

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

**НАУКОВИЙ ВІСНИК  
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

серія

**МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА**

*Випуск №2 (31)*

Ужгород 2017

УДК 51+001

**Науковий вісник Ужгородського університету.** Сер. матем. і інформ. / Редкол.: В. В. Маринець (гол. ред.) та інші. – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2017. – випуск №2 (31). – 145 с.

### РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор — Маринець В. В., доктор фізико-математичних наук, професор.  
Заст. головн. редактора — Гече Ф. Е., доктор технічних наук; доцент.  
Заст. головн. редактора — Король І. І., доктор фізико-математичних наук, доцент.  
Відповідальний секретар — Мич І. А., кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Члени редакційної колегії:

Бовді А. А., доктор фізико-математичних наук, професор.  
Бовді В. А., кандидат фізико-математичних наук, доцент.  
Бондаренко В. М., доктор фізико-математичних наук, професор.  
Волошин О. Ф., доктор технічних наук, професор.  
Головач Й. Г., доктор технічних наук, професор.  
Гусак Д. В., доктор фізико-математичних наук, професор.  
Задирака В. К., академік НАН України,  
доктор фізико-математичних наук, професор.  
Козаченко Ю. В., доктор фізико-математичних наук, професор.  
Кузка О. І., кандидат фізико-математичних наук, доцент.  
Перестюк М. О., академік НАН України,  
доктор фізико-математичних наук, професор.  
Ронто А. М., доктор фізико-математичних наук, професор,  
Ронто М. Й., доктор фізико-математичних наук, професор,  
Сливка-Тилищак Г. І., доктор фізико-математичних наук, доцент.  
Слюсарчук П. В., кандидат фізико-математичних наук, професор.  
Шапочка І. В., кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Рекомендовано до друку Вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет», протокол № 15 від 21.12.2017 р.

Свідectво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.

Засновник і видавець – Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет».

Виходить два рази на рік.

Збірник наукових праць видається з 1994 року.

Адреса редакційної колегії: Україна, 88020 Ужгород, вул. Університетська, 14, математичний факультет УжНУ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua.

© В. В. Маринець,  
І. А. Мич, упорядкування, 2017

© Ужгородський національний університет,  
2017

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY  
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

**SCIENTIFIC BULLETIN OF  
UZHHOROD UNIVERSITY**

Series of  
MATHEMATICS AND INFORMATICS

*Issue no 2 (31)*

Uzhhorod 2017

**Scientific Bulletin of Uzhhorod University.** Series of Mathematics and Informatics / Edit.: V. Marynets (Chief edit.) and others. – Uzhhorod: Scientific Bulletin of UzhNU «Hoverla», 2017. – Issue no 2 (31). – 145 p.

## EDITORIAL

Chief editor — Marynets V., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
Deputy Chief editor — Heche F., As. prof., Dr. Sci. (Tech.).  
Deputy Chief editor — Korol I., As. prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
Responsible secretary — Mych I., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).  
Members: Bovdi A., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Bovdi V., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).  
    Bondarenko V., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Voloshyn O., Prof., Dr. Sci. (Tech.).  
    Holovach J., Prof., Dr. Sci. (Tech.).  
    Gusak D., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Zadyraka V., Prof., academic of NA of Sc of Ukraine,  
    Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Kozachenko Yu., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Kuzka A., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).  
    Perestyuk N., Prof., academic of NA of Sc of Ukraine,  
    Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Ronto A., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Ronto M., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Slyvka-Tylyshchak G., As. prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Slyusarchuk P., Prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).  
    Shapochka I., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).

Recommended for publication by the Scientific Council of UzhNU, record no 15 dated by December 21, 2017.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.  
Founder and Publisher: State University “Uzhhorod National University”.  
Published twice a year.  
The collection of scientific articles has been published since 1994.

Address of publishing house: Mathematical faculty “UzhNU”, Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88020, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: [f-mat@uzhnu.edu.ua](mailto:f-mat@uzhnu.edu.ua).

## ЗМІСТ

1. <i>Маринець В. В.</i> Міклош Йосипович Ронто — до 75-ти річчя від дня народження	7
2. <i>Аюбова Н. С.</i> Оцінювання параметра Хюрста дробового броунівського руху в моделі з похибками вимірювань	10
3. <i>Баранник В. Ф.</i> Тензорні добутки незвідних проективних цілочислових 2-адичних зображень циклічної 2-групи	15
4. <i>Бобик І. О., Симотюк М. М.</i> Задача типу Діріхле для рівнянь із частинними похідними з відхиленням аргументом	21
5. <i>Бондаренко В. М., Костишин Е. М.</i> Модулярні зображення з додатковими умовами напівгрупи $T_2 \times S_2$	28
6. <i>Бондаренко В. М., Литвинчук І. В.</i> Опис категорії зображень постійного жорданового типу найменшої нециклічної групи	37
7. <i>Боярищева Т. В., Поляк І. Й.</i> Швидкість збіжності в ЦГТ для послідовності серій випадкових величин	48
8. <i>Варга Я. В.</i> Про одну нелінійну інтегральну крайову задачу	54
9. <i>Жучок Ю. В.</i> Моноїди ендоморфізмів напіврешіток напівгруп	63
10. <i>Заціха Я. В.</i> Опис піднапівгруп напівгруп малого порядку	69
11. <i>Капустей М. М., Слюсарчук П. В.</i> Застосування усереднених псевдомоментів для оцінки близькості розподілів двох сум випадкових величин	72
12. <i>Кирилюк О. А.</i> Мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(2, R_p)$	78
13. <i>Клименко І. С., Лисенко С. В., Петравчук А. П.</i> Алгебри Лі диференціювань з абелевими ідеалами максимального рангу	83
14. <i>Козаченко Ю. В., Петранова М. Ю.</i> Дійсні стаціонарні гаусові процеси зі стійкими кореляційними функціями	90
15. <i>Корепанова К. С.</i> Асимптотична поведінка розв'язків звичайних диференціальних рівнянь $n$ -го порядку з правильно змінними нелінійностями	101
16. <i>Король І. І., Король І. Ю.</i> Побудова лінійних багатокрокових методів розв'язання задачі Коші методом невизначених коефіцієнтів	115
17. <i>Мич І. А., Ніколенко В. В.</i> Досконалі диз'юнктивні нормальні форми в одному класі алгебр	123
18. <i>Скочко В. М.</i> Графи переходів ітерацій ініціальних $(2, 2)$ -автоматів	129
19. <i>Тоїчкіна О. О.</i> Ендотипи деяких часткових відношень еквівалентності	137

