Міністерство освіти та науки України
Ужгородський державний університет

В.Ф. Баранник, Є.Я. Погоріляк,
В.П. Рудько, І.В. Шапочка

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Методичні вказівки для лабораторних робіт

Ужгород 2000

УДК 512.8

Лінійна алгебра. Методичні вказівки для лабораторних робіт / Баранник В. Ф., Погоріляк Є. Я., Рудько В. П., Шапочка І. В. – Ужгород: Ужгород. держ. ун-т, 2000. – 52 с.

Р е ц е н з е н т:
доктор фізико-математичних наук, професор *П. М. Гудивок*

ЗМІСТ

Передмова 4
Зразки розв'язування задач 5
Індивідуальна робота №1
Базис лінійного простору. Координати вектора в базисі 36
Індивідуальна робота №2
Матриця переходу від одного до іншого базису. Зв'язок між координатами вектора в різних базисах 36
Індивідуальна робота №3
Дії над лінійними підпросторами 37
Індивідуальна робота №4
Лінійний оператор, його матриця та координати образу вектора в даному базисі 39
Індивідуальна робота №5
Властивості лінійного оператора 39
Індивідуальна робота №6
Зв'язок між матрицями лінійного оператора в різних базисах. Дії над лінійними операторами 40
Індивідуальна робота №7
Образ і ядро лінійного оператора 41
Індивідуальна робота №8
Характеристичний многочлен, власні значення й власні вектори лінійного оператора 42
Індивідуальна робота №9
Спектр оператора 43
Індивідуальна робота №10
Нормальна форма Жордана 44
Індивідуальна робота №11
Теорема про ортогональне доповнення 45
Індивідуальна робота №12
Алгоритм ортогоналізації Грама-Шмідта 46
Індивідуальна робота №13
Ортогональні оператори 47
Індивідуальна робота №14
Симетричні оператори 48
Індивідуальна робота №15
Квадратичні форми 49
Індивідуальна робота №16
Класифікація поверхонь другого порядку 50
Література 51

ПЕРЕДМОВА

Ці методичні вказівки призначаються студентам математичного факультету денної та заочної форм навчання, які повинні вивчити курс "Лінійна алгебра". Для глибокого розуміння теоретичного матеріалу цього курсу та практичного застосування важливе значення має розв'язування задач та прикладів. Саме цим керувалися автори при написанні даних методичних вказівок.

Посібник складається із двох частин, в першій із яких приводяться приклади розв'язування задач, а в другій — завдання для індивідуальної роботи. Відзначимо, що у зв'язку з обмеженим обсягом даного методичного посібника зразки розв'язування задач наводяться лише з найбільш важливих питань навчальної програми.

Методичні вказівки мають на меті допомогти студенту математику в самостійній роботі по вивченню курсу "Лінійна алгебра", у підготовці до складання відповідних заліків та іспитів.

Автори щиро вдячні завідувачу кафедри алгебри Ужгородського державного університету професору П. М. Гудивку за постійну увагу та допомогу, проявлену при написанні цих методичних вказівок.

ЗРАЗКИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. Довести, що система векторів $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (1,0,1,1)$, $a_3 = (1,1,0,1)$, $a_4 = (1,1,1,0)$ є базисом векторного простору $\mathbb{R}^4$ над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Знайти формули для координат вектора $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) \in \mathbb{R}^4$ у цьому базисі. Якими є координати вектора $c = (-1, 0, -1, 0)$ в базисі a_1, a_2, a_3, a_4?

Розв'язання. Система векторів a_1, a_2, a_3, a_4 векторного простору $\mathbb{R}^4$ над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ є базисом тоді і тільки тоді, коли детермінант Δ, складений із компонент даних векторів відмінний від нуля. Обчислимо цей детермінант.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Отже, система векторів a_1, a_2, a_3, a_4 є базисом простору $\mathbb{R}^4$.

Нехай κ_1, κ_2, κ_3, κ_4 — координати, даного в умові вектора x, у базисі a_1, a_2, a_3, a_4. Тобто $x = \kappa_1 a_1 + \kappa_2 a_2 + \kappa_3 a_3 + \kappa_4 a_4$. Тоді мають місце рівності

$$\begin{cases} \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 = \chi_1, \\ \kappa_1 + \kappa_3 + \kappa_4 = \chi_2, \\ \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_4 = \chi_3, \\ \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = \chi_4. \end{cases} \tag{1}$$

Таким чином для визначення координат вектора x у базисі a_1, a_2, a_3, a_4 необхідно розв'язати систему лінійних рівнянь (1) з невідомими κ_1, κ_2, κ_3, κ_4. Для цього виконаємо наступні перетворення над розширеною матрицею одержаної системи.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & \chi_1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \chi_2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \chi_3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \chi_4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & \chi_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \chi_2 - \chi_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \chi_3 - \chi_1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \chi_4 - \chi_1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \chi_2 + \chi_3 + \chi_4 - 2\chi_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \chi_2 - \chi_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \chi_3 - \chi_1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \chi_4 - \chi_1 \end{array}\right).$$

Звідси $\kappa_1 = -2\chi_1+\chi_2+\chi_3+\chi_4$, $\kappa_2 = \chi_1-\chi_2$, $\kappa_3 = \chi_1-\chi_3$, $\kappa_4 = \chi_1-\chi_4$. Для вектора $c = (-1, 0, -1, 0)$ одержуємо наступні значення координат у цьому базисі: $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = -1$, $\kappa_3 = 0$, $\kappa_4 = -1$, тобто

$$c = 1 \cdot a_1 - 1 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 - 1 \cdot a_4.$$

Приклад 2. Довести, що системи векторів $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (2, 1, 1)$, $a_3 = (3, 2, 3)$ та $b_1 = (0, 1, 0)$, $b_2 = (1, 1, 2)$, $b_3 = (1, 2, 1)$ є базисами векторного простору $\mathbb{R}^3$. Знайти матрицю переходу та формули перетворення координат при переході від першого до другого базису. Знайти безпосередньо координати вектора $c = (1, 2, 3)$ в обох базисах і потім перевірити одержаний результат за допомогою формул перетворення координат.

Розв'язання. Аналогічно, як у попередньому прикладі, обчислимо детермінанти, складені відповідно із компонент векторів a_1, a_2, a_3 та b_1, b_2, b_3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Оскільки обидва детермінанти не дорівнюють нулю, то системи векторів a_1, a_2, a_3 та b_1, b_2, b_3 є базисами простору $\mathbb{R}^3$.

Знайдемо матрицю переходу від першого до другого базису. Для цього потрібно розкласти вектори другого базису по першому базису, тобто знайти координати векторів другого базису у першому базисі. Нехай τ_{1j}, τ_{2j}, τ_{3j} — координати вектора b_j у базисі a_1, a_2, a_3 ($j = 1, 2, 3$), тоді

$$\begin{gathered} b_1 = \tau_{11}a_1 + \tau_{21}a_2 + \tau_{31}a_3, \qquad b_2 = \tau_{12}a_1 + \tau_{22}a_2 + \tau_{32}a_3, \\ b_3 = \tau_{13}a_1 + \tau_{23}a_2 + \tau_{33}a_3. \end{gathered} \tag{2}$$

Перейшовши від рівностей векторів (2) до рівностей відповідних компонент, отримаємо три системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \tau_{11} + 2\tau_{21} + 3\tau_{31} = 0, \\ \tau_{11} + \tau_{21} + 2\tau_{31} = 1, \\ \tau_{11} + \tau_{21} + 3\tau_{31} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \tau_{12} + 2\tau_{22} + 3\tau_{32} = 1, \\ \tau_{12} + \tau_{22} + 2\tau_{32} = 1, \\ \tau_{12} + \tau_{22} + 3\tau_{32} = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_{13} + 2\tau_{23} + 3\tau_{33} = 1, \\ \tau_{13} + \tau_{23} + 2\tau_{33} = 2, \\ \tau_{13} + \tau_{23} + 3\tau_{33} = 1. \end{cases}$$

Так як матриці цих систем попарно рівні, то розв'яжемо ці системи одночасно, виконуючи наступні перетворення над матрицею, складеною з компонент векторів a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Таким чином,

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

— матриця переходу від базису a_1, a_2, a_3 до базису b_1, b_2, b_3. Нехай κ_1, κ_2, κ_3 та κ_1', κ_2', κ_3' — координати вектора $x \in \mathbb{R}^3$ відповідно у базисах a_1, a_2, a_3 та b_1, b_2, b_3, тобто

$$x = \kappa_1 a_1 + \kappa_2 a_2 + \kappa_3 a_3 = \kappa_1' b_1 + \kappa_2' b_2 + \kappa_3' b_3.$$

Тоді

$$\begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_1' \\ \kappa_2' \\ \kappa_3' \end{pmatrix}.$$

Перевіримо цю рівність у випадку вектора $c = (1, 2, 3)$. Знайдемо спочатку координати вектора c у базисі a_1, a_2, a_3, а потім у базисі b_1, b_2, b_3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Отже, $\varkappa_1 = 2$, $\varkappa_2 = -2$, $\varkappa_3 = 1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Отже, $\varkappa'_1 = 2$, $\varkappa'_2 = 2$, $\varkappa'_3 = -1$. Далі переконуємося у вірності рівності

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3. Знайти розмірності й базиси суми $L_1 + L_2$, а також перетину $L_1 \cap L_2$ лінійних підпросторів L_1 та L_2 простору $\mathbb{R}^5$, де L_1 — простір розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \end{cases} \tag{3}$$

а $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$ — лінійна оболонка, натягнута на систему векторів $a_1 = (7, 2, -4, 1, 1)$, $a_2 = (10, -1, 0, -2, -6)$.

Розв'язання. Знайдемо фундаментальну систему розв'язків даної в умові системи лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & -7 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $b_1 = (-17, 4, 9, 1, 0)$, $b_2 = (0, -1, -1, 0, 1)$ — фундаментальна система розв'язків, а отже, базис підпростору L_1.

