УДК 517.9

С. І. Балога (Ужгородський нац. ун-т)

ІНТЕГРАЛЬНІ МНОЖИНИ ОДНОГО КЛАСУ РОЗШИРЕНЬ НЕАВТОНОМНИХ СИСТЕМ НА ТОРІ

Using the concept of the Green-Samoilenko function of the problem of invariant tori, the integral sets of a one class of extensions of non-autonomous system on Torus are built. The problem regarding asymptotic stability of such sets was investigated.

Використовуючи поняття функції Гріна-Самойленка задачі про інваріантні тори, побудовано інтегральні множини одного класу розширень неавтономної системи на торі. Досліджено питання асимптотичної стійкості цих множин.

Тематика даної роботи пов'язана з теорією багаточастотних коливань, фундаментальні дослідження якої проведені в [1,2]. Основним результатом є достатні умови існування та асимптотичної стійкості інтегральних множин одного класу лінійних та слабконелінійних розширень неавтономної системи диференціальних рівнянь на торі.

Розглянемо систему рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(t, \varphi),\ \dot{x} = A(t, \varphi)x + f(t, \varphi), \tag{1}$$

в якій $t \in R,\ x \in R^n,\ \varphi \in T^m$, T^m — $m-$вимірний тор; $a(t, \varphi), f(t, \varphi)$ і $A(t, \varphi)-$ неперервні по t векторні та матрична функції відповідно, неперервні і 2π-періодичні по $\varphi_j,\ j = 1, 2, ..., m$, обмежені при всіх $t \in R,\ \varphi \in T^m$. Крім того, $a(t, \varphi)$ — ліпшицева по φ_j функція рівномірно відносно $t \in R$. В [3] встановлено достатні умови існування інтегральних множин лінійних розширень неавтономної системи диференціальних рівнянь на торі. Виокремимо клас лінійних та слабконелінійних рівнянь, для яких ці умови виконуються. Позначимо через $\varphi_t(\tau, \varphi)$ розв'язок першого із рівнянь системи (1) такий, що $\varphi_\tau(\tau, \varphi) = \varphi$. З компактності фазового простору першого з рівнянь системи (1) та припущень відносно функції $a(t, \varphi)$ випливає, що кожен розв'язок $\varphi_t(\tau, \varphi),\ \varphi_\tau(\tau, \varphi) = \varphi$ існує при будь-яких $\tau \in R,\ \varphi \in T^m$ і може бути продовжений по t на всю дійсну вісь R. Позначимо через $\Omega^t_s(\tau, \varphi)$ матрицант однорідної системи

$$\dot{x} = A(t, \varphi_t(\tau, \varphi))x, \tag{2}$$

залежної від $\varphi \in T^m,\ \tau \in R$ як від параметрів. Покладемо

$$G(t, \tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega^t_\tau(t, \varphi)C(\tau, \varphi_\tau(t, \varphi)),\ \tau \le t, \\ \Omega^t_\tau(t, \varphi)[C(\tau, \varphi_\tau(t, \varphi)) - E],\ \tau > t, \end{cases}$$

де $C(t, \varphi)$ — неперервна по $t \in R$, 2π-періодична по $\varphi_j, j = 1, 2, ..., m$, матрична функція, і назвемо $G(t, \tau, \varphi)$ функцією Гріна-Самойленка системи рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(t, \varphi),\ \dot{x} = A(t, \varphi)x,$$

якщо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| G(t, \tau, \varphi) \| \, d\tau \le k < \infty \tag{3}$$

для всіх $\varphi \in T^m$, $t, \tau \in R$. Матриця $G(t, \tau, \varphi)$ неперервна для всіх $t, \tau \in R$, $\varphi \in T^m$, 2π-періодична по $\varphi_j, j = 1, 2, ..., m$, при $t \neq \tau$, а при $t = \tau$ вона має розрив першого роду зі стрибком

$$G(\tau + 0, \tau, \varphi) - G(\tau - 0, \tau, \varphi) = E.$$

Крім того, матриця $G(t, \tau, \varphi_t(\tau, \varphi))$ складається з розв'язків однорідної системи рівнянь (2), що розглядається при $\tau \leq t$ і $\tau > t$.

