УДК 519.74

В. Ф. Баранник (Ужгородський нац. ун-т)

ТЕНЗОРНІ ДОБУТКИ НЕЗВІДНИХ ПРОЕКТИВНИХ ЦІЛОЧИСЛОВИХ 2-АДИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ ЦИКЛІЧНОЇ 2-ГРУПИ

The paper deals with a subalgebra of the algebra of projective integer 2-adic images of a cyclic 2-group, generated by irreducible projective integers of 2-adic representations.

В роботі вивчається підалгебра алгебри проективних цілочислових 2-адичних зображень циклічної 2-групи, породжена незвідними проективними цілочисловими 2-адичними зображеннями.

Нехай G – скінченна група, e — одиничний елемент G, K — комутативне кільце з одиницею, K^* — мультиплікативна група кільця K, $GL(n,K)$ — група всіх оборотних матриць порядку n над K і E — одинична матриця порядку n. Проективним зображенням групи G степеня n над K називається відображення Γ групи G в групу $GL(n,K)$, яке задовольняє умови: $\Gamma(e)=E$, $\Gamma(a)\Gamma(b)=\lambda_{a,b}\Gamma(ab)$ $(\lambda_{a,b}\in K^*; a,b\in G)$. Відображення $\lambda: G\times G\to K^*$, $\lambda:(a,b)\to\lambda_{a,b}$ називається системою K^*-факторів групи G. Якщо λ, μ — система K^*-факторів групи G, то відображення $\lambda\times\mu: G\times G\to K^*$, $(\lambda\times\mu)(a,b)=\lambda_{a,b}\cdot\mu_{a,b}$ називається добутком систем факторів λ і μ. Два проективні зображення Γ_1 і Γ_2 називаються еквівалентними, якщо існує така матриця $S\in GL(n,K)$ і такі елементи $\alpha_g\in K^*$, що $S^{-1}\Gamma_1(g)S=\alpha_g\Gamma_2(g)$ $(g\in G)$.

Нехай $K=\mathbb{Z}_p$ — кільце цілих раціональних p-адичних чисел. Кожному класу еквівалентних над $\mathbb{Z}_p$ нерозкладних проективних $\mathbb{Z}_p$-зображень групи G поставимо у відповідність символ $[\Gamma]$ (Γ — нерозкладне проективне $\mathbb{Z}_p$-зображення групи G). Позначимо через $A_1(G,\mathbb{Z}_p)$ Q-модуль (Q — поле раціональних чисел) з базисом $W'=\{[\Gamma_i]\}$, де $W=\{\Gamma_i\}$ — множина всіх попарно нееквівалентних нерозкладних проективних $\mathbb{Z}_p$-зображень групи G. Введемо наступним чином в $A_1(G,\mathbb{Z}_p)$ операцію множення. Нехай $\Gamma_i,\Gamma_j\in W$. Очевидно, відображення $\Gamma: g\to\Gamma_i(g)\otimes\Gamma_j(g)$ $(g\in G)$ є проективним $\mathbb{Z}_p$-зображенням групи G. Зображення Γ $\mathbb{Z}_p$-еквівалентне зображенню $\Gamma': g\to\operatorname{diag}[\Gamma_{r_1}(g),\dots,\Gamma_{r_m}(g)]$ $(g\in G)$, де $\Gamma_{r_t}\in W$ $(t=1,\dots,m)$. Задамо добуток $[\Gamma_i]$, $[\Gamma_j]$ наступним чином:

$$[\Gamma_i][\Gamma_j]=[\Gamma_{r_1}]+\dots+[\Gamma_{r_m}]. \tag{1}$$

Нехай $(G,\mathbb{Z}_p,\lambda)$ — схрещене групове кільце групи G і кільця $\mathbb{Z}_p$ при системі факторів $\lambda_{a,b}$, $\lambda_{a,b}\in\mathbb{Z}_p^*$; $a,b\in G$. Враховуючи, що для $(G,\mathbb{Z}_p,\lambda)$-модулів справедлива теорема Крулля–Шмідта (див. [1]), легко показати, що означення (1) коректне. Таким чином, ми одержали, що $A_1(G,\mathbb{Z}_p)$ є алгеброю над Q.

