МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск №2 (31)

Ужгород 2017

УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. / Редкол.: В. В. Маринець (гол. ред.) та інші. – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2017. – випуск №2 (31). – 145 с.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Рекомендовано до друку Вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет», протокол № 15 від 21.12.2017 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.
Засновник і видавець – Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет».
Виходить два рази на рік.
Збірник наукових праць видається з 1994 року.

Адреса редакційної колегії: Україна, 88020 Ужгород, вул. Університетська, 14, математичний факультет УжНУ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua.

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

SCIENTIFIC BULLETIN OF UZHHOROD UNIVERSITY

Series of

MATHEMATICS AND INFORMATICS

Issue no 2 (31)

Uzhhorod 2017

Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics / Edit.: V. Marynets (Chief edit.) and others. – Uzhhorod: Scientific Bulletin of UzhNU «Hoverla», 2017. – Issue no 2 (31). – 145 p.

EDITORIAL

Recommended for publication by the Scientific Council of UzhNU, record no 15 dated by December 21, 2017.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.
Founder and Publisher: State University "Uzhhorod National University".
Published twice a year.
The collection of scientific articles has been published since 1994.

Address of publishing house: Mathematical faculty "UzhNU", Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88020, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua.

ЗМІСТ

CONTENTS

УДК 519.21

Ю. В. Козаченко (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Донецький нац. ун-т ім. Василя Стуса),
М. Ю. Петранова (Донецький нац. ун-т ім. Василя Стуса)

ДІЙСНІ СТАЦІОНАРНІ ГАУСОВІ ПРОЦЕСИ ЗІ СТІЙКИМИ КОРЕЛЯЦІЙНИМИ ФУНКЦІЯМИ[2]

The paper deals with real stationary processes with a stable correlation function, with the distribution of some functionalities from these processes and some of their properties.

В роботі розглянуті дійсні стаціонарні процеси зі стійкою корреляційною функцією, розподіли деяких функціоналів від цих процесів та деякі їх властивості.

Вступ. Дана робота продовжує дослідження роботи [1], де вивчались комплексні гауссові процеси зі стійкою кореляційною функцією. В цій роботі вивчаються дійсні стаціонарні процеси зі стійкою корреляційною функцією, зокрема розподіли деяких функціоналів від цих процесів та деякі їх властивості. Для інших процесів подібні задачі розглядались в роботах та книгах [2–6]

Моделі деяких гауссових стаціонарних процесів зі стійкими кореляційними функціями будувались в роботах [1, 7, 8].

Робота складається з чотирьох розділів. У першому розділі знаходяться оцінки розподілу супремуму гауссовських стаціонарних процесів зі стійкою коваріаційною функцією. В другому розділі вивчається поведінка цих процесів на нескінченності. В третьому розділі знаходяться оцінки розподілу норм цих процесів у просторі $L_p(T)$. В четвертому розділі досліджуються деякі аналітичні властивості цих процесів.

1. Розподіл супремуму дійсного гауссового випадкового процесу зі стійкими коваріаційними функціями.

Теорема 1. *Нехай* $T = [a, b]$, $X = \{X(t), t \in [a, b], -\infty < a < b < \infty\}$ *центрований сепарабельний гауссів процес та* $M = \sup\limits_{t \in T} \left(E|X(t)|^2\right)^{1/2}$. *Припустимо, що існує неперервна строго зростаюча функція* $\sigma = \{\sigma(h), h \geq 0\}$ *така що* $\sigma(h) > 0$, $h > 0$, $\sigma(0) = 0$ *та*

$$\sup_{t,s \in [a,b]} \left(E|X(t) - X(s)|^2\right)^{1/2} < \sigma(h).$$

Крім того існує невід'ємна неспадна функція $r(u), u \geq 1$ *така що функція* $r(e^y), y \geq 0$ *— опукла та виконуетьса умова: для деякого* $v > 0$ *(а тому і для будь-якого* $0 < v < \infty$*)*

$$I_r(v) = \int_0^v r\Big(\frac{b-a}{2 \cdot \sigma^{(-1)}(u)} + 1\Big) du < \infty,$$

[2]Робота була виконана в рамках проекту Норвезько-українського співробітництва у галузі математичної освіти

де $\sigma^{(-1)}(u)$ *— обернена до* $\sigma(u)$ *функція. Тоді для будь-яких* $\theta \in (0,1)$ *та* $\lambda > 0$ *справджується нерівність:*

$$E\exp\left\{\lambda \sup_{t\in[a,b]} |X(t)|\right\} \leq 2D(\lambda,\theta), \tag{1}$$

де $D(\lambda,\theta) = \exp\left\{\frac{\lambda^2 M^2}{2(1-\theta)^2}\right\} \cdot r^{(-1)}\left(\frac{I_r(\theta M)}{\theta M}\right)$, $r^{(-1)}(v)$ *— обернена до* $r(v)$ *функція.*

Доведення. Ця теорема випливає з теореми 3.4.4 книги [9], див. також роботу [10] та доведення в роботі [11].

