ — матриця відображення φ в базисах $a_1, \ldots$ $\ldots, a_n$ і $b_1, \ldots, b_m$ просторів L і L', A_ψ — матриця відображення ψ в базисах $b_1, \ldots, b_m$ і $c_1, \ldots, c_k$ просторів L' і L'', $A_{\psi\varphi}$ — матриця добутку $\psi\varphi$ відображень φ і ψ в базисах $a_1, \ldots, a_n$ і $c_1, \ldots, c_k$ просторів L і L''. Тоді $A_{\psi\varphi} = A_\psi A_\varphi$.

Вправа 2. 1) *Нехай $M_{m\times n}(P)$ — множина всіх прямокутних $m \times n$-матриць над полем P. Показати, що $M_{m\times n}(P)$ є лінійним простором над P відносно дій додавання матриць і множення матриць на елементи поля.* 2) *Нехай L і L' лінійні простори над полем P, $n = \dim_P L$, $m = \dim_P L'$. Показати, що має місце ізоморфізм*

$$Hom_P(L, L') \cong M_{m\times n}(P)$$

лінійних просторів. Побудувати хоча б один такий ізоморфізм.

Вправа 3. *Нехай L — лінійний простір над полем P і $n = \dim_P L$. Показати, що $Hom_P(L, P) \cong P^n$.*

Розв'язання. Виберемо базис $a_1, \ldots, a_n$ в просторі L. Поставимо у відповідність кожному лінійному відображенню $\varphi : L \to P$ n-вимірний вектор $(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n))$ над полем P. Ця відповідність є ізоморфізмом лінійних просторів.

Простір $Hom_P(L, P)$ називається *спряженим* до простору L і позначається через L^*. Елементи простору L^* називаються лінійними функціоналами на просторі L.

Вправа 4. *Нехай $a \in L$. Для кожного $\varphi \in L^*$ покладемо $a(\varphi) = \varphi(a)$. Тоді $a : L^* \to P$ є відображенням. Показати, що це відображення є лінійним.*

Із вправи 4 випливає, що кожний елемент $a \in L$ можна розглядати як лінійний функціонал на L^*.

Вправа 5. *Знайти умови, при яких різні елементи із L є різними функціоналами на L^*.*

Вправа 6. *Нехай L скінченновимірний лінійний простір над полем P. Показати, що $L = (L^*)^*$ (в цій рівності елеметнти із L розглядаються як функціонали на L^*).*

§9. Лінійні оператори лінійного простору

Відображення $\varphi : L \to L$ лінійного простору L в себе називається *оператором* простору L. Відображення $\varphi : L \to L$ лінійного простору L над полем P називається *лінійним оператором* простору L, якщо виконуються умови:

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \qquad \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) \quad (x, y \in L;\ \alpha \in P).$$

Таким чином, лінійний оператор лінійного простору L це лінійне відображення простору L в себе. Властивості лінійних відображень, розглянуті в §7, переносяться на лінійні оператори лінійного простору. Відмітимо, що якщо $\varphi : L \to L$ лінійний оператор простору L, то ядро $Ker\,\varphi$ і образ $Im\,\varphi$ лінійного оператора φ є підпросторами в просторі L і фактор-простір $L/Ker\,\varphi$ ізоморфний простору $Im\,\varphi$.

Якщо $\varphi, \psi : L \to L$ — лінійні оператори простору L, то сума $\varphi+\psi$, добутки $\alpha\varphi$ ($\alpha \in P$), $\varphi\psi$ і $\psi\varphi$ є лінійними операторами простору L.

Множина $Hom_P(L, L)$ всіх лінійних операторів лінійного простору L над полем P є *алгеброю* над полем P в розумінні наступного означення.

Непорожня множина A називається *алгеброю* над полем P, якщо на ній задані дві бінарні алгебраїчні операції додавання й множення, та оперція множення елементів поля P на елементи множини A і виконуються такі умови: 1) A є кільцем відносно бінарних алгебраїчних оперцій додавання і множення; 2) A є лінійним простором над полем P відносно бінарної алгебраїчної операції додавання і операції множення елементів поля P на елементи множини A; 3) дія множення елементів із A і дія множення елементів із A на елементи поля

P пов'язані співвідношеннями

$$(\alpha a)b = a(\alpha b) = \alpha(ab) \qquad (\alpha \in P;\ a, b \in A).$$

Вправа 1. *Показати, що множина $M_{n\times n}(P)$ всіх квадратних матриць порядку n над полем P є алгеброю відносно операцій додавання матриць, множення матриць на елементи поля P і операції множення матриці на матрицю.*

Нехай L — лінійний простір над полем P. Лінійний оператор ЛП L, що переводить кожний вектор із L в себе називається *одиничним* оператором простору L. Позначимо цей оператор через Id. Отже,

$$Id(x) = x \qquad (x \in L).$$

Нехай $\varphi : L \to L$ — лінійний оператор простору L. Якщо існує лінійний оператор $\varphi' : L \to L$ такий, що $\varphi'\varphi = Id$ (відповідно $\varphi\varphi' = Id$), то φ' називається *лівим оберненим* (відповідно *правим оберненим*) оператором для оператора φ.

Вправа 2. *Якщо для лінійного оператора φ існують лівий обернений і правий обернений, то ці обернені оператори співпадають.*

Лінійний оператор $\varphi : L \to L$ лінійного простору L називається *оборотним оператором*, якщо існує такий лінійний оператор $\varphi' : L \to L$, що $\varphi'\varphi = \varphi\varphi' = Id$. Оператор φ' при цьому називається *оберненим* до оператора φ.

Вправа 3. *Довести, що якщо лінійний оператор $\varphi : L \to L$ лінійного простору L є оборотним, то для нього існує тільки один обернений оператор.*

Обернений оператор до оборотного оператора φ позначається через φ^{-1}.

Відмітимо, що для нескінченновимірного лінійного простору L можуть існувати лінійні оператори, які мають ліві обернені (або праві) і не мають правих (відповідно лівих) обернених.

Вправа 4. *Нехай $L = C^{\infty}_{[0,1]}$ — лінійний простір над полем R всіх нескінченно диференційованих функцій на сегменті $[0,1]$. Розглянемо оператор D диференціюванння і оператор I інтегрування. За означенням, якщо $f \in C^{\infty}_{[0,1]}$, то*

$$(Df)(x) = \tfrac{df(x)}{dx} \quad (x \in [0,1]), \qquad (If)(x) = \int_0^x f(t)dt \quad (x \in [0,1]).$$

1) *Показати, що D і I — лінійні оператори простору $C^{\infty}_{[0,1]}$.*

2) *Знайти ID і DI (один із операторів є одиничним).*

Дві ознаки оборотності оператора. *Лінійний оператор $\varphi : L \to L$ лінійного простору L є оборотним тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:* 1) *φ є ізоморфізмом лінійних просторів,* 2) *$Ker\,\varphi = \{\bar{0}\}$ і $Im\,\varphi = L$.*

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Розглянемо базис $a_1, \ldots, a_n$ простору L і розкладемо образи векторів $a_1, \ldots, a_n$ по цьому ж базису:

$$\begin{gathered}\varphi(a_1) = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \cdots + \alpha_{n1}a_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi(a_n) = \alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + \cdots + \alpha_{nn}a_n\end{gathered}$$

($\alpha_{ij} \in P$; $1 \le i, j \le n$). Квадратна матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

складена із координатних стовпців векторів $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)$, називається *матрицею лінійного оператора φ в базисі $a_1, \ldots, a_n$ простору L.* Формула

$$Y = AX$$

є формулою для координат образу $\varphi(x)$ довільного вектора x із L, X — координатний стовпець вектора x, Y — координатний стовпець вектора $\varphi(x)$ (в базисі $a_1, \ldots, a_n$). Якщо в просторі L вибрати новий базис $a'_1, \ldots, a'_n$, то матрицю A' оператора φ в цьому базисі можна знайти за формулою

$$A' = T^{-1}AT,$$

де T — матриця переходу від базиса $a_1, \ldots, a_n$ до базиса $a'_1, \ldots, a'_n$ простору L. Відмітимо, що одинична матриця є матрицею одиничного оператора в будь-якому базисі простору L. Якщо оператор φ оборотний, то матриці операторів φ і φ^{-1} взаємно обернені (в будь-якому базисі простору L).

Вправа 5. *Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P. Довести, що лінійний оператор $\varphi : L \to L$ є оборотним тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:* 1) *$Ker\,\varphi = \{\bar{0}\}$;* 2) *$Im\,\varphi = L$;* 3) *матриця оператора φ є невиродженою (незалежно від вибору базису).*

§10. Характеристичний многочлен матриці і лінійного оператора

Нехай
$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$
— квадратна матриця порядку n над полем P, λ — невідома над полем P. Матриця
$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$
називається *характеристичною матрицею* для матриці A (E — одинична матриця порядку n). Детермінант $|A-\lambda E|$ матриці $A-\lambda E$ називається *характеристичним многочленом матриці* A. Це многочлен степеня n від невідомої λ над полем P:
$$|A-\lambda E| = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\gamma_1\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^{n-k}\gamma_k\lambda^k + \dots + \gamma_n.$$
Коефіцієнт γ_k є сумою всіх тих мінорів порядку k, які нанизані на діагональ матриці A (тобто діагоналі цих мінорів містяться в діагоналі матриці A) ($k = 1, 2, \dots, n$). Відмітимо, що $\gamma_n = |A|$, а $\gamma_1 = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{nn}$ називається *слідом* матриці A і позначається через $tr\,A$.

Для $n=2$ і $n=3$ характеристичні многочлени мають вигляд:
$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (\alpha_{11}+\alpha_{22})\lambda + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix},$$
$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33})\lambda^2 -$$
$$-\left(\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}\right)\lambda + |A|.$$

Квадратні матриці A і B порядку n над полем P називаються *подібними матрицями*, якщо існує така невироджена порядку n над полем P матриця T, що $B = T^{-1}AT$.

Теорема. *Характеристичні многочлени подібних матриць співпадають.*

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P, $\varphi : L \to L$ — лінійний оператор цього простору і A — матриця оператора φ в деякому базисі простору L. Характеристичний многочлен $|A - \lambda E|$ матриці A називається *характеристичним многочленом оператора* φ.

Вправа 1. *Довести, що характеристичний многочлен оператора φ не залежить від вибору матриці A (вірніше від вибору базиса простору L для знаходження цієї матриці).*

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P, φ — лінійний оператор довільного лінійного простору L над полем і

$$f(\lambda) = \alpha_0 \lambda^t + \alpha_1 \lambda^{t-1} + \cdots + \alpha_t \qquad (\alpha_i \in P)$$

— многочлен над полем P. Тоді

$$f(A) = \alpha_0 A^t + \alpha_1 A^{t-1} + \cdots + \alpha_t E$$

є квадратною матрицею порядку n над полем P, а

$$f(\varphi) = \alpha_0 \varphi^t + \alpha_1 \varphi^{t-1} + \cdots + \alpha_t Id$$

є лінійним оператором простору L. Вираз $f(A)$ називається *многочленом від матриці* A (або значенням многочлена $f(\lambda)$ від матриці A), а вираз $f(\varphi)$ — *многочленом від оператора* φ (або значенням многочлена $f(\lambda)$ від оператора φ).

Теорема Гамільтона-Келі (матричний варіант). *Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P і $f(\lambda)$ її характеристичний многочлен. Тоді $f(A)$ є нульовою матрицею.*

Теорема Гамільтона-Келі (операторний варіант). *Нехай $\varphi : L \to L$ — лінійний оператор скінченновимірного лінійного простору L над полем P і $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен оператора φ. Тоді $f(\varphi)$ є нульовим оператором простору L.*

§11. Будова лінійного простору з оператором

Всюди в цьому параграфі через L буде позначатись скінченновимірний ненульовий лінійний простір над полем P з лінійним оператором $\varphi : L \to L$.

Підпростір $M \subseteq L$ простору L називається *інваріантним* відносно оператора φ, якщо $\varphi(M) \subseteq M$. Лінійний оператор φ всього простору є лінійним оператором і будь-якого інваріантного відносно φ підпростору M в L.

Вправа 1. *Нехай M — інваріантний відносно φ підпростір простору L, $x \in L$ і $x + M$ — довільний суміжний клас простору L по підпростору M. Показати, що $\varphi(x + M) \subseteq \varphi(x) + M$.*

Вправа 2. *Нехай L/M — фактор-простір простору L по інваріантному відносно оператора φ підпростору M. Показати, якщо кожному суміжному класу $x + M$ $(x \in L)$ поставити у відповідність суміжний клас $\varphi(x) + M$, то ця відповідність є лінійним оператором простору L/M.*

Наявність інваріантного відносно φ підпростору M в просторі L приводить до наступних трьох лінійних операторів трьох лінійних просторів:

$\varphi : L \to L$	(даний оператор);
$\bar{\varphi} : M \to M$	(результат звуження області визначення оператора φ з множини L до множини M);
$\hat{\varphi} : L/M \to L/M$	(оператор, про який іде мова у вправі 2).

Вправа 3. *Припустимо, що в просторі L з операторм φ існує нетривіальний інваріантний відносно φ підпростір M. Нехай A і B — матриці операторів $\varphi : M \to M$ і $\hat{\varphi} : L/M \to L/M$ в деяких базисах просторів M і L/M відповідно. Показати, що існує такий базис в просторі L, в якому матриця C оператора $\varphi : L \to L$ буде мати вигляд:*

$$C = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Вправа 4. *В умовах вправи 2 показати, що характеристичний многочлен оператора $\bar{\varphi} : M \to M$ є дільником характеристичного многочлена оператора $\varphi : L \to L$.*

Розв'язання. Із теореми Лапласа слідує, що

$$|C - \lambda E| = |A - \lambda E||B - \lambda E|.$$

Нехай a вектор простору L з оператором $\varphi : L \to L$. Позначимо через $C(a)$ множину всіх лінійних комбінацій векторів системи

$$a,\ \varphi(a),\ \varphi^2(a),\ \ldots$$

Вправа 5. *Показати, що $C(a)$ — інваріантний відносно оператора φ підпростір простору L.*

Інваріантний відносно φ підпростір $C(a)$ простору L називається *циклічним підпростором* (або простором), *породженим вектором a*. Кожний вектор $b \in C(a)$ має вигляд

$$b = \alpha_0 a + \alpha_1 \varphi(a) + \cdots + \alpha_t \varphi^t(a) \qquad (\alpha_0, \ldots, \alpha_t \in P).$$

Нехай $f(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \cdots + \alpha_t\lambda^t \in P[\lambda]$ ($P[\lambda]$ — кільце всіх многочленів від невідомої λ над полем P) і $f(\varphi) = \alpha_0 Id + \alpha_1\varphi + \cdots + \alpha_t\varphi^t$. Тоді $b = f(\varphi)(a)$.

Многочлен $f(\lambda) \in P[\lambda]$ такий, що $f(\varphi)(a) = \bar{0}$ ($a \in L$) називається *анулятором вектора a*. Так як L скінченновимірний простір, то існують ненульові анулятори для кожного вектора $a \in L$.

Вправа 6. *Сума анулягорів вектора a і добуток анулятора вектора a на будь-який многочлен із $P[\lambda]$ будуть також анулягорами вектора a. Показати це.*

Ненульовий многочлен із $P[\lambda]$, старший коефіцієнт якого дорівнює одиниці, назвемо *примітивним многочленом.*

Нехай $a \in L$ ($a \neq \bar{0}$). Примітивний многочлен найменшого степеня, який є анулятором вектора a називається *мінімальним анулятором вектора a.*

Вправа 7. *Нехай $a \in L$ і $a \neq \bar{0}$. Показати, що мінімальний анулятор вектора a ділить будь-який анулятор цього вектора.*

Вправа 8. *Нехай многочлен $f(\lambda) \in P[\lambda]$ є найменшим спільним кратним деяких ненульових анулягорів векторів якого-небудь базиса простору L. Показати, що $f(\varphi)$ є нульовим оператором простору L.*

Із вправи 8 випливає існування ненульових многочленів $f(\lambda) \in$ $\in P[\lambda]$ таких, що $f(\varphi)(L) = \{\bar{0}\}$ (тобто $f(\varphi)(a)$ є нульовим вектором для всіх $a \in L$). Такі многочлени назвемо анулягорами всього простору L. Примітивний многочлен найменшого степеня, який є анулятором всього простору L назвемо *мінімальним многочленом оператора φ*. Мінімальний многочлен оператора φ ділить любий многочлен, що є анулятором простору L.

Вправа 9. *Показати, що мінімальний многочлен оператора φ є найменшим спільним кратним мінімальних ануляторів векторів, які складають базис простору L.*

Вправа 10 (Будова циклічного простору). *Нехай a — ненульовий вектор простору L з оператором φ, $C(a)$ — циклічний підпростір, породжений вектором a і*

$$f(\lambda) = \lambda^s - \alpha_{s-1}\lambda^{s-1} - \dots - \alpha_1\lambda - \alpha_0 \quad (\alpha_0, \dots, \alpha_{s-1} \in P)$$

— мінімальний анулятор вектора a. Показати, що:

1) *вектори a, $\varphi(a)$, ..., $\varphi^{s-1}(a)$ утворюють базис простору $C(a)$;*

2) *матриця оператора φ в цьому базисі має вигляд*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{s-1} \end{pmatrix};$$

3) *характеристичний многочлен оператора $\varphi : C(a) \to C(a)$ з точністю до знака співпадає з мінімальним многочленом оператора φ і співпадає з многочленом $f(\lambda)$.*

Вправа 11 (Теорема Гамільтона-Келі). *Показати, що характеристичний многочлен лінійного оператора $\varphi : L \to L$ простору L є анулятором цього простору.*

Розв'язання. Розглянути циклічні простори, породжені базисними векторами і використати вправу 10 3) та вправу 4.

Наступні означення відіграють центральну роль у будові лінійного простору з оператором.

Лінійний простір L з лінійним оператором $\varphi : L \to L$ називається *розкладним* (*нерозкладним*), якщо в просторі L існують (не існують) такі ненульові інваріантні відносно φ підпростори M і N, що простір L є їхньою прямою сумою, яку надалі будемо позначати через $L = M \oplus N$.

З ознаки прямої суми випливає, що простір L з оператором φ є нерозкладним тоді і тільки тоді, коли будь-які два ненульові інваріантні відносно φ підпростори мають ненульовий перетин.

Вправа 12. *Нехай вектор $a \in L$ $(a \neq \bar{0})$ такий, що його мінімальний анулятор є степенем $f^s(\lambda)$ $(s \geq 1)$* незвідного над полем

P многочлена $f(\lambda)$, $C(a)$ — циклічний підпростір в L, породжений вектором a і M — ненульовий інваріантний відносно оператора $\varphi : C(a) \to C(a)$ підпростір в $C(a)$. Показати, що ненульовий вектор $f^{s-1}(\varphi)(a)$ міститься в M.

