УДК 512.53+512.64

В. М. Бондаренко (Ін-т математики НАН України)
Е. М. Костишин (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

МОДУЛЯРНІ ЗОБРАЖЕННЯ З ДОДАТКОВИМИ УМОВАМИ НАПІВГРУПИ $T_2 \times S_2$

We describe matrix problems of finite type associated with modular representations of the direct product of the symmetric semigroup and symmetric group of degree 2. In each case we obtain an explicit classification of the corresponding representations.

Описуються матричні задачі скінченного типу, пов'язані з модулярними зображеннями прямого добутку симетричної напівгрупи та симетричної групи степеня 2. В кожному випадку отримано явний опис відповідних зображень.

Матричні зображення скінченних груп над полями вивчені достатньо добре. У класичному випадку (коли характеристика p поля K не ділить порядок скінченної групи), група має скінченний зображувальний тип; у цьому випадку кожне нерозкладне зображення є незвідним і всі вони вичерпуються прямими доданками регулярного зображення. У модулярному випадку (коли характеристика p ділить порядок групи), група має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли її силовська p-підгрупа є циклічною. Більшість скінченних груп у цьому випадку є дикими, тобто задача про опис їх зображень включає в себе задачу про класифікацію пар матриць з точністю до подібності (точні означення ручних та диких задач див. в [1]). Ручні та дикі групи для модулярного випадку описані в роботі [1].

Матричні зображення напівгруп над полями вивчені не в такій мірі, як зображення груп. Найбільше робіт присвячена вивченню незвідних зображень та класів напівгруп, всі нерозкладні зображення яких є незвідними (див., напр., монографії [2, 3]), тощо. Серед інших результатів виділимо відомі результати з теорії зображень алгебр, які легко переформулювати в термінах зображень напівгруп — опис зображень алгебри $< a, b \,|\, ab = ba = 0 >$ [4, 5] чи алгебри $< a, b \,|\, a^2 = b^2 = 0 >$ [6, 7], деякі результати про напівгрупи скінченного зображувального типу: випадок скінченної цілком простої напівгрупи [8] та деякі немодулярні випадки напівгруп всіх перетворень скінченної множини [9,10]. Серед нових результатів виділимо результати про опис ручних та диких напівгруп, породжених ідемпотентами з частковим нульовим множенням [11] та напівгруп, породжених двома потентними елементами [12].

У роботі [13] описані модулярні зображення напівгрупи T_2 всіх перетворень множини із двох елементів. У цій статті вивчаються модулярні зображення з деякими додатковими умовами прямого добутку двох напівгруп T_2.

1. Попередні відомості. Напівгрупа T_2 всіх перетворень (відображень в себе) двоелементної множини $\{1, 2\}$ складається із чотирьох елементів e, a, b, c: $e(1) = 1, e(2) = 2; a(1) = 2, a(2) = 1; b(1) = 2, b(2) = 2; c(1) = 1, c(2) = 1$. Легко бачити, що елементи e, a, b утворюють систему твірних із визначальними співвідношеннями $a^2 = e$, $b^2 = b$, $ab = b$ (для одиничного елемента e ми не виписуємо природні співвідношення).

Матричне зображення розмірності n напівгрупи T_2 над полем K — це (згідно загального означення матричного зображення напівгрупи) довільний гомоморфізм $X : T_2 \to M_n(K)$ напівгрупи T_2 в напівгрупу $M_n(K)$ всіх квадратних матриць порядку n над полем K (n — натуральне число). Зауважимо, що в загальному означенні нічого не говориться про одиничний елемент напівгрупи (бо його може і не бути), але у випадку, коли одиниця в напівгрупі є, практично можна вважати, що гомоморфізм переводить її у одиничну матрицю (як показано в роботі [13], при цьому втрачається лише одне нерозкладне зображення, яке складається із нульових матриць розмірності 1); ми будемо розглядати лише такі зображення. Тоді зображення $X : T_2 \to M_n(K)$ напівгрупи T_2 однозначно задається парою матриць $R = \{A = X(a), B = X(b)\}$, що задовольняють наступні рівності: $A^2 = E$, $B^2 = B$, $AB = B$. Для матричних зображень напівгрупи T_2 (як і для будь-якої скінченновимірної алгебри) має місце теорема Крулля-Шмідта про однозначність розкладу довільного матричного зображення в пряму суму нерозкладних.