Наслідок 1. *За умов теореми 1 при будь-якому* $\varepsilon > 0$ *справджується нерівність*

$$P\left\{\sup_{t\in[a,b]} |X(t)| > \varepsilon\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2(1-\theta)^2}{2M^2}\right\} \cdot r^{(-1)}\left(\frac{I_r(\theta M)}{\theta M}\right). \tag{2}$$

Доведення. З нерівності Чебишева та нерівності (1) випливає, що при $\lambda > 0$

$$P\left\{\sup_{t\in[a,b]} |X(t)| > \varepsilon\right\} \leq \frac{E\left\{\lambda \sup\limits_{t\in[a,b]} |X(t)|\right\}}{\exp\{\lambda\varepsilon\}} \leq$$

$$\exp\left\{\frac{\lambda^2 M^2}{2(1-\theta)^2}\right\} \cdot \exp\{-\lambda\varepsilon\} \cdot r^{(-1)}\left(\frac{I_r(\theta M)}{\theta M}\right). \tag{3}$$

Нерівність (2) випливає з нерівності (3), якщо покласти $\lambda = \frac{\varepsilon(1-\theta)^2}{M^2}$ (точка, в якій права частина в нерівності (3) набуває мінімуму за λ).

Означення 1. *Дійсний стаціонарний гауссів процес* $X_\alpha = \{X_\alpha(t), t \in \mathbf{R}\}$, $0 < \alpha \leq 2$, *такий що* $EX_\alpha(t) = 0$, $\rho_\alpha(h) := EX_\alpha(t+h)X_\alpha(t) = B^2 exp\{-d|h|^\alpha\}$, $d > 0$ *називається дійсним гауссовим стаціонарним процесом зі стійкою кореляційною функцією.*

Теорема 2. *Нехай* X_α *— дійсний сепарабельний гауссовий стаціонарний процес зі стійкою кореляційною функцією. Тоді для будь-яких* $-\infty < a < b < +\infty$, $0 < \theta < 1$, $\beta < \min\left(1, \frac{\alpha}{2}\right)$, $\varepsilon > 0$ *справджується нерівність:*

$$P\left\{\sup_{t\in[a,b]} |X(t)| > \varepsilon\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2(1-\theta)^2}{2B^2}\right\} \cdot 2^{1/\beta-1}\left(\frac{(b-a)(\sqrt{2d})^{2/\alpha}}{\theta^{2/\alpha}\left(1-\frac{2\beta}{\alpha}\right)^{1/\beta}}+1\right).$$

Доведення. Теорема випливає з наслідку 1. Оцінимо за умов теореми таку величину $r^{(-1)}\left(\frac{I_r(\theta M)}{\theta M}\right)$. В нашому випадку

$$E|X_\alpha(t+h) - X_\alpha(t)|^2 = 2\big(\rho_\alpha(0) - \rho_\alpha(h)\big) = 2B^2\big(1 - exp\{-d|h|^\alpha\}\big).$$

Тобто $\sigma(h) = \sqrt{2}B\big(1 - exp\{-d|h|^\alpha\}\big)^{1/2}$. Зауважимо, що $\sigma(h) < \sqrt{2}B$. Отже, $\sigma^{(-1)}(h)$ визначена при $0 \leq h < \sqrt{2}B$. Оскільки $\sigma(h) \leq \sqrt{2}B\big(dh^\alpha\big)^{1/2} = \hat{\sigma}(h)$ тоді при $0 < s < B\sqrt{2}$

$$\sigma^{(-1)}(s) \geq \hat{\sigma}^{(-1)}(s) = \left(\frac{s}{B\sqrt{2d}}\right)^{2/\alpha}.$$

Отже,

$$I_r(v) \le \int_0^{\min(v,B\sqrt{2})} r\Big(\frac{(b-a)}{s^{2/\alpha}}\big(B\sqrt{2d}\big)^{2/\alpha}+1\Big)ds.$$

Покладемо $r(u)=u^\beta-1$ при $u\ge 1$, де $0<\beta<\min(\alpha/2,1)$. Тоді

$$I_r(v) \le \int_0^{\min(v,B\sqrt{2})} \left(\Big(\frac{(b-a)}{s^{2/\alpha}}\big(B\sqrt{2d}\big)^{2/\alpha}+1\Big)^{\beta}-1\right)ds \le$$

$$\int_0^{\min(v,B\sqrt{2})} \Big(\frac{(b-a)}{s^{2/\alpha}}\big(B\sqrt{2d}\big)^{2/\alpha}\Big)^{\beta}ds =$$

$$\frac{1}{\Big(1-\frac{2\beta}{\alpha}\Big)}\Big((b-a)\big(B\sqrt{2d}\big)^{2/\alpha}\Big)^{\beta}\cdot\Big(\min(v,B\sqrt{2})\Big)^{\left(1-\frac{2\beta}{\alpha}\right)}.$$

Тому

$$I_r(\theta B) \le \Big((b-a)\big(B\sqrt{2d}\big)^{2/\alpha}\Big)^{\beta}\frac{1}{\Big(1-\frac{2\beta}{\alpha}\Big)}\big(\theta B\big)^{1-\frac{2\beta}{\alpha}}.$$

Оскільки $r^{(-1)}(u)=(u+1)^{1/\beta}$, тоді

$$r^{(-1)}\Big(\frac{I_r(\theta B)}{\theta B}\Big) \le \Big((b-a)^{\beta}\Big(B\sqrt{2d}\Big)^{2\beta/\alpha}\frac{1}{\Big(1-\frac{2\beta}{\alpha}\Big)}(\theta B)^{-\frac{2\beta}{\alpha}}+1\Big)^{1/\beta}. \qquad (4)$$

Оскільки при $z\ge 1$ справджується нерівність $(b+a)^z\ge 2^{z-1}\big(a^z+b^z\big)$, тоді

$$r^{(-1)}\Big(\frac{I_r(\theta B)}{\theta B}\Big) \le 2^{1/\beta-1}\left(\frac{(b-a)\big(\sqrt{2d}\big)^{2/\alpha}}{\theta^{2/\alpha}}\Big(1-\frac{2\beta}{\alpha}\Big)^{-1/\beta}+1\right). \qquad (5)$$

Тепер твердження теореми випливає з нерівностей (2) та (3).