Припускаємо, що для всіх $\varphi \in T^m, \tau \in R$ існує границя

$$\lim_{|t| \to +\infty} A(t, \varphi_t(\tau, \varphi)) = A. \tag{4}$$

Будемо розглядати випадок, коли матриця $A(t, \varphi)$ має блочно-діагональний вигляд:

$$A(t, \varphi) = \begin{pmatrix} A_-(t, \varphi) & 0 \\ 0 & A_+(t, \varphi) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Теорема 1. *Якщо дійсні частини всіх власних чисел граничної матриці A відмінні від нуля: $Re(\lambda_j(A)) \neq 0$, $(j = 1, 2, ..., n)$, причому $Re(\lambda_j(A)) < 0$, $j = 1, 2, ..., k$ і $Re(\lambda_j(A)) > 0$, $j = k + 1, ..., n$, то для довільної неперервної і обмеженої по $t \in R, \varphi \in T^m$, 2π-періодичної по φ_j, $j = 1, 2, ..., m$ функції $f(t, \varphi)$ система (1) має інтегральну множину*

$$x = u(t, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t, s, \varphi) f(s, \varphi_s(t, \varphi)) ds. \tag{6}$$

Доведення. Розглянемо лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь, залежну від $\tau \in R, \varphi \in T^m$ як від параметрів:

$$\dot{x} = A(t, \varphi_t(\tau, \varphi))x + f(t, \varphi_t(\tau, \varphi)). \tag{7}$$

Позначимо через $\Omega_s^t(\tau, \varphi, A_-)$ і $\Omega_s^t(\tau, \varphi, A_+)$ матриціанти однорідних систем

$$\dot{x_1} = A_-(t, \varphi_t(\tau, \varphi))x_1$$

і

$$\dot{x_2} = A_+(t, \varphi_t(\tau, \varphi))x_2$$

відповідно, залежних від $\tau \in R$, $\varphi \in T^m$ як від параметрів, для яких справедливі оцінки [4]

$$\begin{aligned} \|\Omega_s^t(\tau, \varphi, A_-)\| &\leq Ke^{-\gamma(t-s)}, \quad t \geq s, \\ \|\Omega_s^t(\tau, \varphi, A_+)\| &\leq Ke^{\gamma(t-s)}, \quad t \leq s \end{aligned} \tag{8}$$

для деяких $K > 0$ і $\gamma > 0$ та для будь-яких $t, s \in R$, $\varphi \in T^m$.

Позначимо

$$G(t, s, \varphi) = \begin{cases} diag(\Omega_s^t(\tau, \varphi, A_-), 0), & t \geq s, \\ -diag(0, \Omega_s^t(\tau, \varphi, A_+)), & t < s. \end{cases}$$

Із нерівностей (8) випливає, що $G(t,s,\varphi)$ задовольняє оцінку

$$\|G(t,s,\varphi)\| \le Ke^{-\gamma|t-s|} \tag{9}$$

при деяких додатних K,γ та при будь-яких $t,s \in R$, $\varphi \in T^m$. Враховуючи це, отримуємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|G(t,s,\varphi)\|\, ds \le \frac{2K}{\gamma} < \infty.$$

Покажемо, що множина $x = u(t,\varphi)$ є інтегральною множиною системи (1). Для цього розглянемо функцію

$$x^*(t,\varphi) = u(t,\varphi_t(\tau,\varphi)),$$

де $\varphi_t(\tau,\varphi)$, $\varphi_\tau(\tau,\varphi) = \varphi$ — розв'язок першого із рівнянь системи (1). Подамо $x^*(t,\varphi)$ у вигляді

$$x^*(t,\varphi) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{t} G(t,s,\varphi_t(\tau,\varphi)) f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)))ds + \int\limits_{t}^{+\infty} G(t,s,\varphi_t(\tau,\varphi)) f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)))ds.$$

