УДК УДК 517.9

І. Ю. Король, І. І. Король (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО ЄДИНИЙ ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ ЛІНІЙНИХ БАГАТОКРОКОВИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ

The present paper proposes a unified approach, which allows to obtain all the well known multistep methods for solving the Cauchy problem for ordinary differential equations.

У роботі запропоновано єдиний підхід, який дозволяє одержати всі загальновідомі багатокрокові методи розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь.

1. Опис загального підходу. Розглянемо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \tag{1}$$

Як відомо [4], лінійні багатокрокові методи для розв'язанні задачі (1) будують на основі формули

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^{p} a_j y_{n-j} + h \sum_{i=-r}^{q} b_i f(t_{n-i}, y_{n-i}), \tag{2}$$

де a_j, $j = \overline{0, p}$, b_i, $i = \overline{-r, q}$ – невідомі коефіцієнти. Якщо $b_{-1} = 0$, то метод (2) називається явним, а при $b_{-1} \neq 0$ – неявним.

В окремих випадках [2, 3] для знаходження коефіцієнтів a_j і b_i задачу (1) замінюють еквівалентним інтегральним співвідношенням

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt,$$

після чого підінтегральну функцію замінюють інтерполяційним многочленом Лагранжа або Ньютона. Однак, для одержання широкого спектру формул лінійних багатокрокових методів такий підхід є досить трудомісткий, або і зовсім непридатний. У зв'язку з цим формули лінійних багатокрокових методів будемо шукати у вигляді

$$y_{n+1} = \sum_{j=j_1}^{j_2} a_j y_{n-j} + hb_{-1} f(t_{n+1}, y_{n+1}) + h \sum_{i=0}^{q} b_i f(t_{n-i}, y_{n-i}), \tag{3}$$

або

$$y_{n+1} = \sum_{j=j_1}^{j_2} a_j y_{n-j} + hb_{-1} y'_{n+1} + h \sum_{i=0}^{q} b_i y'_{n-i}, \tag{4}$$

де $y'_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1})$, $y'_{n-i} = f(t_{n-i}, y_{n-i})$ – значення похідної шуканої функції, а невідомі коефіцієнти a_j і b_i знаходяться як розв'язки відповідних систем алгебраїчних рівнянь.

Нашою метою є вибір такого підходу до побудови систем лінійних неоднорідних рівнянь на основі формули (3), який дає можливість достатньо просто отримати широкий набір алгоритмів як явного, так і неявного типів. Зокрема, якщо покласти $b_{-1}=0$, то одержуємо методи явного типу, а при $b_{-1}\neq 0$ – неявного.

Ідея запропонованого підходу полягає в наступному: якщо задача Коші (1) має точний розв'язок у вигляді полінома степені k

$$y(t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\ldots+\alpha_k t^k,$$

де $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ – константи, то за допомогою формули (4) цей розв'язок можна знайти точно.

Невідомі коефіцієнти $a_{j1}, a_{j1+1}, \ldots, a_{j2},\ b_1, b_0, b_1, \ldots, b_q$ будемо шукати з умови [1], що формула (4) є точною для всіх поліноміальних розв'язків, степінь яких не перевищує k. За такі поліноми візьмемо поліноми вигляду:

$$y(t)=\frac{1}{h^0}(t_{n+1}-t)^0=1 \text{ при } m=0, \quad y(t)=\frac{1}{h^m}(t_{n+1}-t)^m,\ m=1,2,\ldots,k; \tag{5}$$

$$y'(t)=0, \text{при } m=0; \qquad y'(t)=-\frac{m}{h^m}(t_{n+1}-t)^{m-1}, \quad m=1,2,\ldots,k. \tag{6}$$

Для побудови таких систем формулу (4) запишемо у вигляді лінійної неоднорідної системи

$$\sum_{j=j_1}^{j_2} a_j y_{n-j}+hb_{-1}y'_{n+1}+h\sum_{i=0}^{q} b_i y'_{n-i}=y_{n+1}, \tag{7}$$

Систему (7) запишемо у матрично-векторному вигляді

$$Cx=d, \tag{8}$$

де матриця C формується приєднанням до матриці A справа стовпця b і матриці B. Наявність стовпця b та кількість стовпців у матрицях A і B залежать від числового методу та його порядку точності. При цьому матриця C є квадратною.