Наслідок 2. *Нехай виконуються умови теореми 2, тоді при $\varepsilon>\sqrt{2}B$ справджується нерівність*

$$P\left\{\sup_{t\in[a,b]}|X_\alpha(t)|>\varepsilon\right\} \le$$

$$\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2B^2}\right\}\cdot e\cdot 2^{1/\beta-1}\left(\frac{(b-a)\big(\sqrt{2d}\big)^{2/\alpha}}{\Big(1-\big(1-\frac{2B^2}{\varepsilon^2}\big)^{1/2}\Big)^{2/\alpha}}\Big(1-\frac{2\beta}{\alpha}\Big)^{-1/\beta}+1\right).$$

Доведення. Нерівність (5) випливає з нерівності (4), якщо покласти $\big(1-\theta\big)^2=\Big(1-\frac{2B^2}{\varepsilon^2}\Big)$ при $\varepsilon>\sqrt{2}B$, тобто при $\theta=1-\Big(1-\frac{2\beta^2}{\varepsilon^2}\Big)^{1/2}$.

Наслідок 3. *Нехай виконуються умови теореми 2, тоді при $\varepsilon>\sqrt{2}B$ справджується нерівність*

$$P\left\{\sup_{t\in[a,b]}|X_\alpha(t)|>\varepsilon\right\} \le exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2B^2}\right\}\cdot$$

$$e\cdot 2^{4/\alpha-1}\Big(\frac{(b-a)\cdot d^{1/\alpha}\cdot 2^{5/\alpha}\cdot\varepsilon^{4/\alpha}}{B^{4/\alpha}}+1\Big). \qquad (6)$$

Доведення. При $0 \leq x \leq 1$ справджується нерівність $1-(1-x)^{1/2} = \frac{1-(1-x)}{1+(1-x)^{1/2}} \geq \frac{x}{2}$. Отже, $\left(1-\left(1-\frac{2B^2}{\varepsilon^2}\right)^{1/2}\right)^{2/\alpha} \geq \left(\frac{B}{\varepsilon}\right)^{4/\alpha}$. Тепер нерівність (6) випливає з нерівності (5), якщо покласти $\beta = \frac{\alpha}{4}$.

2. Поведінка дійсного гауссового стаціонарного процесу зі стійкими коваріаційними функціями $X_\alpha(t)$ при прямуванні t до нескінченності.

Теорема 3. *Нехай* $X_\alpha = \{X_\alpha(t), t \in \mathbf{R}\}$ *— дійсний гаусовий стаціонарний процес зі стійкою кореляційною функцією* (див. означення 1), $C = \{C(t), t \geq 0\}$ *— монотонно зростаюча функція, така що* $C(t) \geq 1, t \geq 0$ *та* $C(t) \to \infty$ *при* $t \to \infty$*;* $b_0, b_1, b_2, ..., b_k$*, така послідовність, що* $b_0 = 0, b_k < b_{k+1}$*, та* $b_k \to \infty$ *при* $k \to \infty$*,* $r_0, r_1, r_2, ..., r_k$ *така послідовність, що* $r_k > 1$ *та* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k} = 1$*,* $C_k = C(b_k), k = 0, 1, 2...$ *і виконуються умови*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2} < \infty, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k}(b_{k+1}-b_k)^{\gamma} < \infty,$$

де γ *— деяке число, що* $0 < \gamma < 1$*. Тоді при будь-якому* $0 < \theta < 1$ *та* $\varepsilon > 0$ *справджується нерівність*

$$P\left\{\sup_{t\geq 0} \frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)} > \varepsilon\right\} \leq 2^{\frac{4}{\alpha}-1} \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2(1-\theta)^2}{2B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}}\right\} \cdot$$
$$\exp\left\{\frac{1}{\theta^{\gamma/2} \cdot \gamma^{\gamma}} \cdot (\sqrt{2d})^{\frac{2\gamma}{\alpha}} \cdot 2^{\frac{4\gamma}{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k}(b_{k+1}-b_k)^{\gamma}\right\}. \tag{7}$$

Доведення. Нехай $\lambda > 0$, $S(\lambda) := E\exp\left\{\lambda \sup_{t\geq 0} \frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)}\right\}$ тоді з нерівності Гельдера отримаємо, що

$$S(\lambda) \leq E\exp\left\{\lambda \sup_{t\in[b_k,b_{k+1}]} \frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)}\right\} \leq \prod_{k=0}^{\infty}\left(E\exp\left\{\lambda r_k \sup_{t\in[b_k,b_{k+1}]} \frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)}\Big)\right\}\right)^{1/r_k} \leq$$
$$\prod_{k=0}^{\infty}\left(E\exp\left\{\frac{\lambda r_k}{C_k} \sup_{t\in[b_k,b_{k+1}]} |X_\alpha(t)|\right\}\right)^{1/r_k}.$$