Нехай $V=\{\Delta_i\}$ — множина всіх незвідних проективних $\mathbb{Z}_p$-зображень групи G. Позначимо через $B_1(G,\mathbb{Z}_p)$ підалгебру алгебри $A_1(G,\mathbb{Z}_p)$, породжену множиною $V'=\{[\Delta_i]\}$. Нехай $A(\mathbb{Z}_pG)$ – підалгебра алгебри $A_1(G,\mathbb{Z}_p)$, породжена множиною $\{[\Gamma'_i]\}$, де $\{\Gamma'_i\}$ — множина всіх нерозкладних лінійних $\mathbb{Z}_p$-зображень групи G. Аналогічно вводиться підалгебра $B(\mathbb{Z}_pG)$ алгебри $B_1(G,\mathbb{Z}_p)$.

Алгебри $A(RG)$ і $A_1(G,R)$, де R — кільце всіх цілих величин скінченного розширення поля раціональних p-адичних чисел Q_p, вивчалися в [2–7]. В роботах [2–7] розв'язана задача про напівпростоту (в розумінні Джекобсона) алгебр $A(RG)$ і $A_1(G,R)$. Питання про напівпростоту алгебри $B(\mathbb{Z}_pG)$ розв'язане в [8–10]. Алгебра $B_1(G,\mathbb{Z}_p)$, де G — циклічна група порядку p^n $(p\neq 2)$, $\mathbb{Z}_p$ — кільце цілих p-адичних чисел, вивчалася в [11]. Питання про напівпростоту алгебри $B_1(G,R)$, де R — кільце всіх цілих величин скінченного нерозгалуженого розширення F поля раціональних p-адичних чисел Q_p $(p\neq 2)$, розв'язане в [12].

В даній роботі вивчається питання про скінченновимірність та напівпростоту алгебри $B_1(H,\mathbb{Z}_2)$, де H — циклічна група порядку 2^n, $\mathbb{Z}_2$ — кільце цілих 2-адичних чисел.

Нехай $K=\mathbb{Z}_2[x]$, де $\mathbb{Z}_2$ — кільце цілих 2-адичних чисел, $\alpha=\pm1$, $t\in\mathbb{Z}$, де $\mathbb{Z}$ — кільце цілих раціональних чисел. Покладемо $\Gamma(n,t,\alpha)=K/<x^{2^n}-\alpha\cdot5^t>$.

K-модулі $\Gamma(n,t,\alpha),\Gamma(n',t',\alpha')$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли $n=n'$, $\alpha=\alpha'$, $t\equiv t'(\mathrm{mod}\ 2^n)$. В дальнійшому будемо вважати, що в $\Gamma(n,t,\alpha)$ $t\in\mathbb{Z}_{2^n}=\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$. Очевидно, K-модуль $\Gamma(n,t,\alpha)$ незвідний тоді і тільки тоді, коли $\alpha=-1$ або $t\in\mathbb{Z}^*_{2^n}$, де $\mathbb{Z}^*_{2^n}$ — мультиплікативна група кільця $\mathbb{Z}_{2^n}$.

Нехай $u_e,u_a,\dots,u_a^{2^n-1}$ — $\mathbb{Z}_2$-базис схрещеного групового кільця $\Lambda=(H,\mathbb{Z}_2,\lambda)$, де $u_a^{2^n}=\gamma^{2^k}u_e$ $(\gamma=5^s, s\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2), s\cdot2^k<2^n)$. Для $0\leq m<2^{n-k-1}$ введемо в розгляд K-підмодулі в K-модулі $\Gamma(n-k,t,1)$:

$$\Gamma_m(n-k,t)=(x-1)^m\Gamma(n-k,t,1)+2\Gamma(n-k,t,1).$$

Якщо $t\in\mathbb{Z}^*_{2^n}$, то K-модуль $\Gamma(n-k,t,1)$ незвідний, $\Gamma_m(n-k,t,1)\cong\Gamma_{2^{n-k}-m}(n-k,t,1)$, $\Gamma_0(n-k,t,1)\cong\Gamma_{2^{n-k}}(n-k,t,1)\cong\Gamma(n-k,t,1)$. Модулі $\Gamma_m(n-k,t)$ $(0\leq m<2^{n-k-1})$ попарно неізоморфні.