Відмітимо, що формула (7) має чотири складові: перший доданок – сума, коефіцієнтам a_j якої будуть відповідати стовпці матриці A (один стовпець при $j1=j2$); друга складова – доданок з коефіцієнтом b_{-1}, якому буде відповідати стовпець b загальної матриці C системи; третя складова – сума, коефіцієнтам b_i якої у побудованій алгебраїчній системі будуть відповідати стовпці матриці B, і четверта складова – права частина, якій буде відповідати стовпець d.

Використовуючи поліноми (5) побудуємо складові системи (7) для знаходження невідомих коефіцієнтів наступним чином: стовпець, який відповідає коефіцієнту a_j – це значення поліномів $y_m(t)$ у вузлі t_{n-j}:

$$\begin{gathered}\text{при } m=0: \ y_0(t_{n-j})=\tfrac{1}{h^0}(t_{n+1}-(t_n-jh))^0=1;\\ \text{при } m=1,\ldots,k: \ y_m(t_{n-j})=\tfrac{1}{h^m}(t_{n+1}-(t_n-jh))^m=\tfrac{1}{h^m}(h+jh)^m=(j+1)^m.\end{gathered} \tag{9}$$

Аналогічно обчислюється матриця B, яка відповідає коефіцієнтам b_i, котрі є значеннями похідних $y'_m(t)$ поліномів (6) у вузлі t_{n-i}:

$$\begin{aligned} &\text{при } m=0: \ y'_0(t_{n-i})=0; \\ &\text{при } m=1,\ldots,k: \ y'_m(t_{n-i})=-\tfrac{m}{h^m}(t_{n+1}-(t_n-ih))^{m-1}= \\ &\qquad =-\tfrac{m}{h^m}(h+ih)^{m-1}=-\tfrac{m}{h}(i+1)^{m-1}. \end{aligned} \tag{10}$$

З одержаних формул випливає, що похідна y'_{n+1}, що відповідає стовпцю b і функція y_{n+1}, що відповідає стовпцю d, приймають такі значення:

$$y'_{n+1}=y'_m(t_{n+1})=\begin{cases} -1 & \text{при } m=1, \\ 0 & \text{при } m\neq 1, \end{cases} \qquad y_{n+1}=y_m(t_{n+1})=\begin{cases} 1 & \text{при } m=0, \\ 0 & \text{при } m\neq 0. \end{cases} \tag{11}$$

На лістингу 1 наведено програму, яка формує матрицю C і стовпець d. На початку програми визначається число k – порядок точності різницевої формули (4) числового методу. Воно залежить від кількості стовпців матриць A і B та наявності чи відсутності стовпця b; у циклі 1 за формулами (9) формуються стовпці матриці A; у циклі 2 за першою формулою (11) обчислюється стовпець b; у циклі 3 – за формулами (10) обчислюються стовпці матриці B. У частині 4 в залежності від значення параметра s формується матриця C. При $s = 0$ і $s = 3$ одержуємо матрицю C, яка відповідає одному з явних методів, а при $s = 1$ і $s = 2$ – неявним методам. Після цього за другою формулою (11) обчислюється вектор d і знаходиться розв'язок системи (8). Саме елементи вектора x і є коефіцієнтами розрахункових формул того чи іншого різницевого методу.

Лістинг 1.

```
JNBM(j1,j2,s,q) := | k ← j2 − j1 + q  if  s = 0
                   | k ← j2 − j1 + q + s  if  s = 1
                   | k ← j2 − j1 + 1  if  s = 2
                   | k ← j2 − j1  if  s = 3
                   | 1
                   | for i ∈ 0..k
                   |   for j ∈ j1..j2
                   |     A_{i,j−j1} ← (j + 1)^i
                   | 2
                   | for i ∈ 0..k
                   |   | b_i ← −1  if  i = 1
                   |   | b_i ← 0  otherwise
                   | 3
                   | for i ∈ 0..k − 1
                   |   for j ∈ 1..q
                   |     | B_{i+1,j−1} ← 0  if  i = 0
                   |     | B_{i+1,j−1} ← −(i + 1)·j^i
                   | 4
                   | C ← augment(A,B)  if  s = 0
                   | C ← augment(A,b,B)  if  s = 1
                   | C ← augment(A,b)  if  s = 2
                   | C ← A  otherwise
                   | 5
                   | for i ∈ 0..k
                   |   | d_0 ← 1  if  i = 0
                   |   | d_i ← 0  otherwise
                   | x ← C^{−1}·d
                   | (A  b  B  C  k  d  x)
```

Рис. 1. Текст програми

Проілюструємо як за допомогою наведеної програми одержуються різні загальновідомі методи.