Розв'язання. Нехай $b \in M$ і $b \neq \bar{0}$. Тоді існує многочлен $g(\lambda) \in \in P[\lambda]$ такий, що $b = g(\varphi)(a)$. Так як $f(\lambda)$ є незвідним над полем P многочленом, то НСД$\{f^s(\lambda), g(\lambda)\} = f^{s_1}(\lambda)$, де $0 \leq s_1 \leq s$. Існують такі многочлени $u(\lambda)$ і $v(\lambda)$ над полем P, що

$$f^s(\lambda)u(\lambda) + g(\lambda)v(\lambda) = f^{s_1}(\lambda).$$

Тоді $g(\varphi)v(\varphi)(a) = f^{s_1}(\varphi)(a)$ і вектор $f^{s-1}(\varphi)(a) = f^{s-s_1-1}v(\varphi)(b)$ міститься в M.

Лінійний простір L з лінійним оператором $\varphi : L \to L$ називається *примарним простором*, якщо мінімальний многочлен оператора $\varphi : L \to L$ є степенем деякого незвідного над полем P многочлена.

Із вправи 12 витікає, що *примарний циклічний простір є нерозкладним простором.*

Вправа 13. *Нехай мінімальний многочлен $m(\lambda)$ лінійного оператора $\varphi : L \to L$ простору L є добутком $m(\lambda) = m_1(\lambda)m_2(\lambda)$ двох примітивних над полем P многочленів $m_1(\lambda)$ і $m_2(\lambda)$ ненульових степенів. Нехай $L_1 = m_2(\varphi)(L) = \{m_2(\varphi)(a) \mid a \in L\}$ і $L_2 = m_1(\varphi)(L)$. Показати, що:*

1) *L_i — ненульовий інваріантний відносно оператора φ підпростір простору L $(i = 1, 2)$;*
2) *мінімальний многочлен оператора $\varphi : L_i \to L_i$ співпадає з $m_i(\lambda)$ $(i = 1, 2)$;*
3) *якщо многочлени $m_1(\lambda)$ і $m_2(\lambda)$ взаємно прості, то простір L є прямою сумою просторів L_1 і L_2.*

***Доведемо* 3).** Існують многочлени $u(\lambda)$ і $v(\lambda)$ над полем P такі, що

$$m_1(\lambda)u(\lambda) + m_2(\lambda)v(\lambda) = 1.$$

Нехай $x \in L$. Тоді

$$m_1(\varphi)u(\varphi)(x) + m_2(\varphi)v(\varphi)(x) = x,$$

$x_1 = m_1(\varphi)u(\varphi)(x) \in L_2$ і $x_2 = m_2(\varphi)v(\varphi)(x) \in L_1$. Звідси слідує, що $L = L_1 + L_2$. Якщо $x \in L_1 \cap L_2$, то із 2) слідує, що $x = x_1 = x_2 = \bar{0}$. Отже $L_1 \cap L_2 = \{\bar{0}\}$ і $L = L_1 \oplus L_2$.

Наслідок (Теорема про примарний розклад). *Лінійний простір L з лінійним оператором φ є примарним простором або прямою сумою примарних інваріантних відносно оператора φ підпросторів в L.*

Нехай L примарний лінійний простір з оператором φ і мінімальний многочлен $m(\lambda)$ оператора φ є степенем $m(\lambda) = f^s(\lambda)$ деякого незвідного над полем P многочлена $f(\lambda)$. Нехай $a \in L$ і $a \neq \bar{0}$. Тоді мінімальний анулятор вектора a є деяким степенем $f^{s_1}(\lambda)$ многочлена $f(\lambda)$ і $0 \leq s_1 \leq s$. Обов'язково існують такі вектори $a \in L$, що їхні мінімальні анулятори співпадають з $f^s(\lambda)$ — мінімальним многочленом оператора φ. Такі вектори назвемо векторами *найбільшої висоти.*

Вправа 14. *Нехай a — вектор найбільшої висоти в примарному лінійному просторі L з оператором φ, $C(a)$ — циклічний простір в L, породжений вектором a і $L/C(a)$ — фактор-простір простору L по $C(a)$. Припустимо, що $L/C(a) \neq \{\bar{0}\}$ і нехай B ненульовий суміжний клас в L по підпростору $C(a)$. Показати, що в класі B міститься такий вектор a_0, мінімальний анулятор якого співпадає з мінімальним анулятором класу B як елементу простору $L/C(a)$.*

Розв'язання. Нехай $B = b + C(a)$ і $b \notin C(a)$ і $f^t(\lambda)$ — мінімальний анулятор класу B. Тоді $f^t(\hat{\varphi})(B) = C(a)$. Звідси $f^t(\varphi)(b) = g(\varphi)(a)$ для деякого многочлена $g(\lambda) \in P[\lambda]$. Нехай $f^k(\lambda)$ — мінімальний анулятор елемента $g(\varphi)(a)$. Тоді $g(\lambda)$ ділиться на $f^{s-k}(\lambda)$: $g(\lambda) = f^{s-k}(\lambda)g_1(\lambda)$ $(g_1(\lambda) \in P[\lambda])$, і мінімальний анулятор вектора b співпадає з $f^{t+k}(\lambda)$. Так як a — вектор найбільшої висоти, то $t+k \leq s$. Тоді $f^t(\lambda)$ — мінімальний анулятор вектора $b - f^{s-k-t}(\varphi)g_1(\varphi)(a)$, який міститься в класі B.

Вправа 15 (Теорема про розклад примарного простору). *Показати, що будь-який примарний лінійний простір з лінійним оператором є примарним циклічним простром або прямою сумою примарних циклічних підпросторів.*

Розв'язання. Теорема доводиться індуктивно по розмірностях просторів. Приведемо схему доведення. Встановлюємо базу індукції для просторів L з $\dim_P L = 1$. Нехай $n > 1$. Формулюємо індуктивне припущення для всіх примарних просторів, розмірність яких не перевищує $n - 1$. Обгрунтовуємо індуктивний крок. Для цього розглянемо довільний примарний простір L розмірності n і в ньому вектор a_0 найбільшої висоти. Або $L = C(a_0)$, або ненульовий фактор-простір $L/C(a_0)$ має розмірність не більшу ніж $n - 1$. Застосовуємо індуктивне припущення до $L/C(a_0)$ (у випадку коли

$L/C(a_0) \neq \{\bar{0}\}$). Простір $L/C(a_0)$ є прямою сумою циклічних підпросторів $L/C(a_0) = C(B_1) \oplus \cdots \oplus C(B_s)$ $(s \geq 1)$, породжених суміжними класами $B_1, \ldots, B_s$. В кожному класі $B = B_i$ виберемо по вектору $a = a_i$, мінімальний анулятор якого співпадає з мінімальним анулятором класу B_i $(i = 1, \ldots, s)$. Розглянемо циклічні підпростори $C(a_1), \ldots, C(a_s)$, породжені вибраними векторами. Показуємо, що простір L є прямою сумою $L = C(a_1) \oplus \cdots \oplus C(a_s) \oplus C(a_0)$. Тим самим буде обгрунтовано крок індукції і сама індукція завершена.

Основна теорема про лінійні простори з оператором. *Будь-який скінченновимірний лінійний простір з лінійним оператором є примарним циклічним простором або прямою сумою примарних циклічних підпросторів.*

Доведення слідує із теореми про примарний розклад і із теореми про розклад примарного простору.

Теорема про однозначний розклад. *Нехай лінійний простір L з лінійним оператором φ двома способами розкладено в прямі суми примарних циклічних підпросторів:*

$$L = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k = B_1 \oplus \cdots \oplus B_r.$$

Тоді $k = r$ і між множиною $\{A_1, \ldots, A_k\}$ прямих доданків одного розкладу і множиною $\{B_1, \ldots, B_k\}$ прямих доданків другого розкладу існує взаємно однозначна відповідність, при якій характеристичні многочлени оператора φ на відповідних доданках співпадають.

Доведення. Із вправи 12 випливає, що лінійний простір з оператором однозначно розкладається в пряму суму тих примарних просторів, яким відповідають незвідні многочлени. Отже, досить доводити теорему тільки для примарних просторів. Нехай L — примарний простір з лінійним оператором φ, $f^s(\lambda)$ — мінімальний многочлен оператора φ ($f(\lambda)$ — незвідний над полем P многочлен, $s \geq 1$),

$$\begin{aligned} &A_1 = C(a_1), \quad \ldots, \quad A_s = C(a_s) \qquad (a_1, \ldots, a_s \in L), \\ &B_1 = C(b_1), \quad \ldots, \quad B_r = C(b_r) \qquad (b_1, \ldots, b_r \in L) \end{aligned}$$

і a_1 — вектор найбільшої висоти. Нехай $a_1 = x_1 + \cdots + x_r$, де $x_1 \in B_1$, $\ldots$, $x_r \in B_r$. Хоча б один із векторів $x_1, \ldots, x_r$ є вектором найбільшої висоти. Нехай це буде вектор x_1. Тоді $x_1 = g(\varphi)(b_1)$ для деякого многочлена $g(\lambda) \in P[\lambda]$ взаємно простого з $f^s(\lambda)$. Нехай $C = B_2 + B_3 + \cdots + B_r$. Покажемо, що $L = A_1 \oplus C$. Нехай $u(\lambda)$ і $v(\lambda)$ многочлени, які розглядувались у вправі 12. Тоді

$$b_1 = v(\varphi)(a_1) - v(\varphi)(x_2 + \cdots + x_r) \in A_1 + C.$$

Отже $B_1 \subset A_1 + C$. Якщо для деякого многочлена $g_1(\lambda)$ вектор $g_1(\varphi)(a_1) \in C$, тобто

$$g_1(\varphi)(a_1) = g_1(\varphi)g(\varphi)(b_1) + g_1(\varphi)(x_2 + \cdots + x_r) \in C,$$

то $g_1(\varphi)g(\varphi)(b_1) = \bar{0}$. Оскільки b_1 — вектор найбільшої висоти, то $g_1(\lambda)$ ділиться на $f^s(\lambda)$ і, отже, $g_1(\varphi)(a_1) = \bar{0}$. Тим самим показано, що $A_1 \cap C = \{\bar{0}\}$. Тоді

$$L = A_1 \oplus C = A_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_r.$$

Розглянемо фактор-простір L/A_1, оператор $\hat{\varphi} : L/A_1 \to L/A_1$ цього простору і циклічні підпростори $C(a_i + A_1)$, $C(b_j + A_1)$ $(2 \leq i \leq s;$ $2 \leq j \leq r)$ простору L/A_1. Переконуємось в тому, що характеристичний многочлен оператора $\hat{\varphi}$ на підпросторі $C(a_i + A_1)$ в L/A_1 $(2 \leq i \leq s)$ (відповідно на підпросторі $C(b_j + A_1)$, $2 \leq j \leq r$) співпадає з характеристичним многочленом оператора φ на підпросторі $C(a_i) \subset L$ (відповідно на підпросторі $C(b_j) \subset L$). Тоді два прямі розклади

$$L/A_1 = C(a_2 + A_1) \oplus \cdots \oplus C(a_s + A_1) = C(b_2 + A_1) \oplus \cdots \oplus C(b_r + A_1)$$

дають можливість провести належним чином оформлену індукцію по розмірності простору L.

§12. Нормальна форма фробеніуса

Нехай P — довільне поле. Дві квадратні матриці A і B порядку n над полем P називаються *подібними матрицями* над цим полем, якщо існує така невироджена матриця T порядку n над полем P, що $B = T^{-1}AT$. Матриці одного лінійного оператора в різних базисах лінійного простору є подібними матрицями (див. §7).

Відношення подібності матриць має наступні властивості:

1) $A \overset{P}{\sim} A$;

2) $A \overset{P}{\sim} B \Leftrightarrow B \overset{P}{\sim} A$;

3) $A \overset{P}{\sim} B, \quad B \overset{P}{\sim} C \Rightarrow A \overset{P}{\sim} C$.

(символ $\overset{P}{\sim}$ означає подібність матриць над полем P; A, B, C — квадратні матриці порядку n над полем P).

Вправа 1. *Нехай A і B дві квадратні матриці над полем P не обов'язково одного порядку. Показати, що*

1)
$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \overset{P}{\sim} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix};$$

2) *якщо $A \overset{P}{\sim} A'$, то*
$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \overset{P}{\sim} \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Сукупність всіх квадратних матриць над полем P розбивається на класи подібних матриць. В одному класі знаходяться всі матриці, які подібні між собою. Різні класи не перетинаються. Якщо із кожного класу подібних матриць вибрати одну матрицю, то ми одержимо множину так званих нормальних форм. Кожна матриця над полем P подібна деякій із утворених нормальних форм.

Однією із нормальних форм матриць є *нормальна форма Фробеніуса* (НФФ). Перейдемо до її визначення. Нехай

$$f(\lambda) = \lambda^s - \alpha_{s-1}\lambda^{s-1} - \cdots - \alpha_1\lambda - \alpha_0 \quad (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1} \in P)$$

— примітивний многочлен над полем P степеня $s \geq 1$. Наступна матриця порядку s над полем P

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha_{s-1} \end{pmatrix}$$

називається *супровідною матрицею многочлена* $f(\lambda)$. Будемо позначати цю матрицю через $\widetilde{f(\lambda)}$.

Нехай $p(\lambda)$ — примітивний незвідний над полем P многочлен від λ і t — натуральне число. Супровідна матриця $\widetilde{p^t(\lambda)}$ многочлена $p^t(\lambda)$ називається *кліткою Фробеніуса. Нормальною формою Фробеніуса* називається матриця вигляду

$$\begin{pmatrix} \widetilde{p_1^{t_1}(\lambda)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \widetilde{p_2^{t_2}(\lambda)} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \widetilde{p_k^{t_k}(\lambda)} \end{pmatrix},$$

де $p_1(\lambda)$, ..., $p_k(\lambda)$ — незвідні примітивні над полем P многочлени; $p_1^{t_1}(\lambda), \ldots, p_k^{t_k}(\lambda)$ — клітки Фробеніуса і $t_1, \ldots, t_k$ — натуральні числа.

Вправа 2. *Показати, що характеристичний многочлен виписаної нормальної форми Фробеніуса дорівнює добутку* $p_1^{t_1}(\lambda) \cdots p_k^{t_k}(\lambda)$.

Розв'язання. Використати теорему Лапласа і вправу 10 §11.

Теорема про НФФ. *Будь-яка квадратна матриця над полем P подібна деякій нормальній формі Фробеніуса.*

Доведення. Нехай A квадратна матриця над полем P порядку n. Розглянемо довільний лінійний простір L розмірності n над полем P. Нехай a_1, ..., a_n базис в L. Введемо в просторі лінійний оператор $\varphi : L \to L$ таким чином, щоб матриця цього оператора в базисі a_1, ..., a_n співпадала б з матрицею A. Розкладемо простір L з оператором φ в пряму суму примарних циклічних підпросторів: $L = A_1 \oplus \cdots \oplus A_s$. Виберемо новий базис простору L провівши цей базис через базиси циклічних підпросторів A_1, ..., A_s (див. вправу про будову циклічного простору). Матриця оператора $\varphi : C \to C$ на циклічному просторі $C = C(a_i)$ $(1 \le i \le s)$ є кліткою Фробеніуса. Матриця оператора φ в новому базисі буде нормальною формою Фробеніуса.

Вправа 3. *Показати, що дві нормальні форми Фробеніуса подібні тоді і тільки тоді, коли вони складаються з однакових кліток Фробеніуса, розташованих можливо по різному вздовж діагоналей.*

Розв'язання. Нехай A і B — дві нормальні форми Фробеніуса подібні над полем P і T — матриця подібності: $B = T^{-1}AT$. В лінійному просторі L з оператором φ (див. доведення попередньої теореми) розглянемо ще один базис, для якого T є матрицею переходу (від $a_1, \ldots, a_n$). Матриця B буде матрицею оператора φ в новому базисі. Отже матриці A і B визначають два розклади лінійного простору L з оператором φ в прямі суми примарних циклічних підпросторів. Матриці оператора φ на цих підпросторах будуть клітками Фробеніуса, з яких складаються матриці A і B. Нагадаємо, що клітка Фробеніуса визначається своїм характеристичним многочленом однозначно. Завершення доведення слідує із теореми про однозначність розкладу простору з операторами в пряму суму примарних циклічних підпросторів.

Вправа 4 (Критерій подібності матриць). *Дві квадратні матриці над полем P подібні тоді і тільки тоді, коли нормальні форми Фробеніуса цих матриць співпадають з точністю до порядку слідування кліток Фробеніуса вздовж діагоналей цих форм.*

§13. Нормальна форма Жордана

Нехай P — довільне поле і α — елемент поля P. Матриця порядку s над полем P вигляду:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & & & 0 \\ & \alpha & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha & 1 \\ 0 & & & & \alpha \end{pmatrix} = J_s(\alpha)$$

називається *кліткою Жордна* і позначається через $J_s(\alpha)$. Нехай α_1, α_2,... $\alpha_k \in P$; k, s_1, ..., $s_k \in \mathbb{N}$. Матриця вигляду

$$\begin{pmatrix} J_{s_1}(\alpha_1) & & & 0 \\ & J_{s_2}(\alpha_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{s_k}(\alpha_k) \end{pmatrix}$$

називається *нормальною формою Жордана.*

Вправа 1. *Нехай $\alpha \in P$. Показати, що супровідна матриця многочлена $(\lambda - \alpha)^s$ від невідомої λ над полем P подібна над цим полем клітці Жордана $J_s(\alpha)$.*

Розв'язання. В умовах вправи 10 §11 розглянемо випадок, коли $f(\lambda) = (\lambda - \alpha)^s$. Тоді $(\varphi - \alpha)^s(a) = \bar{0}$ і $(\varphi - \alpha)^{s-1}(a) \neq \bar{0}$. В просторі $C(a)$ розглянемо систему векторів:

$$v_1 = (\varphi - \alpha)^{s-1}(a),\ v_2 = (\varphi - \alpha)^{s-2}(a),\ \ldots,\ v_{s-1} = (\varphi - \alpha)(a),\ v_s = a.$$

Ця система буде базисом в $C(a)$ (цей базис називається Жордановим базисом). Матрицею оператора φ в цьому базисі буде $J_s(\alpha)$.