Диференціюючи останнє співвідношення по t отримуємо:

$$\frac{dx^*(t,\varphi)}{dt} = \frac{d}{dt}u(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) = A(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) \int\limits_{-\infty}^{t} \Omega_s^t(\tau,\varphi) C(s,\varphi_s(\tau,\varphi)) f(s,\varphi_s(\tau,\varphi))ds +$$

$$+ C(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) f(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) - A(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) \int\limits_{t}^{+\infty} \Omega_s^t(\tau,\varphi)[E - C(s,\varphi_s(\tau,\varphi))] \cdot$$

$$\cdot f(s,\varphi_s(\tau,\varphi))ds + [E - C(t,\varphi_t(\tau,\varphi))] f(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) = A(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) u(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) +$$

$$+ f(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) = A(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) x^*(t,\varphi) + f(t,\varphi_t(\tau,\varphi))$$

для будь-яких $\tau \in R$, $\varphi \in T^m$. Отже, $x^*(t,\varphi) = u(t,\varphi_t(\tau,\varphi))$ є обмеженим для всіх $t \in R$ розв'язком системи рівнянь

$$\dot{x} = A(t,\varphi_t(\tau,\varphi))x + f(t,\varphi_t(\tau,\varphi))$$

залежної від $\varphi \in T^m$, $\tau \in R$ як від параметрів. Це означає, що $x = u(t,\varphi)$ є інтегральною множиною системи (1). Крім того, враховуючи оцінку (9), має місце нерівність

$$\sup_{t \in R} \max_{\varphi \in T^m} \|u(t,\varphi)\| \le \frac{2K}{\gamma} \sup_{t \in R} \max_{\varphi \in T^m} \|f(t,\varphi)\|.$$

Теорема доведена.

Розглянемо слабконелінійну систему диференціальних рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(t, \varphi), \; \dot{x} = F(t, \varphi, x) + A(t, \varphi)x, \tag{10}$$

в якій $a(t, \varphi)$ і $A(t, \varphi)$ такі як і в (1), $F(t, \varphi, x)$ визначена і обмежена для всіх $t \in R, \varphi \in T^m, x \in R^n$, неперервна, 2π-періодична по φ і рівномірно по $\varphi \in T^m$ задовольняє умову Ліпшиця по x

$$\left\| F(t, \varphi, x^{'}) - F(t, \varphi, x^{''}) \right\| \leq L \left\| x^{'} - x^{''} \right\| \tag{11}$$

для всіх $x^{'}, x^{''} \in R^n$. Наведемо достатні умови існування інтегральних множин системи (10).

Теорема 2. *Нехай для всіх $\varphi \in T^m, \tau \in R$ існує границя (4) і дійсні частини всіх власних чисел граничної матриці A відмінні від нуля: $Re\lambda_j(A) \neq 0$, $(j = 1, 2, ..., n)$, причому $Re\lambda_j(A) < 0$ при $j = 1, 2, ..., k$ і $Re\lambda_j(A) > 0$ при $j = k+1, ..., n$. Тоді для достатньо малої сталої Ліпшиця L система (10) має інтегральну множину*

$$x = u(t, \varphi), \; t \in R, \; \varphi \in T^m.$$

Доведення. Інтегральну множину шукатимемо методом послідовних наближень як границю послідовності множин

$$M_k: \; x = u^{(k)}(t, \varphi), \; t \in R, \varphi \in T^m, \; k = 1, 2, ..., \; u^{(0)}(t, \varphi) = 0,$$

кожна з яких є інтегральною множиною системи рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(t, \varphi), \; \dot{x} = A(t, \varphi)x + F(t, \varphi, u^{(k-1)}(t, \varphi)). \tag{12}$$