З нерівності (1) випливає, що

$$E\exp\left\{\frac{\lambda r_k}{C_k} \sup_{t\in[b_k,b_{k+1}]} |X_\alpha(t)|\right\} \leq 2D(\lambda,\theta) \leq$$
$$\exp\left\{\Big(\frac{\lambda r_k}{C_k}\Big)^2 \frac{B^2}{2(1-\theta)^2}\right\} r^{(-1)}\Big(\frac{I_{r_k}(\theta B)}{\theta B}\Big),$$

де

$$I_{r_k}(v) = \int_0^v r\Big(\frac{(b_{k+1}-b_k)}{2\sigma^{(-1)}(v)}+1\Big)dv,$$

θ — будь-яке число, таке що $0 < \theta < 1$, $r(u), u \geq 1$ — монотонно зростаюча функція, така що при $u > 0$ функція $r(e^u)$ — опукла. Зауважимо, що $\frac{\alpha}{2} \leq 1$. Покладемо $r(u) = u^{\frac{\alpha}{4}-1}$ при $u \geq 1$. Тоді з нерівності (5) випливає, що

$$r^{(-1)}\Big(\frac{I_{r_k}(\theta B)}{\theta B}\Big) \leq 2^{4/\alpha-1}\Big(\frac{(b_{k+1}-b_k)(\sqrt{2d})^{2/\alpha}}{\theta^{2/\alpha}} \cdot 2^{4/\alpha}+1\Big).$$

З нерівності (1) отримаємо, що

$$S(\lambda) \leq$$

$$\prod_{k=0}^{\infty}\left(\exp\left\{\Big(\frac{\lambda \cdot r_k}{C_k}\Big)^2 \cdot \frac{B^2}{2(1-\theta)^2}\right\} \cdot 2^{\frac{4}{\alpha}-1}\Big(\frac{(b_{k+1}-b_k)\sqrt{2d}^{\frac{2}{\alpha}}}{\theta^{2/\alpha}} \cdot 2^{4/\alpha}+1\Big)\right)^{1/r_k} =$$

$$= \exp\left\{\frac{\lambda^2 B^2 \sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}}{2(1-\theta)^2}\right\} \cdot$$

$$\exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r_k}\ln\Big(2^{4/\alpha-1}\Big((b_{k+1}-b_k)\cdot\frac{\sqrt{2d}^{2/\alpha}\cdot 2^{4/\alpha}}{\theta^{2/\alpha}}+1\Big)\Big)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{\lambda^2 B^2 \sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}}{2(1-\theta)^2}\right\} \cdot \exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r_k}\ln\Big(2^{4/\alpha-1}\Big)\right\} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r_k}\ln\Big(1+\frac{\sqrt{2d}^{2/\alpha}}{\theta^{2/\alpha}}(b_{k+1}-b_k)\cdot 2^{4/\alpha}\Big)\right\}. \quad (8)$$

Оскільки при $0 < \gamma < 1$, $x > 0$ справджується нерівність $\ln(1+x) \leq \frac{1}{\gamma}\ln(1+x)^\gamma \leq \frac{1}{\gamma}\ln(1+x^\gamma) \leq \frac{x^\gamma}{\gamma}$ тоді з нерівності (8) випливає, що

$$S(\lambda) \leq 2^{4/\alpha-1}\cdot\exp\left\{\frac{\lambda^2 B^2 \sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}}{2(1-\theta)^2}\right\} \cdot \exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{4/\alpha}}{r_k\gamma}\left(\frac{(\sqrt{2d})^{2/\alpha}(b_{k+1}-b_k)}{\theta^{2/\alpha}}\right)^\gamma\right\}.$$

Отже,

$$S(\lambda) \leq 2^{4/\alpha-1}\cdot\exp\left\{\frac{\lambda^2 B^2}{2(1-\theta)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}\right\}\cdot\exp\left\{\frac{w(\gamma)}{\theta^{\gamma/2}}\right\},$$

де

$$w(\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r_k\gamma}\Big((b_{k+1}-b_k)(\sqrt{2d})^{\alpha/2}\cdot 2^{4/\alpha}\Big)^\gamma.$$

Тоді з нерівності Чебишева випливає, що при $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$

$$P\left\{\sup_{t\geq 0}\frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)} > \varepsilon\right\} \leq$$

$$2^{4/\alpha-1}\exp\left\{\frac{\lambda^2 B^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}}{2(1-\theta)^2}\right\}\cdot\exp\{-\lambda\varepsilon\}\cdot\exp\left\{\frac{w(\gamma)}{\theta^{\gamma/2}}\right\}. \quad (9)$$

Якщо в нерівність (9) підставити

$$\lambda = \frac{\varepsilon(1-\theta)^2}{B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}},$$

тоді отримаємо твердження теореми.