Наслідок 1. *Будь-яка нормальна форма Жордана над полем P подібна над цим полем деякій нормальній формі Фробеніуса. Навпаки, якщо незвідні многочлени, зв'язані з даною формою Фробеніуса, є лінійними многочленами над полем P, то ця форма Фробеніуса подібна формі Жордана.*

Наслідок 2 ((Теорема про НФЖ)). *Якщо характеристичний многочлен квадратної матриці A над полем P розкладається над цим полем в добуток лінійних множників, то матриця A подібна деякій нормальній формі Жордана.*

Теореми для нормальних форм Фробеніуса мають аналоги для нормальних форм Жордана.

Основна теорема про НФЖ. *Нехай P — алгебраїчно замкнене поле. Будь-яка квадратна матриця над полем P подібна деякій нормальній формі Жордана. Дві матриці над полем P подібні тоді і тільки тоді, коли їхні нормальні форми Жордана співпадають з точністю до порядку розташування кліток Жордана вздовж діагоналей цих форм.*

Основна теорема про НФЖ для комплексних матриць. *Будь-яка квадратна матриця над полем комплексних чисел подібна нормальній формі Жордана. Дві комплексні матриці подібні тоді і тільки тоді, коли їхні нормальні форми Жордана співпадають з точністю до порядку розташування кліток Жордана.*

§14. λ-матриці і використання їх для знаходження нормальних форм

Нехай P — довільне поле, $P[\lambda]$ — кільце многочленів від невідомої λ над полем P. Будь-яка прямокутна матриця, елементами якої служать многочлени від λ над полем P, називається *λ-матрицею*.

Елементарними перетвореннями рядків λ-матриці називаються наступні перетворення:

1) додавання до будь-якого рядка λ-матриці будь-якого іншого рядка цієї матриці, домноженого на будь-який многочлен від λ над полем P;
2) множення будь-якого рядка λ-матриці на будь-який елемент поля P, відмінний від нуля;
3) перестановка рядків.

Аналогічно визначаються елементарні перетворення стовпців λ-матриці.

Матрицями елементарних перетворень називаються наступні матриці:

1) $E_{ij}^{(n)}(f(\lambda))$ $(i \neq j)$ — квадратна матриця порядку n, в i-му рядку та j-му стовпці якої стоїть многочлен $f(\lambda) \in P[\lambda]$, а всі інші елементи цієї матриці такі самі як відповідні елементи одиничної матриці порядку n;

2) $E_i^{(n)}(\alpha)$ $(\alpha \in P,\ \alpha \neq 0)$ — квадратна матриця порядку n, на діагоналі якої на i-му місці стоїть ненульовий елемент α поля P, а всі інші елементи матриці $E_i^{(n)}(\alpha)$ такі самі як відповідні елементи одиничної матриці порядку n;
3) $P_{ij}^{(n)}$ $(i \neq j)$ — квадратна матриця порядку n, що одержується із одиничної матриці перестановкою i-го та j-го рядків.

Вправа 1. *Нехай A —довільна λ-матриця з n рядками, B — довільна λ-матриця з n стовпцями, $E_{ij}(f(\lambda)) = E_{ij}^{(n)}(f(\lambda))$ $(f(\lambda) \in \in P[\lambda])$, $E_i(\alpha) = E_i^{(n)}(\alpha)$ $(\alpha \in P,\ \alpha \neq 0)$, $P_{ij} = P_{ij}^{(n)}$ $(i \neq j)$. Показати, що*

1) *добуток $E_{ij}(f(\lambda))A$ є матрицею, що одержується з матриці A додаванням до i-го рядка матриці A її j-го рядка, домноженого на многочлен $f(\lambda)$;*
2) *добуток $BE_{ij}(f(\lambda))$ є матрицею, що одержуєтсья з матриці B додаванням до j-го стовпця матриці B її i-го стовпця, домноженого на $f(\lambda)$;*
3) *добуток $E_i(\alpha)A$ є матрицею, що одержується з матриці A множенням на α i-го рядка матриці A;*
4) *добуток $BE_i(\alpha)$ — є матрицею, що одержується з матриці B множенням на α i-го стовпця матриці B;*
5) *добуток $P_{ij}A$ (добуток BP_{ij}) є матрицею, що одержується з матриці A (з матриці B) перестановкою i-го та j-го рядків (i-го та j-го стовпців) матриці A (матриці B).*

Елементарні дільники λ-матриці. Нехай A — довільна λ-матриця з n рядками і m стовпцями. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $n \leq m$. Нехай $d_1(\lambda), \ldots, d_n(\lambda)$ — найбільші спільні дільники мінорів 1-го, …, n-го порядків матриці A, причому вибрані так, що у випадку $d_i(\lambda) \neq 0$ $(1 \leq i \leq n)$, то $d_i(\lambda)$ — примітивний многочлен. Наступні многочлени:

$$e_1(A) = d_1(\lambda),\ e_2(A) = d_2(\lambda)d_1^{-1}(\lambda) \text{ (якщо } d_1(\lambda) \neq 0),\ \ldots$$

$$\ldots,\ e_s(A) = d_s(\lambda)d_{s-1}^{-1}(\lambda) \text{ (якщо } d_{s-1}(\lambda) \neq 0),$$

$$e_{s+1}(A) = 0,\ \ldots,\ e_n(A) = 0 \text{ (якщо } d_{s+1}(\lambda) = 0,\ s+1 < n)$$

називаються *елементарними дільниками* матриці A.

Канонічним виглядом λ-матриці A називається матриця тих же розмірів, що і матриця A, вигляду

$$\begin{pmatrix} e_1(A) & & & 0 \\ & e_2(A) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e_n(A) \end{pmatrix}.$$

Говорять, що λ-матриця A *еквівалентна* λ-матриці B, якщо існує така послідовність елементарних перетворень рядків і стовпців, в результаті якої з матриці A можна одержати матрицю B.

Теорема про канонічний вигляд. *Будь-яка λ-матриця еквівалентна своєму канонічному вигляду.*

Квадратна λ-матриця A називається *унімодулярною λ-матрицею*, якщо детермінант матриці A є ненульовим елементом поля P (ненульовим многочленом нульового степеня).

Теорема про унімодулярну матрицю. *Квадратна λ-матриця є унімодулярною λ-матрицею тоді і тільки тоді, коли цю матрицю можна представити у вигляді добутку матриць елементарних перетворень.*

Вправа 2. *Показати, що канонічним виглядом унімодулярної λ-матриці є одинична матриця.*

Критерії еквівалентності λ-матриць.

1) *Дві λ-матриці еквівалентні тоді і тільки тоді, коли канонічні вигляди цих матриць співпадають;*
2) *Дві λ-матриці A і B еквівалентні тоді і тільки тоді, коли існують такі унімодулярні λ-матриці T і S, що $A = TBS$.*

Нехай A — квадратна матриця над полем P. λ-матриця $A - \lambda E$ називається *характеристичною матрицею* матриці A.

Критерій подібності матриць над полем. *Квадратні матриці A і B порядку n над полем P подібні над полем P тоді і тільки тоді, коли їхні характеристичні λ-матриці $A-\lambda E$ і $B-\lambda E$ є еквівалентними λ-матрицями.*

Знаходження нормальних форм матриць. Нехай A — квадратна матриця над полем P. Щоб знайти нормальну форму (Фробеніуса чи Жордана) матриці A, знайдемо канонічний вигляд характеристичної λ-матриці $A-\lambda E$. Нехай $e_1(\lambda), \dots, e_s(\lambda)$ — всі відмінні від одиниці, елементарні дільники λ-матриці $A - \lambda E$ і $e(\lambda)$ — один із цих дільників. Знайдемо примарний розклад многочлена $e(\lambda)$:

$$e(\lambda) = q_1^{t_1}(\lambda) \cdots q_r^{t_r}(\lambda),$$

де $q_1(\lambda)$, ..., $q_r(\lambda)$ — примітивні попарно різні незвідні над полем P многочлени. Поставимо у відповідність многочлену $e(\lambda)$ наступну нормальну форму Фробеніуса

$$F(e(\lambda)) = \begin{pmatrix} \widetilde{q_1^{t_1}(\lambda)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \widetilde{q_r^{t_r}(\lambda)} \end{pmatrix}$$

($\widetilde{q_i^{t_i}(\lambda)}$ — супровідна матриця многочлена $q_i^{t_i}(\lambda)$ $(1 \leq i \leq r)$). Введемо позначення $F_i(A) = F(e_i(\lambda))$ $(1 \leq i \leq s)$. Тоді нормальна форма Фробеніуса матриці A має вигляд:

$$\begin{pmatrix} F_1(A) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & F_s(A) \end{pmatrix}$$

Зауваження. Нехай всі незвідні дільники многочленів $e_1(\lambda), \ldots$ $\ldots, e_s(\lambda)$ є лінійними многочленами і

$$e(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{t_1} \cdots (\lambda - \alpha_r)^{t_r} \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in P).$$

Поставимо у відповідність многочлену $e(\lambda)$ нормальну форму Жордана

$$J(e(\lambda)) = \begin{pmatrix} J_{t_1}(\alpha_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{t_r}(\alpha_r) \end{pmatrix}$$

Покладемо $J^{(i)} = J(e_i(\lambda))$. Тоді матриця

$$J(A) = \begin{pmatrix} J^{(1)}(A) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J^{(s)}(A) \end{pmatrix}$$

є нормальною формою Жордана матриці A.

§15. Відшукання НФЖ

Нехай A — квадратна матриця над полем P і порядок матриці дорівнює $n > 1$. Припустимо, що характеристичний многочлен $|A - \lambda E|$ матриці A розкладається над полем P в добуток лінійних множників

$$|A - \lambda E| = \pm(\lambda - \alpha_1)^{t_1} \cdots (\lambda - \alpha_k)^{t_k}$$

($\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — різні корені многочлена $|A-\lambda E|$, що належать полю P).

Покладемо $\alpha = \alpha_i$ $(1 \le i \le k)$. Щоб знайти всі клітки Жордана з діагональним елементом α, що входять в НФЖ(A) потрібно послідовно знаходити ранги $r_i = r(A - \alpha E)^i$ матриць $(A - \alpha E)^i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ На першому кроці знаходимо $r_1 = r(A-\alpha E)$, на другому $r_2 = r(A - \alpha E)^2$ і т.д. Обчислення цих рангів зупиняємо на першому такому кроці $j + 1$, що $r_{j+1} = r(A - \alpha E)^{j+1} = r_j = r(A - \alpha E)^j$. Складемо діаграму

$$D(\alpha) : \begin{array}{cccccccccc} * & * & \ldots & * & & & & & & \\ * & * & \ldots & * & \ldots & * & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & & \\ * & * & \ldots & * & \ldots & * & * & \ldots & * \end{array},$$

помістивши в перший знизу рядок $n - r_1$ зірки, в 2-й $r_1 - r_2$ зірки і т.д. Нехай h_1, h_2 і т.д. висоти цієї діаграми (тобто h_1 — кількіть зірок у 1-му стовпці, h_2 — кількість зірок у 2-му стовпці і т.д.).

Поставимо у відповідність діаграмі $D(\alpha)$ наступну форму Жордана:

$$J(\alpha) = \begin{pmatrix} J_{h_1}(\alpha) & & & 0 \\ & J_{h_2}(\alpha) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{h_t}(\alpha) \end{pmatrix},$$

де t — число стовпців діаграми $D(\alpha)$. Матриця $J(\alpha)$ містить всі клітки Жордана НФЖ(A), які мають α діагональним елементом.

Знайдемо діаграми $D(\alpha_i)$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, k$. Матриця

$$\begin{pmatrix} J(\alpha_1) & & & 0 \\ & J(\alpha_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J(\alpha_t) \end{pmatrix}$$

буде тією нормальною формою Жордана, якій подібна дана матриця A.

Розглянемо приклад матриці A порядку $n = 3$ над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Нехай α_1, α_2, α_3 корені характеристичного многочлена матриці A. В залежності від кратностей цих коренів будемо мати три випадки:

1) α_1, α_2, α_3 — попарно різні. Тоді

$$\text{НФЖ}(A) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix};$$

2) $\alpha_1 = \alpha_2 \neq \alpha_3$. Якщо $r(A - \alpha_1 E) = 1$, тоді

$$\text{НФЖ}(A) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix};$$

Якщо $r(A - \alpha_1 E) = 2$, тоді

$$\text{НФЖ}(A) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix};$$

3) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$. Тоді

$$\text{НФЖ}(A) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

або

$$\text{НФЖ}(A) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

якщо $r(A - \alpha E) = 1$ і

$$\text{НФЖ}(A) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

якщо $r(A - \alpha E) = 2$.

Зауваження. Якщо A — матриця порядку 3 над підполем P поля $\mathbb{C}$ і всі корені α_1, α_2, α_3 належать полю P, то матриця A подібна над полем P одній із вище вказаних нормальних форм Жордана.

Вправа 1. *Розглянути класифікацію форм Жордана комплексних матриць 4-го порядку в залежності від кратностей коренів характеристичних многочленів цих матриць.*

§16. Власні вектори і власні значення лінійного оператора

Нехай L — лінійний простір над полем P і $\varphi : L \to L$ — лінійний оператор простору L. Ненульовий вектор a простору L називається *власним вектором* оператора φ, якщо існує такий елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$. Елемент α поля P називається *власним значенням* оператора φ, якщо існує такий ненульовий елемент a простору L, що $\varphi(a) = \alpha a$. Будемо говорити, що *власний вектор* $a \in L$ оператора φ *належить власному значенню* $\alpha \in P$ цього оператора, якщо $\varphi(a) = \alpha a$. Підкреслимо, що власними векторами оператора φ можуть бути тільки ненульові вектори простору L. Власне значення оператора φ може бути і нульовим елементом поля P.

Вправа 1. *Показати, що власний вектор оператора φ належить тільки одному власному значенню цього оператора.*

Дві теореми про власні вектори і власні значення.

1. *Нехай $\varphi : L \to L$ — лінійний оператор лінійного простору L над полем P, α — власне значення оператора φ ($\alpha \in P$) і L_α — об'єднання множини всіх власних векторів, які належать власному значенню α з нульовим вектором простору L. Тоді L_α — підпростір простору L інваріантний відносно оператора φ.*

2. *Множина власних векторів лінійного оператора $\varphi : L \to L$, які належать попарно різним власним значенням цього оператора є лінійно незалежною системою.*

Вправа 2. *Нехай α і β — різні власні значення лінійного оператора $\varphi : L \to L$. Показати, що $L_\alpha + L_\beta = L_\alpha \oplus L_\beta$.*

Теорема про власні значення лінійного оператора в скінченновимірному лінійному просторі. *Нехай L — скінченновимірний ненульовий лінійний простір над полем P і $\varphi : L \to L$ — лінійний оператор цього простору. Якщо елемент α поля P є власним значенням оператора φ, то α є коренем характеристичного* *многочлена оператора φ. Навпаки, якщо елемент α поля P є коренем характеристичного многочлена оператора φ, то α є власним значенням цього оператора.*

Вправа 3. *Нехай $L = C^{\infty}_{[0,1]}$ — лінійний простір над полем $\mathbb{R}$ нескінченнодиференційованих функцій на сегменті $[0,1]$ і D — оператор диференціювання: $D(f)(x) = \frac{df(x)}{dx}$ $(x \in C^{\infty}_{[0,1]})$. Показати, що любе дійсне число є власним значенням оператора D.*

Вправа 4. *Нехай $L = P^2$ і лінійний оператор $\varphi : L \to L$ в деякому базисі простору L має матрицю*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Показати, що

1) *якщо $P = \mathbb{R}$, то оператор φ не має власних значень;*
2) *якщо $P = \mathbb{C}$, то оператор φ має два власні значення.*

Правило для відшукання власних векторів лінійного оператора скінченновимірного простору. Нехай $\varphi : L \to L$ — лінійний оператор лінійного простору L над полем P. Знайдемо власні вектори оператора φ. Для цього:

1-й крок. Виберемо в просторі L деякий базис $a_1, \ldots, a_n$ і знайдемо матрицю A лінійного оператора φ в цьому базисі.

2-й крок. Знаходимо характеристичний многочлен $|A - \lambda E|$ оператора φ.

3-й крок. Знаходимо всі різні корені $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ многочлена $|A - \lambda E|$, які належать полю P.

4-й крок. Для кожного власного значення $\alpha = \alpha_i$ $(1 \le i \le s)$ складаємо систему лінійних однорідних рівнянь від невідомих $x_1, \ldots, x_n$ з матрицею $A - \alpha E$:

$$(A - \alpha E)X = \bar{0}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо фундаментальну систему розв'язків цієї системи рівнянь. Для кожного розв'язку $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in P)$ із фундаментальної системи розв'язків складемо вектор $b = \gamma_1 a_1 +$

$+\gamma_2 a_2 \cdots + \gamma_n a_n$. Нехай $b_1, \ldots, b_r$ — система векторів простору L, які по цьому правилу одержуються із всіх розв'язків фундаментальної системи. Тоді множина всіх власних векторів оператора φ, які належать власному значенню $\alpha = \alpha_i$ співпадає з множиною всіх лінійних комбінацій $\beta_1 b_1 + \cdots + \beta_r b_r$, де $\beta_1, \ldots$ $\ldots, \beta_r$ — довільні елементи поля P не рівні нулю одночасно.

В наступних трьох вправах використовуються позначення, які зустрічались при встановленні правила відшукання власних векторів.

Вправа 5. *Показати, що* $\dim L_{\alpha_i} = n - r(A - \alpha_i E)$ $(n = \dim L$, $r(A - \alpha_i E)$ *— ранг матриці* $A - \alpha_i E)$.

Вправа 6. *Показати, що в просторі L існує базис з власних векторів оператора φ тоді і тільки тоді, коли*

$$sn - \sum_{i=1}^{s} r(A - \alpha_i E) = n$$

(s — число всіх різних коренів характеристичного многочлена $|A - \lambda E|$, які належать полю P).

Вправа 7. *Нехай $k_1, \ldots, k_s$ — кратності коренів $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ характеристичного многочлена $|A - \lambda E|$. Показати, що в просторі L існує базис з власних векторів оператора φ тоді і тільки тоді, коли виконуються умови* 1) $k_i = \dim L_{\alpha_i}$ $(i = 1, \ldots, s)$; 2) $k_1 + \cdots + k_s =$ $= n$.

Відмітимо, якщо в просторі L з лінійним оператором φ існує базис з власних векторів оператора φ, то матриця оператора φ в цьому базисі є діагональною матрицею.

Вправа 8. *Нехай матриця лінійного оператора $\varphi : L \to L$ в деякому базисі простору L є кліткою Жордана. Знайти власні значення і власні вектори оператора φ. Результат порівняти з вправою* 7.