Матричне зображення напігрупи T_2 називається модулярним, якщо характеристика поля K, над яким воно розглядається, дорівнює 2 (бо напівгрупа T_2 має єдину нетривіальну підгрупу, яка породжена елементом a порядку 2).

У роботі [13] доведена наступна класифікаційна теорема (з формальних міркувань нумерація зображень змінена).

Теорема 1. *Нерозкладні матричні зображення напівгрупи T_2 над полем K характеристики 2 вичерпуються, з точністю до еквівалентності, наступними (попарно нееквівалентними) зображеннями:*

1) $a \to 1, \quad b \to 1;$

2) $a \to 1, \quad b \to 0;$

3) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

4) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

5) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Сформульований результат лежить в основі нових означень та постановки задачі, які приведено в наступному параграфі.

2. Формулювання основних теорем. Модулярні зображення ручної групи $S_2 \times S_2$ описані (з точністю до еквівалентності) в роботі [15]; тут S_2 позначає, як звичайно, симетричну групу степеня 2 (яка є циклічною групою порядку 2). Напівгрупа $T_2 \times T_2$, яка має фактор-напівгрупу ізоморфну групі $S_2 \times S_2$, вже є дикою (відносно модулярних зображень, тобто зображень над полем характеристики 2); більш того, дикою є напівгрупа $T_2 \times S_2$, яка має фактор-напівгрупу ізоморфну групі $S_2 \times S_2$ і сама є фактор-напівгрупою напівгрупи $T_2 \times T_2$ [16].

Модулярним матричним зображенням (дикої) напігрупи $T_2 \times S_2$ і присвячена ця стаття.

Напівгрупа $T_2 \times S_2$ породжується елементами e, a, b і g (твірний елемент S_2) з наступними співвідношеннями: $a^2 = e$, $b^2 = b$. $ab = b$; $g^2 = e$. $ga = ag$, $gb = bg$.

Матричне зображення напівгрупи $T_2 \times S_2$ однозначно задається трійкою матриць (A, B, G) (якщо, як і раніше, одиничному елементі зіставляти одиничну матрицю), що задовольняють рівності $A^2 = E$, $B^2 = B$, $AB = B$, $G^2 = E$, $GA = AG$, $GB = BG$. Ми будемо ототожнювати зображення з відповідною йому трійкою матриць.

Розглянемо наступну класифікаційну задачу для довільного поля K характеристики 2. Зафіксуємо в множині $M = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}$ всіх нерозкладних зображень напівгрупи T_2 (які вказані в теоремі 1) деяку власну підмножину N і будемо розглядати лише такі матричні зображення R напівгрупи $T = T_2 \times S_2$, обмеження яких на напівгрупу T_2 розкладаються в пряму суму зображень із N. Для пар (T, N) можна розглядати традиційні задачі теорії зображень. Одна із них, а саме задача про опис пар (T, N) скінченного типу, розглядається в цій статті ("скінченний тип" означає, що число нерозкладних зображень, з точністю до еквівалентності, скінченне).

Теорема 2. *Якщо $|N| = 1$, то (T, N) — пара скінченного типу тоді і лише тоді, коли $N \neq R_4, R_5$.*

Теорема 3. *Якщо $|N| = 2$, то (T, N) — пара скінченного типу тоді і лише тоді, коли $N \cap \{R_4, R_5\} = \varnothing$.*

3. Доведення теореми 2. Ми ототожнюємо одноелементні множини із самими елементами.

Необхідність. Легко показати, що у випадку $N = R_4$ трійки матриць $R_P = (A, B, G_P)$ і $R_Q = (A, B, G_Q)$, де

$$A = \begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_X = \begin{pmatrix} E & X \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

подібні тоді і лише тоді, коли подібні P і Q; окрім того, зображення R_X нерозкладне тоді і лише тоді, коли нерозкладна матриця X.

У випадку $N = R_5$ маємо подібну ситуацію, якщо покласти

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & E \\ 0 & E & E \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_X = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & X \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}.$$

Отже, пари (T, R_4) і (T, R_5) мають скінченний тип.

Зауважимо, що в першому випадку трійка матриць R_X задає по суті зображення групи $S_2 \times S_2$ (бо $B = 0$), а тому сказане для $N = R_4$ випливає із результатів роботи [15].