# CONTENTS

1. <i>Marynets V. V.</i> Miclos Ronto(in the occasion of 75 <sup>th</sup> anniversary of his birthday)	7
2. <i>Aiubova N. S.</i> Estimation of the Hurst parameter of the Fractional Brownian Motion in one model with measurement errors	10
3. <i>Barannik V. F.</i> Tensor products of irreducible projective integer 2-adic representations of cyclic 2-group	15
4. <i>Bobyk I. O., Symotyuk M. M.</i> Dirichlet-type problem for partial differential equations with delay argument	21
5. <i>Bondarenko V. M., Kostyshyn E. M.</i> Modular representations with additional conditions of the semigroup $T_2 \times S_2$	28
6. <i>Bondarenko V. M., Lytvynchuk I. V.</i> Description of the category of representations of constant Jordan type of the smallest noncyclic group	37
7. <i>Bojarischeva T. V., Poliak I. Y.</i> The rate of convergence in central limit theorem for sequence series of random variables	48
8. <i>Varga I. V.</i> On one nonlinear integral boundary value problem	54
9. <i>Zhuchok Yu. V.</i> Endomorphism monoids of semilattices of semigroups	63
10. <i>Zaciha Ya. V.</i> Description of the subsemigroup of semigroups of small order	69
11. <i>Kapustej M. M., Slyusarchuk P. V.</i> Using of middle pseudomoments for the estimation of proximity distributions of two sums of random variables	72
12. <i>Kyryl'uk O. A.</i> Minimal irreducible solvable subgroups of the group $GL(2, R_p)$	78
13. <i>Klimenko I. S., Lysenko S. V., Petravchuk A. P.</i> Lie algebras of derivations with abelian ideals of maximal rank	83
14. <i>Kozachenko Yu. V., Petranova M. Yu.</i> Real stationary Gaussian processes with stable correlation functions	90
15. <i>Korepanova K. S.</i> Asymptotic Behaviour of Solutions of $n$ -th Order Ordinary Differential Equations with Regularly Varying Nonlinearities	101
16. <i>Korol I.I., Korol I.Yu.</i> Constructing of linear multi-step methods for solving the Cauchy problem by the method of undetermined coefficients	115
17. <i>Mych I. A., Nykolenko V. V.</i> Perfect disjunctive normal forms in a class of algebras	123
18. <i>Skochko V. M.</i> Transition graphs of iterations of initial $(2, 2)$ -automata	129
19. <i>Toichkina O. O.</i> Endotypes of certain partial equivalence relations	137

УДК 519.21

**Ю. В. Козаченко** (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Донецький нац. ун-т ім. Василя Стуса),  
**М. Ю. Петранова** (Донецький нац. ун-т ім. Василя Стуса)

## ДІЙСНІ СТАЦІОНАРНІ ГАУСОВІ ПРОЦЕСИ ЗІ СТІЙКИМИ КОРЕЛЯЦІЙНИМИ ФУНКЦІЯМИ<sup>2</sup>

The paper deals with real stationary processes with a stable correlation function, with the distribution of some functionalities from these processes and some of their properties.

В роботі розглянуті дійсні стаціонарні процеси зі стійкою кореляційною функцією, розподіли деяких функціоналів від цих процесів та деякі їх властивості.

**Вступ.** Дана робота продовжує дослідження роботи [1], де вивчались комплексні гауссові процеси зі стійкою кореляційною функцією. В цій роботі вивчаються дійсні стаціонарні процеси зі стійкою кореляційною функцією, зокрема розподіли деяких функціоналів від цих процесів та деякі їх властивості. Для інших процесів подібні задачі розглядались в роботах та книгах [2–6]

Моделі деяких гауссових стаціонарних процесів зі стійкими кореляційними функціями будувались в роботах [1, 7, 8].

Робота складається з чотирьох розділів. У першому розділі знаходяться оцінки розподілу супремуму гауссовських стаціонарних процесів зі стійкою коваріаційною функцією. В другому розділі вивчається поведінка цих процесів на нескінченності. В третьому розділі знаходяться оцінки розподілу норм цих процесів у просторі  $L_p(T)$ . В четвертому розділі досліджуються деякі аналітичні властивості цих процесів.

**1. Розподіл супремуму дійсного гауссового випадкового процесу зі стійкими коваріаційними функціями.**

**Теорема 1.** *Нехай  $T = [a, b]$ ,  $X = \{X(t), t \in [a, b], -\infty < a < b < \infty\}$  центрований сепарабельний гауссів процес та  $M = \sup_{t \in T} (E|X(t)|^2)^{1/2}$ . Припустимо, що існує неперервна строго зростаюча функція  $\sigma = \{\sigma(h), h \geq 0\}$  така що  $\sigma(h) > 0, h > 0, \sigma(0) = 0$  та*

$$\sup_{t, s \in [a, b]} (E|X(t) - X(s)|^2)^{1/2} < \sigma(h).$$

*Крім того існує невід'ємна неспадна функція  $r(u), u \geq 1$  така що функція  $r(e^y), y \geq 0$  — опукла та виконується умова: для деякого  $v > 0$  (а тому і для будь-якого  $0 < v < \infty$ )*

$$I_r(v) = \int_0^v r\left(\frac{b-a}{2 \cdot \sigma^{-1}(u)} + 1\right) du < \infty,$$

<sup>2</sup>Робота була виконана в рамках проекту Норвезько-українського співробітництва у галузі математичної освіти

де  $\sigma^{(-1)}(u)$  — обернена до  $\sigma(u)$  функція. Тоді для будь-яких  $\theta \in (0, 1)$  та  $\lambda > 0$  справджується нерівність:

$$E \exp \left\{ \lambda \sup_{t \in [a, b]} |X(t)| \right\} \leq 2D(\lambda, \theta), \quad (1)$$

де  $D(\lambda, \theta) = \exp \left\{ \frac{\lambda^2 M^2}{2(1-\theta)^2} \right\} \cdot r^{(-1)} \left( \frac{I_r(\theta M)}{\theta M} \right)$ ,  $r^{(-1)}(v)$  — обернена до  $r(v)$  функція.