§17. Квадратичні форми над довільним полем

Нехай P — довільне поле і $x_1, \ldots, x_n$ — невідомі над полем P. Нехай дано n^2 елементів α_{ij} поля P таких, що $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ $(1 \leq i, j \leq n)$. Вираз вигляду

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

називається *квадратичною формою* від n невідомих $x_1, \ldots, x_n$ над полем P з коефіцієнтами α_{ij}. Якщо замість невідомих $x_1, \ldots, x_n$ підставити відповідно елементи $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ поля P, то елемент поля P

$$f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \gamma_i \gamma_j$$

називається *значенням квадратичної форми* для даних значень невідомих. Із коефіцієнтів α_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ квадратичної форми $f(x_1, \ldots, x_n)$ можна скласти квадратну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матриця A називається *матрицею квадратичної форми* $f(x_1, \ldots, x_n)$. Так як $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ $(1 \leq i, j \leq n)$, то матриця A симетрична: $A^T = A$ (A^T — транспонована до A матриця).

Нехай

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad X^T = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}.$$

Тоді квадратичну форму $f(x_1, \ldots, x_n)$ можна записати у вигляді добутку матриць

$$f(x_1, \ldots, x_n) = X^T A X.$$

Цей запис називається *матричним записом квадратичної форми* $f(x_1, \ldots, x_n)$. *Рангом квадратичної форми* $f(x_1, \ldots, x_n)$ називається ранг матриці A цієї форми. Поряд з невідомими $x_1, \ldots, x_n$ над полем P ми будемо розглядати й інші системи невідомих над полем P.

Лінійним перетворенням невідомих $x_1, \ldots, x_n$ над полем P в нові невідомі $y_1, \ldots, y_n$ над полем P називається такий перехід до нових невідомих, коли старі невідомі виражаються через нові лінійно з деякими коефіцієнтами із поля P:

$$\begin{gathered} x_1 = \tau_{11}y_1 + \tau_{12}y_2 + \cdots + \tau_{1n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \tau_{n1}y_1 + \tau_{n2}y_2 + \cdots + \tau_{nn}y_n \end{gathered}$$

($\tau_{ij} \in P$; $1 \le i, j \le n$). Матриця

$$Q = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \ldots & \tau_{nn} \end{pmatrix},$$

складена із коефіцієнтів цього перетворення, називається *матрицею лінійного перетворення* невідомих. Лінійне перетворення невідомих можна записати у вигляді добутку $X = QY$, де X, Y — стовпці невідомих, Q — матриця перетворення.

Лінійне перетворення невідомих називається *невиродженим перетворенням*, якщо матриця цього перетворення невироджена. Якщо $X = QY$ невироджене лінійне перетворення невідомих X в невідомі Y, то $Y = Q^{-1}X$ є *оберненим лінійним перетворенням невідомих* Y *в* X. Це перетворення дає можливість у випадку необхідності перейти від нових невідомих до початкових невідомих.

Послідовне виконання лінійних перетворень $X = Q_1Y$ і $Y = Q_2Z$ (Z — стовпець невідомих $z_1, \ldots, z_n$ над полем P) називається *добутком* цих перетворень. Добуток лінійних перетворень є також лінійне перетворення і матриця добутку є добутком матриць перемножуваних перетворень: $X = (Q_1Q_2)Z$.

Вправа 1. *Показати, що добуток невироджених лінійних перетворень є невиродженим лінійним перетворенням.*

Виконати в даній квадратичній формі $f(x_1, \ldots, x_n)$ *перетворення невідомих* це означає підставити в

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}x_ix_j$$

замість невідомих $x_1, \ldots, x_n$ їх вирази через нові невідомі і виконати відповідні спрощення. Результат цих спрощень показує наступна теорема.

Закон зміни квадратичної форми. *Якщо в даній квадратичній формі з матрицею A виконати лінійне перетворення невідомих з матрицею Q, то ми одержимо нову квадратичну форму з матрицею $B = Q^T AQ$.*

Цей закон зміни дозволяє ввести наступне відношення між квадратичними формами.

Будемо говорити, що квадратична форма $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ від невідомих $x_1, \ldots, x_n$ над полем P *еквівалентна* квадратичній формі $f_2(x_1, \ldots, x_n)$ від тих же невідомих, якщо існує таке невироджене лінійне перетворення невідомих $x_1, \ldots, x_n$ в невідомі $y_1, \ldots, y_n$, що $f_2(y_1, \ldots, y_n) = f_1(x_1, \ldots, x_n)$.

Вправа 2. *Нехай A і B — симетричні матриці порядку n над полем P. Показати, що квадратична форма з матрицею A еквівалентна квадратичній формі з матрицею B тоді і тільки тоді, коли існує така невироджена матриця S над полем P, що $B = S^T AS$.*

Відношення еквівалентності квадратичних форм має наступні властивості:

1) $f(x_1, \ldots, x_n) \sim f(x_1, \ldots, x_n)$;

2) $f_1(x_1, \ldots, x_n) \sim f_2(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow f_2(x_1, \ldots, x_n) \sim f_1(x_1, \ldots, x_n)$;

3) $f_1(x_1, \ldots, x_n) \sim f_2(x_1, \ldots, x_n),\ f_2(x_1, \ldots, x_n) \sim f_3(x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f_1(x_1, \ldots, x_n) \sim f_3(x_1, \ldots, x_n)$$

(символ $\sim$ означає еквівалентність форм).

Наступна теорема дає необхідну умову еквівалентності квадратичних форм.

Теорема про інваріантність рангу. *Еквівалентні квадратичні форми мають однакові ранги.*

Сукупність всіх квадратичних форм від n невідомих над полем P розбивається на *класи еквівалентних квадратичних форм.* Клас еквівалентних квадратичних форм складається із всіх квадратичних форм, які попарно еквівалентні. Різні класи еквівалентних квадратичних форм не перетинаються. Провести класифікацію квадратичних форм це означає вибрати із кожного класу по одній квадратичній формі, які мали б найпростіший вигляд і по яких можна було б встановити прості критерії розпізнавання на еквівалентність квадратичних форм. Найпростішою є квадратична форма вигляду

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2,$$

де $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ деякі елементи поля P, серед яких можуть бути і нульові елементи. Форми вказаного вигляду називаються формами *канонічного вигляду.* Матриця A форми канонічного вигляду є діагональною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Ранг канонічного вигляду дорівнює числу ненульових діагональних елементів мариці A і дорівнює числу квадратів цього вигляду з ненульовими коефіцієнтами.

Основна теорема про квадратичні форми. *Будь-яку квадратичну форму від n невідомих над числовим полем P можна звести до квадратичної форми канонічного вигляду за допомогою деякого невиродженого лінійного перетворення невідомих над цим полем.*

Ця теорема залишається справедливою і для довільного поля P, характеристика якого відмінна від 2.

Основну теорему можна формулювати по-іншому, а саме.

Будь-яка квадратична форма над полем P еквівалентна формі канонічного вигляду.

Основна теорема про квадратичні форми не дає завершеної класифікації квадратичних форм. Справа в тому, що різні канонічні вигляди квадратичних форм можуть бути еквівалентними формами. Інакше кажучи, одну і ту ж квадратичну форму можна звести до декількох канонічних виглядів за допомогою невироджених лінійних перетворень невідомих. Відмітимо, що у всіх цих канонічних виглядах спільним буде число квадратів з ненульовими коефіцієнтами.

Продовження класифікації квадратичних форм над полем P залежить від специфіки поля P.

§18. Комплексні квадратичні форми

Розглянемо канонічний вигляд комплексної (тобто над полем $\mathbb{C}$) квадратичної форми від n невідомих $x_1, \ldots, x_n$: $f = \alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2$, де $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ деякі комплексні числа. Нехай ранг форми f дорівнює r $(r \leq n)$ і нехай $\alpha_1 \neq 0, \ldots, \alpha_r \neq 0$. Тоді $f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_r x_r^2$. Розглянемо лінійне перетворення невідомих

$$
\begin{aligned}
&x_1 = (\sqrt{\alpha_1})^{-1} y_1, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&x_r = (\sqrt{\alpha_r})^{-1} y_r, \\
&x_{r+1} = y_{r+1} \text{ (якщо } r < n), \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&x_n = y_n,
\end{aligned}
$$

де корінь квадратний $\sqrt{\alpha}$ із комплексного числа α означає один із двох коренів другого степеня із α.

Це перетворення невироджене. Виконавши його в квадратичній формі f одержимо r квадратів невідомих: $f = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_r^2$. Такий вигляд комплексної квадратичної форми називається *нормальним виглядом.*

Основна теорема для комплексної квадратичної форми. *Будь-яка дана комплексна квадратична форма від n невідомих еквівалентна над полем $\mathbb{C}$ деякій квадратичній формі нормального вигляду, що є сумою r квадратів невідомих (r — ранг даної форми).*

Класифікаційна теорема. *Комплексні квадратичні форми від одного числа невідомих еквівалентні тоді і тільки, коли ранги цих форм співпадають.*

§19. Дійсні квадратичні форми

Розглянемо канонічний вигляд дійсної (над полем $\mathbb{R}$) квадратичної форми від n невідомих $x_1, \ldots, x_n$: $f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2$, де $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ деякі дійсні числа. Нехай ранг форми f дорівнює r $(r \leq n)$ і перші r коефіцієнтів відмінні від нуля. Тоді форму f можна записати у вигляді

$$f = \beta_1 x_1^2 + \cdots + \beta_p x_p^2 - \beta_{p+1} x_{p+1}^2 - \cdots - \beta_{p+q} x_{p+q}^2,$$

де $\beta_1, \ldots, \beta_{p+q}$ додатні числа і $p+q=r$. Розглянемо лінійне перетворення невідомих

$$\begin{aligned}
&x_1 = (\sqrt{\beta_1})^{-1} y_1, \\
&\dots\dots\dots \\
&x_r = x_{p+q} = (\sqrt{\beta_{p+q}})^{-1} y_{p+q}, \\
&x_{r+1} = y_{r+1} \text{ (якщо } r < n), \\
&\dots\dots\dots \\
&x_n = y_n,
\end{aligned}$$

Це перетворення невироджене і має дійсні коефіцієнти. Виконаємо його в квадратичній формі f. Одержимо

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2,$$

тобто суму p додатніх квадратів і q від'ємних квадратів невідомих ($p \geq 0$, $q \geq 0$, $p+q=r$). Такий вигляд квадратичної форми називається *нормальним виглядом дійсної квадратичної форми.*

Основна теорема для дійсних квадратичних форм. *Будь-яка дана дійсна квадратична форма еквівалентна над полем $\mathbb{R}$ деякій квадратичній формі нормального вигляду, що є сумою додатніх і від'ємних квадратів невідомих.*

Наступна теорема вказує, що є спільного в нормальних виглядах, до яких зводиться дана дійсна квадратична форма за допомогою дійсних невироджених лінійних перетворень невідомих.

Закон інерції. *Якщо дана дійсна квадратична форма за допомогою двох дійсних невироджених лінійних перетворень зведена до двох квадратичних форм нормального виду, то число додатніх (від'ємних) квадратів однієї квадратичної форми нормального вигляду дорівнює числу додатніх (від'ємних) квадратів другої квадратичної форми нормального вигляду.*

Нехай дана дійсна квадратична форма $g(x_1, \ldots, x_n)$ зведена до нормального вигляду $g = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2$. Тоді число p додатніх квадратів цього вигляду називається *додатнім індексом* інерції даної форми $g(x_1, \ldots, x_n)$. Число q від'ємних квадратів в нормальному вигляді називається *від'ємним індексом* інерції даної форми $g(x_1, \ldots, x_n)$. Впорядкована пара (p, q) називається *сигнатурою* даної форми $g(x_1, \ldots, x_n)$ (іноді сигнатуру визначають, як різницю $p - q$).

Класифікаційна теорема. *Дві дійсні квадратичні форми від одного числа невідомих еквівалентні тоді і тільки тоді, коли співпадають ранги цих форм і співпадають сигнатури цих форм.*

§20. Додатньо визначені дійсні квадратичні форми

Дійсна квадратична форма

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j \qquad (\alpha_{ij} \in \mathbb{R})$$

називається *додатньо визначеною*, якщо $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) > 0$ для всіх $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq (0, \ldots, 0)$ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R})$.

Ознака додатньої визначенності. *Дійсна квадратична форма від n невідомих додатньо визначена тоді і тільки тоді, коли співпадають три числа: число невідомих n, ранг форми і додатній індекс інерції цієї форми.*

Нехай $f = X^T A X$ — дійсна квадратична форма з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Головними мінорами форми f називаються наступні мінори матриці A:

$$\Delta_1 = \alpha_{11}, \quad \ldots, \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \ldots & \alpha_{kk} \end{vmatrix}, \quad \ldots \quad \Delta_n = |A|.$$

Критерій Сільвестра додатньої визначеності. *Дійсна квадратична форма додатньо визначена тоді і тільки тоді, коли всі її головні мінори додатні.*

Вправа 1. *Нехай $f(x_1, \ldots, x_n)$ така дійсна квадратична форма, що $-f(x_1, \ldots, x_n)$ є додатньо визначеною формою. Якими будуть головні мінори форми $f(x_1, \ldots, x_n)$?*

Вправа 2. *Сформулювати критерій від'ємної визначеності дійсної квадратичної форми.*

§21. Білійні форми на лінійному просторі

Нехай L — лінійний простір над полем P. *Білінійною формою на просторі* L називається функція (відображення) σ, що задана на впорядкованих парах векторів $x, y \in L$, приймає значення $\sigma(x, y)$ в полі P і задовольняє наступним умовам лінійності по кожному аргументу:

$$\begin{aligned}
&\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y),\\
&\sigma(\alpha x, y) = \alpha\sigma(x, y),\\
&\sigma(x, y_1 + y_2) = \sigma(x, y_1) + \sigma(x, y_2),\\
&\sigma(x, \alpha y) = \alpha\sigma(x, y)
\end{aligned}$$

(x_1, x_2, x, y_1, y_2, $y \in L$; $\alpha \in P$).

Якщо $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ ($\sigma(x, y) = -\sigma(y, x)$) для довільних x, $y \in L$, то форма σ називається *симетричною* (*кососиметричною*).

Вправа 1. *Показати, що будь-яка білінійна форма на L є сумою деякої симетричної та деякої кососиметричної білінійних форм на просторі L.*

Розв'язання. $\sigma(x, y) = \frac{1}{2}[\sigma(x, y) + \sigma(y, x)] + \frac{1}{2}[\sigma(x, y) - \sigma(y, x)]$.

Білінійна форма σ на просторі L називається *невиродженою*, якщо із рівності $\sigma(x, a) = 0$ для всіх $x \in L$ випливає, що $a = 0$.

Нехай всюди надалі L — скінченновимірний лінійний простір над полем і σ — білінійна форма на L. Виберемо в просторі L базис a_1, a_2, ..., a_n. Нехай $\alpha_{ij} = \sigma(a_i, a_j)$ ($\alpha_{ij} \in P$; $1 \le i, j \le n$). Вектори x та y простору L розкладемо по базису

$$x = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n,\ y = y_1 a_1 + \dots + y_n a_n\ (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in P).$$

Тоді

$$\sigma(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i y_j,$$

або в матричному вигляді $\sigma(x, y) = X^T A Y$, де X, Y — координатні стовпці векторів x і y,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \qquad (\alpha_{ij} = \sigma(a_i, a_j)).$$

Матриця A називається *матрицею білінійної форми σ в базисі a_1, a_2, ..., a_n*. Якщо форма σ симетрична, то A — симетрична матриця:

$A^T = A$; якщо σ — кососиметрична, то A — кососиметрична матриця: $A^T = -A$.

Вправа 2. *Нехай в просторі L вибрано інший базис a_1', ..., a_n'. Показати, що матриця A в новому базисі буде мати вигляд $A' = S^T AS$, де S — матриця переходу від базиса a_1, ..., a_n до базиса a_1', ..., a_n'.*

Вправа 3. *Показати, що білінійна форма σ невироджена тоді і тільки тоді, коли матриця A цієї форми невироджена.*

Нехай σ — симетрична білінійна форма простору L. Введемо функцію $k : L \to P$, поклавши $k(x) = \sigma(x, x)$ $(x \in L)$.

Вправа 4. *Нехай σ — білійна форма на L і A — матриця форми σ в базисі a_1, ..., a_n простору L. Показати, що $k(x)$ $(x \in L)$ є квадратичною формою з матрицею A від координат вектора x в базисі a_1, ..., a_n.*

Вправа 5. *Нехай $k(x)$ — квадратична форма від координат вектора $x \in L$ в деякому базисі простору L. Показати, що функція*

$$\sigma(x, y) = \frac{1}{2}[k(x + y) - k(x) - k(y)] \qquad (x, y \in L)$$

є симетричною білінійною функцією на просторі L.

Вправа 6 (Основна теорема про симетричні білінійні форми). *Нехай σ — симетрична білінійна форма на просторі L. Показати, що в просторі L існує такий базис, що в координатах векторів $x, y \in L$ відносно цього базису форма σ має вигляд*

$$\sigma(x, y) = \alpha_1 x_1 y_1 + \cdots + \alpha_n x_n y_n,$$

де α_1, ..., α_n деякі елементи поля P.

Розв'язання. Використати зв'язок між білінійними формами і скористатись основною теоремою про квадратичні форми.

Вправа 7. *Нехай L — скінченновимірний лінійний простір розмірності n над полем P і σ — кососиметрична невироджена форма на L. Показати, що 1) $n = 2k$; 2) в просторі L існує такий базис, що матриця A форми σ в цьому базисі має вигляд*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix},$$

де E — одинична матриця порядку k.

Розв'язання. Відмітимо, що $\sigma(x,x) = 0$ для кожного вектора $x \in L$. Нехай $a_1 \in L$ і $a_1 \neq 0$. Поскільки форма σ невироджена, то знайдеться вектор $a_1' \in L$ такий, що $\sigma(a_1, a_1') = 1$. Нехай $L_1 = \langle a_1, a_1' \rangle$ — лінійна оболонка натягнута на вектори a_1 і a_1', L_1' — підпростір в L всіх таких векторів $x \in L$, що $\sigma(x, a_1) = \sigma(x, a_1') = 0$. Тоді $L = L_1 \oplus L_1'$ і форма σ є невиродженою кососиметричною формою на L_1 і L_1' (якщо $L_1' \neq \{\bar{0}\}$). Виберемо в L_1' пару векторів a_2 і a_2' таких, що $\sigma(a_2, a_2') = 1$. Нехай $L_2 = \langle a_2, a_2' \rangle$. Тоді $L_1' = L_2 \oplus L_2'$ і т.д.

Приведемо приклади лінійних просторів з білінійними формами.