Достатність випливає з теореми 3 (достатність), яка буде доведена нижче.

4. Доведення теореми 3. *Необхідність* випливає з теореми 2 (необхідність).

Достатність. Розглянемо послідовно випадки $N = \{R_1, R_2\}$, $N = \{R_1, R_3\}$, $N = \{R_2, R_3\}$. виписуючи на початку деякий загальний нормальний вигляд матричного зображення з відповідною додатковою умовою. Через E позначаємо, як звичайно, довільну одиничну матрицю (розмірності $n \geq 0$).

Випадок $N = \{R_1, R_2\}$:

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix},$$

Із співвідношення $BG = GB$ отримуємо $G_{12} = 0$, $G_{21} = 0$, а з $G^2 = E$ — $G_{11}^2 = E$, $G_{22}^2 = E$. Значить кожна із матриць G_{11} і G_{22} подібна матриці вигляду

$$\begin{pmatrix} E & 0 & E \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} \qquad (1).$$

який легко отримати з жорданової нормальної форми одночасною перестановкою рядків та стовпців.

Оскільки ці подібності продовжуються до подібності трійок матриць $(A.B.G)$ і (A, B, G'), де G' — деяка матриця така, що $G'_{12} = 0$, $G'_{21} = 0$, а G'_{11} і G'_{22} мають вигляд (1), то отримуємо наступну повну систему нерозкладних попарно нееквівалентних зображень:

1) $a \to 1, \quad b \to 1, \quad g \to 1;$

2) $a \to 1, \quad b \to 0, \quad g \to 1;$

3) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

4) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Зауважимо, що зображення 3) і 4) нерозкладні, бо нерозкладні її обмеження на підгрупу $\{e, g\}$ (порядку 2).

Випадок $N = \{R_1, R_3\}$:

$$A = \begin{pmatrix} E & E & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix},$$

Із співвідношення $BG = GB$ отримуємо $G_{12} = 0$, $G_{21} = 0$, $G_{23} = 0$, $G_{32} = 0$, а із $AG = GA$ — $G_{31} = 0$, $G_{11} = G_{22}$. Отже,

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & 0 & G_{13} \\ 0 & G_{11} & 0 \\ 0 & 0 & G_{33} \end{pmatrix},$$

причому із $G^2 = E$ маємо наступні співвідношення:

$$G_{11}^2 = E, \quad G_{33}^2 = E, \quad G_{11}G_{13} + G_{13}G_{33} = 0. \qquad (2)$$

Враховуючи перші дві рівності, аналогічно як у випадку $N = \{R_1, R_2\}$, можна вважати, що матриці G_{11} і G_{22} мають вигляд (1).

Розіб'ємо матриці A, B, G на блоки у відповідності до розбиття G_{11} та G_{33}. Зокрема. матимемо

$$G_{13} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{pmatrix}.$$

Із останньої рівності в (2) випливає, що $H_{11} = 0$, $H_{21} = 0$, $H_{31} = 0$, $H_{32} = 0$, $H_{33} = 0$. Тоді, як легко бачити, при

$$X = \begin{pmatrix} E & 0 & X_{13} \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \text{ де } X_{13} = \begin{pmatrix} H_{13} & 0 & 0 \\ H_{23} & 0 & 0 \\ 0 & H_{12} & 0 \end{pmatrix},$$

трійка матриць $(XAX^{-1}, XBX^{-1}, XGX^{-1})$ дорівнює трійці матриць (A, B, G'), де матриця G' відрізняється від матриці G лише блоком G'_{13}, який має наступний (більш простий) вигляд:

$$G'_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

І оскільки еквівалентність матриць $H_{22} \to PH_{22}Q^{-1}$ продовжується до подібності трійок матриць $(A.B.G')$ і (A, B, G''), де G'' отримується із G' заміною H_{22} на $PH_{22}Q^{-1}$, то можна вважати, що

$$H_{22} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В результаті маємо наступну повну систему нерозкладних попарно нееквівалентних зображень:

1) $a \to 1, \quad b \to 1, \quad g \to 1;$

2) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

3) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

4) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

5) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Зауважимо, що зображення 2) (відповідно 3)) нерозкладне, бо нерозкладне її обмеження на підгрупу $\{e, a\}$ (відповідно $\{e, g\}$), а зображення 4) і 5) нерозкладні, бо нерозкладні (згідно [15]) їх обмеження.. на підгрупу $\{e, a, g, ag\} \cong S_2 \times S_2$.

