УДК 512.5+512.6

В. М. Бондаренко (Ін-т математики НАН України),
Т. В. Манжос, О. М. Тертична (Київський нац. економ. ун-т ім. Вадима Гетьмана)

ПРО ОДИН КОНТРПРИКЛАД ДЛЯ МАТРИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ НЕСКІНЧЕННИХ НАПІВГРУП $\mathbf{S(I,J)}$

In this article we construct a counterexample for matrix representations of a natural class of semigroups generated by idempotents that is associated with almost nondegenerate matrices.

У цій статті побудовано контрприклад для матричних зображень природного класу напівгруп, породжених ідемпотентами, що пов'язаний з майже невиродженими матрицями.

Напівгрупа $S(I,J)$, де I — довільна скінченна множина (без елементу 0) і J — підмножина в $I \times I$ без діагональних елементів, — це напівгрупа з твірними елементами e_i, де $i \in I \cup 0$, і наступними визначальними співвідношеннями:

1) $e_0 = 0$ ($e_0 e_i = e_i e_0 = 0$ для $i \in I \cup 0$);
2) $e_i^2 = e_i$ для довільного $i \in I$;
3) $e_i e_j = 0$ для довільної пари $(i,j) \in J$.

Вона називається *напівгрупою, породженою ідемпотентами з частковим нульовим множенням* [1]. Множину всіх напівгруп вигляду $S(I,J)$ позначимо через $\mathcal{I}$, а множину всіх скінченних (відповідно нескінченних) напівгруп $S(I,J)$ — через $\mathcal{I}_{<\infty}$ (відповідно $\mathcal{I}_\infty = \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_{<\infty}$).

Матричне зображення розмірності n напівгрупи $S = S(I,J) \in \mathcal{I}$ над полем k — це (згідно загального означення матричного зображення напівгрупи) набір $M = \{M(e_i) \mid i \in I \cup 0\}$ матриць розміру $n \times n$ з елементами із k, такий, що виконуються наступні умови:

1) $M(e_0) = 0$;
2) $[M(e_i)]^2 = M(e_i)$ для довільного $i \in I$;
3) $M(e_i)M(e_j) = 0$ для довільної пари $(i,j) \in J$.

Коли ми будемо говорити про матричне зображення M напівгрупи $S(I,J)$, то будемо вказувати лише матриці $M(e_i)$ для $i \neq 0$.

Еквівалентність матричних зображень $M = \{M(e_i) \mid i \in I\}$ і $N = \{N(e_i) \mid i \in I\}$ напівгрупи $S(I,J)$ означає існування оборотної матриці C, такої, що $M(e_i) = C^{-1}N(e_i)C$ для всіх $i \in I$.

Прямою сумою матричних зображень $M = \{M(e_i) \mid i \in I\}$ і $N = \{N(e_i) \mid i \in I\}$ напівгрупи $S(I,J)$ називається зображення $M \oplus N = \{M(e_i) \oplus N(e_i) \mid i \in I\}$, де

$$M(e_i) \oplus N(e_i) = \left(\begin{array}{c|c} M(e_i) & 0 \\ \hline 0 & N(e_i) \end{array} \right).$$

Зображення M називається *розкладним*, якщо воно еквівалентне прямій сумі двох ненульових зображень, і *нерозкладним* в іншому разі (нульове матричне зображення — це зображення розмірності 0).

Матричні зображення напівгруп $S(I,J)$ та їх деякі властивості досліджувалися в ряді робіт (див., зокрема, [1], [2] і [3]). У цій роботі ми продовжуємо вивчати властивості матричних зображень таких напівгруп над полем k.

Квадратну матрицю P над полем k назвемо *майже невиродженою*, якщо x^2 не ділить її мінімальний многочлен $m_P(x)$. У роботі [3] доведено, що це еквівалентно такій умові: матриця P подібна прямій сумі невиродженої матриці A та нульової матриці B (матриця A або B може бути нульової розмірності).

Зокрема, доведено, що для довільної напівгрупи $S(I,J)$ з класу $\mathcal{I}_{<\infty}$ матриця

$$P = \sum_{i \in I} M(e_i),$$

де $M = \{M(e_i) \mid i \in I\}$ — довільне фіксоване матричне зображення $S(I,J)$ над довільним полем k, є майже невиродженою. Позначимо надалі цю властивість через $(*)$.

У цій статті ми доведемо, що в класі $\mathcal{I}_\infty$ властивість $(*)$, взагалі кажучи, не виконується.