Приклад 1. *Евклідовий простір* — це лінійний простір L над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, на якому визначено симетричну білінійну форму σ, що задовольняє умові: $\sigma(x,x) > 0$ $(x \in L,\ x \neq 0)$. Якщо $L = \mathbb{R}^n$ і

$$\sigma(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

$(x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n)$, то $\mathbb{R}^n$ називається n-вимірним евклідовим простором.

Приклад 2. *Псевдоевклідів простір сигнатури* (p,q) — це лінійний простір над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ розмірності $n = p + q$, на якому визначено симетричну білінійну форму таку, що відповідна їй квадратична форма має сигнатуру (p,q) $(p > 0,\ q > 0)$. Наприклад простір $L = \mathbb{R}^p_q$ — простір дійсних n-вимірних векторів $(n = p + q)$ з білінійною формою

$$\sigma(x,y) = x_1y_1 + \cdots + x_py_p - x_{p+1}y_{p+1} - \cdots - x_ny_n$$

$(x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n)$.

Приклад 3. *Симплектичний простір* — це лінійний простір L над полем P, на якому визначено невироджену кососиметричну форму (див. вправу 7).

Ермітові (*півторилінійні*) *форми.* Нехай L — лінійний простір над полем комплексних чисел. *Ермітовою формою* на L називається функція σ, що визначена на впорядкованих парах x, y векторів простору L, приймає значення в полі $\mathbb{C}$ і задовольняє наступним умовам:

1) $\sigma(x,y) = \overline{\sigma(y,x)}$,
2) $\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y)$,
3) $\sigma(\alpha x, y) = \alpha\sigma(x,y)$

$(x,\ x_1,\ x_2,\ y \in L;\ \alpha \in \mathbb{C},\ \overline{\alpha}$ — комплексно спряжене до $\alpha)$. Ермітова форма σ лінійна по 1-му аргументу і напівлінійна по другому:

$$\sigma(x, y_1 + y_2) = \sigma(x, y_1) + \sigma(x, y_2), \qquad \sigma(x, \alpha y) = \overline{\alpha}\sigma(x,y).$$

Унітарним простором називається лінійний простір L над полем $\mathbb{C}$ з ермітовою формою σ, що задовольняє умові: $\sigma(x,x) > 0$, якщо $x \neq 0$ $(x \in L)$. Наприклад *n-вимірний унітарний простір* $\mathbb{C}^n$ з ермітовою формою

$$\sigma(x,y) = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n}$$

$(x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C})$.

Нехай L скінченновимірний лінійний простір над полем $\mathbb{C}$ з ермітовою формою σ. Виберемо в просторі L базис $a_1, \ldots, a_n$. Нехай $\alpha_{ij} = \sigma(a_i, a_j)$ $(\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$, $1 \leq i,j \leq n)$. Розкладемо вектори $x, y \in L$ по базису

$$x = x_1a_1 + \cdots + x_na_n, \quad y = y_1a_1 + \cdots + y_na_n$$

$(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{C})$. Тоді $\sigma(x,y) = X^TA\overline{Y}$, де

$$X^T = (x_1, \ldots, x_n), \quad \overline{Y} = \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матриця A називається матрицею ермітової форми σ в базисі $a_1, \ldots, a_n$ простору L. Так як $\sigma(a_j, a_i) = \overline{\sigma(a_i, a_j)}$, то $A^* = A$, де $*$ означає взяття транспонованої з одноразовою заміною елементів матриці на комплексно спряжені до них. Матриця A така, що $A^* = A$, називається *ермітовою матрицею* або *самоспряженою матрицею.* Перехід від комплексної матриці B до B^* називається *ермітовим спряженням.* Отже матриця A ермітової форми σ є самоспряженою матрицею.

Основна теорема про ермітові форми. *Нехай L скінченновимірний лінійний простір L з ермітовою формою σ. Тоді в просторі L існує такий базис $a_1, \ldots, a_n$, що в координатах векторів $x, y \in L$ форма приймає значення:*

$$\sigma(x,y) = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_r\overline{y_r} \qquad (r \leq n),$$

$(x_1, \ldots, x_n$ — координати вектора x; $y_1, \ldots, y_n$ — координати вектора $y)$.

Вправа 8. *В умовах основної теореми форма σ є невиродженою. Показати, що простір L є унітарним.*

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P і σ — невироджена білінійна (або ермітова для $P = \mathbb{C}$) форма на L.

Лінійний оператор $\varphi : L \to L$ простору L назвемо *автоморфізмом простору L з білінійною формою σ*, якщо оператор φ *зберігає форму*:

$$\sigma(\varphi(x), \varphi(y)) = \sigma(x, y) \qquad (x, y \in L).$$

Вправа 9. *Нехай G_σ — множина всіх автоморфізмів простору L з формою σ. Показати, що G_σ є групою відносно операції множення лінійних операторів.*

Розв'язання. Використовуючи критерії оборотності лінійного оператора, показати, якщо $\varphi \in G_\sigma$, то φ — оборотний оператор. Показати, що $\varphi^{-1} \in G_\sigma$. Якщо φ, $\psi \in G_\sigma$, то показати, що добуток $\varphi\psi \in G_\sigma$.

Нехай в просторі L вибрано базис $a_1, \ldots, a_n$. Нехай B — матриця форми σ в цьому базисі. Позначимо через $G(B)$ множину всіх матриць операторів $\varphi \in G_\sigma$ в базисі $a_1, \ldots, a_n$.

Вправа 10. *Показати, якщо σ — білінійна форма, то $G(B)$ складається із всіх таких матриць A над полем P, що $A^T BA = B$. Якщо σ — ермітова форма, то $G(B)$ складається із всіх комплексних матриць A таких, що $A^T B\overline{A} = B$ ($\overline{A}$ — матриця, комплексно спряжена до A).*

Розв'язання. Використати матричний запис форми σ і формули для координат образу $\varphi(x)$ вектора $x \in L$ (φ — лінійний оператор в L).

Приведемо приклади матричних груп автоморфізмів, вказавши простір L, матрицю B форми σ, загально прийняті позначення і назви груп.

Приклад 4. *Ортогональна група $O(n, \mathbb{R})$.* Простір $L = \mathbb{R}^n$ — n-вимірний евклідів простір, $B = E$ — одинична матриця порядку n.Група $O(n, \mathbb{R})$ складається з таких матриць A над полем $\mathbb{R}$, що $A^T A = E$. (Матриці A із $O(n, \mathbb{R})$ називаються ортогональними матрицями).

Приклад 5. *Псевдоортогональна група $O(p, q)$.* Простір $L = \mathbb{R}^p_q$ — псевдоевклідів простір сигнатури (p, q),

$$B = \begin{pmatrix} E_p & O \\ 0 & -E_q \end{pmatrix},$$

де E_p і E_q — одиничні матриці порядків p і q. Група $O(p, q)$ складається із всіх дійсних матриць A таких, що

$$A^T \begin{pmatrix} E_p & O \\ 0 & -E_q \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} E_p & O \\ 0 & -E_q \end{pmatrix}.$$

Приклад 6. *Симплектична група* $Sp(n, P)$. $L = P^{2n}$ — $2n$-вимірний простір над полем P,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$$

(E — одинична матриця порядку n). Група $Sp(n, P)$ складається з всіх матриць A над полем P, таких що

$$A^T \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 7. Унітарна група $U(n, \mathbb{C})$. $L = \mathbb{C}^n$, $B = E$ — одинична матриця порядку n. Група $U(n, \mathbb{C})$ складається із всіх таких комплексних матриць A, що $A^*A = E$ ($A^* = \overline{A}^T$ — ермітово спряжена до A).

Вправа 11. *Знайти групи* $O(2, \mathbb{R})$, $O(1, 1)$, $Sp(1, \mathbb{R})$, $U(2, \mathbb{C})$.

§22. Евклідів простір

Лінійний простір L над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ називається *евклідовим простором*, якщо в просторі L окрім лінійних операцій над вектораим введено ще одну дію. Нова дія кожній впорядкованій парі векторів x, y простору L ставить у відповідність дійсне число, що позначається через (x, y), називається *скалярним добутком* векторів x та y і ця дія задовольняє наступним умовам (*аксіомам скалярного добутку*):

1) $(x, y) = (y, x)$,
2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,
3) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$,
4) $(x, x) > 0$ $(x \neq 0)$

(x, x_1, x_2, $y \in L$; $\alpha \in \mathbb{R}$). Приклади евклідових просторів подамо у вигляді наступних вправ.

Вправа 1. *Довести еквівалентність даного означення евклідового простору з означенням евклідового простору з* §21 (стор. 55).

Вправа 2. *Показати, що* $\mathbb{R}^n$ *є евклідовим простором відносно скалярного добутку*

$$(x, y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \quad (x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n).$$

Вправа 3. *Показати, що простір $C_{[0,1]}$ всіх неперервних на сегменті $[0,1]$ функцій є евклідовим простором відносно скалярного добутку*

$$(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt \qquad (f,g \in C_{[0,1]}).$$

Розв'язання вправ 2, 3. В обох вправах функції (x,y), (f,g) є скалярними добутками не по назві. Потрібно перевірити всі аксіоми скалярного добутку, після чого назва "скалярний добуток" буде виправданою.

Нехай L евклідів простір, $a_1, \ldots, a_s$ — довільна система векторів в L і

$$x = x_1a_1 + \cdots + x_sa_s, \quad y = y_1a_1 + \cdots + y_sa_s$$

$(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_s \in \mathbb{R})$.

Вправа 4. *Показати, що*

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} x_iy_j(a_i,a_j).$$

Матриця

$$\begin{pmatrix} (a_1,a_1) & (a_1,a_2) & \ldots & (a_1,a_s) \\ (a_2,a_1) & (a_2,a_2) & \ldots & (a_2,a_s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_s,a_1) & (a_s,a_2) & \ldots & (a_s,a_s) \end{pmatrix}$$

називається *матрицею Грама системи векторів* $a_1, \ldots, a_s$.

Якщо система є базисом простору L, то формула для (x,y) у вправі 4 встановлює *скалярний добуток векторів в координатній формі.*

Базис $a_1, \ldots, a_n$ простору L такий, що

$$(a_i,a_j) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } i=j; \\ 0, \text{ якщо } i \neq j \end{cases}$$

називається *ортонормованим базисом.*

Теорема. *Якщо $a_1, \ldots, a_n$ — ортонормований базис в евклідовому просторі L, то скалярний добуток векторів x та y із L в координатній формі має вигляд*

$$(x,y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

($(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ — координатні рядки відповідно векторів x та y відносно базису a_1, …, a_n).

Пізніше ми вкажемо, як будувати ортонормовані базиси в скінченновимірному евклідовому просторі.

Евклідів простір $\mathbb{R}^n$, що описується у вправі 2, називається *n-вимірним евклідовим простором.*

Нехай L евклідів простір. Вектори a і b простору L називаються *ортогональними*, якщо $(a, b) = 0$. Система попарно ортогональних векторів називається *ортогональною системою.*

Теорема про ортогональну систему. *Ортогональна система ненульових векторів простору L є лінійно незалежною системою простору L.*

Нехай A — непуста множина векторів простору L. Позначимо через $A^{\perp}$ множину всіх таких векторів $x \in L$, що ортогональні до всіх векторів множини A. Множина $A^{\perp}$ називається *ортогональним доповненням* множини A.

Вправа 5. *Нехай A, B — непусті множини із L. Показати, що*

1) *ортогональне доповнення $A^{\perp}$ множини A є лінійним підпростором в L;*
2) $(A + B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$;
3) $(A \cap B)^{\perp} = A^{\perp} + B^{\perp}$ $(A \cap B \neq \emptyset)$;
4) $\{\bar{0}\}^{\perp} = L$;
5) $L^{\perp} = \{\bar{0}\}$.

Теорема про ортогональний розклад. *Нехай A — нетривіальний підпростір скінченновимірного евклідового простору L. Тоді оротгональне доповнення $A^{\perp}$ є нетривіальним підпростором в L і простір L є прямою сумою: $L = A \oplus A^{\perp}$.*

Нехай L — евклідів простір і $x \in L$. Число $\sqrt{(x, x)}$ називається *нормою* або *довжиною* вектора x і позначається через $\|x\|$.

Теорема (Нерівність Коші-Буняковського). *Для будь-яких векторів x, y простору L має місце нерівність $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.*

Наслідок.

$$|x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n| \leq (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} (y_1^2 + \cdots + y_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

($x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ — *довільні дійсні числа*).

$$\left|\int_0^1 f(t)g(t)\,dt\right| \le \sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,dt} \cdot \sqrt{\int_0^1 g^2(t)\,dt}$$

(f, g — *неперервні функцуїї на сегменті* $[0,1]$).

Властивості норми:

1) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$,
2) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$,
3) $|\|x\| - \|y\|| \le \|x+y\|$

($\alpha \in \mathbb{R}$; $x, y \in L$). Останні дві нерівності називаються нерівностями трикутника.

Теорема про діагоналі паралелограма.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Теорема Піфагора. *Нехай* $a_1, \ldots, a_s$ — *ортогональна система простору* L. *Тоді*

$$\|a_1 + \cdots + a_s\|^2 = \|a_1\|^2 + \cdots + \|a_s\|^2.$$

Процес ортогоналізації. Нехай $a_1, \ldots, a_s$ — лінійно незалежна система векторів евклідового простору L. Побудуємо нову систему векторів:

$$b_1 = a_1,$$
$$b_2 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1,$$
$$b_3 = a_3 - \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$b_s = a_s - \frac{(a_s, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(a_s, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2 - \cdots - \frac{(a_s, b_{s-1})}{(b_{s-1}, b_{s-1})} b_{s-1}.$$

Вправа 6. *Показати, що*

1) *система* $b_1, \ldots, b_s$ *є ортогональною системою ненульових векторів;*
2) *лінійні оболонки, натягнені на систему* $a_1, \ldots, a_s$ *і систему* $b_1, \ldots, b_s$, *співпадають.*

Побудова системи векторів $b_1, \ldots, b_s$ називається *процесом ортогоналізації.*

Побудова ортонормованих базисів. Нехай L — скінченновимірний евклідів простір і $a_1, \ldots, a_n$ — базис простору L. Застосуємо до цього базису процес ортогоналізації. В результаті одержимо ортогональний базис $b_1, \ldots, b_n$ простору L. *Пронормуємо* кожний вектор цього базиса:

$$c_1 = \frac{1}{\|b_1\|}b_1, \quad c_2 = \frac{1}{\|b_2\|}b_2, \quad \ldots, \quad c_n = \frac{1}{\|b_n\|}b_n.$$

Система векторів c_1, c_2, $\ldots$,c_n є ортонормованим базисом простору L.

Нехай L і L' — евклідові простори. Ізоморфізм $\varphi : L \cong L'$ лінійних просторів над полем $\mathbb{R}$ називається *ізометрією* евклідового простору L на евклідів простір L', якщо $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$ $(x, y \in L)$.

Класифікаційна теорема. *Будь-який скінченновимірний евклідів простір ізометричний n-вимірному евклідовому простору $\mathbb{R}^n$, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Якщо $n \neq m$, то евклідові простори $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^m$ не ізометричні.*

§23. Об'єми в евклідовому просторі

Нехай L — евклідів простір і $a_1, \ldots, a_s$ — система векторів простору L. *Паралелепіпедом, побудованим на векторах $a_1, \ldots, a_s$*, називається множина всіх векторів вигляду $\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_s a_s$, де $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ такі дійсні числа, що $0 \leq \alpha_i \leq 1$ $(i = 1, \ldots, s)$. Позначимо через $\Pi(a_1, \ldots, a_s)$ — паралелепіпед, побудований на векторах $a_1, \ldots, a_s$. Якщо система векторів $a_1, \ldots, a_s$ лінійно незалежна, то паралелепіпед $\Pi(a_1, \ldots, a_s)$ називається *s-вимірним паралелепіпедом.*

Приклад 1. $\Pi(a_1)$ $(a_1 \neq 0)$. Кінці векторів $x \in \Pi(a_1)$ заповнюють відрізок AB.

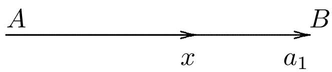

Рис. 1

Приклад 2. $\Pi(a_1, a_2)$ (a_1, a_2 — неколінеарні вектори). Кінці векторів $x \in \Pi(a_1, a_2)$ заповнюють паралелограм $ABCD$.

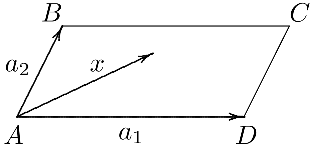

Рис. 2

Приклад 3. $\Pi(a_1, a_2, a_3)$ (a_1, a_2, a_3 — некомпланарні вектори). Кінці векторів $x \in \Pi(a_1, a_2, a_2)$ заповнюють паралелепіпед $ABCDA'B'C'D'$.

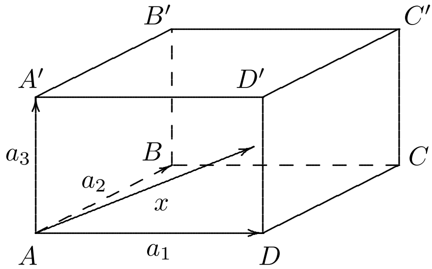

Рис. 3

Нехай $\Pi(a_1, \ldots, a_s)$ — s-вимірний паралелепіпед, побудований на векторах a_1, ..., a_s і $s > 1$. Тоді паралелепіпед $\Pi(a_1, \ldots, a_{s-1})$ називається *основою паралелепіпеда* $\Pi(a_1, \ldots, a_{s-1}, a_s)$. Із теореми про ортогональний розклад випливає існування єдиного вектора c із лінійної оболонки $\langle a_1, \ldots, a_{s-1} \rangle$ такого, що вектор $b = a_s - c$ ортогональний до всіх векторів a_1, ..., a_{s-1} основи $\Pi(a_1, \ldots, a_{s-1})$ паралелепіпеда $\Pi(a_1, \ldots, a_{s-1}, a_s)$. Вектор b називається *висотою паралелепіпеда* $\Pi(a_1, \ldots, a_{s-1}, a_s)$, опущеною на основу.