Якщо $t\in\mathbb{Z}_{2^n}$, то K-модулі $\Gamma_m(n-k,t,1)$ звідні, але нерозкладні, за винятком випадку $m=2^{n-k-1}-1$:

$$\Gamma_{2^{n-k-1}-1}\cong\Gamma\left(n-k-1,\frac{t}{2},1\right)\oplus\Gamma\left(n-k-1,\frac{t}{2},-1\right).$$

Для K-модуля M через $\overline{M}$ будемо позначати K-модуль $\overline{M}=M/2M$. Тоді $\overline{M}$-модуль над полем $\overline{\mathbb{Z}}_2$ з двох елементів, в якому діє лінійний оператор x.

Нехай $V_m=\overline{\mathbb{Z}}_2[x]\,/\,\langle(x-1)^m\rangle$. Очевидно,

$$\overline{\Gamma}(n-k,t,\alpha)=V_{2^{n-k}},$$
$$\overline{\Gamma}_m(n-k,t)=V_{m+1}\oplus V_{2^{n-k}-m-1}.$$

Мають місце наступні точні послідовності K-модулів:

$$0\to2\Gamma(n-k,t,\alpha)\to\Gamma(n-k,t,\alpha)\to V_{2^{n-k}}\to0,$$
$$0\to2\Gamma_m(n-k,t)\to\Gamma(n-k,t,1)\to V_m\to0\ \ (0\leq m<2^{n-k-1}).$$

Лема [13]. Нехай $1\leq r\leq m\leq 2^n$ і

$$V_r\otimes V_m\cong V_{\alpha_1}\oplus\ldots\oplus V_{\alpha_r}\ \ (1\leq\alpha_1\leq\ldots\leq\alpha_r\leq2^n).$$

Тоді

$$V_r\otimes(V_m\oplus V_{2^n-m})\cong(V_{\alpha_1}\oplus V_{2^n-\alpha_1})\oplus\ldots\oplus(V_{\alpha_r}\oplus V_{2^n-\alpha_r}).$$

Має місце точна послідовність K-модулів

$$0 \to \Gamma(n-k-1, t, \alpha) \to \Gamma(n-k, 2t, 1) \to \Gamma(n-k, t, -\alpha) \to 0.$$

Якщо $k \geq k'$, $t \in \mathbb{Z}_{2^n}$, $t' \in \mathbb{Z}_{2^n}$, $\alpha = \pm 1$, $\alpha' = \mp 1$, то

$$\Gamma(n-k, t, \alpha) \oplus \Gamma(n-k', t', \alpha') \cong 2^{n-k}\Gamma(n-k', 2^{k-k'}t + t', \alpha\alpha').$$

Очевидно,

$$\Gamma_m(n-k, t) \otimes \Gamma(n-k, t', \alpha) \cong 2^{n-k}\Gamma(n-k, t+t', \alpha).$$

Лема 1. *Нехай* $1 \leq r \leq m \leq 2^{n-k-1}$. *Тоді*

$$\Gamma_m(n-k, t) \otimes \Gamma_r(n-k, t') \cong \sum_{i=1}^{l} \left(\Gamma_{\alpha_i}(n-k, t+t') \oplus \Gamma_{2^{n-k}-\alpha_i}(n-k, t+t')\right) +$$

$$+ \left(2^{n-k} - 2l\right)\Gamma(n-k, t+t', 1) \quad \left(V_r \oplus V_m \cong \oplus \sum_{i=1}^{l} V_{\alpha_i}\right).$$