Тепер, щоб знайти розмірність й базис підпростору L_1+L_2, знайдемо ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix} -17 & 4 & 9 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1\\ 7 & 2 & -4 & 1 & 1\\ 10 & -1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix},$$

рядки якої відповідно співпадають із векторами b_1, b_2, a_1, a_2. Оскільки

$$\begin{vmatrix} 7 & 2\\ 10 & -1 \end{vmatrix} = -27 \neq 0,$$

то $2 \le \operatorname{rank} A \le 4$. Обчислимо мінор

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1\\ 7 & 2 & -4\\ 10 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1\\ 7 & 6 & -4\\ 10 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}(-1)\begin{vmatrix} 7 & 6\\ 10 & -1 \end{vmatrix} = 67 \neq 0. \quad (4)$$

Тому $3 \le \operatorname{rank} A \le 4$. Обчислимо далі мінори четвертого порядку, що містять мінор (4).

$$\begin{vmatrix} -17 & 4 & 9 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 0\\ 7 & 2 & -4 & 1\\ 10 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -17 & 4 & 9 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 0\\ 24 & -2 & -13 & 0\\ -24 & 7 & 18 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1\\ 24 & -2 & -13\\ -24 & 7 & 18 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1\\ 24 & 11 & -13\\ -24 & -11 & 18 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} -17 & 4 & 9 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 1\\ 7 & 2 & -4 & 1\\ 10 & -1 & 0 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -17 & 4 & 9 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 1\\ 7 & 3 & -3 & 0\\ 10 & -7 & -6 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2+4}\begin{vmatrix} -17 & 4 & 9\\ 7 & 3 & -3\\ 10 & -7 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -17 & 4 & 9\\ -10 & 7 & 6\\ 10 & -7 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином, $\operatorname{rank} A = 3$. Тому розмірність підпростору L_1+L_2 дорівнює 3, а система векторів b_1, b_2, a_1 є базисом цього підпростору.

Нехай $c \in L_1 \cap L_2$. Тоді з одного боку існують такі дійсні числа α_1, α_2, що

$$c = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = (7\alpha_1 + 10\alpha_2, 2\alpha_1 - \alpha_2, -4\alpha_1, \alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_1 - 6\alpha_2),$$

а з іншого боку компоненти вектора c задовольняють систему (3). Підставляючи компоненти вектора c у кожне рівняння цієї системи, одержимо наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \\ 10\alpha_1 - 10\alpha_2 = 0, \\ 10\alpha_1 - 10\alpha_2 = 0, \\ 11\alpha_1 - 11\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Звідси $\alpha_1 = \alpha_2$ і, отже, $c = \alpha_1(a_1 + a_2)$. Тому вектор $c_0 = a_1 + a_2 = (17, 1, -4, -1, -5)$ є базисом перетину $L_1 \cap L_2$ підпросторів L_1 та L_2 простору $\mathbb{R}^5$.

Приклад 4. Відображення $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ кожний вектор $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ переводить у вектор $\varphi(x) = (\chi_1 + \chi_2 + \chi_3, 2\chi_1 - \chi_3, 3\chi_2 - \chi_1)$. Довести, що φ є лінійним оператором. Знайти формули для координат образу вектора у канонічному базисі e_1, e_2, e_3 простору $\mathbb{R}^3$; образи векторів $a = (1, 1, 1)$, e_1, e_2, e_3 та матрицю оператора φ у цьому ж базисі.

Розв'язання. Нехай $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$, $y = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — довільні вектори простору $\mathbb{R}^3$. Тоді

$$\varphi(x + y) = \varphi[(\chi_1 + \gamma_1, \chi_2 + \gamma_2, \chi_3 + \gamma_3)] =$$

$$= (\chi_1 + \gamma_1 + \chi_2 + \gamma_2 + \chi_3 + \gamma_3, 2(\chi_1 + \gamma_1) - (\chi_3 + \gamma_3),$$

$$3(\chi_2 + \gamma_2) - (\chi_1 + \gamma_1)) = (\chi_1 + \chi_2 + \chi_3, 2\chi_1 - \chi_3, 3\chi_2 - \chi_1) +$$

$$+ (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3, 2\gamma_1 - \gamma_3, 3\gamma_2 - \gamma_1) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

$$\varphi(\lambda x) = \varphi[(\lambda\chi_1, \lambda\chi_2, \lambda\chi_3)] = (\lambda\chi_1 + \lambda\chi_2 + \lambda\chi_3, 2(\lambda\chi_1) - \lambda\chi_3,$$

$$3(\lambda\chi_2) - \lambda\chi_1) = \lambda(\chi_1 + \chi_2 + \chi_3, 2\chi_1 - \chi_3, 3\chi_2 - \chi_1) = \lambda\varphi(x),$$

де $\lambda \in \mathbb{R}$. Отже, φ — лінійний оператор.

Нехай $\varphi(x) = \chi'_1 e_1 + \chi'_2 e_2 + \chi'_3 e_3$, для деяких χ'_1, χ'_2, $\chi'_3 \in \mathbb{R}$. Оскільки $\varphi(x) = (\chi_1 + \chi_2 + \chi_3, 2\chi_1 - \chi_3, 3\chi_2 - \chi_1)$ і координати довільного вектора у канонічному базисі e_1, e_2, e_3 співпадають з його компонентами, то одержуємо формули для координат образу вектора у базисі e_1, e_2, e_3

$$\begin{cases} \chi'_1 = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3, \\ \chi'_2 = 2\chi_1 - \chi_3, \\ \chi'_3 = 3\chi_2 - \chi_1, \end{cases}$$

або в матричній формі

$$\begin{pmatrix} \chi_1' \\ \chi_2' \\ \chi_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{pmatrix}.$$

Очевидно

$$\varphi(a) = (3,1,2),\ \varphi(e_1) = (1,2,-1),\ \varphi(e_2) = (1,0,3),\ \varphi(e_3) = (1,-1,0).$$

Оскільки

$$\varphi(e_1) = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 - 1 \cdot e_3,$$

$$\varphi(e_2) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3,$$

$$\varphi(e_3) = 1 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3,$$

то матриця

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

є матрицею лінійного оператора φ у базисі e_1, e_2, e_3.

Приклад 5. Побудувати лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ такий, що переводить вектори базису $a_1 = (1,1,1)$, $a_2 = (1,0,0)$, $a_3 = (2,2,1)$ цього простору відповідно у вектори $b_1 = (0,0,0)$, $b_2 = (1,0,0)$, $b_3 = (1,1,0)$. Знайти матрицю оператора φ у базисі a_1, a_2, a_3.

Розв'язання. Нехай $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$ — довільний вектор простору $\mathbb{R}^3$. Розглянемо відображення $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, яке кожному вектору $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$ ставить у відповідність вектор $\varphi(a) = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3$. Доведемо лінійність цього відображення. Нехай $b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3$ — також довільний вектор простору $\mathbb{R}^3$. Тоді

$$\varphi(a+b) = \varphi[(\alpha_1+\beta_1)a_1 + (\alpha_2+\beta_2)a_2 + (\alpha_3+\beta_3)a_3] =$$

$$= (\alpha_1+\beta_1)b_1 + (\alpha_2+\beta_2)b_2 + (\alpha_3+\beta_3)b_3 =$$

$$= (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3) + (\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3) = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(\lambda a) = \varphi[(\lambda\alpha_1)a_1 + (\lambda\alpha_2)a_2 + (\lambda\alpha_3)a_3] = (\lambda\alpha_1)b_1 +$$

$$+(\lambda\alpha_2)b_2 + (\lambda\alpha_3)b_3 = \lambda(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3) = \lambda\varphi(a) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Отже, φ — лінійний оператор. Очевидно $\varphi(a_1) = b_1$, $\varphi(a_2) = b_2$, $\varphi(a_3) = b_3$.

Знайдемо матрицю оператора φ у базисі a_1, a_2, a_3. Для цього обчислимо координати образів базисних векторів у цьому ж базисі. Нехай

$$\begin{aligned} \varphi(a_1) &= b_1 = \tau_{11}a_1 + \tau_{21}a_2 + \tau_{31}a_3, \\ \varphi(a_2) &= b_2 = \tau_{12}a_1 + \tau_{22}a_2 + \tau_{32}a_3, \\ \varphi(a_3) &= b_3 = \tau_{13}a_1 + \tau_{23}a_2 + \tau_{33}a_3. \end{aligned} \tag{5}$$

Склавши матрицю із компонент векторів a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 і виконавши наступні елементарні перетворення над рядками цієї матриці, ми отримаємо значення координат τ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$, що задовольняють рівностям (5).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Таким чином,

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— матриця оператора φ у базисі a_1, a_2, a_3.

Приклад 6. Нехай лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ переводить вектор $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ у вектор $\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2, \chi_2 - \chi_3, \chi_3 - \chi_1)$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

— матриця лінійного оператора ψ цього ж простору у базисі $a_1 = (1, -1, 1)$, $a_2 = (2, -1, 1)$, $a_3 = (3, -2, 3)$. Знайти у канонічному базисі простору $\mathbb{R}^3$ матриці лінийних операторів φ, ψ, $\varphi + \psi$, $\varphi - \psi$, $\varphi\psi$, $\psi\varphi$.

Розв'язання. Оскільки

$$\begin{aligned} \varphi(e_1) &= (1, 0, -1) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 - 1 \cdot e_3, \\ \varphi(e_2) &= (-1, 1, 0) = -1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3, \\ \varphi(e_3) &= (0, -1, 1) = 0 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3, \end{aligned}$$

то

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— матриця оператора φ у канонічному базисі.

Знайдемо матрицю переходу від базису a_1, a_2, a_3 до канонічного базису e_1, e_2, e_3. Очевидно,

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

— матриця переходу від базису e_1, e_2, e_3 до базису a_1, a_2, a_3. Обчислимо матрицю T, обернену до матриці T^{-1}.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Звідси

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця A_ψ оператора ψ у канонічному базисі дорівнюватиме

$$A_\psi = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -3 & -31 & -14 \\ 2 & 19 & 8 \\ -4 & -26 & -10 \end{pmatrix}.$$

Далі знаходимо матриці $A_{\varphi+\psi}$, $A_{\varphi-\psi}$, $A_{\varphi\psi}$, $A_{\psi\varphi}$ відповідно операторів $\varphi+\psi$, $\varphi-\psi$, $\varphi\psi$, $\psi\varphi$ у базисі e_1, e_2, e_3.

$$A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi = \begin{pmatrix} -2 & -32 & -14 \\ 2 & 20 & 7 \\ -5 & -26 & -9 \end{pmatrix},$$

$$A_{\varphi-\psi} = A_\varphi - A_\psi = \begin{pmatrix} 4 & 30 & 14 \\ -2 & -18 & -9 \\ 3 & 26 & 11 \end{pmatrix},$$

$$A_{\varphi\psi} = A_\varphi A_\psi = \begin{pmatrix} -5 & -50 & -22 \\ 6 & 45 & 18 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A_{\psi\varphi} = A_\psi A_\varphi = \begin{pmatrix} 11 & -28 & 17 \\ -6 & 17 & -11 \\ 6 & -22 & 16 \end{pmatrix}.$$

Приклад 7. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

— матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^4$ у базисі c_1, c_2, c_3, c_4. Знайти базиси і розмірності підпросторів $Im\,\varphi$ та $Ker\,\varphi$. Переконатися у тому, що $\dim Im\,\varphi + \dim Ker\,\varphi = \dim \mathbb{R}^4$.