Вправа 1. *Нехай b_1, ..., b_{s-1} — ортогональна система векторів, що одержуються процесом ортогоналізації системи a_1, ..., a_{s-1}. Показати, що висота b s-вимірного паралелепіпеда $\Pi(a_1, a_2 \ldots, a_{s-1}, a_s)$ рівна*

$$b = a_s - \frac{(a_s, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \cdots - \frac{(a_s, b_{s-1})}{(b_{s-1}, b_{s-1})} b_{s-1}.$$

Вправа 2. *Нехай* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1})$ *— розв'язок системи рівнянь від невідомих* $x_1, \ldots, x_{s-1}$:

$$\begin{cases} (a_1, a_1)x_1 + (a_1, a_2)x_2 + \cdots + (a_1, a_{s-1})x_s = (a_s, a_1), \\ \quad\quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ (a_{s-1}, a_1)x_1 + (a_{s-1}, a_2)x_2 + \cdots + (a_{s-1}, a_{s-1})x_s = (a_s, a_{s-1}). \end{cases}$$

Показати, що висота b *паралелепіпеда* $\Pi(a_1, \ldots, a_{s-1}, a_s)$ *рівна*

$$b = a_s - \alpha_1 a_1 - \cdots - \alpha_{s-1} a_{s-1}.$$

Об'єм $V(a_1, \ldots, a_s)$ s-вимірного паралелепіпеда $\Pi(a_1, \ldots, a_s)$ визначається рекурентно:

1) при $s = 1$ $\quad V(a_1) = \|a_1\|$,

2) при $s > 1$ $\quad V(a_1, \ldots, a_s) = V(a_1, \ldots, a_{s-1})\|b\|$,

тобто об'ємом $V(a_1, \ldots, a_s)$ s-вимірного паралелепіпеда називається добуток об'єму основи на довжину висоти цього паралелепіпеда. Якщо система векторів $a_1, \ldots, a_s$ — лінійно залежна, то об'єм $V(a_1, \ldots, a_s)$ паралелепіпеда $\Pi(a_1, \ldots, a_s)$ будемо вважати нульовим.

Теорема про об'єм. *Квадрат* $V^2(a_1, \ldots, a_s)$ *об'єму* s*-вимірного паралелепіпеда, побудованого на векторах* $a_1, \ldots, a_s$*, дорівнює детермінанту матриці Грама системи* $a_1, \ldots, a_s$:

$$V^2(a_1, \ldots, a_s) = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \ldots & (a_1, a_s) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \ldots & (a_2, a_s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_s, a_1) & (a_s, a_2) & \ldots & (a_s, a_s) \end{vmatrix}.$$

Вправа 3. *Довести, що система* $a_1, \ldots, a_s$ *векторів простору* L *лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли детермінант Грама цієї системи дорівнює нулю.*

Розв'язання. Нехай один із векторів системи $a_1, \ldots, a_s$ є лінійною комбінацією інших векторів системи. Тоді відповідний стовпець матриці Грама системи $a_1, \ldots, a_s$ є лінійною комбінацією інших стовпців. Отже детермінант цієї матриці рівний нулю. Навпаки, нехай один із стовпців матриці Грама є лінійною комбінацією інших стовпців. Наприклад s-й стовпець є лінійною комбінацією 1-го, … …, $(s-1)$-го стовпців з коефіцієнтами $\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1}$ відповідно. Тоді для всіх $j \in \{1, 2 \ldots, s\}$ $(a_j, a_s - \gamma_1 a_1 - \cdots - \gamma_{s-1} a_{s-1}) = 0$. Звідси слідує, що $(a_s - \gamma_1 a_1 - \cdots - \gamma_{s-1} a_{s-1}, a_s - \gamma_1 a_1 - \cdots - \gamma_{s-1} a_{s-1}) = 0$. Це можливо лише у випадку, коли $a_s = \gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_{s-1} a_{s-1}$.

Наслідок 1. *Система векторів a_1, ..., a_s лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли об'єм $V(a_1, \ldots, a_s)$ дорівнює нулю.*

Об'єм в n-вимірному евклідовому просторі. Нехай $L = \mathbb{R}^n$ — n-вимірний евклідів простір.

Вправа 4. *Нехай a_1, ..., a_s — система n-вимірних векторів простору $\mathbb{R}^n$ і A — матриця, стовпці якої співпадають з векторами a_1, ..., a_s. Показати, що*

$$\begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \ldots & (a_1, a_s) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \ldots & (a_2, a_s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_s, a_1) & (a_s, a_2) & \ldots & (a_s, a_s) \end{pmatrix} = A^T A.$$

Розв'язання. Скористатись означенням скалярного добутку в $\mathbb{R}^n$ і правилом множення матриць.

Наслідок 2. $V^2(a_1, \ldots, a_s) = |A^T A|$.

Наслідок 3. *Об'єм паралелепіпеда, побудованого на даних n n-вимірних векторах простору $\mathbb{R}^n$, дорівнює модулю детермінанта, стовпці якого співпадають з даними n векторами.*

§24. Унітарний простір

Лінійний простір L над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ називається *унітарним простором*, якщо в L окрім лінійних операцій над векторами введено ще одну дію. Нова дія кожній впорядкованій парі векторів x та y простору L ставить у відповідність комплексне число, що називається скалярним добутком векторів x та y, позначається через (x, y) і ця дія задовольняє наступним умовам (аксіомам скалярного добутку в унітарному просторі):

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$,

2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,

3) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$,

4) (x, x) — додатнє дійсне число, якщо $x \neq 0$

(x, x_1, x_2, $y \in L$; $\alpha \in \mathbb{C}$, $\overline{\alpha}$ — комплексно спряжене до α).

Вправа 1. *Порівняти дане означення унітарного простору з означенням унітарного простору з* §21 (стор. 56).

Приклад. Простір $\mathbb{C}^n$ стає унітарним простором, якщо визначити скалярний добуток векторів $x, y \in \mathbb{C}^n$ за правилом:

$$(x, y) = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n} \quad (x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n).$$

На унітарний простір переносяться означення наступних понять, що розглядались в евклідовому просторі: матриця Грама, ортонормований базис, ортогональність системи векторів, ортогональне доповнення, норма вектора, процес ортогоналізації, ізометрія. Залишаються, в основному, справедливими теореми §21 із заміною терміну "евклідів простір" на "унітарний простір" і поля $\mathbb{R}$ на поле $\mathbb{C}$.

Вкажемо деякі відмінності.

У вправі 3 формулу для скалярного добутку (x, y) потрібно замінити формулою

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} x_i\overline{y_j}(a_i, a_j) \quad (x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_s \in \mathbb{C}).$$

В теоремі про скалярний добуток векторів унітарного простору L в координатах векторів відносно ортонормованого базису простору L формула для (x, y) замінюється на формулу $(x, y) = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n}$.

Матриця Грама

$$A = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & \ldots & (a_1, a_s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_s, a_1) & \ldots & (a_s, a_s) \end{pmatrix}$$

системи векторів $a_1, \ldots, a_s$ унітарного простору L, є самоспряженою матрицею: $A^* = A$ ($A^* = \overline{A}^T$ — матриця, що одержується з матриці A транспонуванням і заміною елементів на їх комплексно спряжені).

§25. Ортогональні та унітарні матриці

Дійсна квадратна матриця A порядку n називається *ортогональною матрицею*, якщо $A^T A = E$ (E — одинична матриця порядку n).

Комплексна квадратна матриця A порядку n називається *унітарною матрицею*, якщо $A^* A = E$ ($A^* = \overline{A}^T$).

Якщо всі елементи унітарної матриці A є дійсними числами, то матриця A — ортогональна. Будемо вважати стовпці і рядки дійсної (комплексної) матриці $A = \|\alpha_{ij}\|$ порядку n елементами евклідового простору $\mathbb{R}^n$ (унітарного простору $\mathbb{C}^n$). Тоді *скалярний добуток i-го та j-го стовпців* матриці A буде рівний $\alpha_{1i}\alpha_{1j}+\alpha_{2i}\alpha_{2j}+\cdots+\alpha_{ni}\alpha_{nj}$, якщо A — дійсна матриця і рівний $\alpha_{1i}\overline{\alpha_{1j}}+\alpha_{2i}\overline{\alpha_{2j}}+\cdots+\alpha_{ni}\overline{\alpha_{nj}}$, якщо A — комплексна матриця.

Критерії ортогональності матриці

1. *Квадратна дійсна матриця A є ортогональною тоді і тільки тоді, коли скалярний добуток будь-яких двох стовпців матриці A з різними номерами дорівнює нулю, а скалярний квадрат будь-якого стовпця матриці A дорівнює одиниці.*

2. *Квадратна дійсна матриця A є ортогональною тоді і тільки тоді, коли скалярний добуток будь-яких двох рядків матриці A з різними номерами дорівнює нулю, а скалярний квадрат будь-якого рядка матриці A дорівнює одиниці.*

3. *Квадратна дійсна матриця A порядку n є ортогональною тоді і тільки тоді, коли ця матриця є матрицею переходу від одного ортонормованого базису до іншого ортонормованого базису евклідового простору розмірності n.*

4. *Квадратна дійсна матриця A порядку n є ортогональною тоді і тільки тоді, коли лінійне перетворення невідомих $x_1, \ldots, x_n$ в невідомі $y_1, \ldots, y_n$ матрицею A зберігає квадратичну форму $x_1^2+\cdots+x_n^2$, тобто $x_1^2+\cdots+x_n^2 = y_1^2+\cdots+y_n^2$.*

Вправа 1. *Показати, що*

1) *якщо A — ортогональна матриця, то $|A| = \pm 1$;*
2) *якщо A — ортогональна матриця, то A^{-1} також ортогональна матриця;*
3) *якщо A і B ортогональні матриці одного порядку, то добуток AB є ортогональною матрицею.*

Розв'язання. Скористатись означенням ортогональності матриці і наступними правилами: $(AB)^T = B^T A^T$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Наслідок 1. *Множина $O(n)$ всіх ортогональних матриць порядку n є групою відносно операції множення матриць. Група $O(n)$ називається* ортогональною групою.

Критерії унітарності матриці

Перший, другий і третій критерії унітарності матриці одержуються із відповідних критеріїв ортогональності матриці заміною терміна "дійсна матриця" на "комплексна матриця" і терміна "евклідів простір" на "унітарний простір".

4. *Квадратна матриця A порядку n є унітарною тоді і тільки тоді, коли лінійне перетворення невідомих $x_1, \ldots, x_n$ у невідомі $y_1, \ldots, y_n$ зберігає суму квадратів модулів невідомих: $|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 = |y_1|^2 + \cdots + |y_n|^2$.*

Вправа 2. *Показати, що*

1) *якщо A — унітарна матриця, то квадрат модуля детермінанта $|A|$ цієї матриці дорівнює одиниці;*
2) *якщо A — унітарна матриця, то A^{-1} також унітарна матриця;*
3) *якщо A і B — унітарні матриці одного порядку, то добуток AB є унітарною матрицею.*

Розв'язання. Скористатись означенням унітарної матриці та правилами: $(AB)^* = B^*A^*$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Наслідок 2. *Множина $U(n)$ всіх унітарних матриць порядку n є групою відносно операції множення матриць. Ця група називається* унітарною групою.

§26. Ортогональні оператори евклідового простору

Нехай L — евклідів простір. Лінійний оператор $\varphi : L \to L$ евклідового простору L називається *ортогональним оператором*, якщо цей оператор зберігає скалярний квадрат любого вектора простору L, тобто

$$(\varphi(x), \varphi(x)) = (x, x) \qquad (x \in L).$$

Так як $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ $(x \in L)$, то ортогональний оператор еквклідового простору L можно було б визначити, як такий лінійний оператор

$\varphi : L \to L$, що зберігає норми векторів, тобто

$$\|\varphi(x)\| = \|x\| \qquad (x \in L).$$

Вправа 1 (Критерій ортогональності оператора). *Лінійний оператор $\varphi : L \to L$ евклідового простору L є ортогональним оператором цього простору L тоді і тільки тоді, коли оператор φ зберігає скалярний добуток векторів, тобто $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$ $(x, y \in L)$.*

Розв'язання. Довести спочатку рівність $(x, y) = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - - \|x\|^2 - \|y\|^2)$ $(x, y \in L)$ і скористатись нею.

Вправа 2. *Нехай L — евклідів простір і $\varphi : L \to L$ ортогональний оператор простору L. Показати, що*

1) *якщо дійсне число α є власним значенням оператора φ, то $\alpha = \pm 1$;*

2) *власні вектори оператора φ, які належать різним власним значенням, є ортогональними векторами.*

В наступних двох вправах приводяться приклади ортогональних операторів.

Вправа 3. *Нехай $\mathbb{R}^2$ — 2-вимірний евклідів простір, α — дійсне число і*

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Довести ортогональність оператора $\varphi_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, який діє по правилу: якщо $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, то $\varphi_\alpha(x) = (y_1, y_2)$, де

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A_\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Оператор φ_α називається оператором повороту на кут α. *Показати, якщо $\alpha \neq \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$, то оператор повороту φ_α не має власних значень.*

Вправа 4. *Нехай L — евклідів простір і a — ненульовий вектор простору L. Довести ортогональність оператора $\varphi_a : L \to L$ такого, що*

$$\varphi_a(x) = x - \frac{2(x, a)}{(a, a)} a \qquad (x \in L).$$

Оператор φ_a $(a \in L, a \neq \bar{0})$ *називається* оператором відбиття (*відносно гіперплощини* $\{a\}^\perp$ *ортогональної вектору* a). *Знайти власні значення і власні вектори оператора відбиття* φ_a $(a \in L, a \neq \bar{0})$.

Теорема (Зв'язок ортогонального оператора з ортогональними матрицями). *Ортогональний оператор скінченновимірного евклідового простору* L *в будь-якому ортонормованому базисі цього простору має ортогональну матрицю. Навпаки, якщо лінійний оператор простору* L *в деякому ортонормованому базисі простору* L *має ортогональну матрицю, то цей оператор є ортогональним оператором простору* L.

Теорема про образ ортонормованого базиса. *Образ ортонормованого базиса відносно ортогонального оператора скінченновимірного евклідового простору* L *є також ортонормованим базисом цього простору. Навпаки, якщо лінійний оператор простору* L *переводить який-небудь ортонормований базис також в ортонормований базис простору* L, *то цей оператор є ортогональним оператором простору* L.

Теорема про канонічний вигляд матриці ортогонального оператора. *Нехай* $\varphi : L \to L$ — *ортогональний оператор скінченновимірного евклідового прстору* L. *Тоді в просторі* L *існує ортонормований базис, в якому матриця* A *оператора* φ *має вигляд*

$$A = \begin{pmatrix} \pm1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \pm1 & & & \\ & & & A_{\alpha_1} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & A_{\alpha_s} \end{pmatrix},$$

де

$$A_{\alpha_j} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_j & -\sin\alpha_j \\ \sin\alpha_j & \cos\alpha_j \end{pmatrix} \qquad (\alpha_j \neq \pi k \ (k \in \mathbb{Z})).$$

Вправа 5. *Показати, що ортогональний оператор простору* $\mathbb{R}^2$ *є операторм відбиття або оператором повороту.*

Вправа 6. *Показати, що ортогональний оператор* $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *такий, що* $det\, A = 1$, *є оператором повороту.*

§27. Симетричні оператори евклідового простору

Лінійний оператор $\varphi : L \to L$ евклідового простору L називається *симетричним оператором* простору L, якщо для будь-яких векторів x і y простору L виконується рівність $(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y))$.

Теорема про матрицю симетричного оператора. *Симетричний оператор $\varphi : L \to L$ скінченновимірного евклідового простору L в будь-якому ортонормованому базисі простору L має* симетричну матрицю A $(A^T = A)$. *Навпаки, якщо лінійний оператор $\varphi : L \to L$ простору L в деякому ортонормованому базисі цього простору має симетричну матрицю, то цей оператор є симетричним.*

Теорема про корені характеристичного многочлена симетричної матриці. *Всі корені (в полі $\mathbb{C}$) характеристичного многочлена дійсної симетричної матриці є дійсними числами.*

Наслідок. *Симетричний оператор скінченновимірного евклідового простору має принаймі одне власне значення.*

Основна теорема про симетричні оператори. *Лінійний оператор $\varphi : L \to L$ скінченновимірного евклідового простору L є симетричним оператором тоді і тільки тоді, коли в просторі L існує ортонормований базис, що складається з власних векторів оператора φ.*

Вправа 1 (Наслідки з основної теореми). *Нехай A — дійсна симетрична матриця. Показати, що*

1) *існує невироджена дійсна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
2) *існує невироджена дійсна матриця Q така, що $Q^T AQ$ є діагональною матрицею;*
3) *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
4) *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^T AQ$ є діагональною матрицею.*

Розв'язання. Кожну симетричну дійсну матрицю A порядку n можна розглядати, як матрицю деякого симетричного оператора евклідового простору L розмірності n в деякому ортонормованому базисі цього простору (наприклад, за L можна взяти $\mathbb{R}^n$, а за базис — канонічний базис простору $\mathbb{R}^n$).

Друге твердження вправи 1 є основною теоремою про дійсні квадратичні форми: будь-яку дійсну квадратну форму невиродженим лінійним перетворенням невідомих можна звести до канонічного вигляду.

Четверте твердження вправи 1 — це **теорема про зведення дійсної квадратичної форми до головних осей.** Приведемо цю теорему.

Будь-яку дійсну квадратичну форму від n невідомих з матрицею A деяким ортогональним перетворенням невідомих можна звести до канонічного вигляду

$$\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \dots + \alpha_n y_n^2.$$

Коефіцієнтами цього вигляду служать корені характеристичного многочлена $|A - \lambda E|$ матриці A, кожний з яких повторюється у канонічному вигляді стільки раз, яка його кратність.

Відмітимо, що лінійне перетворення невідомих називається *ортогональним перетворенням* невідомих, якщо матриця цього перетворення є ортогональною матрицею.

Теорема про полярний розклад. *Будь-який лінійний оператор скінченновимірного евклідового простору L можна представити у вигляді добутку деякого симетричного і деякого ортогонального операторів цього простору.*

Наслідок. *Будь-яку дійсну квадратну матрицю можна представити у вигляді добутку деякої симетричної та деякої ортогональної матриць.*

§28. Унітарні оператори унітарного простору

Лінійний оператор $\varphi : L \to L$ унітарного простору L називається *унітарним оператором* простору L, якщо цей оператор зберігає скалярний квадрат будь-якого вектора простору L, тобто $(\varphi(x), \varphi(x)) = (x, x)$ $(x \in L)$.

Унітарний оператор φ можна визначити як лінійний оператор простору L, що зберігає норму любого вектора: $\|\varphi(x)\| = \|x\|$ $(x \in L)$.

Вправа 1 (Критерій унітарності оператора). *Лінійний оператор $\varphi : L \to L$ унітарного простору L є унітарним оператором цього простору L тоді і тільки тоді, коли оператор φ зберігає скалярний добуток векторів, тобто $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$ $(x, y \in L)$.*

Розв'язання. Скористатись рівностями

$$\left.\begin{aligned}(x,y)+(y,x)&=\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2,\\(x,y)-(y,x)&=i(\|x+iy\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2)\end{aligned}\right.\qquad(x,y\in L),$$

спочатку довівши їх (i — уявна одиниця, $i^2=-1$).

