УДК 519.64, 519.718

І. В. Малик (Чернівецький нац. ун-т)

НАПІВМАРКОВСЬКІ ВИПАДКОВІ ЕВОЛЮЦІЇ У СХЕМІ УСЕРЕДНЕННЯ

The sufficient conditions for weak convergence of semi-Markov random evolutions in averaging scheme to the solution of ordinary differential equations with restrictions in local characteristics of "basic" processes are obtained.

Одержано достатні умови слабкої збіжності напівмарковських випадкових еволюцій у схемі усереднення до розв'язку звичайного диференціального рівняння при обмеженнях на локальні характеристики "базових"процесів.

Вступ. Випадкові еволюції з марковськими переключеннями у схемі усереднення з параметром $\varepsilon \to 0$ ($\varepsilon > 0$) досліджено в монографії [1] (Розділ 3-6) з використанням компенсуючого оператора(КО), введеного у роботах [1,2]. Загальна схема збіжності випадкових еволюцій (див. [1], Передмова) основана на вивченні збіжності КО з використанням розв'язків проблеми сингулярного збурення ([1], Розділ 5) та мартингальної характеризації марковських процесів [1, 3]. Слабку збіжність найпростішої напівмарковської випадкової еволюції(однорідного руху з випадковою швидкістю) у схемі усереднення досліджено в роботі [4].

У даній роботі розглядаються напівмарковські випадкові еволюції(НМВЕ), що задаються напівмарковськими випадковими процесами в евклідовому просторі [1,5] з марковськими переключеннями [1,5,6].

З'ясовано, що загальна схема збіжності випадкових еволюцій, розвинута в монографії [1], забезпечує асимптотичний аналіз НМВЕ у схемі усереднення.

Не має сумніву в тому, що аналогічна схема збіжності може бути застосована у схемі дифузійної апроксимації при додаткових умовах балансу (див. [1]).

1. Постановка задачі та позначення. Отже, розглянемо НМВЕ у R^d, що задається стохастичним адитивним функціоналом

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t \eta(ds; x(s)) + \int_0^t \gamma(ds; x(s)), t \geq 0. \tag{1}$$

Однорідний ергодичний марковський стрибковий процес перемикань $x(t)$, $t \geq 0$ розглядається у стандартному просторі $(E, \mathcal{E})$ зі стаціонарним розподілом $\pi(B), B \in \mathcal{E}$ та визначений напівгрупою $Q_t\varphi(x) := \int_E \varphi(y)P_t(x, dy), t \geq 0$ [1, 6], де $P_t(x, A) := \mathbb{P}\{x(t) \in A | x(0) = x\}$. Напівгрупа $Q_t, t \geq 0$ породжується генератором $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q}\varphi(x) := q(x) \int_E P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)],$$

де $P(x, A) := \mathbb{P}\{x_{k+1} \in A | x_k = x\}$ – ймовірність переходу для вкладеного ланцюга Маркова $x_k, k \geq 0$; $q(x)$ – інтенсивність стрибків. Позначимо через П –

проектор марковського процесу $x(t), t \geq 0$, R_0 – його потенціал(див. [1,6]):

$$\Pi\varphi(x) = \int_E \pi(dx)\varphi(x),$$

$$R_0\varphi(x) := \int_0^\infty (Q_t - \Pi)\varphi(x)dt.$$

Напівмарковські процеси $\eta(t;x), t \geq 0, x \in E$ в евклідовому просторі $R^d, d \geq 1$ породжуються процесами марковського відновлення(ПМВ) $(\eta_n, \tau_n), n \geq 0$, де $\eta_n := \eta(\tau_n; x_n)$, $x_n := x(\tau_n)$. ПМВ задаються напівмарковськими ядрами [1,5]:

$$G(u, dv, t; x) := G(u, dv; x)F_u(t), u \in R_d, dv \in \mathcal{R}^d, t \geq 0, x \in E, \tag{2}$$

де умовні розподіли приростів вкладеного ланцюга Маркова $\eta_n, n \geq 0$ визначаються співвідношенням:

$$G(u, dv; x) := \mathbb{P}\{\Delta\eta_{n+1} \in dv | \eta_n = u, x_n = x\}, \Delta\eta_{n+1} := \eta_{n+1} - \eta_n;$$

умовна функція розподілу часу перебування в станах $\theta_{n+1} := \tau_{n+1} - \tau_n$:

$$F_u(t) := \mathbb{P}\{\theta_{n+1} \leq t | \eta_n = u\} = P(\theta_u \leq t), t \geq 0,$$

$\tau_n, n \geq 0$ – моменти відновлення напівмарковського процесу. Позначимо через $\nu(t) := \max\{n : \tau_n \leq t\}$ – рахуючий процес, $\tau(t) := \tau_{\nu(t)}$.