Роз'язання. Знайдемо спочатку розмірність і базис образу $Im\,\varphi$ лінійного оператора φ. Для цього обчислимо ранг матриці A.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \leq \operatorname{rank} A \leq 4;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 5 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 5 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, $\operatorname{rank} A = 2$. Тому $\dim Im\,\varphi = 2$ і система векторів $\varphi(c_1)$, $\varphi(c_2)$ є базисом підпростору $Im\,\varphi$.

Знайдемо тепер базис підпростору $Ker\,\varphi$. Нехай $x = \chi_1 c_1 + \chi_2 c_2 + \chi_3 c_3 + \chi_4 c_4$ — довільний вектор ядра $Ker\,\varphi$ лінійного оператора φ. Тоді для координат χ_1, χ_2, χ_3, χ_4 цього вектора має місце рівність

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Розв'яжемо систему (6) лінійних однорідних рівнянь відносно невідомих χ_1, χ_2, χ_3, χ_4. Оскільки

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

— мінор матриці A максимального порядку, відмінний від нуля, то система (6) еквівалентна системі рівнянь

$$\begin{cases} \chi_1 + 2\chi_2 = -3\chi_3 - 4\chi_4, \\ -2\chi_1 + \chi_2 = \chi_3 + 3\chi_4. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} \chi_1 = -\chi_3 - 2\chi_4, \\ \chi_2 = -\chi_3 - \chi_4. \end{cases}$$

Отже, $Ker\,\varphi = \{\chi_3 u_1 + \chi_4 u_2 \mid \chi_3, \chi_4 \in \mathbb{R}\}$, де $u_1 = -c_1 - c_2 + c_3$, $u_2 = -2c_1 - c_2 + c_4$). Тому $\dim Ker\,\varphi = 2$ і система векторів u_1, u_2 є базисом підпростору $Ker\,\varphi$.

Приклад 8. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

— матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Знайти у цьому базисі матриці лінійних операторів φ^2, φ^3, φ^4 і переконатися у тому, що $f(\varphi) = 0$, де f — характеристичний многочлен оператора φ. Знайти всі власні значення і власні вектори оператора φ.

Розв'язання. Нехай A_{φ^2}, A_{φ^3}, A_{φ^4} — матриці відповідно операторів φ^2, φ^3, φ^4 у канонічному базисі. Тоді

$$A_{\varphi^2} = A^2 = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A_{\varphi^3} = A_{\varphi^2}A = 4\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{\varphi^4} = A_{\varphi^3}A = 16\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо характеристичний многочлен $f(\lambda)$ оператора φ

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2-\lambda & 2-\lambda & 1-(1-\lambda)^2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & -2+\lambda \\ 0 & 0 & 2-\lambda & -2+\lambda \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(2-\lambda)^3\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^3(\lambda+2).$$

Обчислимо $f(A)$.

$$(A-2E)^3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^3 = 16\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$(A+2E) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$f(A) = (A-2E)^3(A+2E) = 0.$$

Звідси та із зв'язку між діями над операторами та діями над їх матрицями слідує, що $f(\varphi) = 0$.

Очевидно, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$ — власні значення оператора φ. Знайдемо власні вектори, що належать цим власним значенням. Розглянемо спочатку випадок $\lambda_1 = 2$. Розв'яжемо наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} (1-2)x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + (1-2)x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + (1-2)x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + (1-2)x_4 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Легко видно, що система (7) еквівалентна рівнянню

$$-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Тому вектори $u_1 = (1,1,0,0)$, $u_2 = (1,0,1,0)$, $u_3 = (1,0,0,1)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків системи (7). Отже, будь-який ненульовий розв'язок x цієї системи можна представити у вигляді

$$x = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3, \tag{8}$$

де γ_1, γ_2, γ_3 — деякі дійсні числа, які не дорівнюють одночасно нулю. Таким чином, власні вектори оператора φ, що належать власному значенню $\lambda_1 = 2$, вичерпуються векторами вигляду (8).

Знайдемо тепер власні вектори оператора φ, що належать власному значенню $\lambda_2 = -2$. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Виконаємо наступні перетворення над рядками матриці системи (9)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & -8 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що $v = (-1,1,1,1)$ — фундаментальна система розв'язків системи (9). Тому будь-який ненульовий розв'язок системи (9) представляється у вигляді

$$x = \gamma(-1,1,1,1) \qquad (\gamma \in \mathbb{R}, \quad \gamma \neq 0).$$

Приклад 9. Нехай

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \\ -9 & -3 & 7 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

— матриці відповідно лінійних операторів φ_1, φ_2, φ_3 векторного простору $\mathbb{R}^3$ у канонічному базисі простору $\mathbb{R}^3$. Довести, що простір $\mathbb{R}^3$ має два базиси, кожен з яких складається з власних векторів відповідно операторів φ_1 і φ_2. Знайти ці базиси і матриці відповідних операторів у цих базисах. Довести, що в просторі $\mathbb{R}^3$ немає базису, який складається з власних векторів оператора φ_3.

Розв'язання. Знайдемо характеристичний многочлен оператора φ_1

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & 2 \\ -4 & 1-\lambda & 2 \\ -9 & -3 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \lambda^2+\lambda-6 & 1-\lambda & 4-2\lambda \\ -3+3\lambda & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (\lambda-2)(\lambda+3) & -2(\lambda-2) \\ 3(\lambda-1) & -(\lambda-1) \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda+3 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-2)(\lambda-1)(-\lambda+3).$$

Звідси одержуємо власні значення оператора φ_1:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = 3.$$

Знайдемо власні вектори оператора φ_1, що належать власному значенню $\lambda_1 = 1$. Для цього розв'яжемо систему

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ -4x_1 + 2x_3 = 0, \\ -9x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

Виконаємо елементарні перетворення над рядками матриці цієї системи

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 2 \\ -9 & -3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, довільний власний вектор оператора φ_1, що належить власному значенню λ_1, має вигляд αf_1, де $f_1 = (1,1,2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

Аналогічно можна показати, що αf_2, αf_3 є власними векторами оператора φ_1, що належать відповідно власним значенням $\lambda_2 = 2$ і $\lambda_3 = 3$, де $f_2 = (1,2,3)$, $f_3 = (1,1,3)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

Характеристичним многочленом оператора φ_2 буде многочлен $-(\lambda-1)^2(\lambda-2)$, відповідно власними значеннями — $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Подібно попереднім випадкам обчислюємо власні вектори оператора φ_2. В результаті отримаємо, що $h_1 = (-1,1,0)$, $h_2 = (1,0,1)$ — власні вектори оператора φ_2, які належать власному значенню λ_1; $h_3 = (1,1,3)$ — власний вектор, що належить власному значенню λ_2.

Система векторів f_1, f_2, f_3 є базисом простору $\mathbb{R}^3$, оскільки вона складається із власних векторів лінійного оператора, що належать різним власним значенням. Система ж векторів h_1, h_2, h_3 є також базисом простору $\mathbb{R}^3$, так як власні вектори h_1, h_2 та власний вектор h_3 належать різним власним значенням, а система власних векторів h_1, h_2 є лінійно незалежною.

Далі, оскільки

$$\begin{aligned}
\varphi_1(f_1) &= 1\cdot f_1 + 0\cdot f_2 + 0\cdot f_3, & \varphi_2(h_1) &= 1\cdot h_1 + 0\cdot h_2 + 0\cdot h_3,\\
\varphi_1(f_2) &= 0\cdot f_1 + 2\cdot f_2 + 0\cdot f_3, & \varphi_2(h_2) &= 0\cdot h_1 + 1\cdot h_2 + 0\cdot h_3,\\
\varphi_1(f_3) &= 0\cdot f_1 + 0\cdot f_2 + 3\cdot f_3; & \varphi_2(h_3) &= 0\cdot h_1 + 0\cdot h_2 + 2\cdot h_3,
\end{aligned}$$

то

$$A_{\varphi_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

— матриці відповідно оператора φ_1 у базисі f_1, f_2, f_3 та оператора φ_2 у базисі h_1, h_2, h_3.

Характеристичним многочленом оператора φ_3 буде многочлен $-\lambda(\lambda-1)^2$. Тому $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ — власні значення оператора φ_3. Всі власні вектори оператора φ_3, що належать власному значенню $\lambda_1 = 0$, представляються у вигляді

$$\kappa(1,1,3) \quad (\kappa \neq 0). \tag{10}$$

Власні ж вектори, що належать власному значенню $\lambda_2 = 1$, мають вигляд

$$\kappa(1,1,2) \quad (\kappa \neq 0). \tag{11}$$

Будь-які три вектори вигляду (10) або (11) утворюють лінійно залежну систему, так як завжди у цій системі можна знайти два пропорційні вектори. Отже, в просторі $\mathbb{R}^3$ не існує базиса, який би складався з власних векторів оператора φ_3.

Приклад 10. Знайти нормальні форми Жордана матриць

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нехай A_3 — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ у канонічному базисі цього простору. Знайти який-небудь базис в $\mathbb{R}^3$, матриця оператора φ в якому має Жорданову нормальну форму.

Розв'язання. Знайдемо канонічний вигляд характеристичної матриці $A_1 - \lambda E$ (E — одинична матриця порядку 3). Для цього виконаємо наступні елементарні перетворення цієї матриці

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 & -3 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 6 & 4 & -4-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 5-\lambda & -3 \\ 1-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & 6 & -4-\lambda \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 5-\lambda & -3 \\ 1-\lambda & 0 & 0 \\ -\lambda & 6 & -4-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 5-\lambda & -3 \\ 0 & (5-\lambda)(1-\lambda) & -3(1-\lambda) \\ 0 & \lambda^2-5\lambda+6 & -4+2\lambda \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (5-\lambda)(1-\lambda) & -3(1-\lambda) \\ 0 & (\lambda-2)(\lambda-3) & 2(\lambda-2) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(5-\lambda)(1-\lambda)}{-3} & 1-\lambda \\ 0 & \frac{(\lambda-2)(\lambda-3)}{2} & \lambda-2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda^2-3\lambda+8}{6} & -1 \\ 0 & \frac{(\lambda-2)(\lambda-3)}{2} & \lambda-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda^2-3\lambda+8}{6} & -1 \\ 0 & \frac{(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)}{6} & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2) \end{pmatrix}.$$

Тому нормальною формою Жордана матриці A_1 є матриця

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Виконаємо тепер елементарні перетворення характеристичної матриці $A_2 - \lambda E$

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -4 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \lambda^2-2 & 1-\lambda & 3-2\lambda \\ 2\lambda-2 & -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-2 & 3-2\lambda \\ 0 & 2\lambda-2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-4\lambda+2 & 1 \\ 0 & 2\lambda-2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-4\lambda+2 & 1 \\ 0 & (\lambda-1)(\lambda-2)^2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-2)^2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, нормальною формою Жордана матриці A_2 є матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Зведемо тепер матрицю $A_3 - \lambda E$ до канонічного вигляду

$$\begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\lambda^2-2\lambda-1 & -\lambda & 0 \\ -2\lambda-2 & -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+2\lambda+1 & 0 \\ 0 & 2\lambda+2 & \lambda-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+2\lambda+1 & 0 \\ 0 & 4 & \lambda-1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(\lambda+1)^2(\lambda-1)}{4} \\ 0 & 4 & \lambda-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2(\lambda-1) \end{pmatrix}.$$

Отже, матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

є нормальною формою Жордана матриці A_3.