2. Метод Адамса-Башфорта. Метод Адамса-Башфорта є явним багатокроковим методом, який одержується з формули (4) при різних значеннях q, за умови, що $j1 = j2 = 0$, $b_{-1} = 0$:

$$y_{n+1} = a_0 y_n + h\sum_{i=0}^{q} b_i y'_{n-i}.$$

Нижче детально проілюстровано процес формування та вигляд матриць A, B, C та вектора d для всіх значень k, вектори x, які є розв'язками системи (9) та розрахункові формули методу Адамса-Башфорта, які будуються на основі одержаних векторів x. Зауважимо, що $f_{n-i} = f(t_{n-i}, y(t_{n-i}))$. Локальні похибки одержаних формул можна знайти в [2].

$$j1 := 0 \quad j2 := 0 \quad s = 0 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$
$$k = 1 \quad x^T = (1\ 1) \quad y_{n+1} = y_n + h \cdot f_n$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 0 \quad s = 0 \quad q := 2 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$
$$k = 2 \quad x^T = (1\ \tfrac{3}{2}\ -\tfrac{1}{2}) \quad y_{n+1} = y_n + h \cdot \left(\tfrac{3}{2} f_n - \tfrac{1}{2} f_{n-1}\right)$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 0 \quad s = 0 \quad q := 3 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$
$$k = 3 \quad x^T = (1\ \tfrac{23}{12}\ -\tfrac{4}{3}\ \tfrac{5}{12}) \quad y_{n+1} = y_n + h \cdot \left(\tfrac{23}{12} \cdot f_n - \tfrac{4}{3} \cdot f_{n-1} + \tfrac{5}{12} \cdot f_{n-2}\right)$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -6 \\ -3 & -12 & -27 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 & -6 \\ 1 & -3 & -12 & -27 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 0 \quad s = 0 \quad q := 4 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$
$$k = 4 \quad x^T = (1\ \tfrac{55}{24}\ -\tfrac{59}{24}\ \tfrac{37}{24}\ -\tfrac{3}{8}) \quad y_{n+1} = y_n + h \cdot \left(\tfrac{55}{24} \cdot f_n - \tfrac{59}{24} \cdot f_{n-1} + \tfrac{37}{24} \cdot f_{n-2} - \tfrac{3}{8} \cdot f_{n-3}\right)$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -6 & -8 \\ -3 & -12 & -27 & -48 \\ -4 & -32 & -108 & -256 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 1 & -3 & -12 & -27 & -48 \\ 1 & -4 & -32 & -108 & -256 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 0 \quad s = 0 \quad q := 5 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$
$$k = 5 \quad x^T = (1\ \tfrac{1901}{720}\ -\tfrac{1387}{360}\ \tfrac{109}{30}\ -\tfrac{637}{360}\ \tfrac{251}{720})$$
$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \left(\tfrac{1901}{720} \cdot f_n - \tfrac{1387}{360} \cdot f_{n-1} + \tfrac{109}{30} \cdot f_{n-2} - \tfrac{637}{360} \cdot f_{n-3} + \tfrac{251}{720} \cdot f_{n-4}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -6 & -8 & -10 \\ -3 & -12 & -27 & -48 & -75 \\ -4 & -32 & -108 & -256 & -500 \\ -5 & -80 & -405 & -1280 & -3125 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&-1&-1&-1&-1&-1\\1&-2&-4&-6&-8&-10\\1&-3&-12&-27&-48&-75\\1&-4&-32&-108&-256&-500\\1&-5&-80&-405&-1280&-3125\end{pmatrix}\quad d=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