Наслідок 4. *Нехай виконуються умови теореми 3, тоді при* $\varepsilon \geq \sqrt{2}B\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}\Big)^{1/2}$ *справджується нерівність*

$$P\left\{\sup_{t\geq 0} \frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)} > \varepsilon\right\} \leq$$

$$\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}}\right\} \cdot 2^{4/\alpha-1} \cdot e \cdot \exp\left\{\frac{d^{\gamma/2} \cdot 2^{6\gamma/\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k}(b_{k+1}-b_k)^\gamma}{(1-(1-2B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2})^{1/2})^{\gamma/2}}\right\}. \quad (10)$$

Доведення. Нерівність (10) випливає з нерівності (7), якщо покласти $\Big(1-\theta\Big)^2 = \Big(1 - \frac{2B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}}{\varepsilon^2}\Big)$, тобто $\theta = 1 - \Big(1 - \frac{2B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}}{\varepsilon^2}\Big)^{1/2}$.

Наслідок 5. *Нехай виконуються умови теореми 3, тоді при* $\varepsilon > \sqrt{2}B\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}\Big)^{1/2}$ *справджується нерівність*

$$P\left\{\sup_{t\geq 0} \frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)} > \varepsilon\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}}\right\} \cdot 2^{4/\alpha-1} \cdot$$

$$\exp\left\{-\frac{d^{\gamma/2} \cdot 2^{3\gamma/\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r_k}\big(b_{k+1}-b_k\big)^\gamma \varepsilon^{2/\alpha}}{\Big(B\big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}\big)^{1/2}\Big)^{2/\alpha}}\right\}. \quad (11)$$

Доведення. Нерівність (11) випливає з нерівність (10), оскільки, як і в наслідку 3

$$\Big((1 - \frac{2B^2}{\varepsilon^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2})\Big) \geq \frac{B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}}{\varepsilon^2}.$$

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми 3, тоді з ймовірностю одиниця для всіх* $t > 0$ *виконується умова*

$$|X_\alpha(t)| < \xi_\alpha \cdot C(t),$$

де ξ_α *— така випадкова величина, що при будь-якому* $0 < \theta < 1$

$$P\{\xi_\alpha > \varepsilon\} \leq 2^{\frac{4}{\alpha}-1} \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2(1-\theta)^2}{2B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}}\right\} \cdot$$

$$\exp\left\{\frac{1}{\theta^{\gamma/2} \cdot \gamma^\gamma} \cdot (\sqrt{2d})^{\frac{2\gamma}{\alpha}} \cdot 2^{\frac{4\gamma}{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k}(b_{k+1}-b_k)^\gamma\right\},$$

або при $\varepsilon \geq \sqrt{2}B\big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}\big)^{1/2}$ *справджується нерівність*

$$P\left\{\xi_\alpha > \varepsilon\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2B^2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}}\right\} \cdot 2^{4/\alpha-1}\cdot$$

$$\exp\left\{-\frac{d^{\gamma/2}\cdot 2^{3\gamma/\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{r_k}\big(b_{k+1}-b_k\big)^{\gamma}\varepsilon^{2/\alpha}}{\Big(B\big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}\big)^{1/2}\Big)^{2/\alpha}}\right\}.$$

Доведення. Теорема випливає з теореми 3 та нерівностей (7) і (3), оскільки при всіх $t > 0$ з імовірністю одиниця

$$\frac{X_\alpha(t)}{C(t)} \leq \sup_{t\geq 0}\frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)} < \infty.$$

Приклад 1. *Якщо в умовах теореми 3 покласти* $b_k = e^k$, $k = 1, 2, ...$ *та* $\frac{1}{r_k} = e^{-k}\cdot\frac{e}{(e-1)}$, *тоді умови теореми виконуються, якщо збігається ряд* $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^k}{c(e^k)^2}$, *а цей ряд збігається, якщо* $C(t) = t^{1/2+\beta}$, $\beta > 0$, *або* $C(t) = t^{1/2}(\ln t)^{1/2+\delta}$ *при* $\delta > 0$.

При цих b_k *та* e^k *збігається ряд при будь-яких* $\gamma < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r_k}(b_{k+1}-b_k)^{\gamma} = \sum_{k=0}^{\infty}e^{-k}\frac{e}{(e-1)}(e^{k+1}-e^k)^{\gamma} = (e-1)^{\gamma-1}\cdot e\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k}\cdot e^{\gamma k} < \infty.$$

3. Розподіл норми в просторі $L_p(T)$ дійсного гауссового випадкового процесу зі стійкою коваріайційною функцією

Теорема 5. *Нехай* $\{\mathbb{T}, \Lambda, \mu\}$ *— вимірний простір,* $X = \{X(t), t \in \mathbb{T}\}$ *вимірний гауссовий випадковий процес. Нехай існує інтеграл Лебега* $\int_{\mathbb{T}}\big(E|X(t)|^2\big)^{p/2}d\mu(t)$, $p \geq 1$. *Тоді з ймовірністю одиниця існує* $\int_{\mathbb{T}}E|X(t)|^p d\mu(t)$, *та для всіх* ε, *таких що* $\varepsilon > C\cdot p^{p/2}$, *де* $c = \int_{\mathbb{T}}\big(E|X(t)|^2\big)^{p/2}d\mu(t)$ *має місце нерівність*

$$P\left\{\Big(\int_{\mathbb{T}}|X(t)|^p d\mu(t)\Big)^{1/p} > \varepsilon\right\} \leq 2^{\frac{4}{\alpha}-1}\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2(1-\theta)^2}{2B^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}}\right\}\cdot$$

$$\exp\left\{\frac{1}{\theta^{\gamma/2}\cdot\gamma^{\gamma}}\cdot(\sqrt{2d})^{\frac{2\gamma}{\alpha}}\cdot 2^{\frac{4\gamma}{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r_k}(b_{k+1}-b_k)^{\gamma}\right\}.$$