Знайдемо який-небудь базис f_1, f_2, f_3 простору $\mathbb{R}^3$, матриця оператора φ в якому має жорданову нормальну форму. Оскільки $\varphi(f_1) =$

f_1, $\varphi(f_2) = -f_2$, то f_1, f_2 — власні вектори оператора φ, що належать відповідно власним значенням $\lambda_1 = 1$ і $\lambda_2 = -1$. Власні вектори, що належать власному значенню $\lambda_1 = 1$, мають вигляд $\gamma(0,0,1)$ ($\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$), а власні вектори, що належать власному значенню $\lambda_2 = -1$ — вигляд $\delta(1,1,0)$ ($\delta \in \mathbb{R}$, $\delta \neq 0$). Тому ми можемо покласти $f_1 = (0,0,1)$, $f_2 = (1,1,0)$.

Нехай α_1, α_2, α_3 — координати вектора f_3 у канонічному базисі e_1, e_2, e_3 простору $\mathbb{R}^3$, тобто

$$f_3 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3.$$

Так як A_3 — матриця оператора φ у канонічному базисі, то

$$\varphi(f_3) = (-2\alpha_1 + \alpha_2)e_1 + (-\alpha_1)e_2 + (2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3)e_3.$$

З іншого боку, матриця (12) є також матрицею оператора φ, але у базисі f_1, f_2, f_3. Тому

$$\varphi(f_3) = f_2 - f_3 = (1 - \alpha_1)e_1 + (1 - \alpha_2)e_2 - \alpha_3 e_3.$$

Отже, з вище сказаного випливає, що мають місце наступні рівності

$$\left\{ \begin{array}{rcr} -2\alpha_1 + \alpha_2 & = & 1 - \alpha_1, \\ -\alpha_1 & = & 1 - \alpha_2, \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 & = & -\alpha_3. \end{array} \right.$$

Звідси $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\gamma - 1, \gamma, 1)$ ($\gamma \in \mathbb{R}$). Так як детермінант, складений із компонент векторів f_1, f_2, f_3,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \gamma - 1 \\ 0 & 1 & \gamma \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \tag{13}$$

то можна покласти $f_3 = (0,1,1)$. Нагадаємо, що рівність (13) означає, що система векторів f_1, f_2, f_3 є базисом простору $\mathbb{R}^3$ і в цьому базисі матриця оператора φ має вигляд (12).

Приклад 11. Підпростір L евклідового простору $\mathbb{R}^4$ є простором розв'язків системи рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 0. \end{array} \right. \tag{14}$$

Знайти ортогональне доповнення $L^{\perp}$ підпростору L в $\mathbb{R}^4$ та проекції вектора $c = (-24, 20, 5, -1)$ на підпростір L та на його ортогональне доповнення $L^{\perp}$.

Розв'язання. Ортогональне доповнення $L^{\perp}$ до простору L розв'язків системи однорідних рівнянь співпадає з лінійною оболонкою, натягнутою на рядки матриці цієї системи. Знайдемо спочатку ранг матриці системи (14)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Так як

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

то $\operatorname{rank} A = 2$ і система векторів $a_1 = (1, 2, -1, 1)$, $a_2 = (2, 3, 4, -1)$ є базисом простору $L^{\perp}$.

Нехай b_1, b_2 базис простору L, тобто фундаментальна система розв'язків системи (14). Тоді a_1, a_2, b_1, b_2 — базис простору $\mathbb{R}^4$ і

$$c = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 \tag{15}$$

для деяких α_1, α_2, β_1, $\beta_2 \in \mathbb{R}$.

Нехай тепер c', c'' — проекції вектора c відповідно на підпростори L, $L^{\perp}$. Тоді $c = c' + c''$ і, отже, $c' = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2$, $c'' = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Обчислимо спочатку коефіцієнти α_1, α_2. Для цього скалярно помножимо рівність (15) на вектори a_1, a_2. Одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} (a_1, c) = \alpha_1 (a_1, a_1) + \alpha_2 (a_1, a_2), \\ (a_2, c) = \alpha_1 (a_2, a_1) + \alpha_2 (a_2, a_2); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 = 7\alpha_1 + \ \ 3\alpha_2, \\ 33 = 3\alpha_1 + 30\alpha_2. \end{cases}$$

Звідси $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Таким чином $c' = a_1 + a_2 = (3, 5, 3, 0)$, а $c'' = c - c' = (-27, 15, 2, -1)$.

Приклад 12.а. В евклідовому просторі $\mathbb{R}^4$ ортонормувати задану систему векторів

$$a_1 = (1, 2, 3, 4), \quad a_2 = (0, 5, 0, 5), \quad a_3 = (8, 10, -8, 14).$$

Розв'язання. Як відомо, процес ортогоналізації застосовний лише до лінійно незалежних систем векторів. Тому спочатку обчислюємо ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 8 & 10 & -8 & 14 \end{pmatrix}.$$

Неважко бачити, що $\operatorname{rank} A = 3$ і, отже, вектори a_1, a_2, a_3 утворюють лінійно незалежну систему.

В якості першого вектора c_1 шуканої ортогональної системи векторів візьмемо вектор a_1

$$c_1 = a_1 = (1, 2, 3, 4).$$

Далі шукаємо вектор c_2 у вигляді лінійної комбінації векторів c_1, a_2

$$c_2 = \lambda_1^{(2)} c_1 + a_2.$$

Оскільки вектор c_2 повинен бути ортогональним до c_1, то

$$(c_1, c_2) = (c_1, \lambda_1^{(2)} c_1 + a_2) = \lambda_1^{(2)}(c_1, c_1) + (c_1, a_2) = 0.$$

Звідси

$$\lambda_1^{(2)} = -\frac{(c_1, a_2)}{(c_1, c_1)} = -\frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 5}{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = -\frac{30}{30} = -1.$$

Отже, $c_2 = -c_1 + a_2 = (-1, 3, -3, 1)$.

Вектор c_3 шукатимемо у вигляді лінійної комбінації векторів c_1, c_2 і a_3

$$c_3 = \lambda_1^{(3)} c_1 + \lambda_2^{(3)} c_2 + a_3.$$

Оскільки вектор c_3 повинен бути ортогональним до векторів c_1 і c_2, то

$$(c_1, c_3) = (c_1, \lambda_1^{(3)} c_1 + \lambda_2^{(3)} c_2 + a_3) = \lambda_1^{(3)}(c_1, c_1) + \lambda_2^{(3)}(c_1, c_2) + (c_1, a_3) = 0,$$

$$(c_2, c_3) = (c_2, \lambda_1^{(3)} c_1 + \lambda_2^{(3)} c_2 + a_3) = \lambda_1^{(3)}(c_2, c_1) + \lambda_2^{(3)}(c_2, c_2) + (c_2, a_3) = 0.$$

Звідси

$$\lambda_1^{(3)} = -\frac{(c_1, a_3)}{(c_1, c_1)} = -\frac{1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot (-8) + 4 \cdot 14}{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = -\frac{60}{30} = -2,$$

$$\lambda_2^{(3)} = -\frac{(c_2, a_3)}{(c_1, c_1)} = -\frac{-1\cdot 8 + 3\cdot 10 + (-3)\cdot(-8) + 1\cdot 14}{(-1)^2 + 3^2 + (-3)^2 + 1^2} = -\frac{60}{20} = -3.$$

Таким чином $c_3 = -2c_1 - 3c_2 + b_3 = (9, -3, -5, 3)$.

Ми побудували нову систему попарно ортогональних ненульових векторів

$$c_1 = (1, 2, 3, 4), \quad c_2 = (-1, 3, -3, 1), \quad c_3 = (9, -3, -5, 3).$$

Для перетворення одержаної системи в ортонормовану, поділимо кожен із векторів c_1, c_2, c_3 на його норму.

$$\|c_1\| = \sqrt{(c_1, c_1)} = \sqrt{30}, \quad \|c_2\| = 2\sqrt{5}, \quad \|c_3\| = 2\sqrt{31}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} b_1 &= \tfrac{c_1}{\|c_1\|} = (\tfrac{1}{\sqrt{30}}, \tfrac{2}{\sqrt{30}}, \tfrac{3}{\sqrt{30}}, \tfrac{4}{\sqrt{30}}), \\ b_2 &= \tfrac{c_2}{\|c_2\|} = (-\tfrac{1}{2\sqrt{5}}, \tfrac{3}{2\sqrt{5}}, -\tfrac{3}{2\sqrt{5}}, \tfrac{1}{2\sqrt{5}}), \\ b_3 &= \tfrac{c_3}{\|c_3\|} = (\tfrac{9}{2\sqrt{31}}, -\tfrac{3}{2\sqrt{31}}, -\tfrac{5}{2\sqrt{31}}, \tfrac{3}{2\sqrt{31}}) \end{aligned}$$

— шукана ортонормована система векторів.

Приклад 12.б. В евклідовому просторі $C^2_{[0,1]}$ всіх функцій, квадрат яких є інтегровним, ортогоналізувати систему многочленів $p_1 = 1$, $p_2 = x$, $p_3 = x^2$, $p_4 = x^3$.