1. Напівгрупа $\mathbf{S_2}$ та її властивості. Позначимо через S_2 напівгрупу $S(I,J)$ із $\mathcal{I}$, для якої $I = \{1,2\}$, $J = \varnothing$, тобто

$$S_2 = \langle 0, e_1, e_2 \mid e_1^2 = e_1, e_2^2 = e_2 \rangle.$$

Доведемо, що напівгрупа S_2 нескінченна, тобто належить класу $\mathcal{I}_\infty$. Ми доведемо це за допомогою матричних зображень.

Розглянемо наступне матричне зображення $M = \{M(e_i) \mid i \in I\}$ напівгрупи S_2 над довільним фіксованим полем k характеристики 0 (наприклад, над полем дійсних чисел):

$$M(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix},$$

де $c \neq 0$ — фіксований елемент поля k, який не є коренем з одиниці (тоді степені c, c^2, $c^3, \ldots$ елемента c попарно різні). Оскільки, як легко бачити, $[M(e_i)]^2 = M(e_i)$ для $i = 1,2$, то вказане відображення

$$\{e_i \mid i \in I \cup 0\} \to Mat_{2\times 2}(k)$$

дійсно задає зображення напівгрупи S_2.

Покладемо $x = e_1 e_2$. Оскільки

$$M(x) = M(e_1 e_2) = M(e_1)M(e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то

$$[M(x)]^2 = \begin{pmatrix} c^2 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ [M(x)]^3 = \begin{pmatrix} c^3 & c^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \ [M(x)]^s = \begin{pmatrix} c^s & c^{s-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots$$

В силу вибору елемента $c \in k$ матриці $M(x), [M(x)]^2, [M(x)]^3, \ldots$ попарно різні. Таким чином, елементи $x, x^2, x^3, \ldots$ напівгрупи S_2 попарно різні і, отже, S_2 — нескінченна напівгрупа.

2. Основний результат. Основним результатом цієї статті є наступна теорема.

Теорема 1. *В класі* $\mathcal{I}_\infty$ *властивість* $(*)$ *не виконується.*

Доведення. Для доведення теореми 1 слід знайти контрприклад, тобто вказати напівгрупу $S(I,J)$ з класу $\mathcal{I}_\infty$ і деяке її фіксоване матричне зображення $M=\{M(e_i)\mid i\in I\}$ над деяким полем k, для яких матриця $P=\sum_{i\in I}M(e_i)$ не є майже невиродженою.

Розглянемо наступне матричне зображення $M=\{M(e_i)\mid i=1,2\}$ напівгрупи S_2 над довільним полем k характеристики 2:

$$M(e_1)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad M(e_2)=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Оскільки $[M(e_i)]^2=M(e_i)$ для $i=1,2$, то $M=\{M(e_i)\mid i=1,2\}$ дійсно є зображенням напівгрупи S_2.

Тоді

$$P=M(e_1)+M(e_2)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Очевидно, що мінімальним многочленом матриці P є $m_B(x)=x^2$. Оскільки $x^2\mid m_P(x)$, то P не є майже невиродженою матрицею. Теорема 1 доведена.

3. Деяке узагальнення теореми 1. Матричне зображення M, вказане в доведенні теореми 1, розкладне, оскільки є прямою сумою таких зображень:

$$M_1=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right\};\ M_2=\{(1),(1)\};\ M_3=\{(0),(0)\}.$$

Однак існує і нерозкладне зображення, що задовольняє тій же властивості. Більш того, таке зображення існує в будь-якій парній розмірності. Доведемо це.

Для довільного натурального числа m розглянемо наступне зображення $T=\{T(e_i)\mid i=1,2\}$ розмірності $2m$ напівгрупи S_2 над довільним полем k характеристики 2:

$$T(e_1)=\begin{pmatrix}E_m&0\\E_m&0\end{pmatrix},\quad T(e_2)=\begin{pmatrix}E_m&J_m(0)\\0&0\end{pmatrix},$$

де E_m — одинична матриця розміру m, а $J_m(0)$ — клітина Жордана розміру m з власним числом 0. Оскільки $[T(e_i)]^2=T(e_i)$ для $i=1,2$, то T справді є зображенням напівгрупи S_2.

Тоді

$$P=T(e_1)+T(e_2)=\begin{pmatrix}E_m&0\\E_m&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}E_m&J_m(0)\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&J_m(0)\\E_m&0\end{pmatrix}.$$

Щоб довести, що матриця P не є майже невиродженою, знайдемо її мінімальний многочлен $m_P(x)$. Для цього слід спочатку знайти власні числа матриці P, які (як відомо) є коренями характеристичного рівняння $\chi_P(\lambda)=0$.

Загальновідомими є такі факти: 1) коренями мінімального многочлену є власні числа матриці P і лише вони; 2) для власного числа λ матриці P кратність λ як кореня $m_P(x)$ дорівнює найбільшому розміру клітини Жордана з власним числом λ, що зустрічається в жордановій нормальній формі матриці P.

Для кращого розуміння загального випадку знайдемо характеристичний многочлен $\chi_P(\lambda)$ спочатку для частинного випадку $m = 3$. Отже, нехай

$$P = \left(\begin{array}{c|c} 0 & J_3(0) \\ \hline E_3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Тоді характеристичний многочлен $\chi_P(\lambda)$ матриці P дорівнює:

$$\det(P - \lambda E) = \det\left(\begin{array}{c|c} -\lambda E_3 & J_3(0) \\ \hline E_3 & -\lambda E_3 \end{array}\right) = \left\|\begin{array}{ccc|ccc} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{array}\right\| =$$

(розкладемо визначник за третім рядком)

$$= -\lambda(-1)^{3+3}\cdot\left\|\begin{array}{cc|ccc} -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{array}\right\| = -\lambda\cdot\left\|\begin{array}{cc|ccc} -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{array}\right\| =$$

(розкладемо визначник за п'ятим рядком)

$$= -\lambda(-\lambda)(-1)^{5+5}\cdot\left\|\begin{array}{cc|cc} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{array}\right\| = \lambda^2\cdot\det\left(\begin{array}{c|c} -\lambda E_2 & J_2(0) \\ \hline E_2 & -\lambda E_2 \end{array}\right) =$$

(розкладемо визначник за другим рядком)

$$= \lambda^2(-\lambda)(-1)^{2+2}\cdot\left\|\begin{array}{c|cc} -\lambda & 0 & 1 \\ \hline 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{array}\right\| = -\lambda^3\cdot\left\|\begin{array}{c|cc} -\lambda & 0 & 1 \\ \hline 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{array}\right\| =$$

(розкладемо визначник за третім рядком)

$$= -\lambda^3(-\lambda)(-1)^{3+3}\cdot\left\|\begin{array}{c|c} -\lambda & 0 \\ \hline 1 & -\lambda \end{array}\right\| = \lambda^4\cdot\det\left(\begin{array}{c|c} -\lambda E_1 & J_1(0) \\ \hline E_1 & -\lambda E_1 \end{array}\right) = \lambda^4(\lambda^2 - 0) = \lambda^6.$$

Таким чином, характеристичний многочлен матриці P у випадку $m = 3$ має вигляд $\chi_P(\lambda) = \lambda^6$.

Аналогічним способом доводимо, що характеристичний многочлен P у загальному випадку дорівнює $\chi_P(\lambda)=\lambda^{2m}$, а саме:

$$\chi_P(\lambda)=\det(P-\lambda E)=\det\left(\begin{array}{c|c}-\lambda E_m & J_m(0)\\ \hline E_m & -\lambda E_m\end{array}\right)=$$

$$=\left\|\begin{array}{ccccc|ccccc}
-\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\
0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & -\lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\
0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \hline
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda
\end{array}\right\|=$$

(розкладемо визначник за m-м рядком)

$$=-\lambda(-1)^{m+m}\cdot\left\|\begin{array}{cccc|ccccc}
-\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\
0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ \hline
1 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda
\end{array}\right\|=$$

(розкладемо визначник за останнім $(2m-1)$-м рядком)

$$=-\lambda(-\lambda)(-1)^{(2m-1)+(2m-1)}\cdot\left\|\begin{array}{cccc|cccc}
-\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\
0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \hline
1 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 0 & \cdots & 0\\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda
\end{array}\right\|=$$

$$=\lambda^2\cdot\det\left(\begin{array}{c|c}-\lambda E_{m-1} & J_{m-1}(0)\\ \hline E_{m-1} & -\lambda E_{m-1}\end{array}\right)=$$

(аналогічно далі розкладемо визначник спочатку за $(m-1)$-м рядком, а потім за останнім $(2m-3)$-м рядком)

$$=\lambda^4\cdot\det\left(\begin{array}{c|c}-\lambda E_{m-2} & J_{m-2}(0)\\ \hline E_{m-2} & -\lambda E_{m-2}\end{array}\right)=$$

і т.д., виконуючи всього $(m-1)$ раз аналогічний розклад визначника (спочатку за останнім рядком першої горизонтальної смуги, а потім за останнім рядком другої горизонтальної смуги), остаточно отримаємо

$$= \lambda^{2(m-1)} \cdot \det \left(\begin{array}{c|c} -\lambda E_1 & J_1(0) \\ \hline E_1 & -\lambda E_1 \end{array} \right) = \lambda^{2m-2} \cdot \left\| \begin{array}{c|c} -\lambda & 0 \\ \hline 1 & -\lambda \end{array} \right\| = \lambda^{2m-2}(\lambda^2 - 0) = \lambda^{2m}.$$

Отже, характеристичне рівняння матриці P: $\lambda^{2m} = 0$. Маємо єдине власне число $\lambda = 0$ кратності $2m$. Для знаходження жорданової нормальної форми матриці P потрібно визначити дефект матриці $P - 0E = P$. Ранг матриці P дорівнює $2m-1$, отже, її дефект дорівнює $2m-(2m-1) = 1$. Маємо одну клітину Жордана з власним числом 0 розміру $2m$. Отже, жорданова нормальна форма матриці P має вигляд $J_{2m}(0)$.

Таким чином, мінімальним многочленом матриці P є $m_P(x) = x^{2m}$. Оскільки m — довільне натуральне число, то x^2 ділить $m_P(x)$, а це й доводить, що матриця P не є майже невиродженою.

Залишилось довести, що вказане зображення T нерозкладне. Для цього досить показати, що алгебра його ендоморфізмів локальна. Алгебра ендоморфізмів — це множина всіх невироджених матриць X, таких, що виконуються матричні рівності $T(e_1)X = XT(e_1)$, $T(e_2)X = XT(e_2)$ або

$$\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ E_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ E_m & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} E_m & J_m(0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & J_m(0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Рівність (1) після перемноження матриць набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{11} & X_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} + X_{12} & 0 \\ X_{21} + X_{22} & 0 \end{pmatrix},$$

що еквівалентно наступній системі рівностей:

$$X_{11} = X_{11} + X_{12},$$

$$X_{11} = X_{21} + X_{22},$$

$$X_{12} = 0,$$

звідки випливає, що $X_{12} = 0$, $X_{22} = X_{11} - X_{21}$.

Тоді матриця X буде мати вигляд

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & X_{11} - X_{21} \end{pmatrix},$$

а рівність (2) при цьому перетвориться на таку:

$$\begin{pmatrix} E_m & J_m(0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & X_{11} - X_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & X_{11} - X_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & J_m(0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

або (після перемноження матриць)

$$\begin{pmatrix} X_{11}+J_m(0)X_{21} & J_m(0)(X_{11}-X_{21}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{11}J_m(0) \\ X_{21} & X_{21}J_m(0) \end{pmatrix}.$$

Остання матрична рівність еквівалентна наступній системі рівностей:

$$X_{11}+J_m(0)X_{21}=X_{11},$$

$$J_m(0)(X_{11}-X_{21})=X_{11}J_m(0),$$
$$X_{21}J_m(0)=0,$$
$$X_{21}=0.$$

Оскільки $X_{21}=0$, то матриця X буде мати блоково-діагональний вигляд

$$X=\begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{11} \end{pmatrix}.$$

Зокрема, виконується рівність $J_m(0)X_{11}=X_{11}J_m(0)$, яка (в чому не важко переконатися) означає, що блок X_{11} має такий вигляд:

$$X_{11}=\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & \cdots & 1,m-2 & 1,m-1 & 1,m \\ 0 & 11 & 12 & \cdots & 1,m-3 & 1,m-2 & 1,m-1 \\ 0 & 0 & 11 & \cdots & 1,m-4 & 1,m-3 & 1,m-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 11 & 12 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

З отриманого вигляду матриці X випливає, що алгебра ендоморфізмів зображення T локальна, що і доводить його нерозкладність.

1. *Бондаренко В. М., Тертичная Е. Н.* О бесконечности типа бесконечных полугрупп, порожденных идемпотентами с частичным нулевым умножением // Проблеми топології та суміжні питання : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – Т. 3, № 3. – С. 23–44.
2. *Bondarenko V. M., Tertychna O. M.* On tame semigroups generated by idempotents with partial null multiplication // Algebra Discrete Math. 2008. – № 4. – P. 15–22.
3. *Тертична О. М.* Про одну властивість матричних зображень скінченних напівгруп $S(I,J)$ // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2011. – Вип. 22, № 2. – С. 148–153.

Одержано 05.11.2012