Доведення. Розглянемо точну послідовність

$$0 \to \Gamma_m(n-k, t) \to \Gamma(n-k, t, 1) \to V_m \to 0.$$

Помножимо дану послідовність тензорно на $\Gamma_r(n-k, t)$:

$$0 \to \Gamma_m(n-k, t) \otimes \Gamma_r(n-k, t') \to 2^{n-k}\Gamma(n-k, t+t', 1) \to V_m \otimes (V_{r+1} \oplus V_{2^{n-k}-r-1}) \to 0. \quad (2)$$

Точну послідовність (2) можна записати у вигляді

$$0 \to \Gamma_m(n-k, t) \otimes \Gamma_r(n-k, t') \to 2^{n-k}\Gamma(n-k, t+t', 1) \to \oplus \sum_{i=1}^{l} (V_{\alpha_i} \oplus V_{2^{n-k}-\alpha_i}) \to 0, \quad (3)$$

де $V_{r+1} \otimes V_m \cong \oplus \sum\limits_{i=1}^{l} V_{\alpha_i}$.

Розглянемо точну послідовність

$$0 \to \sum_{i=1}^{l} (\Gamma_{\alpha_i}(n-k, t+t')) \otimes \Gamma_{2^{n-k}-\alpha_i}(n-k, t+t') \to$$

$$\to 2l\Gamma(n-k, t+t', 1) \to \oplus \sum_{i=1}^{l} (V_i \oplus V_{2^{n-k}-i}) \to 0. \quad (4)$$

З (2) і (3) випливає, що

$$\Gamma_m(n-k, t) \otimes \Gamma_r(n-k, t') \cong \oplus \sum_{i=1}^{l} \Big(\Gamma_{\alpha_i}(n-k', 2^{k-k'}t + t', 1) \oplus$$

$$\oplus \Gamma_{2^{n-k}-\alpha_i}(n-k, t+t')) \oplus (2^{n-k} - 2l)\Gamma(n-k, t+t', 1).$$

Лема доведена.

Лема 2. *Нехай* $k \geq k'$, $t \in \mathbb{Z}_{2^{n-k}}$, $t' \in \mathbb{Z}_{2^{n-k'}}$, $r \leq m$. *Тоді*

$$\Gamma_m(n-k,t) \otimes \Gamma_r(n-k',t') \cong \oplus \sum_{i=1}^{l} \Big(\Gamma_{\alpha_i}(n-k', 2^{k-k'}t + t', 1) \oplus$$

$$\oplus \Gamma_{2^{n-k}-\alpha_i}(n-k', 2^{k-k'}t+t', 1)\Big) \oplus (2^{n-k} - 2l)\Gamma(n-k', 2^{k-k'}t + t', 1). \qquad (5)$$

Доведення. Розглянемо точну послідовність

$$0 \to \Gamma_m(n-k,t) \to \Gamma(n-k,t,1) \to V_m \to 0.$$

Тоді

$$0 \to \Gamma_m(n-k,t) \otimes \Gamma_r(n-k',t') \to 2^{n-k}\Gamma(n-k, 2^{k-k'}t+t', 1) \to V_m \oplus (V_{r+1} \oplus V_{2^{n-k}-r-1}) \to 0.$$

Нехай $V_m \otimes V_{r+1} \cong \otimes \sum\limits_{i=1}^{l} V_{\alpha_i}$. Тоді

$$0 \to \Gamma_m(n-k,t) \otimes \Gamma_r(n-k',t') \to 2^{n-k}\Gamma(n-k', 2^{k-k'}t+t', 1) \to$$

$$\to \oplus \sum_{i=1}^{l} (V_{\alpha_i} \oplus V_{2^{n-k}-\alpha_i}) \to 0. \qquad (6)$$

Розглянемо точну послідовність

$$0 \to \sum_{i=1}^{l} \Big(\Gamma_{\alpha_i}(n-k', 2^{k-k'}t+t', 1) \oplus \Gamma_{2^{n-k}-\alpha_i}(n-k', 2^{k-k'}t+t', 1)\Big) \to$$

$$\to 2l \Big(\Gamma(n-k', 2^{k-k'}t + t', 1\Big) \to \oplus \sum_{i=1}^{l} (V_{\alpha_i} \oplus V_{2^{n-k}-\alpha_i}) \to 0. \qquad (7)$$

Порівнюючи (6) і (7) одержимо формулу (5). Лема доведена.