Розв'язання. Ортогоналізуємо тепер вказану систему многочленів. Як і в попередньому прикладі покладемо

$$b_1 = p_1 = 1, \qquad b_2 = \lambda_1^{(2)} b_1 + p_2.$$

Знаходимо

$$\lambda_1^{(2)} = -\frac{(p_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{\int\limits_0^1 x\,dx}{\int\limits_0^1 1\,dx} = -\frac{\frac{x^2}{2}\Big|_0^1}{1} = -\frac{1}{2}.$$

Тому $b_2 = -\frac{1}{2} + x$. Вектор b_3 будемо шукати у вигляді

$$b_3 = \lambda_1^{(3)} b_1 + \lambda_2^{(3)} b_2 + p_3.$$

Аналогічно попередньому випадку коефіцієнти $\lambda_1^{(3)}$, $\lambda_2^{(3)}$ обчислюємо за формулами

$$\lambda_1^{(3)} = -\frac{(p_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{\int\limits_0^1 x^2\,dx}{1} = -\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = -\frac{1}{3},$$

$$\lambda_2^{(3)} = -\frac{(p_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = -\frac{\int\limits_0^1 x^2(-\frac{1}{2}+x)\,dx}{\int\limits_0^1 (-\frac{1}{2}+x)^2\,dx} = -\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}} = -1.$$

Отже,

$$b_3 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - x + x^2 = \frac{1}{6} - x + x^2.$$

Для вектора

$$b_4 = \lambda_1^{(4)} b_1 + \lambda_2^{(4)} b_2 + \lambda_3^{(4)} b_3 + p_4$$

коефіцієнти $\lambda_1^{(4)}$, $\lambda_2^{(4)}$, $\lambda_3^{(4)}$ обчислюємо за формулами

$$\lambda_1^{(4)} = -\frac{(p_4, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{\int\limits_0^1 x^3\,dx}{1} = -\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = -\frac{1}{4},$$

$$\lambda_2^{(4)} = -\frac{(p_4, b_2)}{(b_2, b_2)} = -\frac{\int\limits_0^1 x^3(-\frac{1}{2}+x)\,dx}{\int\limits_0^1 (-\frac{1}{2}+x)^2\,dx} = -\frac{\frac{3}{40}}{\frac{1}{12}} = -\frac{9}{10},$$

$$\lambda_3^{(4)} = -\frac{(p_4, b_3)}{(b_3, b_3)} = -\frac{\int\limits_0^1 x^3(\frac{1}{6}-x+x^2)\,dx}{\int\limits_0^1 (\frac{1}{6}-x+x^2)^2\,dx} = -\frac{\frac{1}{120}}{\frac{1}{180}} = -\frac{3}{2}.$$

Таким чином

$$b_4 = -\frac{1}{20} + \frac{3}{5}x - \frac{3}{2}x^2 + x^3.$$

Приклад 13. Нехай

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

— матриця лінійного оператора φ евклідового простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Довести, що φ є ортогональним оператором і $\varphi^2 = 1$. Використовуючи рівність $\varphi^2 = 1$, довести, що в $\mathbb{R}^4$ існує ортонормований базис, який складається з власних векторів оператора φ. Знайти цей базис і матрицю оператора φ у цьому базисі.

Розв'язання. Так як

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то $A^{-1} = A$. Очевидно $A^T = A$. Тому $A^{-1} = A^T$, тобто A — ортогональна матриця. Звідси отримуємо, що φ — ортогональний оператор і, що $\varphi^2 = 1$.

Нехай B — нормальна форма Жордана матриці A. Тоді $B = S^{-1}AS$ для деякої матриці $S \in GL(4, \mathbb{R})$. Так як $A^2 = E$, то $B^2 = (S^{-1}AS)^2 = A^2 = E$. Звідси випливає, що матриця B складається з кліток Жордана порядку 1, оскільки

$$J_s(\alpha)^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\alpha & 1 & & & \\ & \alpha^2 & 2\alpha & 1 & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha^2 & 2\alpha & 1 \\ & \mathbf{0} & & & \alpha^2 & 2\alpha \\ & & & & & \alpha^2 \end{pmatrix} = E$$

тоді і тільки тоді, коли $s = 1$ і $\alpha = \pm 1$ ($J_s(\alpha)$ — клітка Жордана порядку s з елементом α по діагоналі). Таким чином B — діагональна матриця, що містить 1 або -1 на діагоналі.

Нехай a_1, a_2, a_3, a_4 — вектори стовпці матриці S. Тоді B є матрицею оператора φ у базисі a_1, a_2, a_3, a_4. Так як B — діагональна матриця, то a_1, a_2, a_3, a_4 — власні вектори оператора φ, що належать власним значенням $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ оператора φ. За властивістю ортогонального оператора власні вектори, що належать різним власним значенням, ортогональні. Тому для доведення існування ортонормованого базису, що складається з власних векторів оператора φ, достатньо тепер проортонормувати кожну із підсистем системи веторів a_1, a_2, a_3, a_4, що належать відповідно власним значенням $\lambda_1 = 1$ і $\lambda_2 = -1$.

Знайдемо власні вектори, що належать власному значенню λ_1. Для цього розв'яжемо однорідну систему рівнянь з відповідною їй матрицею $A - E$.

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси $\alpha(2,1,1,0) + \beta(1,0,0,1)$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ |\alpha| + |\beta| \neq 0)$ — власні вектори оператора φ, що належать власному значенню $\lambda_1 = 1$. Аналогічно попередньому випадку знаходимо власні вектори оператора φ, що належать власному значенню $\lambda_2 = -1$.

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Звідси $\alpha(0,-1,1,0) + \beta(-1,2,0,1)$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ |\alpha| + |\beta| \neq 0)$ — власні вектори оператора φ, що належать власному значенню $\lambda_2 = -1$.

Проортонормуємо послідовно кожну із систем векторів $a_1 = (2,1,1,0)$, $a_2 = (1,0,0,1)$ та $b_1 = (0,-1,1,0)$, $b_2 = (-1,2,0,1)$. Для цього спочатку проортогоналізуємо їх:

$$a_1' = a_1 = (2,1,1,0), \quad a_2' = -\frac{(a_1,a_2)}{(a_1,a_1)}a_1 + a_2 = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1);$$

$$b_1' = b_1 = (0,-1,1,0), \quad b_2' = -\frac{(b_1,b_2)}{(b_1,b_1)}b_1 + b_2 = (-1,1,1,1).$$

А далі пронормуємо:

$$a_1'' = \frac{a_1'}{\|a_1'\|} = (\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0),\ a_2'' = \frac{a_2'}{\|a_2'\|} = (\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}),$$

$$a_3'' = \frac{b_1'}{\|b_1'\|} = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), \quad a_4'' = \frac{b_2'}{\|b_2'\|} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

Отже a_1'', a_2'', a_3'', a_4'' — ортонормований базис простору $\mathbb{R}^4$, що складається з власних векторів опертора φ. І матриця оператора φ у цьому базисі має вигляд

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 14. Нехай

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 7 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

— матриця лінійного оператора φ евклідового простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Довести, що φ є симетричним оператором і знайти ортонормований базис, який складається з власних векторів оператора φ і матрицю оператора φ у цьому базисі.

Розв'язання. Очевидно, що транспонована до A матриця A^T співпадає з матрицею A. Отже, A — симетрична матриця і, таким чином, φ — симетричний оператор евклідового простору $\mathbb{R}^4$.

Знайдемо тепер власні значення і власні вектори оператора φ.

$$|A - \lambda E| = \left(\frac{1}{4}\right)^4 \begin{vmatrix} 7-4\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 7-4\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 7-4\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 7-4\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^4 \begin{vmatrix} 8-4\lambda & 0 & 0 & -8+4\lambda \\ 0 & 8-4\lambda & -8+4\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 8-4\lambda & 8-4\lambda \\ -1 & 1 & 1 & 7-4\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}(2-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6-4\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3(1-\lambda).$$

Отже $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ — власні значення оператора φ. Знаходимо власні вектори оператора φ, що належать власному значенню $\lambda_1 =$

$= 1$. Для цього розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -8 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси отримуємо, що $\alpha(1, -1, -1, 1)$ ($\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$) — власні вектори, що належать власному значенню $\lambda_1 = 1$.

Далі розв'язуємо систему однорідних лінійних рівнянь з матрицею

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Одержуємо, що

$$\alpha(1, 0, 0, -1) + \beta(1, 0, 1, 0) + \gamma(1, 1, 0, 0) \ (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, |\alpha| + |\beta| + |\gamma| \neq 0)$$

— власні вектори, що належать власному значенню $\lambda_2 = 2$.

Проортонормувавши систему векторів

$$a_1 = (1, -1, -1, 1),\ a_2 = (1, 0, 0, -1),\ a_3 = (1, 0, 1, 0),\ a_4 = (1, 1, 0, 0),$$

отримаємо наступну систему векторів

$$a_1' = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \quad a_2' = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}),$$

$$a_3' = (\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}), \quad a_4' = (\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}})$$

яка є шуканою ортонормованою системою векторів, що складається з власних векторів оператора φ.

Приклад 15.a. Знайти нормальний вигляд квадратичної форми $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$ над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел та перетворення невідомих, що зводить форму f до цього вигляду.

Розв'язання. Виконаємо спочатку перетворення невідомих, обернене до перетворення

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$$

тобто перетворення

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2, \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Після чого отримаємо

$$f = y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 + 2y_2^2 - y_3^2 + 2y_1y_2 - 2y_2^2 - 4y_2y_3 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - 4y_2y_3.$$

Поклавши

$$\begin{cases} z_1 = y_1, \\ z_2 = y_2 - 2y_3, \\ z_3 = y_3, \end{cases}$$

тобто виконавши лінійне перетворення невідомих з матрицею

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ми приведемо квадратичну форму f до вигляду

$$f = z_1^2 + z_2^2 + 4z_2z_3 + 4z_3^2 - z_3^2 - 4z_2z_3 - 8z_3^2 = z_1^2 + z_2^2 - 5z_3^2.$$

Накінець, виконаємо перетворення

$$\begin{cases} z_1 = u_1, \\ z_2 = u_2, \\ z_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}u_3, \end{cases}$$

з матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

В результаті отримаємо канонічний вигляд квадратичної форми f

$$f = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2.$$

А матриця

$$Q = ABC = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 2\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

є матрицею лінійного перетворення невідомих, що зводить квадратичну форму f до канонічного вигляду.

Приклад 15.б. Чи є квадратична форма $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, задана матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

додатньо, від'ємно визначеною, чи знакозмінною?

Розв'язання. Обчислимо головні мінори квадратичної форми g:

$$A_1 = |3| = 3 > 0, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 5 > 0,$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0,$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

$$A_5 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Оскільки всі головні мінори квадратичної форми g додатні, то g — додатньо визначена квадратична форма.

Приклад 16. Визначити тип поверхні, заданої рівнянням $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz - 2 = 0$, знайти її канонічне рівняння та канонічну систему координат.