Доведення. *Ця теорема є простим наслідком теореми 2.1 роботи [12].*

Теорема 6. *Нехай* $X_\alpha(t)$, $t \in [a, b]$ *— вимірний дійсний гауссовий процес зі стійкою коваріаційною функцією. Тоді для* $\varepsilon > \hat{c}^{1/p}\sqrt{p}$, *де* $\hat{c} = B^p(b-a)$ *справджується нерівність*

$$P\left\{\Big(\int_a^b|X_\alpha(t)|^p\Big)^{1/p}dt > \varepsilon\right\} \leq 2\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2\hat{c}^{2/p}}\right\}.$$

Доведення. Ця теорема випливає з попередньої теореми. Тут простір $\{\mathbb{T}, \Lambda, \mu\}$ це інтервал $[a, b]$ з борелевською σ-алгеброю та мірою Лебега $E|X(t)|^2 = B^2$.

Теорема 7. *Нехай $X_\alpha(t)$, $t \in \mathbf{R}$ — вимірний дійсний гауссовий процес зі стійкою коваріаційною функцією, $C(t) > 1$ деяка функція, така що $\int_0^\infty \frac{1}{\left(C(t)\right)^p} dt < \infty$. Тоді для $\varepsilon > \hat{c}^{1/p} \cdot \sqrt{p}$, де $\hat{c} = B^p \int_0^\infty \frac{1}{C(t)} dt$ справджується нерівність*

$$P\left\{\left(\int_0^\infty |X_\alpha|(t)^p\right)^{1/p} > \varepsilon\right\}.$$

Доведення. Ця теорема також випливає з теореми 5. Тут простір $\{\mathbb{T}, \Lambda, \mu\}$ — це $[0, \infty)$ з борелевською σ-алгеброю, процес $X(t)$ це $\frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)}$:

$$\int_0^\infty \left(E|X(t)|^2\right)^{p/2} dt = B \int_0^\infty \frac{1}{\left(C(t)\right)^p} dt.$$

Прикладом $C(t)$ може бути функція така, що при $t > 1$ $C(t) = t^{1/p+\varepsilon}$, де $\varepsilon > 0$

4. Аналітичні властивості гауссових випадкових процесів зі стійкими кореляційними функціями.

Наступна теорема — це простий наслідок теореми 2.2.9 з книги [[2], с. 79].

Теорема 8. *Нехай $X = \{X(t), t \in [a, b]\}$ — сепарабельний гауссів процес, такий що існує монотонно зростаюча неперервна функція $\sigma(h), h \geq 0$, така що $\sigma(0) = 0$, для якої справджується*

$$\sup_{|t-s| \leq h} \left(E\big(X(t) - X(s)\big)^2\right)^{1/2} \leq \sigma(h)$$

та збігається інтеграл

$$\int_0^{\sigma(\varepsilon)} \ln\big(\frac{b-a}{2\sigma^{-(1)}(u)}\big)^{1/2} du \leq \infty.$$

Тоді $X(t)$, $t \in [a, b]$ є вибірково неперервний з імовірністю одиниця та для довільних $\varepsilon > 0$, $0 < p < 1$, $x > B(p, \varepsilon)$, де

$$B(p, \varepsilon) = \frac{4(3-p)}{3p(1-p)^2} \int_0^{\sigma(\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ln\Big(\frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\Big)\right)^{1/2} du$$

справджується нерівність

$$P\left\{\sup_{|t-s| \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)| > x\right\} \leq 2exp\left\{-\frac{1}{2}\Big(\frac{x - B(p, \varepsilon)}{A(p, \varepsilon)}\Big)^2\right\},$$

де $A(p, \varepsilon) = \frac{\sigma(\varepsilon)(3-p)}{(1-p)^2}$.

З теореми 8 випливає така теорема

Теорема 9. *Нехай $X_\alpha = \{X_\alpha(t), t \in [a,b]\}$ сепарабельний центрований гаусовий процес зі стійкою кореляційною функцією. Тоді при всіх $0 < \alpha < 2$ $X_\alpha(t)$, $t \in [a,b]$ вибірково неперервний з імовірністю одиниця та для довільних $\varepsilon > 0$, $0 < p < 1$, $0 < \beta < \min(1,\alpha)$, $x > \hat{B}(p,\varepsilon)$, де*

$$\hat{B}(p,\varepsilon) = \frac{4(3-p)}{3p(1-p)^2} \cdot \frac{1}{2^{(1+\beta)/2}} (b-a)^{\beta/2} (\sqrt{2d})^{\beta/\alpha} \cdot B^{\beta/\alpha} \cdot \frac{1}{(1-\beta/\alpha)} \Big(\sqrt{2d} B \varepsilon^{\alpha/2}\Big)^{1-\beta/\alpha}$$

справджується нерівність

$$P\left\{\sup_{|t-s|\le\varepsilon} |X(t)-X(s)| > x\right\} \le 2\exp\left\{-\frac{1}{2}\Big(\frac{x-\hat{B}(p,\varepsilon)}{A(p,\varepsilon)}\Big)^2\right\}, \qquad (12)$$

де $A(p,\varepsilon) = \frac{(3-p)\sqrt{2d}B\varepsilon^{\alpha/2}}{(1-p)^2}$.