3. Метод Адамса-Мултона. Метод Адамса-Мултона є неявним багатокроковим методом, який одержується з формули (4) при різних значеннях q, за умови, що $j1=j2=0$, $b_{-1}=-1$:

$$y_{n+1}=a_0y_n+hb_{-1}y'_{n+1}+h\sum_{i=0}^{q}b_iy'_{n-i}.$$

Нижче, аналогічно, як і в попередньому випадку, наведено вигляд матриць A, B, C, стовпця b та правої частини d для $k=5$; вектори x, які є розв'язками відповідних систем при $k=\overline{1,5}$ та формули методу, які будуються на основі одержаних векторів x. Локальні похибки одержаних формул можна знайти в [2].

$$j1:=0\quad j2:=0\quad s=2\quad q:=1\quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x):=JNBM(j1,j2,s,q)$$
$$k=1\quad x^T=(1\ 1)\quad y_{n+1}=y_n+h\cdot f_{n+1}$$

$$j1:=0\quad j2:=0\quad s=1\quad q:=1\quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x):=JNBM(j1,j2,s,q)$$
$$k=2\quad x^T=(1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2})\quad y_{n+1}=y_n+h\cdot\left(\tfrac{1}{2}\cdot f_{n+1}+\tfrac{1}{2}\cdot f_n\right)$$

$$j1:=0\quad j2:=0\quad s=1\quad q:=2\quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x):=JNBM(j1,j2,s,q)$$
$$k=3\quad x^T=(1\ \tfrac{5}{12}\ \tfrac{2}{3}\ -\tfrac{1}{12})\quad y_{n+1}=y_n+h\cdot\left(\tfrac{5}{12}\cdot f_{n+1}+\tfrac{2}{3}\cdot f_n-\tfrac{1}{12}\cdot f_{n-1}\right)$$

$$j1:=0\quad j2:=0\quad s=1\quad q:=3\quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x):=JNBM(j1,j2,s,q)$$
$$k=4\quad x^T=(1\ \tfrac{3}{8}\ \tfrac{19}{24}\ -\tfrac{5}{24}\ \tfrac{1}{24})\quad y_{n+1}=y_n+h\cdot\left(\tfrac{3}{8}\cdot f_{n+1}+\tfrac{19}{24}\cdot f_n-\tfrac{5}{24}\cdot f_{n-1}+\tfrac{1}{24}\cdot f_{n-2}\right)$$

$$j1:=0\quad j2:=0\quad s=1\quad q:=4\quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x):=JNBM(j1,j2,s,q)$$
$$k=5\quad x^T=(1\ \tfrac{251}{720}\ \tfrac{323}{360}\ -\tfrac{11}{30}\ \tfrac{53}{360}\ -\tfrac{19}{720})$$
$$y_{n+1}=y_n+h\cdot\left(\tfrac{251}{720}\cdot f_{n+1}+\tfrac{323}{360}\cdot f_n-\tfrac{11}{30}\cdot f_{n-1}+\tfrac{53}{360}\cdot f_{n-2}-\tfrac{19}{720}\cdot f_{n-3}\right)$$

$$A=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\quad b=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&-1&-1&-1\\-2&-4&-6&-8\\-3&-12&-27&-48\\-4&-32&-108&-256\\-5&-80&-405&-1280\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&-1&-1&-1&-1&-1\\1&0&-2&-4&-6&-8\\1&0&-3&-12&-27&-48\\1&0&-4&-32&-108&-256\\1&0&-5&-80&-405&-1280\end{pmatrix}\quad d=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

4. Неявний метод Гіра. Формули неявного методу Гіра є найбільш використовуваними для інтегрування жорстких диференціальних рівнянь [2]. Формули Гіра одержуються з формули (4) за умови, що $j1 = 0$, $j2 \in \mathbb{N}$, $b_{-1} = 1$ і $q = 0$, а саме

$$y_{n+1} = \sum_{j=j_1}^{j_2} a_j y_{n-j} + hb_{-1}y'_{n+1} + hb_0 y'_n.$$

Нижче наведено результати роботи програми.