Розв'язання. Розглянемо квадратичну форму

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz.$$

Приведемо її до канонічного вигляду за допомогою ортогонального перетворення невідомих. Для цього знайдемо власні значення і власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Характеристичним многочленом матриці A є многочлен

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -2 \\ -1 & 5-\lambda & 1 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5-\lambda & 1 \\ 0 & -9+2\lambda & -\lambda \\ 0 & 9-7\lambda+\lambda^2 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} -9+2\lambda & 1 \\ 9-7\lambda+\lambda^2 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-3)(\lambda-6).$$

Таким чином $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$ — власні значення матриці A. Для знаходження власних векторів розв'язуємо послідовно системи лінійних однорідних рівнянь з матрицями:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Звідси $a_1 = (1,0,1)$, $a_2 = (1,1,-1)$, $a_3 = (-1,2,1)$ — власні вектори, що належать відповідно власним значенням $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$. Пронормуємо ортогональну систему векторів a_1, a_2, a_3. Отримаємо

$$a_1' = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), \quad a_2' = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}), \quad a_3' = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}).$$

Тоді за допомогою перетворення невідомих оберненого до перетворення з матрицею

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

квадратична форма f зводиться до канонічного вигляду

$$f = 3y_1^2 + 6z_1^2.$$

Так як Q — матриця переходу від канонічного базису до ортонормованого базису a_1', a_2', a_3' евклідового простору $\mathbb{R}^3$, то Q — ортогональна матриця. І тому $Q^{-1} = Q^T$. Отже,

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Таким чином в канонічній системі координат

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z \\ y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{1}{\sqrt{3}}z \\ z_1 = -\frac{1}{\sqrt{6}}x + \frac{2}{\sqrt{6}}y + \frac{1}{\sqrt{6}}z \end{cases}$$

рівняння нашої поверхні прийме вигляд

$$3y_1^2 + 6z_1^2 = 2$$

або

$$\frac{y_1^2}{\frac{2}{3}} + \frac{z_1^2}{\frac{1}{3}} = 1.$$

Очевидно, дана поверхня є еліптичним циліндром.

Індивідуальна робота №1

Базис лінійного простору. Координати вектора в базисі.

Довести, що система векторів a_1, a_2, a_3, a_4 є базисом векторного простору $\mathbb{R}^4$ над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Знайти формули для координат вектора $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) \in \mathbb{R}^4$ у цьому базисі. Якими є координати вектора $c \in \mathbb{R}^4$ у базисі a_1, a_2, a_3, a_4?

1.1. $a_1 = (2,1,1,3)$, $a_2 = (3,3,1,4)$, $a_3 = (1,4,2,4)$, $a_4 = (4,1,2,2)$, $c = (14,6,9,12)$.

1.2. $a_1 = (2,1,2,2)$, $a_2 = (2,1,1,2)$, $a_3 = (2,2,1,1)$, $a_4 = (1,1,1,0)$, $c = (1,-1,1,-1)$.

1.3. $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (1,-1,1,-1)$, $a_3 = (2,1,1,1)$, $a_4 = (3,4,1,1)$, $c = (3,-3,0,12)$.

1.4. $a_1 = (-1,2,2,1)$, $a_2 = (0,3,2,1)$, $a_3 = (1,1,4,2)$, $a_4 = (1,-2,1,3)$, $c = (2,-4,5,6)$.

1.5. $a_1 = (3,-1,1,3)$, $a_2 = (2,0,6,1)$, $a_3 = (1,-1,1,1)$, $a_4 = (2,4,1,1)$, $c = (2,4,3,-1)$.

1.6. $a_1 = (-2,5,0,3)$, $a_2 = (1,3,2,6)$, $a_3 = (1,1,1,0)$, $a_4 = (2,2,2,2)$, $c = (3,6,9,-2)$.

1.7. $a_1 = (4,-1,3,2)$, $a_2 = (2,3,1,5)$, $a_3 = (2,-3,1,1)$, $a_4 = (2,3,2,1)$, $c = (2,-4,3,7)$.

1.8. $a_1 = (2,1,3,1)$, $a_2 = (5,2,2,5)$, $a_3 = (3,1,6,0)$, $a_4 = (0,6,0,7)$, $c = (0,-6,-5,-11)$.

1.9. $a_1 = (4,3,2,1)$, $a_2 = (-1,3,3,3)$, $a_3 = (2,1,2,1)$, $a_4 = (1,5,0,1)$, $c = (-1,-1,2,2)$.

1.10. $a_1 = (0,5,1,3)$, $a_2 = (2,4,0,1)$, $a_3 = (1,3,1,5)$, $a_4 = (3,6,0,1)$, $c = (3,8,-2,-10)$.

Індивідуальна робота №2

Матриця переходу від одного до іншого базису. Зв'язок між координатами вектора в різних базисах

Довести, що системи векторів a_1, a_2, a_3 та b_1, b_2, b_3 є базисами векторного простору $\mathbb{R}^3$. Знайти матрицю переходу та формули перетворення координат при переході від першого до другого базису. Знайти безпосередньо координати вектора $c = (1,2,3)$ в обох базисах і потім перевірити одержаний результат за допомогою формул перетворення координат.

2.1. $a_1 = (1,-1,1)$, $a_2 = (2,-1,-1)$, $a_3 = (3,-2,1)$;
$b_1 = (-1,1,0)$, $b_2 = (2,-1,\ \ 1)$, $b_3 = (1,\ \ 0,0)$.

2.2. $a_1 = (3,3,-2)$, $a_2 = (1,-1,3)$, $a_3 = (\ \ 11,6,2)$;
$b_1 = (-2,1,4)$, $b_2 = (3,-2,1)$, $b_3 = (-11,7,2)$.

2.3. $a_1 = (1,-1,1)$, $a_2 = (-1,2,0)$, $a_3 = (0,\ \ 1,2)$;
$b_1 = (1,-1,1)$, $b_2 = (2,-1,0)$, $b_3 = (3,-2,0)$.

2.4. $a_1 = (1,-1,-1)$, $a_2 = (-1,2,0)$, $a_3 = (0,\ \ 1,0)$;
$b_1 = (1,\ \ 0,\ \ 1)$, $b_2 = (1,-1,2)$, $b_3 = (2,-1,4)$.

2.5. $a_1 = (\ \ 0,1,2)$, $a_2 = (1,-2,-1)$, $a_3 = (1,-1,2)$;
$b_1 = (-1,1,0)$, $b_2 = (2,-1,\ \ 1)$, $b_3 = (1,\ \ 0,2)$.

2.6. $a_1 = (2,1,1)$, $a_2 = (1,1,3)$, $a_3 = (3,2,5)$;
$b_1 = (1,1,1)$, $b_2 = (2,1,1)$, $b_3 = (3,1,3)$.

2.7. $a_1 = (1,-1,2)$, $a_2 = (\ \ 2,\ \ 1,1)$, $a_3 = (3,0,2)$;
$b_1 = (1,\ \ 1,1)$, $b_2 = (-2,-1,1)$, $b_3 = (1,0,3)$.

2.8. $a_1 = (6,4,-1)$, $a_2 = (1,-2,2)$, $a_3 = (9,\ \ 3,\ \ 1)$;
$b_1 = (-3,7,8)$, $b_2 = (2,\ \ 1,3)$, $b_3 = (0,-2,-3)$.

2.9. $a_1 = (4,3,2)$, $a_2 = (1,1,3)$, $a_3 = (2,2,\ \ 5)$;
$b_1 = (5,4,3)$, $b_2 = (2,2,1)$, $b_3 = (1,6,-1)$.

2.10. $a_1 = (8,1,-1)$, $a_2 = (3,2,-3)$, $a_3 = (4,-1,2)$;
$b_1 = (1,2,-1)$, $b_2 = (4,4,-1)$, $b_3 = (3,\ \ 0,2)$.

Індивідуальна робота №3

Дії над лінійними підпросторами

Знайти розмірності й базиси суми $L_1 + L_2$, а також перетину $L_1 \cap L_2$ лінійних підпросторів L_1 та L_2 простору $\mathbb{R}^5$, де L_1 — простір розв'язків системи рівнянь а $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$ — лінійна оболонка, натягнута на систему векторів a_1, a_2.

3.1.
$$\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ -5x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 6x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 12x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (4,3,1,2,-1), \\ a_2 &= (1,7,-2,-1,-10). \end{aligned}$$

3.2. $\begin{cases} 4x_1+7x_2+7x_3 \qquad\quad +5x_5=0, \\ \ \ x_1+2x_2+2x_3 \qquad\quad -\ \ x_5=0, \\ 2x_1+3x_2+4x_3+\ \ x_4+3x_5=0, \\ 2x_1+3x_2+5x_3+2x_4-\ \ x_5=0; \end{cases}$ $\quad a_1=(3,4,-7,-3,-3),$ $a_2=(-4,8,-8,-5,-4).$

3.3. $\begin{cases} x_1+2x_2+\ \ x_3-\ \ x_4+3x_5=0, \\ x_1+\ \ x_2+3x_3+2x_4 \qquad\quad =0, \\ 2x_1+3x_2+5x_3+2x_4-\ \ x_5=0, \\ 3x_1+5x_2+6x_3+\ \ x_4+2x_5=0; \end{cases}$ $\quad a_1=(7,-4,1,2,1),$ $a_2=(10,0,-6,-1,-2).$

3.4. $\begin{cases} x_1+\ \ x_2+\ \ x_3+\ \ x_4+\ \ x_5=0, \\ 2x_1+3x_2+2x_3-\ \ x_4+2x_5=0, \\ x_1+2x_2 \qquad\quad +2x_4-\ \ x_5=0, \\ 3x_1+5x_2+2x_3+\ \ x_4+\ \ x_5=0; \end{cases}$ $\quad a_1=(-5,4,1,2,3),$ $a_2=(1,1,1,1,1).$

3.5. $\begin{cases} x_1+3x_2 \qquad\quad -\ \ x_4-\ \ x_5=0, \\ x_1+\ \ x_2+2x_3-3x_4+3x_5=0, \\ 2x_1+3x_2+2x_3-\ \ x_4+2x_5=0, \\ 3x_1+6x_2+2x_3-2x_4+\ \ x_5=0; \end{cases}$ $\quad a_1=(1,1,1,1,0),$ $a_2=(2,1,-1,1,1).$

3.6. $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+3x_4+2x_5=0, \\ x_1-\ \ x_2 \qquad\quad +3x_4+\ \ x_5=0, \\ 3x_1+3x_2+2x_3+\ \ x_4+\ \ x_5=0, \\ 2x_1+\ \ x_2+2x_3+6x_4+3x_5=0; \end{cases}$ $\quad a_1=(1,1,1,1,1),$ $a_2=(0,2,3,4,-6).$

3.7. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+\ \ x_4+\ \ x_5=0, \\ x_1+3x_2+4x_3+3x_4+2x_5=0, \\ x_1+\ \ x_2+2x_3-\ \ x_4 \qquad\quad =0, \\ x_1+3x_2+3x_3+5x_4+5x_5=0; \end{cases}$ $\quad a_1=(1,1,1,1,1),$ $a_2=(0,-7,6,2,2).$

3.8. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+3x_4+\ \ x_5=0, \\ 5x_1+3x_2+x_3+3x_4+5x_5=0, \\ -x_1+\ \ x_2+x_3+2x_4 \qquad\quad =0, \\ 3x_1+3x_2+x_3+4x_4+2x_5=0; \end{cases}$ $\quad a_1=(1,1,1,1,1),$ $a_2=(3,-6,1,7,3).$

3.9. $\begin{cases} x_1+2x_2-\ \ x_3+\ \ x_4+\ \ x_5=0, \\ \qquad\quad x_2+3x_3-2x_4+1x_5=0, \\ -x_1+\ \ x_2+\ \ x_3 \qquad\quad +\ \ x_5=0, \\ \qquad\quad 4x_2+3x_3-\ \ x_4+3x_5=0; \end{cases}$ $\quad a_1=(1,0,1,0,1),$ $a_2=(1,3,7,9,-10).$

3.10. $\begin{cases} x_1+4x_2+\ \ x_3+\ \ 2x_4+3x_5=0, \\ x_1+2x_2 \qquad\quad +\ \ 5x_4+2x_5=0, \\ -x_1 \qquad\ +2x_3+\ \ 4x_4+\ \ x_5=0, \\ x_1+6x_2+3x_3+11x_4+6x_5=0; \end{cases}$ $\quad a_1=(1,0,1,0,1),\ a_2=(-11,6,-6,1,-3).$

Індивідуальна робота №4

Лінійний оператор, його матриця та координати образу вектора в даному базисі

Відображення $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ кожний вектор $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3) \in \mathbb{R}^3$ переводить у вектор $\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$. Довести, що φ є лінійним оператором. Знайти формули для координат образу вектора у канонічному базисі e_1, e_2, e_3 простору $\mathbb{R}^3$; образи векторів $a = (1,1,1)$, e_1, e_2, e_3 та матрицю лінійного оператора φ у цьому ж базисі.