**Доведення.** Ця теорема випливає з теореми 3.4.4 книги [9], див. також роботу [10] та доведення в роботі [11].

**Наслідок 1.** За умов теореми 1 при будь-якому  $\varepsilon > 0$  справджується нерівність

$$P \left\{ \sup_{t \in [a, b]} |X(t)| > \varepsilon \right\} \leq \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2(1-\theta)^2}{2M^2} \right\} \cdot r^{(-1)} \left( \frac{I_r(\theta M)}{\theta M} \right). \quad (2)$$

**Доведення.** З нерівності Чебишева та нерівності (1) випливає, що при  $\lambda > 0$

$$P \left\{ \sup_{t \in [a, b]} |X(t)| > \varepsilon \right\} \leq \frac{E \left\{ \lambda \sup_{t \in [a, b]} |X(t)| \right\}}{\exp \{ \lambda \varepsilon \}} \leq \exp \left\{ \frac{\lambda^2 M^2}{2(1-\theta)^2} \right\} \cdot \exp \{ -\lambda \varepsilon \} \cdot r^{(-1)} \left( \frac{I_r(\theta M)}{\theta M} \right). \quad (3)$$

Нерівність (2) випливає з нерівності (3), якщо покласти  $\lambda = \frac{\varepsilon(1-\theta)^2}{M^2}$  (точка, в якій права частина в нерівності (3) набуває мінімуму за  $\lambda$ ).

**Означення 1.** Дійсний стаціонарний гауссів процес  $X_\alpha = \{X_\alpha(t), t \in \mathbf{R}\}$ ,  $0 < \alpha \leq 2$ , такий що  $EX_\alpha(t) = 0$ ,  $\rho_\alpha(h) := EX_\alpha(t+h)X_\alpha(t) = B^2 \exp \{-d|h|^\alpha\}$ ,  $d > 0$  називається дійсним гауссовим стаціонарним процесом зі стійкою кореляційною функцією.

**Теорема 2.** Нехай  $X_\alpha$  — дійсний сепарабельний гауссовий стаціонарний процес зі стійкою кореляційною функцією. Тоді для будь-яких  $-\infty < a < b < +\infty$ ,  $0 < \theta < 1$ ,  $\beta < \min(1, \frac{\alpha}{2})$ ,  $\varepsilon > 0$  справджується нерівність:

$$P \left\{ \sup_{t \in [a, b]} |X(t)| > \varepsilon \right\} \leq \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2(1-\theta)^2}{2B^2} \right\} \cdot 2^{1/\beta-1} \left( \frac{(b-a)(\sqrt{2d})^{2/\alpha}}{\theta^{2/\alpha} \left(1 - \frac{2\beta}{\alpha}\right)^{1/\beta}} + 1 \right).$$

**Доведення.** Теорема випливає з наслідку 1. Оцінимо за умов теореми таку величину  $r^{(-1)} \left( \frac{I_r(\theta M)}{\theta M} \right)$ . В нашому випадку

$$E|X_\alpha(t+h) - X_\alpha(t)|^2 = 2(\rho_\alpha(0) - \rho_\alpha(h)) = 2B^2(1 - \exp \{-d|h|^\alpha\}).$$

Тобто  $\sigma(h) = \sqrt{2B(1 - \exp \{-d|h|^\alpha\})}^{1/2}$ . Зауважимо, що  $\sigma(h) < \sqrt{2B}$ . Отже,  $\sigma^{(-1)}(h)$  визначена при  $0 \leq h < \sqrt{2B}$ . Оскільки  $\sigma(h) \leq \sqrt{2B}(dh^\alpha)^{1/2} = \hat{\sigma}(h)$  тоді при  $0 < s < B\sqrt{2}$

$$\sigma^{(-1)}(s) \geq \hat{\sigma}^{(-1)}(s) = \left( \frac{s}{B\sqrt{2d}} \right)^{2/\alpha}.$$



Отже,

$$I_r(v) \leq \int_0^{\min(v, B\sqrt{2d})} r\left(\frac{(b-a)}{s^{2/\alpha}}(B\sqrt{2d})^{2/\alpha} + 1\right) ds.$$

Покладемо  $r(u) = u^\beta - 1$  при  $u \geq 1$ , де  $0 < \beta < \min(\alpha/2, 1)$ . Тоді

$$\begin{aligned} I_r(v) &\leq \int_0^{\min(v, B\sqrt{2d})} \left( \left( \frac{(b-a)}{s^{2/\alpha}}(B\sqrt{2d})^{2/\alpha} + 1 \right)^\beta - 1 \right) ds \leq \\ &\int_0^{\min(v, B\sqrt{2d})} \left( \frac{(b-a)}{s^{2/\alpha}}(B\sqrt{2d})^{2/\alpha} \right)^\beta ds = \\ &\frac{1}{\left(1 - \frac{2\beta}{\alpha}\right)} \left( (b-a)(B\sqrt{2d})^{2/\alpha} \right)^\beta \cdot \left( \min(v, B\sqrt{2d}) \right)^{\left(1 - \frac{2\beta}{\alpha}\right)}. \end{aligned}$$

Тому

$$I_r(\theta B) \leq \left( (b-a)(B\sqrt{2d})^{2/\alpha} \right)^\beta \frac{1}{\left(1 - \frac{2\beta}{\alpha}\right)} (\theta B)^{1 - \frac{2\beta}{\alpha}}.$$

Оскільки  $r^{(-1)}(u) = (u+1)^{1/\beta}$ , тоді

$$r^{(-1)}\left(\frac{I_r(\theta B)}{\theta B}\right) \leq \left( (b-a)^\beta (B\sqrt{2d})^{2\beta/\alpha} \frac{1}{\left(1 - \frac{2\beta}{\alpha}\right)} (\theta B)^{-\frac{2\beta}{\alpha}} + 1 \right)^{1/\beta}. \quad (4)$$

Оскільки при  $z \geq 1$  справджується нерівність  $(b+a)^z \geq 2^{z-1}(a^z + b^z)$ , тоді

$$r^{(-1)}\left(\frac{I_r(\theta B)}{\theta B}\right) \leq 2^{1/\beta-1} \left( \frac{(b-a)(\sqrt{2d})^{2/\alpha}}{\theta^{2/\alpha}} \left(1 - \frac{2\beta}{\alpha}\right)^{-1/\beta} + 1 \right). \quad (5)$$

Тепер твердження теореми випливає з нерівностей (2) та (3).