Лема 3. *Нехай* $k \geq k'$, $t \in \mathbb{Z}_{2^n}$, $t' \in \mathbb{Z}_{2^n}$. *Тоді*

$$\Gamma_m(n-k,t) \otimes \Gamma(n-k',t',\alpha) \cong 2^{n-k}\Gamma(n-k', 2^{k-k'}t+t', \alpha).$$

Доведення. Нехай $a \to A$ — незвідне $\mathbb{Z}_2$-зображення циклічної групи H порядку 2^{n-k}, яке реалізується в модулі $\Gamma_m(n-k,t)$. Тоді в $\Gamma_m(n-k,t) \otimes \Gamma(n-k',t',\alpha)$ реалізується $\mathbb{Z}_2$-зображення

$$a \to \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & A(\alpha \cdot 5^t) \\ A & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & A & 0 \end{pmatrix} = \Gamma(a).$$

Нехай

$$C = \begin{pmatrix} A & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & A^2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & A^{2^{n-k}} \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$C^{-1}\Gamma(a)C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & A^{2^{n-k'}}(\alpha 5^{t'}) \\ E & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & E & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $A^{2^{n-k'}}{=}\left(A^{2^{n-k}}\right)^{2^{k-k'}}{=}(5^t)^{2^{k-k'}}E$ (E — одинична матриця порядку 2^{n-k}), то $\Gamma_m(n-k,t)\otimes\Gamma(n-k',t',\alpha)\cong 2^{n-k}\Gamma(n-k',2^{k-k'}t+t',\alpha)$. Лема доведена.

Нехай $\omega_m(n-k,t)=\Gamma_m(n-k,t)-\Gamma_{2^{n-k}-m}(n-k,t)$ $(0\le m<2^{n-k-1})$. При $t\in\mathbb{Z}_{2^n}$ $\omega_m(n-k,t)=0$.

Лема 4. *При* $0{\le}m<2^{n-k-1}$, $t\in 2\mathbb{Z}_{2^n}$ *виконується рівність* $\omega_m^2(n{-}k,t)=0$.

Доведення. Доведемо, що $\Gamma_m(n-k,t)\otimes\Gamma_m(n-k,t)\cong\Gamma_m(n-k,t)\otimes$ $\otimes\Gamma_{2^{n-k}-m}(n-k,t)\cong\Gamma_{2^{n-k}-m}(n-k,t)\otimes\Gamma_{2^{n-k}-m}(n-k,t)$.

Розглянемо точну послідовність $0\to\Gamma_m(n-k,t)\to\Gamma(n-k,t,1)\to V_m\to 0$.

Нехай $V_m\otimes V_m\cong\sum\limits_{i=1}^{l}V_{\alpha_i}$. Тоді $V_m\otimes V_{2^{n-k}-m}\cong\oplus\sum\limits_{i=1}^{l}V_{2^{n-k}-\alpha_i}$.

Мають місце наступні точні послідовності:

$$0\to\Gamma_m(n-k,t)\otimes\Gamma_m(n-k,t)\to 2^{n-k}\Gamma(n-k,2t,1)\to V_m\otimes(V_m\oplus V_{2^{n-k}-m})\to 0,$$
$$0\to\Gamma_m(n-k,t)\otimes\Gamma_{2^{n-k}-m}(n-k,t)\to 2^{n-k}\Gamma(n-k,2t,1)\to V_m\otimes(V_{2^{n-k}-m})\to 0.$$

Звідси одержимо, що $\Gamma_m(n-k,t)\otimes\Gamma_m(n-k,t)\cong\Gamma_m(n-k,t)\otimes\Gamma_{2^{n-k}-m}(n-k,t)$.

Аналогічно доводимо, що

$$\Gamma_m(n-k,t)\otimes\Gamma_m(n-k,t)\cong\Gamma_{2^{n-k}-m}(n-k,t)\otimes\Gamma_{2^{n-k}-m}(n-k,t).$$

Таким чином, $\omega_m^2(n-k,t)=0$. Лема доведена.