Випадок $N = \{R_2, R_3\}$:

$$A = \begin{pmatrix} E & E & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix}.$$

Із співвідношення $BG = GB$ отримуємо $G_{12} = 0$, $G_{13} = 0$, $G_{21} = 0$, $G_{31} = 0$, а із $AG = GA$ – $G_{23} = 0$, $G_{11} = G_{22}$. Отже,

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & 0 & 0 \\ 0 & G_{11} & 0 \\ 0 & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix},$$

причому із $G^2 = E$ маємо наступні співвідношення:

$$G_{11}^2 = E, \quad G_{33}^2 = E, \quad G_{32}G_{11} + G_{33}G_{32} = 0.$$

Далі доведення проводиться по тій же схемі, що у випадку $N = \{R_1, R_3\}$.

В результаті маємо наступну повну систему нерозкладних попарно нееквівалентних зображень:

1) $\quad a \to 1, \quad b \to 0, \quad g \to 1;$

2) $\quad a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

3) $\quad a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

4) $\quad a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$

5) $\quad a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Зауважимо, що зображення 2) – 5) нерозкладні по тій же причині, що і зображення у випадку $N = \{R_1, R_3\}$.

Теорема 3 доведена.

5. Обчислення матричних алгебр Ауслендера. Алгеброю Ауслендера матричної задачі скінченного типу (пов'язаної із матричними зображеннями групи, напівгрупи, алгебри, тощо) називається алгебра ендоморфізмів прямої суми всіх нерозкладних зображень (із кожного класу еквівалентності нерозкладних зображень треба взяти один представник).

Нагадаємо, що ендоморфізм матричного зображення T — це довільна матриця X, яка комутує з кожною матрицею зображення.

Очевидно, що матрична алгебра Ауслендера не залежить від вибору представників в класах еквівалентності у тому сенсі, що всі отримані таким чином алгебри будуть спряжені як підалгебри відповідної повної матричної алгебри.

Ми обчислимо матричну алгебру Ауслендера для всіх задач скінченного типу, про які сказано в теоремі 3.

Теорема 4. *Для довільного поля характеристики* 2 *матрична алгебра Ауслендера у випадку* $N = \{R_1, R_2\}$ *складається із усіх матриць вигляду*

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 & 0 & x_{15} & 0 \\ 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} & 0 & x_{36} \\ 0 & 0 & 0 & x_{33} & 0 & 0 \\ 0 & x_{52} & 0 & 0 & x_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{64} & 0 & x_{66} \end{pmatrix},$$

де x_{ij} *— елементи поля.*

Доведення. Розглянемо пряму суму нерозкладних зображень, вказаних у випадку $N = \{R_1, R_2\}$ (див. попередній параграф).

$$a \to A = \left(\begin{array}{cc|cc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad b \to B = \left(\begin{array}{cc|cc|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$g \to G = \left(\begin{array}{cc|cc|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

Нехай $X = (x_{ij}), i, j = 1, ldots, 6,$ — елемент матричної алгебри Ауслендера, тобто $AX = XA$, $BX = XB$ і $GX = XG$. Перша рівність буде тотожністю, оскільки матриця A є одиничною.

Використаємо співвідношення $BX = XB$. Отримаємо наступні рівності:

$$\begin{array}{lll}
(1.1;1,1): 0 = 0, & (1.1;3,1): x_{31} = 0, & (1.1;5,1): 0 = 0, \\
(1.1;1,2): 0 = 0, & (1.1;3,2): x_{32} = 0, & (1.1;5,2): 0 = 0, \\
(1.1;1,3): 0 = x_{13}, & (1.1;3,3): x_{33} = x_{33}, & (1.1;5,3): 0 = x_{53}, \\
(1.1;1,4): 0 = x_{14}, & (1.1;3,4): x_{34} = x_{34}, & (1.1;5,4): 0 = x_{54}, \\
(1.1;1,5): 0 = 0, & (1.1;3,5): x_{35} = 0, & (1.1;5,5): 0 = 0, \\
(1.1;1,6): 0 = x_{16}, & (1.1;3,6): x_{36} = x_{36}, & (1.1;5,6): 0 = x_{56}, \\
 & & \\
(1.1;2,1): 0 = 0, & (1.1;4,1): x_{41} = 0, & (1.1;6,1): x_{61} = 0, \\
(1.1;2,2): 0 = 0, & (1.1;4,2): x_{42} = 0, & (1.1;6,2): x_{62} = 0, \\
(1.1;2,3): 0 = x_{23}, & (1.1;4,3): x_{43} = x_{43}, & (1.1;6,3): x_{63} = x_{63}, \\
(1.1;2,4): 0 = x_{24}, & (1.1;4,4): x_{44} = x_{44}, & (1.1;6,4): x_{64} = x_{64}, \\
(1.1;2,5): 0 = 0, & (1.1;4,5): x_{45} = 0, & (1.1;6,5): x_{65} = 0, \\
(1.1;2,6): 0 = x_{26}, & (1.1;4,6): x_{46} = x_{46}, & (1.1;6,6): x_{66} = x_{66}.
\end{array}$$

Враховуючи вже отримані рівності, використаємо тепер співвідношення $GX = XG$, записане в еквівалентній формі як $(G+E)X = X(G+E)$.

Отримаємо наступні рівності:

$$
\begin{array}{lll}
(1.2;1,1): x_{21} = 0, & (1.2;3,1): 0 = 0, & (1.2;5,1): 0 = 0,\\
(1.2;1,2): x_{22} = x_{11}, & (1.2;3,2): 0 = 0, & (1.2;5,2): 0 = x_{51},\\
(1.2;1,3): 0 = 0, & (1.2;3,3): x_{43} = 0, & (1.2;5,3): 0 = 0,\\
(1.2;1,4): 0 = 0, & (1.2;3,4): x_{44} = x_{33}, & (1.2;5,4): 0 = 0,\\
(1.2;1,5): x_{25} = 0, & (1.2;3,5): 0 = 0, & (1.2;5,5): 0 = 0,\\
(1.2;1,6): 0 = 0, & (1.2;3,6): x_{46} = 0, & (1.2;5,6): 0 = 0,
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(1.2;2,1): 0 = 0, & (1.2;4,1): 0 = 0, & (1.2;6,1): 0 = 0,\\
(1.2;2,2): 0 = x_{21}, & (1.2;4,2): 0 = 0, & (1.2;6,2): 0 = 0,\\
(1.2;2,3): 0 = 0, & (1.2;4,3): 0 = 0, & (1.2;6,3): 0 = 0,\\
(1.2;2,4): 0 = 0, & (1.2;4,4): 0 = x_{43}, & (1.2;6,4): 0 = x_{63},\\
(1.2;2,5): 0 = 0, & (1.2;4,5): 0 = 0, & (1.2;6,5): 0 = 0,\\
(1.2;2,6): 0 = 0, & (1.2;4,6): 0 = 0, & (1.2;6,6): 0 = 0.
\end{array}
$$

Отже, відповідна матрична алгебра Ауслендера складається з усіх матриць, вказаних в умові теореми.

Теорема 5. *Для довільного поля характеристики* 2 *матрична алгебра Ауслендера у випадку* $N = \{R_1, R_3\}$ *складається із усіх матриць вигляду*

$$
X = \begin{pmatrix}
x_{11} & x_{12} & 0 & 0 & x_{15} & 0 & x_{17} & x_{18} & 0 & x_{1\,10} & x_{1\,11} & x_{1\,12}\\
0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{15} & 0 & 0 & 0 & x_{1\,10} & 0\\
0 & 0 & x_{11} & x_{12} & 0 & x_{15} & 0 & 0 & x_{18} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & x_{52} & 0 & 0 & x_{55} & 0 & x_{57} & x_{58} & 0 & x_{5\,10} & x_{5\,11} & x_{5\,12}\\
0 & 0 & 0 & x_{52} & 0 & x_{55} & 0 & 0 & x_{58} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{55} & 0 & 0 & 0 & x_{5\,10} & 0\\
0 & x_{82} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{87} & x_{88} & 0 & 0 & x_{8\,11} & x_{8\,12}\\
0 & 0 & 0 & x_{82} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{88} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{10\,7} & 0 & 0 & x_{10\,10} & x_{10\,11} & x_{10\,12}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{10\,10} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{12\,7} & 0 & 0 & 0 & x_{12\,11} & x_{12\,12}
\end{pmatrix},
$$

де x_{ij} *— елементи поля.*

Теорема 6. *Для довільного поля характеристики* 2 *матрична алгебра Ауслендера у випадку* $N = \{R_2, R_3\}$ *складається із усіх матриць вигляду*

$$X = \begin{pmatrix}
x_{11} & x_{12} & 0 & 0 & x_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{1\,10} & 0 & 0 \\
0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & x_{11} & x_{12} & 0 & x_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{1\,10} & 0 \\
0 & 0 & 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x_{52} & 0 & 0 & x_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & x_{52} & 0 & x_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & x_{52} & x_{74} & 0 & x_{76} & x_{55} & 0 & x_{79} & 0 & x_{7\,11} & x_{7\,12} \\
0 & 0 & x_{83} & x_{84} & 0 & x_{86} & x_{87} & x_{88} & x_{89} & 0 & x_{8\,11} & x_{8\,12} \\
0 & 0 & 0 & x_{83} & 0 & x_{87} & 0 & 0 & x_{88} & 0 & 0 & 0 \\
0 & x_{10\,2} & 0 & 0 & x_{10\,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{10\,10} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & x_{10\,2} & 0 & x_{10\,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{10\,10} & 0 \\
0 & 0 & 0 & x_{12\,4} & 0 & x_{12\,6} & 0 & 0 & x_{12\,9} & 0 & x_{12\,11} & x_{12\,12}
\end{pmatrix},$$

де x_{ij} *— елементи поля.*

Доведення теорем 5, 6 проводиться по такій же схемі, як і доведення теореми 4.

Список використаної літератури

1. *Дрозд Ю. А.* О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 104–114.
2. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. – Т. 1 – Москва: “Мир”, 1972. – 285 с.
3. *Okninski J.* Linear representations of semigroups. – World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991.
4. *Гельфанд И. М., Пономарьов В. А.* Неразложимые представления группы Лоренца // Успехи мат. наук. – 1968 . – **23**, вып. 2. – С. 3–60.
5. *Назарова Л. А., Ройтер А. В., Сергейчук В. В., Бондаренко В. М.* Применение модулей над диадой для классификации конечных p-групп, обладающих абелевой подгруппой индекса p, и пар взаимно аннулирующих операторов // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 69–92.
6. *Бондаренко В. М.* Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 // Мат. сб. – 1975. – **96**, вып. 1. – С. 63–74.
7. *Ringel C.* The indecomposable representations of dihedral 2-groups // Math. Ann. – 1975. – **214**, № 1. – P. 19–34.
8. *Понизовский И. С.* О конечности типа полугрупповой алгебры конечной вполне простой полугруппы // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 154–163.
9. *Понизовский И. С.* Некоторые примеры полугрупповых алгебр конечного типа // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1987. – **160**. – С. 229–238.
10. *Ringel C.* The representation type of the full transformation semigroup T_4 // Semigroup Forum. – 2000. – № 3. – P. 429–434.
11. *Bondarenko V. M., Tertychna O. M.* On tame semigroups generated by idempotents with partial null multiplication // Algebra Discrete Math. – 2008. – no. 4. – P. 10–19.
12. *Bondarenko V. M., Tertychna O. M., Zubaruk O. V.* On classifications of pairs of potent linear operators with the simplest annihilation condition // Algebra Discrete Math. – 2016. – **21**, no 1. – P. 18–23.
13. *Бондаренко В. М., Костишин Е. М.* Модулярні зображення напівгрупи T_2 // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2011. – вип. 22, №1. – С. 26–34.
14. *Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А.* Представленческий тип конечных групп // Модули и представления : Записки науч. семинаров ЛОМИ. – 1977. – **71**. – С. 24–41.
15. *Башев В. А.* Представления группы $Z_2 \times Z_2$ в поле характеристики 2 // ДАН СССР. – 1961. – **141**, № 5. – С. 1015–1018.
16. *Bondarenko V. M., Kostyshyn E. M.* On modular representations of semigroups $S_p \times T_p$ // Algebra and Discrete Mathematics. – **16**, no. 1. – 2013. – P. 16–19.

Одержано 21.10.2017