**Наслідок 2.** *Нехай виконуються умови теореми 2, тоді при  $\varepsilon > \sqrt{2}B$  справджується нерівність*

$$\begin{aligned} &P \left\{ \sup_{t \in [a, b]} |X_\alpha(t)| > \varepsilon \right\} \leq \\ &\exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2}{2B^2} \right\} \cdot e \cdot 2^{1/\beta-1} \left( \frac{(b-a)(\sqrt{2d})^{2/\alpha}}{\left(1 - \left(1 - \frac{2B^2}{\varepsilon^2}\right)^{1/2}\right)^{2/\alpha}} \left(1 - \frac{2\beta}{\alpha}\right)^{-1/\beta} + 1 \right). \end{aligned}$$

**Доведення.** Нерівність (5) випливає з нерівності (4), якщо покласти  $(1-\theta)^2 = \left(1 - \frac{2B^2}{\varepsilon^2}\right)$  при  $\varepsilon > \sqrt{2}B$ , тобто при  $\theta = 1 - \left(1 - \frac{2B^2}{\varepsilon^2}\right)^{1/2}$ .

**Наслідок 3.** *Нехай виконуються умови теореми 2, тоді при  $\varepsilon > \sqrt{2}B$  справджується нерівність*

$$\begin{aligned} &P \left\{ \sup_{t \in [a, b]} |X_\alpha(t)| > \varepsilon \right\} \leq \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2}{2B^2} \right\} \cdot \\ &e \cdot 2^{4/\alpha-1} \left( \frac{(b-a) \cdot d^{1/\alpha} \cdot 2^{5/\alpha} \cdot \varepsilon^{4/\alpha}}{B^{4/\alpha}} + 1 \right). \end{aligned} \quad (6)$$

**Доведення.** При  $0 \leq x \leq 1$  справджується нерівність  $1 - (1 - x)^{1/2} = \frac{1-(1-x)}{1+(1-x)^{1/2}} \geq \frac{x}{2}$ . Отже,  $\left(1 - \left(1 - \frac{2B^2}{\varepsilon^2}\right)^{1/2}\right)^{2/\alpha} \geq \left(\frac{B}{\varepsilon}\right)^{4/\alpha}$ . Тепер нерівність (6) впливає з нерівності (5), якщо покласти  $\beta = \frac{\alpha}{4}$ .

**2. Поведінка дійсного гауссового стаціонарного процесу зі стійкими коваріаційними функціями  $X_\alpha(t)$  при прямуванні  $t$  до нескінченності.**

**Теорема 3.** Нехай  $X_\alpha = \{X_\alpha(t), t \in \mathbf{R}\}$  – дійсний гауссовий стаціонарний процес зі стійкою кореляційною функцією (див. означення 1),  $C = \{C(t), t \geq 0\}$  – монотонно зростаюча функція, така що  $C(t) \geq 1, t \geq 0$  та  $C(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ ;  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_k$ , така послідовність, що  $b_0 = 0, b_k < b_{k+1}$ , та  $b_k \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ ,  $r_0, r_1, r_2, \dots, r_k$  така послідовність, що  $r_k > 1$  та  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k} = 1$ ,  $C_k = C(b_k), k = 0, 1, 2, \dots$  і виконуються умови

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2} < \infty, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k} (b_{k+1} - b_k)^\gamma < \infty,$$

де  $\gamma$  – деяке число, що  $0 < \gamma < 1$ . Тоді при будь-якому  $0 < \theta < 1$  та  $\varepsilon > 0$  справджується нерівність

$$P \left\{ \sup_{t \geq 0} \frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)} > \varepsilon \right\} \leq 2^{\frac{4}{\alpha}-1} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2(1-\theta)^2}{2B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}} \right\} \cdot \exp \left\{ \frac{1}{\theta^{\gamma/2} \cdot \gamma^\gamma} \cdot (\sqrt{2d})^{\frac{2\gamma}{\alpha}} \cdot 2^{\frac{4\gamma}{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k} (b_{k+1} - b_k)^\gamma \right\}. \quad (7)$$

**Доведення.** Нехай  $\lambda > 0, S(\lambda) := E \exp \left\{ \lambda \sup_{t \geq 0} \frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)} \right\}$  тоді з нерівності Гельдера отримаємо, що

$$S(\lambda) \leq E \exp \left\{ \lambda \sup_{t \in [b_k, b_{k+1}]} \frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)} \right\} \leq \prod_{k=0}^{\infty} \left( E \exp \left\{ \lambda r_k \sup_{t \in [b_k, b_{k+1}]} \frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)} \right\} \right)^{1/r_k} \leq \prod_{k=0}^{\infty} \left( E \exp \left\{ \frac{\lambda r_k}{C_k} \sup_{t \in [b_k, b_{k+1}]} |X_\alpha(t)| \right\} \right)^{1/r_k}.$$

З нерівності (1) впливає, що

$$E \exp \left\{ \frac{\lambda r_k}{C_k} \sup_{t \in [b_k, b_{k+1}]} |X_\alpha(t)| \right\} \leq 2D(\lambda, \theta) \leq \exp \left\{ \left( \frac{\lambda r_k}{C_k} \right)^2 \frac{B^2}{2(1-\theta)^2} \right\} r^{(-1)} \left( \frac{I_{r_k}(\theta B)}{\theta B} \right),$$

де

$$I_{r_k}(v) = \int_0^v r \left( \frac{(b_{k+1} - b_k)}{2\sigma^{(-1)}(v)} + 1 \right) dv,$$

$\theta$  — будь-яке число, таке що  $0 < \theta < 1$ ,  $r(u), u \geq 1$  — монотонно зростаюча функція, така що при  $u > 0$  функція  $r(e^u)$  — опукла. Зауважимо, що  $\frac{\alpha}{2} \leq 1$ . Покладемо  $r(u) = u^{\frac{\alpha}{4}-1}$  при  $u \geq 1$ . Тоді з нерівності (5) випливає, що

$$r^{(-1)}\left(\frac{I_{r_k}(\theta B)}{\theta B}\right) \leq 2^{4/\alpha-1} \left( \frac{(b_{k+1} - b_k)(\sqrt{2d})^{2/\alpha}}{\theta^{2/\alpha}} \cdot 2^{4/\alpha} + 1 \right).$$