Доведення. В нашому випадку можна покласти $\sigma(h) = \sqrt{2d}B|h|^{\alpha/2}$, тоді $\sigma^{(-1)}(u) = \frac{u}{\sqrt{2d}B}^{2/\alpha}$ та

$$\int_0^{\sigma(\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ln\Big(\frac{(b-a)\Big(\sqrt{2d}B\Big)^{2/\alpha}}{2u^{2/\alpha}} + 1\Big)\right)^{1/2} du \le$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}\beta^{1/2}} (b-a)^{\beta/2} (\sqrt{2d})^{\beta/\alpha} B^{\beta/\alpha} \frac{1}{2^{\beta/\alpha}} \int_0^{\sigma(\varepsilon)} \frac{1}{u^{\beta/\alpha}} du =$$

$$\frac{1}{2^{(1+\beta/2)}} (b-a)^{\beta/2} (\sqrt{2d})^{\beta/\alpha} B^{\beta/\alpha} \frac{1}{\big(1-\frac{\beta}{\alpha}\big)} \Big(\sqrt{2d}B\varepsilon^{\alpha/2}\Big)^{1-\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Зауваження 1. *Щоб знайти більш точну оцінку, треба знайти мінімум по β правої частини в нерівності* (12).

Означення 2. *Випадковий процес $X(t)$, $t \in [a,b]$ називають диференційовним в середньоквадратичному, коли існує границя (в середньоквадратичному)*

$$l.i.m._{h\to 0} \frac{X(t+h)-X(t)}{h} = X'(t).$$

Якщо існує $X'(t)$ — тоді її називають середньоквадратичною похідною процесу $X(t)$.

Теорема 10 (див. [13], с. 300)**.** *Для того, щоб у процесу $X(t)$, $EX(t) = 0$ існувала середньоквадратична похідна $X'(t)$ необхідно та достатньо, щоб існувала границя*

$$\lim_{t'\to t, t''\to t} \frac{1}{(t'-t)(t''-t)} \Big(B(t',t'') - B(t',t) - B(t'',t) + B(t,t)\Big),$$

де $B(t,s) = EX(t)X(s)$. При цьому, якщо існує похідна $\frac{\partial^2 B(t,s)}{\partial t \partial s}$, тоді $EX'(t)X'(s) = \frac{\partial^2 B(t,s)}{\partial t \partial s}$.

З цієї теореми випливає наступна теорема.

Теорема 11. *Нехай* $X_\alpha(t)$, $t \in [a,b]$ *стаціонарний процес зі стійкою кореляційною функцією (не обов'язково гауссовою). Тоді при* $0 < \alpha < 2$ *середньоквадратичні похідні не існують, а при* $\alpha = 2$ *похідна існує та*

$$EX_2'(t)X_2'(s) = B^2 exp\left\{-d(t-s)\right\} \cdot \Big(4d^2 \cdot (t-s)^2 + 2d\Big),$$

тобто $X_2'(t)$ *стаціонарний процес з кореляційною функцією*

$$EX_2'(t+\tau)X_2'(t) = B^2 exp\left\{-d|\tau|^2\right\} \cdot \Big(4d^2 \cdot \tau^2 + 2d\Big). \tag{13}$$

Доведення. В нашому випадку

$$\frac{1}{(t'-t)(t''-t)}\Big(B(t',t'') - B(t',t) - B(t'',t) + B(t,t)\Big) =$$

$$\frac{1}{(t'-t)(t''-t)}\Big(B^2 exp\left\{-d|t'-t''|^\alpha\right\} - B^2 exp\left\{-d|t'-t|^\alpha\right\} -$$

$$B^2 exp\left\{-d|t''-t|^\alpha\right\} + B^2\Big).$$

Легко побачити, що границя цього виразу існує тоді і лише тоді, коли $\alpha = 2$. Крім того, очевидно, що

$$EX_2'(t)X_2'(s) = \frac{\partial^2 B(t,s)}{\partial t \partial s} = B^2 exp\left\{-d|\tau|^\alpha\right\} \cdot \Big(4d^2 \cdot \tau^2 + 2d\Big).$$

Зауваження 2. *Коли* $X_\alpha(t)$ *— гауссів процес, то* $X_\alpha'(t)$ *також гауссів процес.*

Тепер покажемо, що середньоквадратична похідна від $X_\alpha(t)$ є звичайною неперервною похідною з імовірністю одиниця, якщо $X_\alpha(t)$ — гауссів та сепарабельний процес.

Теорема 12 (див. [14])**.** *Нехай* $X(t)$, $t \in [a,b]$ *неперервний з імовірністю одиниця випадковий процес з* $EX(t) = 0$, $EX(t)X(s) = B(t,s)$ *та нехай існує неперервна з імовірністю одиниця середньоквадратична похідна процесу* $X(t)$, *така що* $EX'(t)X'(s) = \frac{\partial^2 B(t,s)}{\partial t \partial s}$, *тоді з імовірністю одиниця* $X'(t)$ *є звичайною похідною процесу* $X(t)$.