Згідно з теоремою 1, система рівнянь (12) має інтегральну множину

$$x = u^{(k)}(t, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t, s, \varphi) F(s, \varphi_s(t, \varphi), u^{(k-1)}(s, \varphi_s(t, \varphi)))ds \tag{13}$$

для кожного $k = 1, 2, ...$ Покажемо, що таким методом можна побудувати інтегральну множину системи (10). Для цього треба переконатись в тому, що можна побудувати функцію $u^{(k)}(t, \varphi)$ для будь-якого $k = 1, 2, ...$, довести рівномірну збіжність

$$u^{(k)}(t, \varphi) \rightrightarrows u(t, \varphi), \; \varphi \in T^m,$$

і показати, що $x = u(t, \varphi)$ задає інтегральну множину системи (10). Оскільки

$$\left\| u^{(1)}(t, \varphi) \right\| \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\| G(t, s, \varphi) \right\| \left\| F(t, \varphi_s(t, \varphi), 0) \right\| ds,$$

то, враховуючи оцінку (9),

$$\sup_{t \in R} \max_{\varphi \in T^m} \left\| u^{(1)}(t, \varphi) \right\| \leq \frac{2K}{\gamma} \sup_{t \in R} \max_{\varphi \in T^m} \left\| F(t, \varphi, 0) \right\|.$$

Беручи до уваги умову (11) маємо:

$$\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in T^m}\left\|u^{(k)}(t,\varphi)\right\| \le \sup_{t\in\ R}\max_{\varphi\in T^m}\left\|u^{(k)}(t,\varphi)-u^{(1)}(t,\varphi)\right\| + \sup_{t\in\ R}\max_{\varphi\in T^m}\left\|u^{(1)}(t,\varphi)\right\| \le$$

$$\le \frac{1}{1-\frac{2K}{\gamma}L}\sup_{t\in\ R}\max_{\varphi\in\ T^m}\left\|u^{(1)}(t,\varphi)\right\| \le \frac{\frac{2K}{\gamma}}{1-\frac{2K}{\gamma}L}\sup_{t\in\ R}\max_{\varphi\in\ T^m}\left\|F(t,\varphi,0)\right\|.$$

Отже, можна побудувати множину M_k, яка є інтегральною множиною системи (12). Встановимо умови збіжності послідовності $u^{(k)}(t,\varphi)$.

Оцінимо різницю $u^{(k+1)}(t,\varphi)-u^{(k)}(t,\varphi)$:

$$\sup_{t\in\ R}\max_{\varphi\in\ T^m}\left\|u^{(k+1)}(t,\varphi)-u^{(k)}(t,\varphi)\right\| \le \frac{2K}{\gamma}\ L\sup_{t\in\ R}\max_{\varphi\in\ T^m}\left\|u^{(k)}(t,\varphi)-u^{(k-1)}(t,\varphi)\right\|.$$

Таким чином, вважаючи, що константа Ліпшиця L настільки мала, що

$$\frac{2K}{\gamma}\ L<1,$$

робимо висновок про рівномірну збіжність послідовності функцій $\{u^{(k)}(t,\varphi)\}$. Покладемо

$$\lim_{k\to\infty}u^{(k)}(t,\varphi)=u(t,\varphi).$$

Переконаємося, що множина $x=u(t,\varphi)$ є інтегральною множиною вихідної системи. Перейшовши до границі, коли $k\to\infty$ в рівності (13) бачимо, що функція $u(t,\varphi)$ задовольняє рівність

$$x=u(t,\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(t,s,\varphi)F(s,\varphi_s(t,\varphi),u(s,\varphi_s(t,\varphi)))ds.$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що функція $u(t,\varphi_t(\tau,\varphi))$ є розв'язком системи рівнянь

$$\dot{x}=A(t,\varphi_t(\tau,\varphi))+F(t,\varphi_t(\tau,\varphi),x),$$

яка залежить від $\tau\in R,\varphi\in T^m$ як від параметрів. Тому множина $x=u(t,\varphi)$, $t\in R,\ \varphi\in T^m$ є інтегральною множиною системи рівнянь (10). Теорема доведена.