4.1. $\varphi(x) = (3\chi_1 - \chi_2, \chi_1 + 2\chi_2 - \chi_3, \chi_3 - \chi_2)$.

4.2. $\varphi(x) = (2\chi_1 - \chi_2 - \chi_3, \chi_1 - 2\chi_2 + \chi_3, \chi_1 + \chi_2 - 2\chi_3)$.

4.3. $\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2 - \chi_3, -\chi_1 + \chi_2 - \chi_3, -\chi_1 - \chi_2 + \chi_3)$.

4.4. $\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2, \chi_2 - \chi_3, \chi_1 - \chi_3)$.

4.5. $\varphi(x) = (\chi_2 + 3\chi_3, 2\chi_2 - \chi_3, \chi_2 + \chi_3)$.

4.6. $\varphi(x) = (2\chi_1 - \chi_3, 2\chi_2 - \chi_3, \chi_1 - \chi_3)$.

4.7. $\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2 + 2\chi_3, \chi_1 - \chi_2, \chi_1 + 2\chi_2)$.

4.8. $\varphi(x) = (\chi_1 + 2\chi_2 - \chi_3, 2\chi_1 - \chi_2 + \chi_3, \chi_1 + 2\chi_2 - \chi_3)$.

4.9. $\varphi(x) = (\chi_2 + 4\chi_3, \chi_1 + \chi_2 - 2\chi_3, 2\chi_2 - 2\chi_3)$.

4.10. $\varphi(x) = (2\chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3, \chi_1 - \chi_3, \chi_2 + \chi_3)$.

Індивідуальна робота №5

Властивості лінійного оператора

Побудувати лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ такий, що переводить вектори базису a_1, a_2, a_3 цього простору відповідно у вектори b_1, b_2, b_3. Знайти матрицю оператора φ у базисі a_1, a_2, a_3.

5.1. $a_1 = (1,\ \ 3,-2),\quad a_2 = (4,-2,1),\quad a_3 = (-4,-1,1);$
$b_1 = (-4,-1,1),\quad b_2 = (7,-1,0),\quad b_3 = (\ \ 0,-1,0).$

5.2. $a_1 = (1, -1, 1), \quad a_2 = (1, 0, 1), \quad a_3 = (2, -1, 1);$
$b_1 = (1, \ \ 1, 1), \quad b_2 = (1, 1, 1), \quad b_3 = (1, \ \ 1, 0).$

5.3. $a_1 = (1, -1, 1), \quad a_2 = (2, 1, -1), \quad a_3 = (\ \ 3, 0, 1);$
$b_1 = (-1, 1, 1), \quad b_2 = (0, -1, 1), \quad b_3 = (-1, 0, 2).$

5.4. $a_1 = (1, -1, 1), \quad a_2 = (2, -1, 0), \quad a_3 = (3, -2, 0);$
$b_1 = (-1, 0, 1), \quad b_2 = (0, \ \ 0, 0), \quad b_3 = (0, \ \ 1, 1).$

5.5. $a_1 = (1, -1, -1), \quad a_2 = (-1, 2, 0), \quad a_3 = (0, \ \ 1, 0);$
$b_1 = (1, -1, \ \ 1), \quad b_2 = (1, 0, -1), \quad b_3 = (2, -1, 0).$

5.6. $a_1 = (1, \ \ 0, 1), \quad a_2 = (1, -1, 2), \quad a_3 = (2, -1, 4);$
$b_1 = (0, -1, 1), \quad b_2 = (1, \ \ 1, 0), \quad b_3 = (1, \ \ 0, 1).$

5.7. $a_1 = (1, \ \ 1, 1), \quad a_2 = (\ \ 0, -1, 2), \quad a_3 = (1, 0, 2);$
$b_1 = (1, -2, 1), \quad b_2 = (-1, 2, -1), \quad b_3 = (1, 0, 1).$

5.8. $a_1 = (2, 3, 5), \quad a_2 = (0, 1, \ \ 2), \quad a_3 = (1, 0, 0);$
$b_1 = (1, 1, 1), \quad b_2 = (1, 1, -1), \quad b_3 = (2, 1, 2).$

5.9. $a_1 = (2, 0, \ \ 3), \quad a_2 = (4, 1, \ \ 5), \quad a_3 = (3, \ \ 1, 2);$
$b_1 = (1, 2, -1), \quad b_2 = (4, 5, -2), \quad b_3 = (1, -1, 1).$

5.10. $a_1 = (1, 1, 1), \quad a_2 = (1, 1, -1), \quad a_3 = (2, 1, 2);$
$b_1 = (1, 1, 1), \quad b_2 = (1, 1, \ \ 1), \quad b_3 = (1, 1, 0).$

Індивідуальна робота №6

Зв'язок між матрицями лінійного оператора в різних базисах. Дії над лінійними операторами

Нехай лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ переводить вектор $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ у вектор $\varphi(x)$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

— матриця лінійного оператора ψ цього ж простору у базисі a_1, a_2, a_3. Знайти у канонічному базисі простору $\mathbb{R}^3$ матриці лінійних операторів φ, ψ, $\varphi + \psi$, $\varphi - \psi$, $\varphi\psi$, $\psi\varphi$.

6.1. $\varphi(x) = (2\chi_2 - 3\chi_3, \chi_1 + 2\chi_2 + 3\chi_3, \chi_3 - \chi_1)$;
$a_1 = (1, 1, 2)$, $a_2 = (1, 1, 1)$, $a_3 = (1, -1, 2)$.

6.2. $\varphi(x) = (2\chi_1 - \chi_2, 2\chi_2 - \chi_3, \chi_1 + \chi_2 + \chi_3)$;
$a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (2, 1, 1)$, $a_3 = (3, 2, 3)$.

6.3. $\varphi(x) = (\chi_1 + \chi_2 + \chi_3, 2\chi_1 - \chi_3, 3\chi_2 - \chi_1)$;
$a_1 = (1, -1, 1)$, $a_2 = (-1, 2, 0)$, $a_3 = (0, 1, 2)$.

6.4. $\varphi(x) = (2\chi_1 - \chi_2 - \chi_3, \chi_1 + \chi_3, \chi_1 + \chi_2 - 2\chi_3)$;
$a_1 = (1, 1, -1)$, $a_2 = (-1, 2, 0)$, $a_3 = (0, 1, 0)$.

6.5. $\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2 + 2\chi_3, \chi_1 - \chi_2, \chi_1 + 2\chi_2)$;
$a_1 = (1, -1, 1)$, $a_2 = (2, -1, -1)$, $a_3 = (3, -2, 1)$.

6.6. $\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2 - \chi_3, -\chi_1 + \chi_2 - \chi_3, -\chi_1 - \chi_2 + \chi_3)$;
$a_1 = (2, 1, 1)$, $a_2 = (1, 1, 3)$, $a_3 = (3, 2, 3)$.

6.7. $\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2, \chi_1 + \chi_2 + \chi_3, \chi_1 + 2\chi_2 - \chi_3)$;
$a_1 = (-1, 1, -1)$, $a_2 = (1, 0, 2)$, $a_3 = (0, 1, 2)$.

6.8. $\varphi(x) = (\chi_2 + 2\chi_3, 2\chi_3 - \chi_1, 3\chi_1 - \chi_2)$;
$a_1 = (1, 2, 1)$, $a_2 = (0, 1, 1)$, $a_3 = (1, 1, 1)$.

6.9. $\varphi(x) = (\chi_1 + 4\chi_2 + \chi_3, 2\chi_1 - 3\chi_3, \chi_2 - 3\chi_1)$;
$a_1 = (3, 1, 1)$, $a_2 = (1, 2, -1)$, $a_3 = (2, 0, 1)$.

6.10. $\varphi(x) = (2\chi_2 - 2\chi_3, 2\chi_1 - 2\chi_3, -\chi_2 - \chi_1)$;
$a_1 = (0, 1, -1)$, $a_2 = (1, 2, -1)$, $a_3 = (1, 1, -1)$.

Індивідуальна робота №7

Образ і ядро лінійного оператора

Нехай A — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^4$ у базисі c_1, c_2, c_3, c_4. Знайти базиси і розмірності підпросторів $Im\,\varphi$ та $Ker\,\varphi$. Переконатися у тому, що $\dim Im\,\varphi + \dim Ker\,\varphi = \dim \mathbb{R}^4$.

7.1. $A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **7.2.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

7.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. **7.4.** $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

7.5. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. **7.6.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

7.7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **7.8.** $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & -1 & -5 \\ -1 & -2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

7.9. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. **7.10.** $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -2 & -4 \\ 4 & -3 & 2 & -4 \\ 5 & -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$.

Індивідуальна робота №8

Характеристичний многочлен, власні значення й власні вектори лінійного оператора

Нехай A — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Знайти в цьому ж базисі матриці лінійних операторів φ^2, φ^3, φ^4 і переконатися в тому, що $f(\varphi) = 0$, де f — характеристичний многочлен оператора φ. Знайти всі власні значення і власні вектори опертора φ.