Наслідок 6. *У процесу* $X_2(t)$ *існує вибіркова неперервна похідна* $X_2'(t)$ *з кореляційною функцією* (13) *та* $X_2'(t)$ *— гауссів процес.*

Доведення. Щоб довести твердження наслідку досить довести, що процес $X_2'(t)$ вибірково неперервний з імовірністю одиниця. Легко побачити, що

$$E\Big(X_2'(t) - X_2'(s)\Big)^2 = 4B^2d - 4B^2 exp\left\{-d|\tau|^\alpha\right\}(2d\tau^2 + d) =$$

$$4B^2 d\Big(1 - exp\left\{-d|\tau|^\alpha\right\}\Big)(2d\tau^2 + d) =$$

$$4B^2 d\Big(1 - 2d\tau^2 \cdot exp\left\{-d|\tau|^\alpha\right\}\Big) + \Big(1 - exp\left\{-d|\tau|^\alpha\right\}\Big) \geq$$

$$4B^2 d\Big(2d^2\tau^4 + d\tau^2\Big) = 4B^2 d\Big(2d^2\tau^2 + d\Big) \cdot \tau^2 \geq Z\tau^2.$$

де $Z = 4B^2d\Big(2d^2\tau^2 + d\Big)$ та така константа, що $|\tau| < s$. Тобто $\sigma(\tau) = \sqrt{Z}\tau$, далі доведення теореми аналогічне доведенню теореми 9.

Висновки. У роботі знайдено розподіл супремуму дійсного гауссового випадкового процесу зі стійкими коваріаційними функціями. Описана поведінка дійсного гауссового стаціонарного процесу зі стійкими коваріаційними функціями $X_\alpha(t)$ при прямуванні t до нескінченності. Також, знайдено розподіл норми в просторі $L_p(T)$ дійсного гауссового випадкового процесу зі стійкою коваріайційною функцією та описано аналітичні властивості гауссових випадкових процесів зі стійкими корелляційними функціями.

Список використаної літератури

1. *Kozachenko Y. V.,Petranova M. Y.* Proper complex random processes //Stat. Optim. and Inf. Comput. – 2017. – Vol. 5, No. 2. – P. 137–146.
2. *Kozachenko Yu. V., Vasilic O. I.* On the distribution of suprema of $Sub_\varphi(\Omega)$ random processes // Theory Stoch. Processes – 1998. – Vol. 4(20), No. 1-2. – P. 147–160.
3. *Kozachenko Yu. V.* Random processes in Orlicz spaces I // Theory Probab. and Math. Stat. – 1985. – Vol. 30. – P. 103–117.
4. *Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V.* On local properties of sample functions of some stochastic processes and fields // Teor. Veroyatn. Mat. Stat. – 1974. – Vol. 10. – p. 39–47.
5. *Kozachenko Yu., Pogoriliak O., Rozora I. and Tegza A.* Simulation of Stochastic Processes with Given Accuracy and Reliability. – London: ISTE Press Ltd and Elsevier Ltd, 2016. – 346 p.
6. *Козаченко Ю.В., Кучінка К.Й., Сливка–Тилищак Г.І.* Випадкові процеси в задачах математичної фізики. – Ужгород: ТОВ "РІК–У", 2017. – 256 с.
7. *Petranova M.* Simulation of Gaussian Stationary Quasi Ornstein–Uhlenbeck Process with Given Reliability and Accuracy in Spaces $C([0,T])$ and $L_p([0,T])$ // Journal of Applied Mathematics and Statistics – 2016. – Vol. 3(1). – P.44–58.
8. *Kozachenko Yu., Petranova M.* Simulation of Gaussian stationary Ornstein–Uhlenbeck process with given reliability and accuracy in space C([0, T]) // Monte Carlo Methods Appl. – 2017. – Vol. 23, No. 4. – p. 277–286.
9. *Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V.* Metric characterization of random variables and random processes. – Providence, RI: American Mathematical Society, 2000. – 257 p.
10. *Kozachenko Yu. V., Olenko A.* Aliasing-Truncation errors in sampling approximations on Sub-Gaussian signals // IEEE Transactions on Information Theory – 2016. – Vol. 62, No. 10. – p. 5831–5838.
11. *Dozzi M., Kozachenko Y., Mishura Y. and Ralchenko K.* Asymptotic growth of trajectories of multifractional Brownian motion with statistical applications to drift parameter estimation // Statistical Inference for Stochastic processes. – 2016. – DOI: 10.1007/s11203-016-9147-z. – P. 1–32.
12. *Kozachenko Y., Kamenschikova O.* On an expansion of random processes in the space $L_p(T)$ // Theory Probab. And Math. Statist. – 2009. – Vol. 79. – P. 83–88.
13. *Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И.* Теория вероятностей и математическая статистика. – Киев: Вища школа, 1988. – 440 с.
14. *Gladkaya O. N.* On condition of differentiability in direction of sample function of random fields // Theory Probab. and Math Statistics. – 1978. – Vol. 17. – P. 33–41.

Одержано 10.09.2017