Теорема 3. *Якщо дійсні частини всіх власних чисел граничної матриці A від'ємні $Re(\lambda_j(A))<0$, $j=1,2,...,n$, то система (1) має інтегральну множину*

$$x=u(t,\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{t}G(t,s,\varphi)f(s,\varphi_s(t,\varphi))ds$$

і ця множина є асимптотично стійкою.

Доведення. З умови теореми слідує, що існує функція Гріна-Самойленка вигляду

$$G(t,\tau,\varphi) = \begin{cases} \Omega^t_\tau(t,\varphi), & t \geq \tau, \\ 0, & t < \tau, \end{cases}$$

яка отримується із означення, якщо покласти $C(\tau, \varphi_\tau(t,\varphi)) \equiv E$. В системі рівнянь (2) зробимо заміну $x = u(t,\varphi) + z$. Тоді

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{dz}{dt} = A(t,\varphi_t(\tau,\varphi))u(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) + A(t,\varphi_t(\tau,\varphi))z + f(t,\varphi_t(\tau,\varphi)),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot a(t,\varphi) + \frac{dz}{dt} = A(t,\varphi_t(\tau,\varphi))u(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) + A(t,\varphi_t(\tau,\varphi))z + f(t,\varphi_t(\tau,\varphi)).$$

Звідси

$$\frac{dz}{dt} = A(t,\varphi_t(\tau,\varphi))z.$$

Позначимо через $z = z(t,\varphi,z_0) = \Omega^t_0(\tau,\varphi)z_0$ загальний розв'язок останньої системи рівнянь. Використовуючи властивості матриціанта $\Omega^t_0(\tau,\varphi)$, для цього розв'язку отримаємо оцінку

$$\|z(t,\varphi,z_0)\| = \left\|\Omega^t_0(\tau,\varphi)z_0\right\| = \left\|\Omega^t_\tau(\tau,\varphi)\Omega^\tau_0(\tau,\varphi)z_0\right\| = \left\|\Omega^{t-\tau+\tau}_\tau(\tau,\varphi)z(\tau,\varphi,z_0)\right\| \leq$$

$$\leq \left\|\Omega^{t-\tau}_\tau(\tau,\varphi_t(\tau,\varphi))\right\| \|z(\tau,\varphi,z_0)\| \leq Ke^{-\gamma(t-\tau)}\|z(\tau,\varphi,z_0)\|,$$

справедливу для всіх $t \in R, \varphi \in T^m$. Отже, маємо

$$\|x(t,\varphi_t(\tau,\varphi),x_0) - u(t,\varphi_t(\tau,\varphi))\| = \|z(t,\varphi,z_0)\| \leq Ke^{-\gamma(t-\tau)}\|z(\tau,\varphi,z_0)\|,$$

а це показує, що

$$\|x(t,\varphi_t(\tau,\varphi),x_0) - u(t,\varphi_t(\tau,\varphi))\| \to 0, t \to +\infty.$$

Теорема доведена.

Зауваження 1. *Якщо дійсні частини всіх власних чисел граничної матриці A від'ємні, то інтегральна множина системи (10) є асимптотично стійкою.*

Таким чином, в роботі виділено клас рівнянь, для яких встановлено достатні умови існування інтегральних множин, а також досліджено питання асимптотичної стійкості таких множин.

1. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова.– К.: Наук. думка, 1990. — 272 с.
3. *Асроров Ф. А., Перестюк М. О.* Функция Грина-Самойленко и существование интегральных множеств линейных расширений неавтономных систем // Укр. мат. журн. — 1994. — т.46, № 8.— С.1067 — 1071.
4. *Балога С. І., Король І. І., Питьовка О. Ю.* Інваріантні многовиди одного класу систем диференціальних рівнянь // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. — 2012.— Вип.23, № 1. — С.4 — 12.

Одержано 12.09.2012