З нерівності (1) отримаємо, що

$$\begin{aligned} S(\lambda) &\leq \\ \prod_{k=0}^{\infty} \left( \exp \left\{ \left( \frac{\lambda \cdot r_k}{C_k} \right)^2 \cdot \frac{B^2}{2(1-\theta)^2} \right\} \cdot 2^{\frac{4}{\alpha}-1} \left( \frac{(b_{k+1} - b_k)\sqrt{2d}^{\frac{2}{\alpha}}}{\theta^{2/\alpha}} \cdot 2^{4/\alpha} + 1 \right) \right)^{1/r_k} &= \\ &= \exp \left\{ \frac{\lambda^2 B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}}{2(1-\theta)^2} \right\} \cdot \\ \exp \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k} \ln \left( 2^{4/\alpha-1} \left( (b_{k+1} - b_k) \cdot \frac{\sqrt{2d}^{2/\alpha} \cdot 2^{4/\alpha}}{\theta^{2/\alpha}} + 1 \right) \right) \right\} &= \\ = \exp \left\{ \frac{\lambda^2 B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}}{2(1-\theta)^2} \right\} \cdot \exp \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k} \ln \left( 2^{4/\alpha-1} \right) \right\} \cdot \\ \cdot \exp \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k} \ln \left( 1 + \frac{\sqrt{2d}^{2/\alpha}}{\theta^{2/\alpha}} (b_{k+1} - b_k) \cdot 2^{4/\alpha} \right) \right\}. &(8) \end{aligned}$$

Оскільки при  $0 < \gamma < 1$ ,  $x > 0$  справджується нерівність  $\ln(1+x) \leq \frac{1}{\gamma} \ln(1+x)^\gamma \leq \frac{1}{\gamma} \ln(1+x^\gamma) \leq \frac{x^\gamma}{\gamma}$  тоді з нерівності (8) випливає, що

$$S(\lambda) \leq 2^{4/\alpha-1} \cdot \exp \left\{ \frac{\lambda^2 B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}}{2(1-\theta)^2} \right\} \cdot \exp \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{4/\alpha}}{r_k \gamma} \left( \frac{(\sqrt{2d})^{2/\alpha} (b_{k+1} - b_k)}{\theta^{2/\alpha}} \right)^\gamma \right\}.$$

Отже,

$$S(\lambda) \leq 2^{4/\alpha-1} \cdot \exp \left\{ \frac{\lambda^2 B^2}{2(1-\theta)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2} \right\} \cdot \exp \left\{ \frac{w(\gamma)}{\theta^{\gamma/2}} \right\},$$

де

$$w(\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k \gamma} \left( (b_{k+1} - b_k) (\sqrt{2d})^{\alpha/2} \cdot 2^{4/\alpha} \right)^\gamma.$$

Тоді з нерівності Чебишева випливає, що при  $\varepsilon > 0$ ,  $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} P \left\{ \sup_{t \geq 0} \frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)} > \varepsilon \right\} &\leq \\ 2^{4/\alpha-1} \exp \left\{ \frac{\lambda^2 B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}}{2(1-\theta)^2} \right\} \cdot \exp \{-\lambda \varepsilon\} \cdot \exp \left\{ \frac{w(\gamma)}{\theta^{\gamma/2}} \right\}. &(9) \end{aligned}$$

Якщо в нерівність (9) підставити

$$\lambda = \frac{\varepsilon(1 - \theta)^2}{B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}},$$

тоді отримаємо твердження теореми.

**Наслідок 4.** *Нехай виконуються умови теореми 3, тоді при  $\varepsilon \geq \sqrt{2}B \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2} \right)^{1/2}$  справджується нерівність*

$$P \left\{ \sup_{t \geq 0} \frac{|X_{\alpha}(t)|}{C(t)} > \varepsilon \right\} \leq \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2}{2B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}} \right\} \cdot 2^{4/\alpha-1} \cdot e \cdot \exp \left\{ \frac{d^{\gamma/2} \cdot 2^{6\gamma/\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k} (b_{k+1} - b_k)^{\gamma}}{\left(1 - \left(1 - 2B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}\right)^{1/2}\right)^{\gamma/2}} \right\}. \quad (10)$$

**Доведення.** Нерівність (10) випливає з нерівності (7), якщо покласти  $(1 - \theta)^2 = \left(1 - \frac{2B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}}{\varepsilon^2}\right)$ , тобто  $\theta = 1 - \left(1 - \frac{2B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}}{\varepsilon^2}\right)^{1/2}$ .

**Наслідок 5.** *Нехай виконуються умови теореми 3, тоді при  $\varepsilon > \sqrt{2}B \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2} \right)^{1/2}$  справджується нерівність*

$$P \left\{ \sup_{t \geq 0} \frac{|X_{\alpha}(t)|}{C(t)} > \varepsilon \right\} \leq \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2}{2B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}} \right\} \cdot 2^{4/\alpha-1} \cdot \exp \left\{ -\frac{d^{\gamma/2} \cdot 2^{3\gamma/\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r_k} (b_{k+1} - b_k)^{\gamma} \varepsilon^{2/\alpha}}{\left(B \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}\right)^{1/2}\right)^{2/\alpha}} \right\}. \quad (11)$$

**Доведення.** Нерівність (11) випливає з нерівності (10), оскільки, як і в наслідку 3

$$\left(1 - \frac{2B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}}{\varepsilon^2}\right) \geq \frac{B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}}{\varepsilon^2}.$$

**Теорема 4.** *Нехай виконуються умови теореми 3, тоді з ймовірністю одиниця для всіх  $t > 0$  виконується умова*

$$|X_{\alpha}(t)| < \xi_{\alpha} \cdot C(t),$$

де  $\xi_{\alpha}$  — така випадкова величина, що при будь-якому  $0 < \theta < 1$

$$P \{ \xi_{\alpha} > \varepsilon \} \leq 2^{\frac{4}{\alpha}-1} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2(1 - \theta)^2}{2B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}} \right\} \cdot \exp \left\{ \frac{1}{\theta^{\gamma/2} \cdot \gamma^{\gamma}} \cdot (\sqrt{2}d)^{\frac{2\gamma}{\alpha}} \cdot 2^{\frac{4\gamma}{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k} (b_{k+1} - b_k)^{\gamma} \right\},$$