$$j1 := 0 \quad j2 := 0 \quad s = 2 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k=1\ x^T=(1\ 1) y_{n+1}=y_n+h\cdot f_{n+1}$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 1 \quad s = 2 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k=2 \quad x^T=\left(\tfrac{4}{3}\ -\tfrac{1}{3}\ \tfrac{2}{3}\right) \ \ y_{n+1}=\tfrac{4}{3}\cdot y_n -\tfrac{1}{3}\cdot y_{n-1} +h\cdot \tfrac{2}{3} f_{n+1}$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 2 \quad s = 2 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k=3 \quad x^T=\left(\tfrac{18}{11}\ -\tfrac{9}{11}\ \tfrac{2}{11}\ \tfrac{6}{11}\right) \ \ y_{n+1}=\tfrac{18}{11}\cdot y_n -\tfrac{9}{11}\cdot y_{n-1} +\tfrac{2}{11}\cdot y_{n-2} + h\cdot\tfrac{6}{11}\cdot f_{n+1}$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 3 \quad s = 2 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k=4 \quad x^T=\left(\tfrac{48}{25}\ -\tfrac{36}{25}\ \tfrac{16}{25}\ -\tfrac{3}{25}\ \tfrac{12}{25}\right)$$

$$y_{n+1}=\tfrac{48}{25}\cdot y_n-\tfrac{36}{25}\cdot y_{n-1}+\tfrac{16}{25}\cdot y_{n-2}-\tfrac{3}{25}\cdot y_{n-3}+h\cdot\tfrac{12}{25}\cdot f_{n+1}$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 4 \quad s = 2 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k=5 \quad x^T=\left(\tfrac{300}{170}\ -\tfrac{300}{137}\ \tfrac{200}{137}\ -\tfrac{75}{137}\ \tfrac{12}{137}\ \tfrac{60}{137}\right)$$

$$y_{n+1}=\tfrac{300}{170}\cdot y_n-\tfrac{300}{137}\cdot y_{n-1}+\tfrac{200}{137}\cdot y_{n-2}-\tfrac{75}{137}\cdot y_{n-3}+\tfrac{12}{137}\cdot y_{n-4}+h\cdot\tfrac{60}{137}\cdot f_{n+1}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&3&4&5\\1&4&9&16&25\\1&8&27&64&125\\1&16&81&256&625\\1&32&243&1024&3125\end{pmatrix}\quad b=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&0\\1&2&3&4&5&-1\\1&4&9&16&25&0\\1&8&27&64&125&0\\1&16&81&256&625&0\\1&32&243&1024&3125&0\end{pmatrix}\quad d=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

5. Явний метод Мілна. Відповідні формули одержуються з (4) за умови, що $j1 = j2 = q$:

$$y_{n+1} = a_{j1}y_{n-j1} + h\sum_{i=0}^{q} b_i y'_{n-i}.$$

Нижче наведено результати роботи програми для $k = 3$ і $k = 5$.

$$j1 := 3 \quad j2 := 3 \quad s = 0 \quad q := 3 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k=3 \quad x^T=\left(1\ \tfrac{8}{3}-\tfrac{4}{3}\ \tfrac{8}{3}\right) \quad y_{n+1}=y_{n-3}+h\cdot\left(\tfrac{8}{3}\cdot f_n-\tfrac{4}{3}\cdot f_{n-1}+\tfrac{8}{3}\cdot f_{n-2}\right)$$

$$j1 := 5 \quad j2 := 5 \quad s = 0 \quad q := 5 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k=5 \quad x^T=\left(1\ \tfrac{33}{10}-\tfrac{21}{5}-\tfrac{39}{5}-\tfrac{21}{5}\ \tfrac{33}{10}\right)$$

$$y_{n+1}=y_{n-5}+h\cdot\left(\tfrac{33}{10}\cdot f_n-\tfrac{21}{5}\cdot f_{n-1}+\tfrac{39}{5}\cdot f_{n-2}-\tfrac{21}{5}\cdot f_{n-3}+\tfrac{33}{10}\cdot f_{n-4}\right)$$

$$A=\begin{pmatrix}1\\6\\36\\216\\2961\\7776\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\-1&-1&-1&-1&-1\\-2&-4&-6&-8&-10\\-3&-12&-27&y-48&-75\\-4&-32&-108&-256&-500\\-5&-80&-405&-1280&-3125\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\6&-1&-1&-1&-1&-1\\36&-2&-4&-6&-8&-10\\216&-3&-12&-27&-48&-75\\1296&-4&-32&-108&-256&-500\\7776&-5&-80&-405&-1280&-3125\end{pmatrix}\quad d=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