Лема 5. *Елементи* $[\Gamma_m(n-k,t)]-[\Gamma_{2^{n-k}-m}(n-k,t)]$, *де* $0\le m<2^{n-k-1}$ $(t\in 2\mathbb{Z}_{2^{n-k}})$ *кільця* $a'(\mathbb{Z}_2H)$ $\mathbb{Z}_2$*-зображень* H (H — *циклічна* 2*-група порядку* 2^n) *утворюють* $\mathbb{Z}_2$*-базис нільпотентного ідеалу*

$$V=\{[\Gamma_m(n-k,t)]-[\Gamma_{2^{n-k}-m}(n-k,t)]\mid 0\le m<2^{n-k-1}\}$$

кільця $a'(\mathbb{Z}_2H)$ *і при цьому* $V^2=0$.

Доведення. Очевидно, елементи

$$[\Gamma_m(n-k,t)]-[\Gamma_{2^{n-k}-m}(n-k,t)]\ \ (0\le m<2^{n-k-1},\ t\in 2\mathbb{Z}_{2^{n-k}})$$

лінійно незалежні над $\mathbb{Z}$. На основі доведених формул тензорних добутків можна перевірити, що якщо $\nu\in a'(\mathbb{Z}_2H)$, то $\nu\Big([\Gamma_m(n{-}k,t)]{-}[\Gamma_{2^{n-k}-m}(n{-}k,t)]\Big)\in V$ і $\omega\Big([\Gamma_m(n{-}k,t)]{-}[\Gamma_{2^{n-k}-m}(n{-}k,t)]\Big)=0$ для $\omega\in V$ $(0\le m<2^{n-k-1},\ t\in 2\mathbb{Z}_{2^{n-k}})$. Лема доведена.

Теорема 1. *Алгебра* $\overline{B}_1(H,\mathbb{Z}_2){=}B_1(H,\mathbb{Z}_2)/V$ *скінченновимірна і напівпроста*

$$\dim_Q\overline{B}_1(H,\mathbb{Z}_2)=\sum_{k=1}^{n-1}(2^n-2^{n-k}-k)2^{n-k-1}+\sum_{k=0}^{n-1}(2^{n-k-1}+1+k)2^{n-k-1}.$$

Доведення. Нехай $M=\{[\lambda]\big|\lambda\in\mathbb{Z}_2^*\}$ — група класів еквівалентних систем $\mathbb{Z}_2$-факторів групи H (мультиплікатор) і $\mathbb{Z}_2=\mathbb{Z}_2/2\mathbb{Z}_2$. Розглянемо лінійне відображення ψ алгебри $\overline{B}_1(H,\mathbb{Z}_2)$ в алгебру $QM\otimes_Q A(\mathbb{Z}_2H):\psi([\Gamma])=[\lambda]\otimes[\overline{\Gamma}]$, де Γ — проективне $\mathbb{Z}_2$-зображення групи H з системою $\mathbb{Z}_2$-факторів $\lambda_{a,b} \in [\lambda]$ $(a, b \in H)$, $\overline{\Gamma}$ — $\mathbb{Z}_2$-зображення групи $H = \langle a \rangle$, одержане з $\mathbb{Z}_2$-зображення $\Gamma : a \to \Gamma(a)$ групи H зведенням елементів матриці $\Gamma(a)$ за модулем $2\mathbb{Z}_2$. Легко бачити, що ψ — гомоморфізм алгебри $\overline{B}_1(H, \mathbb{Z}_2)$ в алгебру $QM \otimes_Q A(\mathbb{Z}_2 H)$. З точністю до $\mathbb{Z}_2$-еквівалентності мають місце формули:

$$\begin{aligned} &\overline{\Gamma}(n-k, t, \alpha) \cong V_{2^{n-k}}, \\ &\overline{\Gamma}_m(n-k, t, \alpha) \cong V_m \oplus V_{2^{n-k}-m}. \end{aligned} \tag{8}$$