або при  $\varepsilon \geq \sqrt{2}B \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2} \right)^{1/2}$  справджується нерівність

$$P \{ \xi_{\alpha} > \varepsilon \} \leq \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2}{2B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}} \right\} \cdot 2^{4/\alpha-1} \cdot \exp \left\{ -\frac{d^{\gamma/2} \cdot 2^{3\gamma/\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r_k} (b_{k+1} - b_k)^{\gamma} \varepsilon^{2/\alpha}}{\left( B \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2} \right)^{1/2} \right)^{2/\alpha}} \right\}.$$

**Доведення.** Теорема випливає з теореми 3 та нерівностей (7) і (3), оскільки при всіх  $t > 0$  з імовірністю одиниця

$$\frac{X_{\alpha}(t)}{C(t)} \leq \sup_{t \geq 0} \frac{|X_{\alpha}(t)|}{C(t)} < \infty.$$

**Приклад 1.** Якщо в умовах теореми 3 покласти  $b_k = e^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  та  $\frac{1}{r_k} = e^{-k} \cdot \frac{e}{(e-1)}$ , тоді умови теореми виконуються, якщо збігається ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^k}{c(e^k)^2}$ , а цей ряд збігається, якщо  $C(t) = t^{1/2+\beta}$ ,  $\beta > 0$ , або  $C(t) = t^{1/2}(\ln t)^{1/2+\delta}$  при  $\delta > 0$ .

При цих  $b_k$  та  $e^k$  збігається ряд при будь-яких  $\gamma < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k} (b_{k+1} - b_k)^{\gamma} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} \frac{e}{(e-1)} (e^{k+1} - e^k)^{\gamma} = (e-1)^{\gamma-1} \cdot e \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} \cdot e^{\gamma k} < \infty.$$

### 3. Розподіл норми в просторі $L_p(T)$ дійсного гауссового випадкового процесу зі стійкою коваріаційною функцією

**Теорема 5.** Нехай  $\{\mathbb{T}, \Lambda, \mu\}$  – вимірний простір,  $X = \{X(t), t \in \mathbb{T}\}$  вимірний гауссовий випадковий процес. Нехай існує інтеграл Лебега  $\int_{\mathbb{T}} (E|X(t)|^2)^{p/2} d\mu(t)$ ,  $p \geq 1$ . Тоді з імовірністю одиниця існує  $\int_{\mathbb{T}} E|X(t)|^p d\mu(t)$ , та для всіх  $\varepsilon$ , таких що  $\varepsilon > C \cdot p^{p/2}$ , де  $c = \int_{\mathbb{T}} (E|X(t)|^2)^{p/2} d\mu(t)$  має місце нерівність

$$P \left\{ \left( \int_{\mathbb{T}} |X(t)|^p d\mu(t) \right)^{1/p} > \varepsilon \right\} \leq 2^{\frac{4}{\alpha}-1} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2(1-\theta)^2}{2B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}} \right\} \cdot \exp \left\{ \frac{1}{\theta^{\gamma/2} \cdot \gamma^{\gamma}} \cdot (\sqrt{2d})^{\frac{2\gamma}{\alpha}} \cdot 2^{\frac{4\gamma}{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k} (b_{k+1} - b_k)^{\gamma} \right\}.$$

**Доведення.** Ця теорема є простим наслідком теореми 2.1 роботи [12].

**Теорема 6.** Нехай  $X_{\alpha}(t)$ ,  $t \in [a, b]$  – вимірний дійсний гауссовий процес зі стійкою коваріаційною функцією. Тоді для  $\varepsilon > \hat{c}^{1/p} \sqrt{p}$ , де  $\hat{c} = B^p(b-a)$  справджується нерівність

$$P \left\{ \left( \int_a^b |X_{\alpha}(t)|^p dt \right)^{1/p} > \varepsilon \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2}{2\hat{c}^{2/p}} \right\}.$$

**Доведення.** Ця теорема випливає з попередньої теореми. Тут простір  $\{\mathbb{T}, \Lambda, \mu\}$  це інтервал  $[a, b]$  з борелевською  $\sigma$ -алгеброю та мірою Лебега  $E|X(t)|^2 = B^2$ .

**Теорема 7.** Нехай  $X_\alpha(t), t \in \mathbf{R}$  – вимірний дійсний гауссовий процес зі стійкою коваріаційною функцією,  $C(t) > 1$  деяка функція, така що  $\int_0^\infty \frac{1}{(C(t))^p} dt < \infty$ . Тоді для  $\varepsilon > \hat{c}^{1/p} \cdot \sqrt{p}$ , де  $\hat{c} = B^p \int_0^\infty \frac{1}{C(t)} dt$  справджується нерівність

$$P \left\{ \left( \int_0^\infty |X_\alpha(t)|^p \right)^{1/p} > \varepsilon \right\}.$$

**Доведення.** Ця теорема також випливає з теореми 5. Тут простір  $\{\mathbb{T}, \Lambda, \mu\}$  – це  $[0, \infty)$  з борелевською  $\sigma$ -алгеброю, процес  $X(t)$  це  $\frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)}$ :

$$\int_0^\infty \left( E|X(t)|^2 \right)^{p/2} dt = B \int_0^\infty \frac{1}{(C(t))^p} dt.$$

Прикладом  $C(t)$  може бути функція така, що при  $t > 1$   $C(t) = t^{1/p+\varepsilon}$ , де  $\varepsilon > 0$

#### 4. Аналітичні властивості гауссових випадкових процесів зі стійкими кореляційними функціями.

Наступна теорема – це простий наслідок теореми 2.2.9 з книги [ [2], с. 79].

**Теорема 8.** Нехай  $X = \{X(t), t \in [a, b]\}$  – сепарабельний гауссів процес, такий що існує монотонно зростаюча непервна функція  $\sigma(h), h \geq 0$ , така що  $\sigma(0) = 0$ , для якої справджується

$$\sup_{|t-s| \leq h} \left( E(X(t) - X(s))^2 \right)^{1/2} \leq \sigma(h)$$

та збігається інтеграл

$$\int_0^{\sigma(\varepsilon)} \ln \left( \frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)} \right)^{1/2} du \leq \infty.$$

Тоді  $X(t), t \in [a, b]$  є вибірково непервний з імовірністю одиниця та для довільних  $\varepsilon > 0, 0 < p < 1, x > B(p, \varepsilon)$ , де

$$B(p, \varepsilon) = \frac{4(3-p)}{3p(1-p)^2} \int_0^{\sigma(\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \ln \left( \frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right)^{1/2} du$$

справджується нерівність

$$P \left\{ \sup_{|t-s| \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)| > x \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - B(p, \varepsilon)}{A(p, \varepsilon)} \right)^2 \right\},$$

де  $A(p, \varepsilon) = \frac{\sigma(\varepsilon)(3-p)}{(1-p)^2}$ .

З теореми 8 випливає така теорема

**Теорема 9.** *Нехай  $X_\alpha = \{X_\alpha(t), t \in [a, b]\}$  сепарабельний центрований гауссовий процес зі стійкою кореляційною функцією. Тоді при всіх  $0 < \alpha < 2$   $X_\alpha(t)$ ,  $t \in [a, b]$  вибірково непервний з імовірністю одиниця та для довільних  $\varepsilon > 0$ ,  $0 < p < 1$ ,  $0 < \beta < \min(1, \alpha)$ ,  $x > \hat{B}(p, \varepsilon)$ , де*

$$\hat{B}(p, \varepsilon) = \frac{4(3-p)}{3p(1-p)^2} \cdot \frac{1}{2^{(1+\beta)/2}} (b-a)^{\beta/2} (\sqrt{2d})^{\beta/\alpha} \cdot B^{\beta/\alpha} \cdot \frac{1}{(1-\beta/\alpha)} \left( \sqrt{2d} B \varepsilon^{\alpha/2} \right)^{1-\beta/\alpha}$$

справджується нерівність

$$P \left\{ \sup_{|t-s| \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)| > x \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \hat{B}(p, \varepsilon)}{A(p, \varepsilon)} \right)^2 \right\}, \quad (12)$$

$$\text{де } A(p, \varepsilon) = \frac{(3-p)\sqrt{2d}B\varepsilon^{\alpha/2}}{(1-p)^2}.$$

**Доведення.** В нашому випадку можна покласти  $\sigma(h) = \sqrt{2d}B|h|^{\alpha/2}$ , тоді  $\sigma^{(-1)}(u) = \frac{u}{\sqrt{2d}B}^{2/\alpha}$  та

$$\begin{aligned} & \int_0^{\sigma(\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \ln \left( \frac{(b-a)(\sqrt{2d}B)^{2/\alpha}}{2u^{2/\alpha}} + 1 \right) \right)^{1/2} du \leq \\ & \frac{1}{\sqrt{2}\beta^{1/2}} (b-a)^{\beta/2} (\sqrt{2d})^{\beta/\alpha} B^{\beta/\alpha} \frac{1}{2^{\beta/\alpha}} \int_0^{\sigma(\varepsilon)} \frac{1}{u^{\beta/\alpha}} du = \\ & \frac{1}{2^{(1+\beta/2)}} (b-a)^{\beta/2} (\sqrt{2d})^{\beta/\alpha} B^{\beta/\alpha} \frac{1}{\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)} \left( \sqrt{2d} B \varepsilon^{\alpha/2} \right)^{1 - \frac{\beta}{\alpha}}. \end{aligned}$$

**Зауваження 1.** Щоб знайти більш точну оцінку, треба знайти мінімум по  $\beta$  правої частини в нерівності (12).

**Означення 2.** Випадковий процес  $X(t)$ ,  $t \in [a, b]$  називають диференційованим в середньоквадратичному, коли існує границя (в середньоквадратичному)

$$\text{l.i.m.}_{h \rightarrow 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h} = X'(t).$$

Якщо існує  $X'(t)$  – тоді її називають середньоквадратичною похідною процесу  $X(t)$ .

**Теорема 10** (див. [13], с. 300). Для того, щоб у процесу  $X(t)$ ,  $EX(t) = 0$  існувала середньоквадратична похідна  $X'(t)$  необхідно та достатньо, щоб існувала границя

$$\lim_{t' \rightarrow t, t'' \rightarrow t} \frac{1}{(t' - t)(t'' - t)} \left( B(t', t'') - B(t', t) - B(t'', t) + B(t, t) \right),$$

де  $B(t, s) = EX(t)X(s)$ . При цьому, якщо існує похідна  $\frac{\partial^2 B(t, s)}{\partial t \partial s}$ , тоді  $EX'(t)X'(s) = \frac{\partial^2 B(t, s)}{\partial t \partial s}$ .

З цієї теореми випливає наступна теорема.

**Теорема 11.** *Нехай  $X_\alpha(t)$ ,  $t \in [a, b]$  стаціонарний процес зі стійкою кореляційною функцією (не обов'язково гауссовою). Тоді при  $0 < \alpha < 2$  середньоквадратичні похідні не існують, а при  $\alpha = 2$  похідна існує та*

$$EX'_2(t)X'_2(s) = B^2 \exp\{-d(t-s)\} \cdot (4d^2 \cdot (t-s)^2 + 2d),$$

тобто  $X'_2(t)$  стаціонарний процес з кореляційною функцією

$$EX'_2(t+\tau)X'_2(t) = B^2 \exp\{-d|\tau|^2\} \cdot (4d^2 \cdot \tau^2 + 2d). \quad (13)$$

**Доведення.** В нашому випадку

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(t'-t)(t''-t)} \left( B(t', t'') - B(t', t) - B(t'', t) + B(t, t) \right) = \\ & \frac{1}{(t'-t)(t''-t)} \left( B^2 \exp\{-d|t' - t''|^\alpha\} - B^2 \exp\{-d|t' - t|^\alpha\} - \right. \\ & \quad \left. B^2 \exp\{-d|t'' - t|^\alpha\} + B^2 \right). \end{aligned}$$

Легко побачити, що границя цього виразу існує тоді і лише тоді, коли  $\alpha = 2$ . Крім того, очевидно, що

$$EX'_2(t)X'_2(s) = \frac{\partial^2 B(t, s)}{\partial t \partial s} = B^2 \exp\{-d|\tau|^\alpha\} \cdot (4d^2 \cdot \tau^2 + 2d).$$

**Зауваження 2.** *Коли  $X_\alpha(t)$  — гауссів процес, то  $X'_\alpha(t)$  також гауссів процес.*

Тепер покажемо, що середньоквадратична похідна від  $X_\alpha(t)$  є звичайною неперервною похідною з імовірністю одиниця, якщо  $X_\alpha(t)$  — гауссів та сепаративний процес.

**Теорема 12** (див. [14]). *Нехай  $X(t)$ ,  $t \in [a, b]$  неперервний з імовірністю одиниця випадковий процес з  $EX(t) = 0$ ,  $EX(t)X(s) = B(t, s)$  та нехай існує неперервна з імовірністю одиниця середньоквадратична похідна процесу  $X(t)$ , така що  $EX'(t)X'(s) = \frac{\partial^2 B(t, s)}{\partial t \partial s}$ , тоді з імовірністю одиниця  $X'(t)$  є звичайною похідною процесу  $X(t)$ .*

**Наслідок 6.** *У процесу  $X_2(t)$  існує вибірково неперервна похідна  $X'_2(t)$  з кореляційною функцією (13) та  $X'_2(t)$  — гауссів процес.*

**Доведення.** Щоб довести твердження наслідку досить довести, що процес  $X'_2(t)$  вибірково неперервний з імовірністю одиниця. Легко побачити, що

$$\begin{aligned} E\left(X'_2(t) - X'_2(s)\right)^2 &= 4B^2d - 4B^2 \exp\{-d|\tau|^\alpha\} (2d\tau^2 + d) = \\ &= 4B^2d\left(1 - \exp\{-d|\tau|^\alpha\}\right) (2d\tau^2 + d) = \\ &= 4B^2d\left(1 - 2d\tau^2 \cdot \exp\{-d|\tau|^\alpha\}\right) + \left(1 - \exp\{-d|\tau|^\alpha\}\right) \geq \\ &= 4B^2d\left(2d^2\tau^4 + d\tau^2\right) = 4B^2d\left(2d^2\tau^2 + d\right) \cdot \tau^2 \geq Z\tau^2. \end{aligned}$$



де  $Z = 4B^2d(2d^2\tau^2 + d)$  та така константа, що  $|\tau| < s$ . Тобто  $\sigma(\tau) = \sqrt{Z}\tau$ , далі доведення теореми аналогічне доведенню теореми 9.

**Висновки.** У роботі знайдено розподіл супремуму дійсного гауссового випадкового процесу зі стійкими коваріаційними функціями. Описана поведінка дійсного гауссового стаціонарного процесу зі стійкими коваріаційними функціями  $X_\alpha(t)$  при прямуванні  $t$  до нескінченності. Також, знайдено розподіл норми в просторі  $L_p(T)$  дійсного гауссового випадкового процесу зі стійкою коваріаційною функцією та описано аналітичні властивості гауссових випадкових процесів зі стійкими кореляційними функціями.

### Список використаної літератури

1. *Kozachenko Y. V., Petranova M. Y.* Proper complex random processes // Stat. Optim. and Inf. Comput. – 2017. – Vol. 5, No. 2. – P. 137–146.
2. *Kozachenko Yu. V., Vasilic O. I.* On the distribution of suprema of  $Sub_\varphi(\Omega)$  random processes // Theory Stoch. Processes – 1998. – Vol. 4(20), No. 1-2. – P. 147–160.
3. *Kozachenko Yu. V.* Random processes in Orlicz spaces I // Theory Probab. and Math. Stat. – 1985. – Vol. 30. – P. 103–117.
4. *Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V.* On local properties of sample functions of some stochastic processes and fields // Teor. Veroyatn. Mat. Stat. – 1974. – Vol. 10. – p. 39–47.
5. *Kozachenko Yu., Pogoriliak O., Rozora I. and Tegza A.* Simulation of Stochastic Processes with Given Accuracy and Reliability. – London: ISTE Press Ltd and Elsevier Ltd, 2016. – 346 p.
6. *Козаченко Ю.В., Кучінка К.Й., Сливка–Тилищак Г.І.* Випадкові процеси в задачах математичної фізики. – Ужгород: ТОВ “РІК–У”, 2017. – 256 с.
7. *Petranova M.* Simulation of Gaussian Stationary Quasi Ornstein–Uhlenbeck Process with Given Reliability and Accuracy in Spaces  $C([0, T])$  and  $L_p([0, T])$  // Journal of Applied Mathematics and Statistics – 2016. – Vol. 3(1). – P.44–58.
8. *Kozachenko Yu., Petranova M.* Simulation of Gaussian stationary Ornstein–Uhlenbeck process with given reliability and accuracy in space  $C([0, T])$  // Monte Carlo Methods Appl. – 2017. – Vol. 23, No. 4. – p. 277–286.
9. *Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V.* Metric characterization of random variables and random processes. – Providence, RI: American Mathematical Society, 2000. – 257 p.
10. *Kozachenko Yu. V., Olenko A.* Aliasing-Truncation errors in sampling approximations on Sub-Gaussian signals // IEEE Transactions on Information Theory – 2016. – Vol. 62, No. 10. – p. 5831–5838.
11. *Dozzi M., Kozachenko Y., Mishura Y. and Ralchenko K.* Asymptotic growth of trajectories of multifractional Brownian motion with statistical applications to drift parameter estimation // Statistical Inference for Stochastic processes. – 2016. – DOI: 10.1007/s11203-016-9147-z. – P. 1–32.
12. *Kozachenko Y., Kamenschikova O.* On an expansion of random processes in the space  $L_p(T)$  // Theory Probab. And Math. Statist. – 2009. – Vol. 79. – P. 83–88.
13. *Гизман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И.* Теория вероятностей и математическая статистика. – Киев: Вища школа, 1988. – 440 с.
14. *Gladkaya O. N.* On condition of differentiability in direction of sample function of random fields // Theory Probab. and Math Statistics. – 1978. – Vol. 17. – P. 33–41.

Одержано 10.09.2017