6. Неявний метод Мілна. Відповідні формули одержуються з (4) при різних значеннях q за умови, що $j1 = j2 = s = 1$:

$$y_{n+1} = a_1 y_{n-1} + hb_{-1}y'_{n+1} + h\sum_{i=0}^{q} b_i y'_{n-i},.$$

Результати роботи програми для $k = 3$ і $k = 5$ наведено нижче.

$$j1 := 1 \quad j2 := 1 \quad s = 1 \quad q := 2 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$
$$k=3 \quad x^T=(1\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{4}{3}\ \tfrac{1}{3}) \quad y_{n+1}=y_{n-1}+h\cdot\left(\tfrac{1}{3}\cdot f_{n+1} + \tfrac{4}{3}\cdot f_n + \tfrac{1}{3}\cdot f_{n-1}\right)$$

$$j1 := 1 \quad j2 := 1 \quad s = 1 \quad q := 4 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$
$$k=5 \quad x^T=(1\ \tfrac{29}{90}\ \tfrac{62}{45}\ \tfrac{4}{15}\ \tfrac{2}{45}\ \tfrac{1}{90})$$
$$y_{n+1}=y_{n-1}+h\cdot\left(\tfrac{29}{90}\cdot f_{n+1} + \tfrac{62}{45}\cdot f_n + \tfrac{4}{15}\cdot f_{n-1} + \tfrac{2}{45}\cdot f_{n-2} - \tfrac{1}{90}\cdot f_{n-3}\right)$$

$$A=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\8\\16\\32\end{pmatrix}\quad b=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&-1&-1&-1\\-2&-4&-6&-8\\-3&-12&-27&-48\\-4&-32&-108&-256\\-5&-80&-405&-1280\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\2&-1&-1&-1&-1&-1\\4&0&-2&-4&-6&-8\\8&0&-3&-12&-27&-48\\16&0&-4&-32&-108&-256\\32&0&-5&-80&-405&-1280\end{pmatrix}\quad d=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

7. Метод Ністрема. Формули методу Ністрема одержуються з (4) при різних значеннях q за умови, що $j1 = j2 = 1$ і $s = 0$:

$$y_{n+1} = a_1 y_{n-1} + h\sum_{i=0}^{q} b_i y'_{n-i}.$$

Результати роботи програми для різних порядків точності наведено нижче.

$$j1 := 1 \quad j2 := 1 \quad s = 0 \quad q := 2 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$
$$k=2 \quad x^T=(1\ 2\ 0) \quad y_{n+1}=y_{n-1}+ 2h\cdot f_n$$

$$j1 := 1 \quad j2 := 1 \quad s = 0 \quad q := 3 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$
$$k=3 \quad x^T=(1\ \tfrac{7}{3} - \tfrac{2}{3}\ \tfrac{1}{3}) \quad y_{n+1}=y_{n-1}+h\cdot \left(\tfrac{7}{3}\cdot f_n - \tfrac{2}{3}\cdot f_{n-1} + \tfrac{1}{3}\cdot f_{n-2}\right)$$

$$j1 := 1 \quad j2 := 1 \quad s = 0 \quad q := 4 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$
$$k=4 \quad x^T=(1\ \tfrac{8}{3} - \tfrac{5}{3}\ \tfrac{4}{3}\ \tfrac{1}{3}) \quad y_{n+1}=y_{n-1}+h\cdot \left(\tfrac{8}{3}\cdot f_n - \tfrac{5}{3}\cdot f_{n-1} + \tfrac{4}{3}\cdot f_{n-2} - \tfrac{1}{3}\cdot f_{n-3}\right)$$

$$A=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\8\\16\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&-1&-1&-1\\-2&-4&-6&-8\\-3&-12&-27&-48\\-4&-32&-108&-256\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\2&-1&-1&-1&-1\\4&2&-4&-6&-8\\8&-3&-12&-27&-48\\16&-4&-32&-108&-256\end{pmatrix} \quad d=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

8. Інтерполяційний метод Ерміта. Формули цього методу одержуються з (4) при різних значеннях q за умови, що $j1 = 0$, $j2 \in \mathbb{N}$ і $s = 0$:

$$y_{n+1} = \sum_{j=j_1}^{j_2} a_j y_{n-j} + hb_0 y'_n.$$

Результати роботи програми для $k = \overline{2,5}$ наведено нижче.