Нехай $\Delta_1, \ldots, \Delta_l$ — всі різні нерозкладні проективні $\mathbb{Z}_2$-зображення групи $H = \langle a \rangle$, які входять в множину, що складається з всіх зображень вигляду $\Gamma_m(n-k, t)$, $\Gamma(n-k, t, \pm 1)$. Згідно попередніх лем $\Delta_1, \ldots, \Delta_l$ є Q-базисом алгебри $\overline{B}_1(H, \mathbb{Z}_2)$ і $l = \sum\limits_{k=1}^{n-1} (2^n - 2^{n-k} - k)2^{n-k-1} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} (2^{n-k-1} + 1 + k)2^{n-k-1}$.

З (8) випливає, що $\overline{\Delta}_i$ і $\overline{\Delta}_j$ $(i \neq j)$ $\overline{Z}_2$-еквівалентні тоді і тільки тоді, коли степені зображень Δ_i і Δ_j співпадають. Далі, якщо степені зображень Δ_i і Δ_j співпадають $(i \neq j)$, то в них не еквівалентні системи факторів. Звідси одержуємо, що $\ker \psi = 0$. Як відомо [13], алгебра $A(\overline{Z}_2 H)$ напівпроста. Оскільки алгебра QM сепарабельна, то алгебра $QM \otimes_Q A(\overline{Z}_2 H)$ напівпроста. З вищесказаного випливає, що алгебра $\overline{B}_1(H, \mathbb{Z}_2)$ напівпрооста. Теорема доведена.

Список використаної літератури

1. *Боревич З. И., Фаддеев Д. К.* Теория гомологий в группах // Вестник Ленингр. ун-та. – 1959. – № 7. – С. 72–87.
2. *Reiner I.* Integral representation algebras // Trans. Amer. Math. Soc.–1966.–**124**. – P. 111–121.
3. *Zemanek J. R.* Nilpotent elements in representation rings // J. Algebra.–1971.–**19**. – P. 453–469.
4. *Гудивок П. М., Гончарова С. Ф., Рудько В. П.* Об алгебре целочисленных представлений конечной группы // Докл. АН СССР. – 1976. – **198**, № 3. – С. 509–512.
5. *Гудивок П. М., Рудько В. П.* Об алгебре модулярных и целочисленных представлений конечных групп // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1973. – **53**, № 5. – С. 963–987.
6. *Баранник А. Ф., Гудивок П. М.* Про алгебру проективних цілочислових зображень скінченних груп // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1972. – № 4. – С. 291–293.
7. *Баранник А. Ф., Гудивок П. М.* Кільце проективних цілочислових P-адичних зображень скінченної групи // Матем. зб. наук. праць Львів. Матем. тов-ва.–1991. – Вип. I. – С. 44–54.
8. *Гудивок П. М., Гончарова С. Ф., Рудько В. П.* О тензорных произведениях целочисленных p-адических представлений конечных групп // Укр. матем. ж. – 1982. – **4**, № 6. – С. 688–694.
9. *Баранник В. Ф., Гудивок П. М., Рудько В. П.* Тензорні добутки зображень скінченних груп над повними дискретно нормованими кільцями // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1985. – № 4. – С. 9–12.
10. *Баранник В. Ф., Рудько В. П.* Алгебра целых p-адических представлений абелевой группы, порожденная неприводимыми представлениями. – М., 1975. – С. 195–209. – Деп. в ВИНИТИ, № 705–76.
11. *Баранник В. Ф.* Тензорні добутки незвідних проективних цілочислових p-адичних зображень циклічної p-групи // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 1998. – Вип. 3. – С. 19–24.
12. *Баранник В. Ф.* Тензорні добутки незвідних проективних цілочислових P-адичних зображень циклічної p-групи // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2004. – Вип. 9. – С. 4–10.
13. *Гудивок П. М., Рудько В. П.* Тензорые произведения представлений конечных групп. – Ужгород: Ужгор. ун-т, 1985. – 115 с.

Одержано 08.09.2017