Властивості власних значень і власних векторів унітарного оператора:

1) *Якщо комплексне число α є власним значенням унітарного оператора φ, то $|\alpha|=1$ (в зображенні комплексних чисел точками координатної площини власні значення унітарних операторів знаходяться на одиничному колі з центром в початку координат).*
2) *Якщо a і b власні вектори з різними власними значеннями унітарного оператора, то $(a,b)=0$.*
3) *Унітарний оператор скінченновимірного унітарного простору завжди має власні значення.*

Вправа 2. *Продовжити дію оператора повороту φ_α із вправи 3 §26 на простір $\mathbb{C}^2$. Довести унітарність одержаного оператора і знайти його власні значення і власні вектори.*

Теорема про матрицю унітарного оператора. *Унітарний оператор скінченновимірного унітарного простору L в будь-якому ортонормованому базисі цього простору має унітарну матрицю. Навпаки, якщо лінійний оператор простору L в деякому ортонормованому базисі простору L має унітарну матрицю, то цей оператор є унітарним оператором простору L.*

Теорема про образ ортонормованого базиса. *Образ ортонормованого базиса відносно унітарного оператора скінченновимірного унітарного простору L є також ортонормованим базисом цього простору. Навпаки, якщо лінійний оператор простору L переводить який-небудь ортонормований базис також в ортонормований базис простору L, то цей оператор є унітарним оператором простору L.*

Основна теорема про унітарні оператори. *Якщо в скінченновимірному унітарному просторі L діє унітарний оператор φ, то в просторі L існує ортонормований базис, що складається з власних векторів оператора φ.*

§29. Самоспряжені оператори унітарного простору

Лінійний оператор $\varphi : L \to L$ унітарного простору L називається *самоспряженим оператором*, якщо для всіх $x, y \in L$ виконується рівність: $(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y))$ $(x, y \in L)$.

Теорема про матрицю самоспряженого оператора. *Самоспряжений оператор скінченновимірного унітарного простору L в будь-якому ортонормованому базисі цього простору має самоспряжену матрицю A ($A^* = \overline{A}^T = A$). Навпаки, якщо лінійний оператор $\varphi : L \to L$ в деякому ортонормованому базисі простору L має самоспряжену матрицю, то оператор φ є самоспряженим оператором простору L.*

Властивості власних значень і власних векторів самоспряженого оператора:

1) *Всі власні значення самоспряженого оператора скінченновимірного унітарного простору є дійсними числами.*
2) *Власні вектори, які належать різним власним значенням самоспряженого оператора є ортогональними векторами.*

Вправа 1. *Використовуючи властивість* 1) *показати, що всі корені характеристичного многочлена дійсної самоспряженої матриці є дійсними числами.*

Розв'язання. Дійсну симетричну матрицю можна розглядати як матрицю самоспряженого оператора унітарного простору в деякому ортонормованому базисі цього простору.

Основна теорема про самоспряжені оператори. *Лінійний оператор $\varphi : L \to L$ скінченновимірного унітарного простору L є самоспряженим операторм тоді і тільки тоді, коли в просторі L існує ортонормований базис, який складається із власних векторів оператора φ.*

Теорема про полярний розклад. *Будь-який лінійний оператор скінченновимірного унітарного простору можна представити у вигляді добутку деякого самоспряженого і деякого унітарного операторів цього простору.*

Наслідок. *Будь-яку квадратну комплексну матрицю можна представити у вигляді добутку деякої самоспряженої та деякої унітарної матриць.*

§30. Зведення рівняння поверхні 2-го порядку до канонічного вигляду

В аналітичній геометрії *поверхнею другого порядку* називають множину всіх таких точок, координати яких в деякій декартовій системі координат $Oxyz$ задовольняють наступне алгебраїчне рівняння 2-го порядку від невідомих x, y, z:

$$\begin{gathered} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + \\ + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

де a_{ij} $(1 \le i, j \le 4)$ — (коефіцієнти рівняння) відомі дійсні числа, причому не всі коефіцієнти групи старших членів рівняння рівні нулю.

Будемо вважати поверхню 2-го порядку заданою за допомогою її рівняння (1) по відношенню до даної декартової системи координат $Oxyz$. Ми будемо розв'язувати наступну задачу: знайти таку нову декартову систему координат $O'x'y'z'$, в якій рівняння даної поверхні буде мати найпростіший, так званий, канонічний вигляд. Прикладами рівнянь найпростішого вигляду є рівняння еліпсоїда, гіперболоїдів, параболоїдів і циліндрів 2-го порядку. Процес розв'язання поставленої задачі називається *зведенням рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду.*

Рівняння (1) запишемо у вигляді:

$$f(x, y, z) + l(x, y, z) = 0, \tag{2}$$

де

$$f(x, y, z) = X^T B X \tag{3}$$

— квадратична форма від невідомих x, y, z з матрицею

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (a_{ij} = a_{ji}), \tag{4}$$

а $l(x, y, z)$ — лінійна функція від невідомих x, y, z. *Дискримінантом* рівняння (1) називається детермінант $|A|$ матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{41} & \dots & a_{44} \end{pmatrix} \qquad (a_{ij} = a_{ji}). \tag{5}$$

Перетворення декартових координат при переході від системи $Oxyz$ до нової декартової системи $O'x'y'z'$ має вигляд

$$X = QX' + X_0, \tag{6}$$

де X, X' — стовпці старих і нових координат довільної точки, X_0 — стовпець координат нового початку O' в системі $Oxyz$, Q — матриця переходу від координатного базису $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ системи $Oxyz$ до координатного базису $\bar{i}'$, $\bar{j}'$, $\bar{k}'$ системи $O'x'y'z'$ (координатний базис це система ортів осей координат). Відмітимо, що стовпці матриці Q це стовпці координат векторів $\bar{i}'$, $\bar{j}'$, $\bar{k}'$ (в системі $Oxyz$). Окрім того, матриця Q — ортогональна: $Q^T = Q^{-1}$.

Виконаємо перетворення (6) у рівнянні (1). Одержимо рівняння

$$f'(x', y', z') + l_1(x', y', z') = 0, \tag{7}$$

де $f' = X'^T B' X'$ — квадратична форма від невідомих x', y', z' з матрицею

$$B' = Q^T BQ = Q^{-1} BQ, \tag{8}$$

$l_1(x', y', z')$ — деяка лінійна форма від невідомих x', y', z'. Рівняння (7) є рівнянням даної поверхні в системі $O'x'y'z'$.

Інваріантом рівняння (1) називається *числова величина*, що знайдена певним способом по коефіцієнтах рівняння (1) даної поверхні і яка рівна числовій величині, знайденій тим же способом по коефіцієнтам будь-якого іншого такого рівняння цієї поверхні, яке одержується із рівняння (1) перетворенням декартових координат.

Вправа 1. *Показати, що три коефіцієнти характеристичного многочлена $|B - \lambda E|$ матриці B і дискримінант $|A|$ рівняння (1) є інваріантами цього рівняння.*

Розв'язання. Для доведення інваріантності дискримінанта перейдемо до однорідних координат x_1, x_2, x_3, x_4:

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4} \quad z = \frac{x_3}{x_4}.$$

В цих координатах рівняння (1) буде мати вигляд

$$x_4^{-1} \Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

де Φ — квадратична форма від невідомих x_1, x_2, x_3, x_4 з матрицею A. Перетворенню декартових координат (6) буде відповідати лінійне перетворення однорідних координат (x_1, x_2, x_3, x_4) в координати

(x_1', x_2', x_3', x_4') і матриця цього перетворення буде мати вигляд:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} Q & X_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перетворення однорідних координат переведе квадратичну форму Φ в квадратичну форму Φ' з матрицею $A' = Q_1^T A Q_1$. Тоді $|A'| = |Q_1^T||A||Q_1| = |A|$.

Вправа 2. *Знайти нову систему координат $O'x'y'x'$ таку, щоб в рівнянні даної поверхні в системі координат $O'x'y'z'$ відповідна цьому рівнянню квадратична форма мала б канонічний вигляд.*

Розв'язання. Будемо вважати матрицю B матрицею самоспряженого оператора φ в базисі $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ простору векторів. Знайдемо власні значення λ_1, λ_2, λ_3 оператора φ (тобто корені рівняння $|B - \lambda E| = 0$). Знайдемо ортонормований базис з власних векторів оператора φ (для цього знаходимо три лінійно незалежні розв'язки рівнянь $(A - \lambda_n E)X = 0$ $(n=1,2,3)$, до одержаних розв'язків застосовуємо процес ортогоналізації і, нарешті, нормуємо вектори). Знайдені базисні вектори приймаємо за координатний базис $\bar{i}'$, $\bar{j}'$, $\bar{k}'$ системи $Ox'y'z'$. Відмітимо, що $\varphi(\bar{i}') = \lambda_1 \bar{i}'$, $\varphi(\bar{j}') = \lambda_2 \bar{j}'$, $\varphi(\bar{k}') = \lambda_3 \bar{k}'$. Складаємо матрицю Q, записавши вектори $\bar{i}'$, $\bar{j}'$, $\bar{k}'$ в стовпці цієї матриці. Записуємо перетворення координат $X = QX'$ і здійснюємо його в рівнянні (1). Одержимо рівняння

$$\lambda_1 {x'}^2 + \lambda_2 {y'}^2 + \lambda_3 {z'}^2 + l'(x', y', z') = 0, \tag{9}$$

де лінійна форма $l'(x', y', z')$ — результат підстановки $X = QX'$ в лінійну форму $l(x, y, z)$.

Вправа 3. *Здійснити перетворення декартових координат в рівнянні*

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0, \tag{10}$$

так, щоб у новому рівнянні були відсутні лінійні члени по тих невідомих, квадрати яких входять в (10) *з ненульовими коефіцієнтами.*

Розв'язання. Нехай $\lambda_1 \neq 0$. Тоді

$$\lambda_1 x^2 + \alpha x = \lambda_1 \left(x + \frac{\alpha}{2\lambda_1} \right)^2 - \frac{\alpha^2}{4\lambda_1}.$$

Зробимо *паралельний перенос вздовж осі Ox* по формулі $x' = x + \frac{\alpha}{2\lambda_1}$.

Вправа 4. *Знайти перетворення декартових координат, що зводить рівняння*

$$\lambda z^2 + \alpha x + \beta y + \delta = 0 \qquad ((\alpha, \beta) \neq (0,0)) \tag{11}$$

до вигляду

$$\lambda {z'}^2 + \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right) x' = 0. \tag{12}$$

Розв'язання.

$$\alpha x + \beta y + \delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} x + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} y + \frac{\delta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right).$$

Нехай φ такий кут, що

$$\cos\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Здійснимо перетворення

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi + x_0 \qquad \left(x_0 = \tfrac{\delta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \right), \\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi, \\ z' &= z \end{aligned}$$

(це перетворення є *поворотом системи навколо осі* Oz з паралельним переносом вздовж осі Ox (якщо $x_0 \neq 0$)). З рівняння (11) одержимо рівняння (12).

Виконуючи послідовно вправи 2, 3, 4 ми від рівняння (1) в системі $Oxyz$ даної поверхні перейдемо до канонічного рівняння цієї поверхні в новій системі координат. При цьому, можливо, потрібно буде зробити декілька послідовних переходів до нових систем координат. На кожному кроці потрібно виражати старі координат x, y, z точок через координати цих точок в нових системах, що будуть з'являтись. У відповіді на поставлену задачу зведення рівняння поверхні 2-го порядку потрібно вказати канонічне рівняння поверхні в останній системі координат і формули перетворення старих координат у нові.

Класифікаційна теорема. *Існує* 17 *видів поверхонь* 2*-го порядку. В нижче наведеному їх списку вказуються канонічні рівняння поверхонь і відповідно назви цих поверхнь.*

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (*еліпсоїд*),

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ (*уявний еліпсоїд — це поверхня без точок*),

3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ (*вироджений в точку еліпсоїд*),

4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (*однопорожнинний гіперпоболоїд*),

5) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (*двопорожнинний гіперпоболоїд*),

6) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (*конус*),

7) $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ (*еліптичний параболоїд*),

8) $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$ (*гіперболічний параболоїд*),

9) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (*еліптичний циліндр*),

10) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ (*уявний еліптичний циліндр*),

11) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ (*вироджений еліптичний циліндр — поверхня складається із всіх точок осі Oz*),

12) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (*гіперболічний циліндр*),

13) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ (*пара площин, що перетинаються*),

14) $y^2=2px$ (*параболічний циліндр*),

15) $x^2=a$ (*пара паралельних площин*),

16) $x^2=-a$ (*пара уявних паралельних площин*),

17) $x^2=0$ (*пара площин, що зливаються*).

Інваріанти рівняння (1) даної поверхні дають можливість знайти канонічне рівнянн цієї поверхні без перетворення координат. В наступних вправах будемо вважати відомими інваріанти λ_1, λ_2, λ_3 — корені характеристиченого многочлена матриці B (див. (4)) і дискримінант $|A|$ рівняння (1) (див. (5)).

Вправа 5. *Показати, що якщо $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$, то канонічне рівняння поверхні* (1) *має вигляд*

$$\lambda_1 {x'}^2 + \lambda_2 {y'}^2 + \lambda_3 {z'}^2 + \frac{|A|}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} = 0.$$

Вправа 6. *Нехай $\lambda_1 = 0$ і $\lambda_2\lambda_3 \neq 0$. Показати, що канонічне рівняння поверхні* (1) *має вигляд*

$$\lambda_2 {y'}^2 + \lambda_3 {z'}^2 + 2\sqrt{-\frac{|A|}{\lambda_2\lambda_3}}x' = 0.$$

§31. Точковий евклідів простір

Нехай M — непорожня множина, елементи якої будемо називати точками, L — евклідів простір. Множина M називається *точковим евклідовим простором*, асоційованим з евклідовим простором L, якщо для кожної впорядкованої пари A, B точок із M визначено вектор $\overrightarrow{AB}$ із L так, що виконуються умови:

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$;
2) для кожної точки $A \in M$ і кожного вектора $a \in L$ існує тільки одна така точка $B \in M$, що $\overrightarrow{AB} = a$.

Точки A і B називаються *початком* і відповідно *кінцем* вектора $\overrightarrow{AB}$.

Нехай M — точковий евклідів простір, асоційований з евклідовим простором L. *Відстань* $d(A, B)$ між точками A, $B \in M$ визначається рівною нормі $\|\overrightarrow{AB}\|$ вектора $\overrightarrow{AB}$ ($\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})}$, (a, b) — скалярний добуток векторів a, b із L). Нехай r — дійсне додатнє число. *Кулею радіуса r з центром в точці* $A \in M$ називається множина всіх таких точок B із M, що $d(A, B) \leq r$). Підмножина $\mathcal{D} \subset M$ точок називається *областю*, якщо кожна точка $A \in \mathcal{D}$ входить в $\mathcal{D}$ разом з деякою кулею з центром в точці A.

Точковий евклідів простір, асоційований з n-вимірним евклідовим простором $\mathbb{R}^n$, будемо називати *n-вимірним точковим простором* і позначати його через E^n.

Нехай E^n — n-вимірний точковий простір. *Система координат* $(A; a_1, \ldots, a_n)$ в просторі E^n визначається заданням точки $A \in E^n$ (початок системи) і базису a_1, …, a_n простору $\mathbb{R}^n$ (кординатний базис). Якщо базис a_1, …, a_n є ортонормованим, то система координат $(A; a_1, \ldots, a_n)$ називається *декартовою системою координат*.

Нехай $(A; a_1, \ldots, a_n)$ — система координат в E^n і M довільна точка із E^n. Координати вектора $\overrightarrow{AM}$ в базисі a_1, …, a_n назвемо *координатами точки M в системі кординат* $(A; a_1, \ldots, a_n)$. Нехай $M_1(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$, $M_2(x_1^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)})$ точки з вказаними координатами в системі $(A; a_1, \ldots, a_n)$ і $(x_1, \ldots, x_n)$ — координати вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ в базисі a_1, …, a_n.

Вправа 1. *Показати, що*

1) $x_1 = x_1^{(2)} - x_1^{(1)}, \quad \ldots, \quad x_n = x_n^{(2)} - x_n^{(1)}$;
2) $d^2(M_1, M_2) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} x_i x_j \alpha_{ij}$; *де* $\alpha_{ij} = (a_i, a_j)$ — *елемент матриці Грама системи векторів* a_1, …, a_n $(1 \le i, j \le n)$;
3) *якщо* $(A; a_1, \ldots, a_n)$ — *декартова система координат, то*

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{\left(x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right)^2 + \cdots + \left(x_n^{(2)} - x_n^{(1)}\right)^2}.$$

Нехай $(A'; a'_1, \ldots, a'_n)$ — нова система координат, T — матриця переходу від базиса a_1, …, a_n до a'_1, …, a'_n простору $\mathbb{R}^n$, M — довільна точка із E^n, $(x_1, \ldots, x_n)$ — координати точки M в системі $(A; a_1, \ldots, a_n)$, $(x'_1, \ldots, x'_n)$ — координати точки M в системі $(A'; a'_1, \ldots, a'_n)$ і $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ координати нового початку A' в системі $(A; a_1, \ldots, a_n)$.

Вправа 2. *Показати, що*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Афінні відображення. Відображення $\tau : E^n \to E^n$ називається *афінним перетворенням простору E^n*, якщо виконується умова:

$$\lambda\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \lambda\overrightarrow{\tau(A)\tau(B)} = \overrightarrow{\tau(C)\tau(D)} \quad (\lambda \in \mathbb{R};\ A, B, C, D \in E^n).$$

Нехай $\tau : E^n \to E^n$ — афінне перетворення, a — довільний вектор із $\mathbb{R}^n$, A — довільна точка із E^n і B така точка із E^n, що $a = \overrightarrow{AB}$. Вектор $\overrightarrow{\tau(A)\tau(B)}$ не залежить від вибору точки A. Покладемо $\tau(a) = \overrightarrow{\tau(A)\tau(B)}$ $(a = \overrightarrow{AB})$. Одержимо відображення $\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ простору $\mathbb{R}^n$ в себе.

Вправа 3. *Показати, що* $\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *є лінійним оператором простору* $\mathbb{R}^n$.

Нехай $\tau : E^n \to E^n$ — афінне відображення, $(A; a_1, \dots, a_n)$ — система координат в E^n, T — матриця лінійного оператора $\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ в базисі $a_1, \dots, a_n$ простору $\mathbb{R}^n$ і $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — координати образу $\tau(A)$ початку A.