8.1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. **8.2.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8.3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. **8.4.** $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8.5. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **8.6.** $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

8.7. $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 7 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **8.8.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

8.9. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **8.10.** $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Індивідуальна робота №9

Спектр оператора

Нехай A_1, A_2, A_3 — матриці відповідно лінійних операторів φ_1, φ_2, φ_3 векторного простору $\mathbb{R}^3$ у канонічному базисі. Довести, що простір $\mathbb{R}^3$ має два базиси, кожен з яких складається з власних векторів відповідно операторів φ_1 і φ_2. Знайти ці базиси і матриці відповідних операторів у цих базисах. Довести, що в просторі $\mathbb{R}^3$ не існує базису, який би складався з власних векторів оператора φ_3.

9.1. $A_1=\begin{pmatrix} -6 & 5 & -5 \\ -1 & 4 & -1 \\ 9 & -5 & 8 \end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -6 & -6 & -4 \end{pmatrix}$.

9.2. $A_1=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 5 \end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

9.3. $A_1=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \\ -9 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

9.4. $A_1=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9.5. $A_1=\begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & -1 \\ 9 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -5 & -1 & 3 \\ -9 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

9.6. $A_1=\begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -2 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

9.7. $A_1 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 2 \\ -3 & -9 & 5 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 9 & -1 & -3 \\ 9 & 0 & -7 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$.

9.8. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

9.9. $A_1 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

9.10. $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 2 \\ -6 & 7 & 2 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -8 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Індивідуальна робота №10

Нормальна форма Жордана

Знайти нормальні форми Жордана матриць A_1, A_2, A_3. Нехай A_3 — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ у канонічному базисі цього простору. Знайти який-небудь базис простору $\mathbb{R}^3$, матриця оператора φ в якому має жорданову нормальну форму.

10.1. $A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 5 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -5 & -6 & -4 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

10.2. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -6 & -6 & -3 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

10.3. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -7 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

10.4. $A_1 = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -3 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & -3 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

10.5. $A_1 = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

10.6. $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

10.7. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ -8 & -2 & -7 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10.8. $A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \\ 10 & 6 & -6 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

10.9. $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

10.10. $A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Індивідуальна робота №11

Теорема про ортогональне доповнення

Підпростір L евклідового простору $\mathbb{R}^4$ є простором розв'язків системи рівнянь. Знайти ортогональне доповнення $L^\perp$ підпростору L в $\mathbb{R}^4$ та проекції вектора c на підпростір L та на його ортогональне доповнення $L^\perp$.

11.1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases}$ $c = (-5, 4, 6, -1)$.

11.2. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases}$ $c = (2, 0, 4, -1)$.

11.3. $\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$ $c = (5, 1, -4, 0)$.

11.4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0; \end{cases}$ $c = (1, -2, -4, 5)$.

11.5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 0, \\ -x_1 - 6x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$ $c = (-14, -3, 5, 0)$.

11.6. $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases}$ $c = (2, 8, 6, 4)$.

11.7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$ $c = (6, 2, 3, 0)$.

11.8. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 14x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases}$ $c = (-5, -11, 3, 5)$.

11.9. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ -10x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 7x_4 = 0; \end{cases}$ $c = (-15, 29, 3, -5)$.

11.10. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -2x_1 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0; \end{cases}$ $c = (14, -5, 1, -5)$.

Індивідуальна робота №12

Алгоритм ортогоналізації Грама-Шмідта

а. В евклідовому просторі $\mathbb{R}^4$ ортонормувати задану систему векторів a_1, a_2, a_3, a_4.

12.a.1. $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, -1, 1, -1)$, $a_3 = (0, 1, 1, 1)$, $a_4 = (0, 0, 1, 1)$.

12.a.2. $a_1 = (1, -1, 1, -1)$, $a_2 = (1, 0, -1, 0)$, $a_3 = (0, 1, 1, 1)$, $a_4 = (0, 0, 1, -1)$.

12.a.3. $a_1 = (-1, -1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, -1, 0)$, $a_3 = (1, 1, 1, 0)$, $a_4 = (1, 0, 0, -1)$.

12.a.4. $a_1 = (1, 1, -1, -1)$, $a_2 = (1, 0, 1, 0)$, $a_3 = (1, 1, 0, 1)$, $a_4 = (1, 1, 0, 0)$.

12.a.5. $a_1 = (1, 1, 1, -1)$, $a_2 = (1, 0, 0, 1)$, $a_3 = (1, 1, 1, 0)$, $a_4 = (0, 1, 1, 1)$.

12.а.6. $a_1 = (-1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 1, 0, 0)$, $a_3 = (0, 1, 0, 1)$, $a_4 = (0, 0, 1, 1)$.

12.а.7. $a_1 = (1, 2, 1, 1)$, $a_2 = (2, -1, 1, -1)$, $a_3 = (1, 1, 2, 0)$, $a_4 = (1, 1, 0, 0)$.

12.а.8. $a_1 = (0, 0, 1, -1)$, $a_2 = (0, 1, -1, 1)$, $a_3 = (1, 1, -1, 1)$, $a_4 = (1, 1, 1, 1)$.

12.а.9. $a_1 = (-1, 0, 0, 1)$, $a_2 = (0, 1, 1, 1)$, $a_3 = (1, 1, -1, -1)$, $a_4 = (1, 0, -1, 0)$.

12.а.10. $a_1 = (0, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, -1, 2, 0)$, $a_3 = (0, 0, 1, 1)$, $a_4 = (1, 1, 1, 1)$.

б. В евклідовому просторі $C^2_{[\alpha,\beta]}$ всіх функцій, квадрат яких є інтегровним, ортогоналізувати систему многочленів $p_1 = 1$, $p_2 = x$, $p_3 = x^2$, $p_4 = x^3$ (скалярний добуток двох довільних функцій f, g із простору $C^2_{[\alpha,\beta]}$ визначається наступним чином $(f, g) = \int_\alpha^\beta f(x)g(x)\,dx$).

12.б.1. $\alpha = 0$, $\beta = 1$.
12.б.2. $\alpha = -1$, $\beta = 0$.
12.б.3. $\alpha = 1$, $\beta = 2$.
12.б.4. $\alpha = -2$, $\beta = -1$.
12.б.5. $\alpha = 2$, $\beta = 3$.
12.б.6. $\alpha = -3$, $\beta = -2$.
12.б.7. $\alpha = -1$, $\beta = 1$.
12.б.8. $\alpha = -2$, $\beta = 2$.
12.б.9. $\alpha = -2$, $\beta = 0$.
12.б.10. $\alpha = -1$, $\beta = 2$.

Індивідуальна робота №13

Ортогональні оператори

Нехай A — матриця лінійного оператора φ евклідового простору $\mathbb{R}^4$ в канонічному базисі. Довести, що φ є ортогональним оператором. А також, що в просторі $\mathbb{R}^4$ існує ортонормований базис, який складається з власних векторів оператора φ. Знайти матрицю оператора φ у цьому базисі.

13.1. $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

13.2. $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

13.3. $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

13.4. $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

13.5. $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. **13.6.** $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

13.7. $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **13.8.** $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

13.9. $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **13.10.** $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Індивідуальна робота №14

Симетричні оператори

Нехай A — матриця лінійного оператора φ евклідового простору $\mathbb{R}^4$ в канонічному базисі. Довести, що φ — симетричний оператор. Знайти ортонормований базис простору $\mathbb{R}^4$, який складається з власних векторів оператора φ і матрицю оператора φ у цьому базисі.

14.1. $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 7 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. **14.2.** $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$.

14.3. $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. **14.4.** $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

14.5. $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$. **14.6.** $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

14.7. $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. **14.8.** $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

14.9. $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. **14.10.** $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Індивідуальна робота №15

Квадратичні форми

а. Знайти нормальні вигляди квадратичної форми $f(x_1, x_2, x_3)$ відповідно над полями дійсних та комплексних чисел і перетворення невідомих, що зводять форму f до цих виглядів.

15.а.1. $f = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$.

15.а.2. $f = -x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3$.

15.а.3. $f = x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3$.

15.а.4. $f = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 - 6x_1x_2 - 4x_2x_3$.

15.а.5. $f = -x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$.

15.а.6. $f = -x_1^2 + 3x_2 - 3x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3 - 4x_1x_3$.

15.а.7. $f = x_1^2 + 2x_2^2 - 8x_1x_2 + 4x_2x_3 + 2x_1x_3$.

15.а.8. $f = -2x_1^2 - 2x_2^2 - 8x_1x_2 - 4x_2x_3$.

15.а.9. $f = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 6x_2x_3 - 2x_1x_3$.

15.а.10. $f = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3 + 2x_1x_3 - 9x_3^2$.

б. Чи є квадратична форма $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^TAX$, задана матрицею A, додатньо, від'ємно визначеною, чи знакозмінною?

15.б.1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **15.б.2.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

15.б.3. $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. **15.б.4.** $A=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

15.б.5. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **15.б.6.** $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

15.б.7. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. **15.б.8.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

15.б.9. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. **15.б.10.** $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Індивідуальна робота №16

Класифікація поверхонь другого порядку

Визначити тип поверхні, заданої рівнянням $F(x, y, z) = 0$, знайти її канонічне рівняння та канонічну систему координат.

16.а.1. $F(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz - 2.$

16.а.2. $F(x, y, z) = 7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6.$

16.а.3. $F(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy + 4.$

16.а.4. $F(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz - 2.$

16.а.5. $F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 4yz - 1.$

16.а.6. $F(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 8.$

16.а.7. $F(x, y, z) = x^2 - 5y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz - 6.$

16.а.8. $F(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + z^2 + 6xy - 6xz - 2yz - 1.$

16.а.9. $F(x, y, z) = 5x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2xz - 4yz + 1$.

16.а.10. $F(x, y, z) = x^2 - 2xy + 2xz - 4.$

ЛІТЕРАТУРА

1. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. – М.: Наука, 1979.
2. *Завало С. Т.* Курс алгебри. – К.: Вища школа, 1985.
3. *Калужнин Л. А.* Введение в общую алгебру. – М.: Наука, 1973.
4. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. – М.: Наука, 1977.
5. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971.
6. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1975.
7. *Скорняков Л. А.* Элементы общей алгебры. – М.: Наука, 1983.
8. *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1974.
9. *Фаддеев Д. К.* Лекции по алгебре. – М.: Наука, 1984.
10. *Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1977.
11. Сборник задач по алгебре / Под редакцией Кострикина А. И. – М.: Наука, 1987.

Методичні вказівки для лабораторних робіт

БАРАННИК Валерій Феодосієвич
ПОГОРІЛЯК Євгенія Яківна
РУДЬКО В'ячеслав Павлович
ШАПОЧКА Ігор Валерійович

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Відповідальний за випуск:
кандидат фізико-математичних наук, доцент *О.А. Кирилюк*

Підписано до друку Формат $60 \times 84/16$. Офсетний друк.
Умов. друк. арк. Облік.-вип. арк. Замовлення №
Тираж

Видавництво Ужгородського державного університету
м. Ужгород, вул. Капітульна, 18