$$j1 := 0 \quad j2 := 1 \quad s = 0 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$
$$k=2 \quad x^T=(0\ 1\ 2) \quad y_{n+1}=y_{n-1}+ 2\cdot h\cdot f_n$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 2 \quad s = 0 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$
$$k=3 \quad x^T=(-\tfrac{3}{2}\ 3 - \tfrac{1}{2}\ 3) \quad y_{n+1}= -\tfrac{3}{2}y_n + 3y_n - \tfrac{1}{2}y_{n-2} + 3\cdot h\cdot f_n$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 3 \quad s = 0 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$
$$k=4\ x^T=(-\tfrac{10}{3}\ 6\ \ -2\ \tfrac{1}{3}\ 4) \quad y_{n+1}=-\tfrac{10}{3}y_n + 6y_{n-1} - 2y_{n-2} + \tfrac{1}{3}y_{n-3} + 4\cdot h\cdot f_n$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 4 \quad s = 0 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$
$$k=5 \quad x^T=(-\tfrac{65}{12}\ 10\ \ -5\ \tfrac{5}{3}\ -\tfrac{1}{4}\ 5)$$
$$y_{n+1}=-\tfrac{65}{12}y_n + 10y_{n-1} - 5y_{n-2} + \tfrac{5}{3}y_{n-3} - \tfrac{1}{4}y_{n-4} + 5h\cdot f_n$$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&3&4&5\\1&4&9&16&25\\1&8&27&64&125\\1&16&81&256&625\\1&32&243&1024&3125\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\\-3\\-4\\-5\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&0\\1&2&3&4&5&-1\\1&4&9&16&25&-2\\1&8&27&64&125&-3\\1&16&81&256&625&-4\\1&32&243&1024&3125&-5\end{pmatrix} \quad d=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

9. Екстраполяційний метод Ерміта. На відміну від усіх попередніх випадків, для даного методу матриця C складається тільки з матриці A. Формули цього методу одержуються з (4) при різних значеннях q за умови, що $j1 = 0$, $j2 \in \mathbb{N}$ і $s = 3$:

$$y_{n+1} = \sum_{j=j_1}^{j_2} a_j y_{n-j}.$$

Результати роботи програми для $k = \overline{1,4}$ наведено нижче.

$$j1 := 0 \quad j2 := 1 \quad s = 3 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$
$$k = 1 \quad x^T = (2\ \ -1) \ \ y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1}$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 2 \quad s = 3 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$
$$k = 2 \quad x^T = (3\ \ -3\ \ 1) \ \ y_{n+1} = 3y_n - 3y_{n-1} + y_{n-2}$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 3 \quad s = 3 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$
$$k = 3 \quad x^T = (4\ \ -6\ \ 4\ \ -1) \ \ y_{n+1} = 4y_n - 6y_{n-1} + 4y_{n-2} - y_{n-3}$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 4 \quad s = 3 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$
$$k = 4 \quad x^T = (5\ \ -10\ \ 10\ \ -5\ \ 1) \quad y_{n+1} = 5y_n - 10y_{n-1} + 10y_{n-2} - 5y_{n-3} + y_{n-4}$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 5 \quad s = 3 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$
$$k = 5 \quad x^T = (6\ \ -15\ \ 20\ \ -15\ \ 6\ \ -1)$$
$$y_{n+1} = 6y_n - 15y_{n-1} + 20y_{n-2} - 15y_{n-3} + 6y_{n-4} - y_{n-5}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 & 216 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 625 & 1296 \\ 1 & 32 & 243 & 1024 & 3125 & 7776 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 0 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 & 0 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 625 & 0 \\ 1 & 32 & 243 & 1024 & 3125 & 0 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. *Фельдман Д.В., Петренко А.І., Дмитрієва О.А.* Чисельні методи в інформатиці. - К.: Видавнича група BHV, 2006. – 480 с.
2. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд - во МГУ, 1990. – 336 с.
3. *Хайрер Э., Нёрстрем С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных диффе-ренциальных уравнений. Нежесткие задачи. Пер. с англ. - М.: Мир, 1990. – 512 с.
4. *Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И.* Вычислительные методы. Т. II. Гл. ред. физ.-мат.лит. изд-ва "Наука 1977. – 400 с.

Одержано 18.10.2012