Вправа 4. *Показати, якщо* $(x_1, \dots, x_n)$, $(y_1, \dots, y_n)$ *— координати точок* M *і* $\tau(M)$ *в системі* $(A; a_1, \dots, a_n)$, *то*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Нехай τ — афінне перетворення простору E^n і T — матриця оператора $\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ в деякому базисі простору $\mathbb{R}^n$. *Детермінантом* $\det\tau$ *афінного відображення* τ називається детермінант $|T|$ матриці T.

Нехай $a_1, \dots, a_s$ — довільна система векторів простору $\mathbb{R}^n$,

$$\Pi(a_1, \dots, a_s) = \{\sum_{i=1}^{s} \alpha_i a_i \mid \alpha_i \in \mathbb{R},\ 0 \le \alpha_i \le 1\ (i = 1, \dots, s)\}$$

— s-вимірний паралелепіпед, натягнутий на систему $a_1, \dots, a_s$. Нехай $A \in E^n$ — довільна точка. Множина $\Pi_A(a_1, \dots, a_s)$ всіх точок M із E^n таких, що $\overrightarrow{AM} \in \Pi(a_1, \dots, a_s)$ називається *s-вимірним паралелепіпедом з вершиною* A, натягнутим на систему векторів $a_1, \dots, a_s$. *Об'ємом паралелепіпеда* $\Pi_A(a_1, \dots, a_s)$ називається об'єм паралелепіпеда $\Pi(a_1, \dots, a_s)$.

Вправа 5. *Нехай* $\tau : E^n \to E^n$ *— афінне перетворення,* $\Pi_A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ *— n-вимірний паралелепіпед, натягнутий на систему векторів* $a_1, \dots, a_n$ *простору* $\mathbb{R}^n$ *і* $\tau(\Pi_A(a_1, \dots, a_n))$ *— образ цього паралелепіпеда при відображенні* τ. *Показати, що*

1) $\tau(\Pi_A(a_1, \dots, a_n)) = \Pi_{\tau(A)}(\tau(a_1), \dots, \tau(a_n))$;

2) $V(\tau(\Pi_A(a_1, \dots, a_n))) = |\det\tau| V(\Pi_A(a_1, \dots, a_n))$.

Розв'язання 2). Розглянемо канонічний базис $e_1, \ldots, e_n$ простору $\mathbb{R}^n$. В цьому базисі координати векторів співпадаються з відповідними компонентами цих векторів. Нехай T — матиця лінійного оператора τ в базисі $e_1, \ldots, e_n$. Стовпець компонент вектора $\tau(a_i)$ дорівнює добутку матриці T на стовпець компонент вектора a_i $(1 \leq i \leq n)$. Звідси випливає, що матриця B, яка складена із компонент векторів $\tau(a_1), \ldots, \tau(a_n)$ рівна $B = TA$, де A — матриця, складена з компонент векторів $a_1, \ldots, a_n$. Тоді $|B| = (\det\tau)|A|$ і далі див. наслідок 3 §22.

Диференційовані відображення. Зафіксуємо надалі ситему координат $(O; e_1, \ldots, e_n)$ з початком в деякій точці $O \in E^n$, взявши канонічний базис $e_1, \ldots, e_n$ простору $\mathbb{R}^n$ за координатний базис. Нехай $\mathcal{D}$ — деяка область в E^n. Функцію $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ будемо вважати функцією від $(x_1, \ldots, x_n)$ точки $M \in \mathcal{D}$: $f(M) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Відображення $\tau : \mathcal{D} \to E^n$ назвемо *диференційованим відображенням*, якщо існують n неперервно диференційованих функцій $f_1, \ldots, f_n$: $\mathcal{D} \to \mathbb{R}$ таких, що координати точки $\tau(M)$ співпадають з $(f_1(M), \ldots$ $\ldots, f_n(M))$. Нехай $\tau : \mathcal{D} \to E^n$ — диференційоване відображення і $A \in \mathcal{D}$. Матриця

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(A)}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_1(A)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(A)}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_n(A)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

називається *матрицею Якобі відображення τ в точці A*. Лінійний оператор $\tau'_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, матриця якого в базисі $e_1, \ldots, e_n$ співпадає з матрицею Якобі називається *похідною відображення τ в точці A*. Детермінант $\det\tau'_A$ (матриці Якобі) називається *якобіаном відображення τ в точці A*. Нехай $d\bar{x} = (dx_1, \ldots, dx_n)$ — вектор, компоненти якого є диференціалами координат $x_1, \ldots, x_n$. *Диференціалом відображення τ* в точці A називається образ вектора $d\bar{x}$: $d\tau_A = \tau'_A(d\bar{x})$.

Нехай τ_A — афінне перетворення, що ставить у відповідність точці M такій, що $\overrightarrow{AM} = d\bar{x}$, точку M^* таку, що $\overrightarrow{\tau(A)M^*} = d\tau_A$. Тоді для всіх точок $M \in \mathcal{D}$ достатньо близьких до точки A, точка M^* буде досить близька до точки $\tau(M)$. Інакше кажучи диференційоване відображення τ локально є афінним відображенням. Диференціальним елементом об'єму dV називається об'єм паралелепіпеда $\Pi((dx_1)e_1, \ldots, (dx_n)e_n)$. Якщо $dx_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, то $dV = (dx_1) \cdots (dx_n)$.

Вправа 6. *Нехай $\mathcal{D}$ — область в E^n і $\tau : \mathcal{D} \to E^n$ — диференціальне відображення таке, що якобіан $\det\tau_M \neq 0$ в кожній точці $M \in \mathcal{D}$. Нехай $f : \tau(\mathcal{D}) \to \mathbb{R}$ — інтегрована в області $\tau(\mathcal{D})$ функція. Показати, що*

$$\int\limits_{M\in\tau(\mathcal{D})} f(M)\, dV = \int\limits_{M\in\mathcal{D}} f(M)|\det\tau'_M|\, dV.$$

Розв'язання. Нехай $A \in \mathcal{D}$ і τ_A — відповідне афінне перетворення. Тоді

$$V(\tau_A(\Pi_A((dx_1)e_1, \dots, (dx_n)e_n))) =$$
$$= |\det\tau_A| V(\Pi((dx_1)e_1, \dots, (dx_n)e_n)) = |\det\tau_A| dV.$$

Покриємо область $\mathcal{D}$ скінченним числом паралелепіпедів вигляду $\Pi_A((dx_1)e_1, \dots, (dx_n)e_n)$. Оскільки τ — взаємно однозначне відображення, то образи цих паралелепіпедів покриють область $\tau(\mathcal{D})$. Тоді $f(A)|\det\tau'_A|dV$ — елемент інтегральної суми для інтегралу

$$\int\limits_{M\in\tau(\mathcal{D})} f(M)\, dV.$$

§32. Застосування методів теорії лінійної алгебри в теорії диференціальних рівнянь

Нехай I — сегмент прямої $\mathbb{R}$, $L = C_I^\infty$ — дійсний лінійний простір нескінченно диференційованих функцій сегмента I,

$$\mathbb{C}L = L + Li = \{z(t) = x(t) + iy(t) \mid x(t),\ y(t) \in L\}$$

— простір комплексно значних функцій сегмента I.

Введемо в розгляд наступні оператори просторів L і $\mathbb{C}L$:

1) q — оператор диференціювання: $q(f(t)) = \frac{df(t)}{dt} = f'(t)$ $(f(t) \in L)$, $\quad q(z(t)) = x'(t) + iy'(t) \quad (z(t) = x(t) + iy(t) \in \mathbb{C}L)$;
2) id — одиничний оператор: $\quad id(f) = f \quad (f \in \mathbb{C}L)$;
3) $q_\alpha = q - \alpha(id) \quad (\alpha \in \mathbb{C})$: $\quad q_\alpha(z(t)) = z'(t) - \alpha z(t) \quad (z(t) \in \mathbb{C}L)$;

4) оператори Re та Im: $Re(z(t)) = x(t)$ $(z(t) = x(t) + iy(t);$ $x(t),\ y(t) \in L)$, $Im(z(t)) = y(t)$.

Нехай $F(\lambda) = \alpha_n\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ — многочлен від невідомої λ над полем $\mathbb{C}$ $(\alpha_n, \ldots, \alpha_0 \in \mathbb{C},\ \alpha_n \neq 0)$. Тоді $F(q) = \alpha_n q^n + \alpha_{n-1}q^{n-1} + \cdots + \alpha_1 q + \alpha_0(id)$ — лінійний оператор простору $\mathbb{C}L$:

$$F(q)(z(t)) = \alpha_n z^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}z^{(n-1)}(t) + \cdots + \alpha_1 z'(t) + \alpha_0 z(t),$$

де $z^{(k)}(t)$ — k-ва похідна від функції $z(t)$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Вправа 1. *Нехай $\beta_1, \ldots, \beta_s$ — всі корені многочлена $F(\lambda)$ кратностей $k_1, \ldots, k_s$ відповідно. Показати, що $F(q) = \alpha_n q_{\beta_1}^{k_1} \cdots q_{\beta_s}^{k_s}$.*

Вправа 2. *Показати, що якщо многочлен має дійсні коефіцієнти, то оператори Re і Im комутують з оператором $F(q)$ простору $\mathbb{C}L$.*

Введемо *оператори інтегрування.* Нехай "оператор" p ставить у відповідність функції $x(t) \in L$ клас функцій $p(x(t)) = \int x(t)\,dt$. Будемо вважати, що p діє також на елементи простору $\mathbb{C}L$:

$$p(x(t) + iy(t)) = p(x(t)) + ip(y(t)) \qquad (x(t), y(t) \in L).$$

Вправа 3. *Нехай $\langle 1\rangle = \{f(t) = c,\ t \in I \mid c \in \mathbb{C}\}$ — підпростір в $\mathbb{C}L$ всіх сталих функцій. Показати, що p є лінійним відображенням простору $\mathbb{C}L$ в фактор-простір $\mathbb{C}L/\langle 1\rangle$.*

Для кожного $\alpha \in \mathbb{C}$ позначимо через p_α "оператор" такий, що

$$p_\alpha(z(t)) = e^{\alpha t}\int z(t)e^{-\alpha t}\,dt = e^{\alpha t}p(z(t)e^{-\alpha t}).$$

Нехай $f(t) \in \mathbb{C}L$ і $g(t)$ є однією із первісних для функції $f(t)e^{-\alpha t}$. Тоді

$$p_\alpha(f(t)) = e^{\alpha t}g(t) + ce^{\alpha t} \quad (c \in \mathbb{C})$$

і можна на $p_\alpha(f(t))$ дивитись як на таку функцію змінної $t \in I$, що лінійно залежить від комплексного параметра c. Будемо вважати, що такі функції входять в простір $\mathbb{C}L$. Це дає можливість застосувати різні добутки операторів типу p_α і q_β $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$.

Вправа 4. *Нехай $\langle e^{\alpha t}\rangle = \{ce^{\alpha t} \mid c \in \mathbb{C}\}$ — лінійна оболонка в $\mathbb{C}L$ натягнута на функцію $e^{\alpha t}$. Показати, що p_α є лінійним відображенням просторів $p_\alpha : \mathbb{C}L \to \mathbb{C}L/\langle e^{\alpha t}\rangle$.*

Вправа 5. *Довести наступні властивості відображень q_α і p_α $(\alpha \in \mathbb{C})$:*

1) $p_\alpha p_\beta = \dfrac{1}{\beta-\alpha}(p_\beta - p_\alpha)$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \alpha \neq \beta)$;
2) $p_\alpha^n = \dfrac{1}{(n-1)!}\sum\limits_{j=0}^{n-1}(-1)^j C_{n-1}^j \tau^{n-j-1} p_\alpha \tau^j$, *де* τ *— оператор множення на змінну* t;
3) $p_\alpha^n(0) = (c_1 + c_2 t + \dots + c_n t^{n-1})e^{\alpha t}$ $(c_1, \dots, c_n$ *— довільні константи із* $\mathbb{C})$. (*Інакше кажучи* p_α^n *є лінійним відображенням простору* $\mathbb{C}L$ *в фактор-простір простору* $\mathbb{C}L$ *по лінійній оболонці* $\langle e^{\alpha t}, te^{\alpha t}, t^2 e^{\alpha t}, \dots, t^{n-1}e^{\alpha t}\rangle$, *натягнутій на функції* $e^{\alpha t}$, $te^{\alpha t}$, $\dots$, $t^{n-1}e^{\alpha t}$);
4) $q_\beta p_\alpha = id + (\alpha - \beta)p_\alpha$ $(\alpha \neq \beta)$;
5) $q_\beta p_\beta = id$;
6) $p_\alpha q_\beta = id + (\alpha - \beta)p_\alpha$ $(\alpha \neq \beta)$;
7) $(p_\alpha q_\alpha)(f(t)) = f(t) + p_\alpha(0)$;
8) $p_\alpha + p_\beta$ $(\alpha \neq \beta)$ *є лінійним відображенням просторів* $\mathbb{C}L \to \mathbb{C}L/\langle e^{\alpha t}, e^{\beta t}\rangle$.

В п'ятому пункті вправи 5 стверджується, що оператор p_β є правим оберненим до оператора q_β $(\beta \in \mathbf{C})$. Нехай

$$F(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 \quad (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{C})$$

— многочлен від невідомої λ над полем $\mathbb{C}$ і β_1, $\dots$, β_n всі корені цього многочлена. Тоді $F(q) = q_{\beta_1}\cdots q_{\beta_n}$ і $F(q)p_{\beta_n}\cdots p_{\beta_1} = id$. Введемо позначення $F^*(q) = p_{\beta_n}\cdots p_{\beta_1}$. Назвемо $F^*(q)$ правим оберненим до оператора $F(q)$.

Вправа 6. *Показати, що для* $f(t) \in \mathbb{C}L$

$$[F^*(q)F(q)](f(t)) = f(t) + F^*(q)(0).$$

Відмітимо, що на $F^*(q)(0)$ можна дивитись як на таку функцію від t, що залежить від n сталих параметрів c_1, $\dots$, $c_n \in \mathbb{C}$. З другого боку $F^*(q)(0)$ можна вважати підпростором в $\mathbb{C}L$, що породжується функціями типу $t^s e^{\gamma t}$ ($\gamma \in \mathbb{C}$, s — ціле невід'ємне число). Вправа 6 показує, що оператор $F^*(q)F(q)$ перетворює кожну функцію $f(t) \in \mathbb{C}L$ в суміжний клас $f(t) + F^*(q)(0)$ по підпростору $F^*(q)(0)$.

Застосування до диференціальних рівнянь. Звичайне лінійне диференціальне рівняння n-го порядку з сталими коефіцієнтами має вигляд:

$$x^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + \alpha_1 x'(t) + \alpha_0 = f(t),$$

де $x(t)$ — невідома функція із $\mathbb{C}L$ (або із L), $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ — відомі сталі числа, $f(t)$ — відома функція. Введемо оператор

$$F(q) = q^n + \alpha_{n-1}q^{n-1} + \cdots + \alpha_1 q + \alpha_0(id).$$

Тоді диференціальне рівняння приймає вигляд $F(q)(x(t)) = f(t)$.

Вправа 7. *Нехай $F^*(q)$ є правий обернений до оператора $F(q)$. Показати, що*

1) *загальний розв'язок рівняння $F(q)(x(t)) = f(t)$ має вигляд $x(t) = F^*(q)(f(t))$;*
2) *якщо $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ і $f(t) \in L$, то загальний розв'язок рівняння $F(q)(x(t)) = f(t)$ в просторі L має вигляд $Re(F^*(q)(f(t)))$, де $F^*(q)(f(t))$ — загальнй розв'язок цього рівняння в просторі $\mathbb{C}L$.*

Розв'язання 2). Нехай $z(t)$ є розв'язком в просторі $\mathbb{C}L$ рівняння $F(q)(x(t)) = f(t)$. Так як оператор $F(q)$ комутує з оператором Re і $Re(f(t)) = f(t)$, то $Re(z(t))$ є роз'язком рівняння $F(q)(x(t)) = f(t)$.

Системи лінійних дифернціальних рівнянь. Будь-яку систему звичайних лінійних диференціальних рівнянь від n невідомих функцій $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ в просторі $\mathbb{C}L$ (або L) можна записати у вигляді $AX = B$, де A — $m \times n$-матриця системи, елементами якої є многочлени від оператора q над полем $\mathbb{C}$ (або над полем $\mathbb{R}$),

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{pmatrix}$$

(X — стовпець невідомих функцій, B — стовпець відомих функцій).

Для розв'язування цієї системи рівнянь застосуємо теорію λ-матриць над полем P ($P = \mathbb{C}$ або $P = \mathbb{R}$), замінивши невідому λ на оператор q. Нагадаємо, що квадратна q-матриця T називається унімодулярною q-матрицею, якщо $\det T = c \neq 0$ ($c \in P$).

Існують унімодулярні q-матриці T і S такі, що матриця $A_1 = TAS$ має канонічний вигляд:

$$A_1 = TAS = \begin{pmatrix} E_r & & 0 \\ & F & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix},$$

де

$$F = \begin{pmatrix} F_1(q) & & \\ & \ddots & \\ & & F_s(q) \end{pmatrix},$$

E_r — одинична матриця порядку r, $F_1(q)$, $\ldots$, $F_s(q)$ — ненульові і неодиничні елементарні дільники q-матриці A. Тоді система $AX = B$ перетвориться в систему

$$A_1 \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_m(t) \end{pmatrix},$$

де

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = S^{-1}X, \qquad \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_m(t) \end{pmatrix} = TB.$$

Якщо $r+s < min\{n,m\}$ і серед функцій $g_{r+s+1}(t), \ldots, g_m(t)$ є хоча б одна ненульова, тоді дана система диференціальних рівнянь не має розв'язку. В інших випадках система має розв'язки. Щоб їх одержати, ми спочатку знайдемо функції $y_1(t)$, $\ldots$, $y_n(t)$. Тоді $X = SY$, де

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix},$$

буде розв'язком даної системи диференціальних рівнянь.

Література

1. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. – М.: Наука, 1979.
2. *Завало С. Т.* Курс алгебри. – К.: Вища школа, 1985.
3. *Калужнин Л. А.* Введение в общую алгебру. – М.: Наука, 1973.
4. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. – М.: Наука, 1977.
5. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971.
6. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1975.
7. *Скорняков Л. А.* Элементы общей алгебры. – М.: Наука, 1983.
8. *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1974.
9. *Фаддеев Д. К.* Лекции по алгебре. – М.: Наука, 1984.
10. *Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1977.
11. Сборник задач по алгебре / Под редакцией Кострикина А. И. – М.: Наука, 1987.

Предметний покажчик

Навчальний посібник

БАРАННИК Валерій Феодосієвич
ДРОБОТЕНКО Едуард Сергійович
РУДЬКО В'ячеслав Павлович
ШАПОЧКА Ігор Валерійович

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА