УДК 517.51

М. І. Глебена (Ужгородський нац. ун-т)
Л. І. Фундак, Г. Г. Цегелик (Львівський нац. ун-т імені Івана Франка)

ПРО ТОЧНІСТЬ ДЕЯКИХ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ, ОДЕРЖАНИХ ВНАСЛІДОК АПРОКСИМАЦІЇ ФУНКЦІЙ НЕКЛАСИЧНОЮ МАЖОРАНТОЮ НЬЮТОНА

Assessment of the accuracy of approximation of twice continuously differentiable and logarithmically convex function is considered.

Розглянуто оцінку точності апроксимації двічі неперервно диференційованої і логарифмічно опуклої функції.

1.Вступ.В [1] розглянуто точність апроксимації довільної неперервної логарифмічно вгнутої функції $f(x)$, визначеної на проміжку $[a,\, b]$, некласичною мажорантою Ньютона $M_f(x)$ [2], побудованою для функції $f(x)$ за її значеннями у вибраній системі точок $x_0,\, x_1, ...,\, x_n$ проміжку $[a,\, b]$, а також точність апроксимації довільної неперервної функції функцією $g_n(f;\, x)$, яка на кожному проміжку $[x_i,\, x_{i+1}]$, $i = 0,\, 1, ...,\, n-1$, збігається з некласичною мажорантою Ньютона, побудованою за значеннями функції $f(x)$ в двох точках x_i та x_{i+1}. Якщо при цьому функція $f(x)$ є двічі неперервно диференційованою на проміжку $[a,\, b]$, то в [3] показано, що точність апроксимації в цьому випадку є на порядок вищою.

У роботі розглянемо оцінку точності апроксимації двічі неперервно диференційованої і логарифмічно опуклої функції $f(x)$, визначеної на проміжку $[a,\, b]$, функцією $g_n(f;\, x)$, яка на кожному проміжку $[x_i,\, x_{i+1}]$ вибраної системи точок збігається з некласичною мажорантою Ньютона, побудованою за значеннями функції $f(x)$ в двох точках x_i та x_{i+1}. Крім того, встановимо оцінки похибки наближеного обчислення визначених інтегралів і інтерполяційного методу розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь у випадку, коли підінтегральна функція, що апроксимується некласичною мажорантою Ньютона, є двічі неперервно диференційованою і логарифмічно опуклою.

2. Формулювання задач.

Задача 1. Припустимо, що $f(x) \in C^2[a,\, b]$ – логарифмічно опукла функція на проміжку $[a,\, b]$. Виберемо на проміжку $[a,\, b]$ систему рівновіддалених точок $x_i = x_0 + ih \quad (i = 0,\, 1, ...,\, n)$, де $x_0 = a$, $h = \frac{b-a}{n}$, і побудуємо функцію $g_n(f;\, x)$, визначену на $[a,\, b]$, яка на кожному з проміжків $[x_i,\, x_{i+1}]$, $i = 0,\, 1, ...,\, n-1$, збігається з некласичною мажорантою Ньютона, побудованою для функції $f(x)$ за двома точками $(x_i,\, f\,(x_i))$, $(x_{i+1},\, f\,(x_{i+1}))$. Знайдемо оцінку похибки апроксимації функції $f(x)$ функцією $g_n(f;\, x)$.

Задача 2. В [4], використовуючи некласичну мажоранту Ньютона, побудована формула для наближеного обчислення визначених інтегралів

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = h\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{\ln\left(f(x_{k+1})/f(x_k)\right)} + R_n(f).$$

Знайдемо оцінку похибки цієї формули у випадку, коли $f(x)$ – двічі неперервно диференційована і логарифмічно опукла функція.

Задача 3. В [5], використовуючи некласичну мажоранту Ньютона, розроблено чисельний метод інтерполяційного типу

$$y_{i+1} = y_i + h\,\frac{f\,(x_{i+1},\, y_{i+1}) - f\,(x_i,\, y_i)}{\ln\,(f\,(x_{i+1},\, y_{i+1})/f\,(x_i,\, y_i))} \quad (\, i = 0,\, 1, ...,\, n-1\,),$$

де $y_0 = y(x_0)$, розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь

$$y' = f(x,\, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Знайдемо оцінку похибки методу у випадку, коли $f\,(x,\, y(x))$ – двічі неперервно диференційована і логарифмічно опукла функція, де $y(x)$ – розв'язок задачі.

3. Розв'язування задач.

Задача 1. Справедлива така теорема.

Теорема 1. *Якщо $f(x) \in C^2[a,\, b]$ – логарифмічно опукла функція на проміжку $[a,\, b]$, то*

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$$

рівномірно для всіх $x \in [a,\, b]$ і справедлива оцінка

$$g_n(f;x) - f(x) \le \frac{M_2}{8}h^2,$$

де $M_2 = \max\limits_{x\in[a,\,b]} f''(x)$.

Доведення. Нехай

$$\max_{x\in[a,\,b]} \left(g_n(f;x) - f(x)\right) = \max_{x\in[x_k,\,x_{k+1}]} \left(g_n(f;x) - f(x)\right).$$

Зазначимо, якщо $f(x)$ – логарифмічно опукла функція, то $f(x) \le g_n(f;x)$. Оскільки для $x \in [x_k,\, x_{k+1}]$

$$g_n(f;x) - f(x) \le L_1(x) - f(x) \le -\frac{f''(\xi)}{2}\,(x - x_k)\,(x - x_{k+1})\,,$$

де $L_1(x)$ – інтерполяційний многочлен Лагранжа, побудований для функції $f(x)$ за двома вузлами x_k і x_{k+1}, $\xi \in (x_k,\, x_{k+1})$, то для $x \in [a,\, b]$

$$g_n(f;x) - f(x) \le -\frac{f''(\xi)}{2}\,(x - x_k)\,(x - x_{k+1})\,.$$

Очевидно,

$$\max_{x\in[x_k,\,x_{k+1}]} \left|(x - x_k)\,(x - x_{k+1})\right| = \frac{h^2}{4}$$

і досягається при $x = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$. Тому для всіх $x \in [a,\, b]$

$$g_n(f;x) - f(x) \le \frac{M_2}{8}h^2.$$

Задача 2. Якщо $f(x) \in C^2[a,\, b]$ – логарифмічно опукла функція на проміжку $[a,\, b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} M_f(x)\,\mathrm{dx},$$

де $M_f(x)$ – мажоранта Ньютона, побудована для функції $f(x)$ за двома точками $(x_k,\, f\,(x_k))$, $(x_{k+1},\, f\,(x_{k+1}))$. Тому залишковий член

$$R_n(x) \le \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (M_f(x) - f(x))\,\mathrm{dx} \le \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (L_1(x) - f(x))\,\mathrm{dx} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \left(-\frac{f''(\xi)}{2}\,(x-x_k)\,(x-x_{k+1})\right)\mathrm{dx},$$

де $L_1(x)$ – інтерполяційний многочлен Лагранжа, побудований для функції $f(x)$ за двома вузлами x_k і x_{k+1}, $\xi \in (x_k,\, x_{k+1})$.

Функція $f(x) \in C^2[a,\, b]$, а добуток $(x-x_k)\,(x-x_{k+1})$ на проміжку $[x_k,\, x_{k+1}]$ не змінює знака. Тому на основі теореми про середнє значення визначеного інтеграла існує таке $\xi \in (x_k,\, x_{k+1})$, що

$$-\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{f''(\xi)}{2}\,(x-x_k)\,(x-x_{k+1})\,\mathrm{dx} = -\frac{f''(\xi)}{2} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (x-x_k)\,(x-x_{k+1})\,\mathrm{dx} \le$$

$$\le \frac{f''(\xi)}{2}\,h^2 \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \mathrm{dx} = \frac{f''(\xi)}{2} h^3.$$

Тому

$$R_n(x) \le \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f''(\xi)}{8} h^3 = \frac{b-a}{8} f''(\xi) h^2.$$

Задача 3. Зазначимо спочатку, що додатна функція $g(x) \in C^2[a,\, b]$ буде логарифмічно опуклою на проміжку $[a,\, b]$ тоді і тільки тоді, коли для всіх $x \in [a,\, b]$ виконується нерівність

$$g''(x)g(x) - \left(g'(x)\right)^2 > 0.$$

Нехай $f(x,\, y) \in C^2(\bar{\Omega})$. Тоді очевидне

Твердження 1. *Для того, щоб функція $f(x,\, y)$ була логарифмічно опуклою на $\bar{\Omega}$, необхідно і досить, щоб для всіх $(x,\, y) \in \bar{\Omega}$, виконувалась нерівність*

$$f''(x,\, y) f(x,y) - \left(f'(x,\, y)\right)^2 > 0,$$

де

$$f'(x,\, y) = f'_x(x,\, y) + f'_y(x,\, y)\, f(x,y),$$

$$f''(x,\, y) = f''_{xx}(x,\, y) + 2f''_{xy}(x,\, y) f(x,\, y) + f''_{yy}(x,\, y) f^2(x,y) + f'_y(x,\, y) f'_(x,\, y).$$

Якщо функція $f(x,\, y(x)) \in C^2\,[a,b]$ – логарифмічно опукла, то похибка визначається формулою

$$R_{i+1}(x) = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \left(M_f(x) - f(x)\right)\,\mathrm{dx} \le \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \left(L_1(x) - f(x)\right)\,\mathrm{dx} =$$

$$= \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{f''(\xi)}{2}\,(x - x_i)\,(x - x_{i+1})\right)\mathrm{dx} \le -\frac{f''(\xi)}{2} h^3,$$

де $\xi \in (x_i,\, x_{i+1})$, $M_f(x)$ – мажоранта Ньютона, побудована для функції $f(x,\, y(x))$ за двома точками $(x_i,\, f\,(x_i,\, y(x_i)))$, $(x_{i+1},\, f\,(x_{i+1},\, y(x_{i+1})))$. Тому похибка чисельного методу становить $O(h^2)$.

4. Висновки. Показано, що точність апроксимації логарифмічно опуклої функції $f(x,\, y(x)) \in C^2\,[a,b]$ функцією $g_n(f;\, x)$, ланками якої є некласичні мажоранти Ньютона, побудовані для функції $f(x)$ на кожному проміжку вибраної системи точок за двома вузлами – кінцями проміжку, становить $O(h^2)$. Крім того, встановлено, що точність наближеної формули для обчислення визначених інтегралів і чисельного методу інтерполяційного типу для розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь становить також $O(h^2)$ при апроксимації підінтегральної функції некласичною мажорантою Ньютона.

1. *Цегелик Г. Г.* Використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, для апроксимації функцій / Г. Г. Цегелик, Н. В. Федчишин // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2001. – №6. – С.32-37.
2. *Цегелик Г. Г.* Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение / Г.Г.Цегелик // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, №9. – С. 1273–1276.
3. *Грипинська Н.В.* Оцінка похибки наближення функцій некласичною мажорантою Ньютона / Н. В. Грипинська, Г. Г. Цегелик // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл.матем. та інформ. – Л., 2007. – Вип. 12. – С. 32-35.
4. *Цегелик Г. Г.* Використання некласичного апарату мажорант і діаграм Ньютона функцій для побудови нової квадратурної формули / Г. Г. Цегелик, Н. В. Федчишин // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – Л., 1995. – Вип. 41. – С. 108-111.
5. *Цегелик Г. Г.* Інтерполяційний метод мажорантного типу розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь / Г. Г. Цегелик, Н. В. Федчишин // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2002. – №2. – С.37-43.

Одержано 17.10.2012