Випадковий процес (1), враховуючи означення $\eta(t), t \geq 0$ та $\theta_n, n \geq 1$, запишемо у розгорнутому вигляді:

$$\xi(t) = \xi(0) + \sum_{n=1}^{\nu(t)} \eta(\theta_n, x(\tau_{n-1})) + \eta(t - \tau(t), x(t)) + \sum_{n=1}^{\nu(t)} \gamma(\theta_n, x(\tau_{n-1})) + \gamma(t - \tau(t), x(t)).$$

Введемо позначення

$$m_k(u) := \int_0^\infty t^k dF_u(t), k = 1, 2; \lambda(u) := 1/m_1(u);$$

$$\eta(t) := \int_0^t \eta(ds; x(s)), \gamma(t) := \int_0^t \gamma(ds; x(s))ds;$$

$$G(x)\varphi(u) := \int_{R^d} G(u, dv; x)\varphi(u + v), u \in R^d.$$

Неперервна складова еволюції $\gamma(t), t \geq 0$ між моментами відновлення τ_n та τ_{n+1}, за умови $x(\tau_n) = x, x \in E$, задається напівгрупами $\Gamma_t(x), t \geq 0$ з генераторами

$$\Gamma(x)\varphi(u) := a(u; x)\varphi'(u) + \int_{R^d} (\varphi(u + v) - \varphi(u) - v\varphi'(u))\Gamma(u, dv; x). \tag{3}$$

Згідно введених вище позначень

$$\xi(t) = \xi(0) + \eta(t) + \gamma(t). \tag{4}$$

Надалі буде важливим той факт, що випадкові процеси $\eta(t)$ та $\gamma(t)$ є однорідними.

2. Компенсуючий оператор. Обчислимо КО розширеного ПМВ

$$\zeta_n := (\xi_n, x_n, \tau_n)\,,$$

де $\xi_n := \xi(\tau_n)$, $x_n := x(\tau_n)$:

Лема 1. *КО* $\zeta_n, n \geq 0$ *задається формулою*

$$L\varphi(u,x,t) = \lambda(u)\left[\int_0^\infty F_u(ds)Q_s\Gamma_s(x)G(x)\varphi(u,x,t+s) - \varphi(u,x,t)\right],$$

для $u \in R^d, x \in E, t \geq 0$.

Доведення. Згідно означення КО [1]:

$$L\varphi(u,x,t) := \lambda(u)\mathbb{E}[\varphi\left(\xi_{n+1}, x_{n+1}, \tau_{n+1}\right) - \varphi\left(\xi_n, x_n, \tau_n\right) | \left(\xi_n, x_n, \tau_n\right) = (u,x,t)] =$$

$$\lambda(u)\mathbb{E}[\varphi\left(u + \Delta\xi_{n+1}, x + \Delta x_{n+1}, t + \Delta\tau_{n+1}\right) - \varphi\left(u,x,t\right) | \left(\xi_n, x_n, \tau_n\right) = (u,x,t)],$$

де $\Delta\xi_{n+1} := \xi_{n+1} - \xi_n$, $\Delta x_{n+1} := x_{n+1} - x_n = x(\theta_{n+1})$, $\Delta\tau_{n+1} := \tau_{n+1} - \tau_n = \theta_{n+1}$. Згідно (4) приріст $\Delta\xi_{n+1}$ рівний

$$\Delta\xi_{n+1} = \Delta\eta_{n+1} + \Delta\gamma_{n+1},$$

де $\Delta\eta_{n+1} := \eta(\tau_{n+1}) - \eta(\tau_n) = \eta(\theta_{n+1})$, $\Delta\gamma_{n+1} := \gamma(\tau_{n+1}) - \gamma(\tau_n) = \gamma(\theta_{n+1})$.

Тоді

$$L\varphi(u,x,t) = \lambda(u)\left[\int_0^\infty F_u(ds)Q_s\Gamma_s(x)G(x)\varphi(u,x,t+s) - \varphi(u,x,t)\right].$$

Пояснимо дану формулу. Найперше потрібно вказати, що напівгрупа Q_s діє по $x \in E$, напівгрупи $\Gamma_s(x)$ та оператори $G(x)$ – по $u \in R^d$. При фіксованих $\tau_n = t, \tau_{n+1} = t + s$, одержимо фіксований час перебування у стані $\theta_{n+1} = s$. Обчислимо умовне математичне сподівання для приростів $\Delta\xi(s)$ та $\Delta x(s)$:

$$\mathbb{E}[\varphi\left(u + \xi(s), x + x(s), t + s\right) - \varphi\left(u,x,t\right) | \left(\xi_n, x_n, \tau_n\right) = (u,x,t)] =$$

$$\mathbb{E}[\varphi\left(u + \eta(s) + \gamma(s), x + x(s)\right) - \varphi\left(u,x,t\right) | \left(\xi_n, x_n, \tau_n\right) = (u,x,t)] =$$

$$= Q_s\Gamma_s(x)G(x)\varphi(u,x,t+s) - \varphi(u,x,t).$$

Усереднюючи останню формулу за розподілом θ_{n+1}, отримаємо твердження леми. Лема 1 доведена.

3. Випадкові еволюції у схемі усереднення. Специфіка задачі усереднення полягає в тому, щоб забезпечити усереднення НМВЕ на зростаючих інтервалах часу нормуванням моментів стрибків напівмарковського процесу та величини стрибків малим параметром серії $\varepsilon \to 0 (\varepsilon > 0)$. При цьому необхідно нормувати марковський процес переключень так, щоб кількість переключень зростала при $\varepsilon \to 0$, а також так, щоб кількість стрибків напівмарковського процесу між двома сусідніми моментами переключень також зростала при $\varepsilon \to 0$.

До того ж, проблему сингулярного збурення для компенсуючого оператора легко розв'язувати, коли нормування здійснюється малим параметром у цілих степенях $\varepsilon^k, k \in \mathbb{Z}$. Так виникає нормування часу: t/ε^3, а разом з тим і величини стрибків у схемі усереднення: ε^3.

Отже, НМВЕ розглядається у схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon > 0)$ у такому нормуванні:

$$\xi^\varepsilon(t) = \xi(0) + \varepsilon^3[\eta^\varepsilon(t) + \gamma^\varepsilon(t)], \tag{5}$$

$$\eta^\varepsilon(t) := \int_0^{t/\varepsilon^3} \eta(ds; x(\varepsilon s)),\ \gamma^\varepsilon(t) = \int_0^{t/\varepsilon^3} \gamma(ds; x(\varepsilon s)).$$

Для обчислення КО, розглянемо супроводжуючі процеси $\eta(t;x), x \in E$, що задаються напівмарковськими ядрами (2) та $\gamma(t;x), x \in E$ з генераторами (3).

Тоді

$$\Delta\xi_n^\varepsilon := \xi_{n+1}^\varepsilon - \xi_n^\varepsilon = \varepsilon^3[\Delta\eta_n^\varepsilon + \Delta\gamma_n^\varepsilon].$$

Тут, за означенням,

$$\xi_n^\varepsilon := \xi^\varepsilon(\varepsilon^3\tau_n),\ \eta_n^\varepsilon := \eta^\varepsilon(\varepsilon^3\tau_n),\ \gamma_n^\varepsilon := \gamma^\varepsilon(\varepsilon^3\tau_n).$$

Ведемо позначення

$$b(u;x) := \int_{R^d} vG(u, dv; x),$$

$$c(u;x) := a(u;x) + \lambda(u)b(u;x).$$

Розглянемо умови слабкої збіжності для НМВЕ у схемі усереднення, що задається стохастичним адитивним функціоналом (5):

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) *марковський процес переключень є рівномірно ергодичний зі стаціонарним розподілом $\pi(B), B \in \mathcal{E}$;*

2) *функція $c(u;x)$ задовольняє глобальну умову Ліпшиця з константою* L, *що не залежить від x;*

3) *справедлива оцінка*

$$\sup_{x\in E, u\in R^d}\left(\left|\int_{R^d} v^2G(u,dv;x)\right| + \left|\int_{R^d} v^2\Gamma(u,dv;x)\right| + \int_0^\infty s^2F_u(ds)\right) < \infty;$$

4) має місце збіжність початкових умов та їх обмеженість:

$$\xi^\varepsilon(0) \to \xi^0(0), \sup_{\varepsilon>0} \mathbb{E}|\xi^\varepsilon(0)| \le K < \infty.$$

Тоді стохастичний адитивний функціонал $\xi^\varepsilon(t), t \ge 0$ (5) слабко збігається при $\varepsilon \to 0$ до розв'язку диференціального рівняння

$$d\xi^0(t) = \widehat{c}(\xi^0(t))dt, \tag{6}$$

що задовольняє початкову умову

$$\xi^0(0) = \xi_0, \tag{7}$$

де

$$\widehat{c}(u) := \int_E \pi(dx)(a(u;x) + \lambda(u)b(u;x)).$$

Визначимо випадковий процес $\zeta^\varepsilon(t)$, породжений сім'єю розширеного ПМВ

$$\zeta_n^\varepsilon := (\xi_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon, \tau_n^\varepsilon). \tag{8}$$

де $\xi_n^\varepsilon := \varepsilon^3\xi(\tau_n), x_n^\varepsilon := x(\varepsilon^2\tau_n), \tau_n^\varepsilon := \varepsilon^3\tau_n$.

Лема 2. *КО (8) задається формулою*

$$L^\varepsilon\varphi(u,x,t) = \varepsilon^{-3}\lambda(u)\left[\int_0^\infty F_u(ds)Q_{\varepsilon^2 s}G^\varepsilon(x)\Gamma_s^\varepsilon(x)\varphi(u,x,t+\varepsilon^3 s) - \varphi(u,x,t)\right],$$

де I – одиничний оператор, оператори $G^\varepsilon(x), x \in E$ визначені наступним чином:

$$G^\varepsilon(x)\varphi(u) := \int_{R^d} G(u,dv;x)\varphi(u+\varepsilon^3 v),$$

напівгрупи $\Gamma_s^\varepsilon(x), x \in E$ породжуються генераторами

$$\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(u) := \varepsilon^3 a(u;x)\varphi'(u) + \int_{R^d}(\varphi(u+\varepsilon^3 v) - \varphi(u) - \varepsilon^3 v\varphi'(u))\Gamma(u,dv;x). \tag{9}$$

Доведення. Згідно означення, КО для (8) рівний

$$L^\varepsilon\varphi(u,x,t) := \mathbb{E}\{\varphi(\zeta_{n+1}^\varepsilon) - \varphi(\zeta_n^\varepsilon)|\zeta_n^\varepsilon = (u,x,t)\}/E\theta_u^\varepsilon =$$

$$\mathbb{E}\{\varphi(\xi_n^\varepsilon + \Delta\xi_{n+1}^\varepsilon, x_n^\varepsilon + \Delta x_{n+1}^\varepsilon, \tau_n^\varepsilon + \Delta\tau_{n+1}^\varepsilon) - \varphi(\xi_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon, \tau_n^\varepsilon)|\zeta_n^\varepsilon = (u,x,t)\}/E\theta_u^\varepsilon.$$

Оскільки $\tau_n^\varepsilon = \varepsilon^3\tau_n$, то час перебування у станах рівний $\theta_n^\varepsilon = \varepsilon^3\theta_n$, тобто

$$E\theta_u^\varepsilon = \varepsilon^3 m_1(u).$$

Зауважимо, що справедливі рівності

$$\Delta\xi_{n+1}^\varepsilon = \varepsilon^3\Delta\xi_{n+1} = \varepsilon^3(\eta(\theta_{n+1}) + \gamma(\theta_{n+1})),$$

$$\Delta x_{n+1}^{\varepsilon} = x_{n+1}^{\varepsilon} - x_n^{\varepsilon} = x(\varepsilon^2 \tau_{n+1}) - x(\varepsilon^2 \tau_n) = x(\varepsilon^2 \theta_{n+1}).$$

Тоді

$$L^{\varepsilon}\varphi(u,x,t) =$$
$$= \mathbb{E}\{\varphi(u + \varepsilon^3(\eta(\theta_{n+1}) + \gamma(\theta_{n+1})), x + x(\varepsilon^2\theta_{n+1}), t + \varepsilon^3\theta_{n+1}) - \varphi(u,x,t)|\zeta_n^{\varepsilon} =$$
$$= (u,x,t)\}/E\theta_u^{\varepsilon} = \varepsilon^{-3}\lambda(u)\left[\int_0^{\infty} F_u(ds)Q_{\varepsilon^2 s}G^{\varepsilon}(x)\Gamma_s^{\varepsilon}(x)\varphi(u,x,t+\varepsilon^3 s) - \varphi(u,x,t)\right],$$

що і потрібно було довести. Лема 2 доведена.

Розглянемо асимптотичне зображення КО L^{ε}:

Лема 3. *Компенсуючий оператор L^{ε} на тест-функціях $\varphi \in C^2(R^d \times E)$ має асимптотичне зображення*

$$L^{\varepsilon}\varphi(u,x) = \varepsilon^{-1}\mathbb{Q}\varphi(\cdot,x) + C(x)\varphi(u,\cdot) + l^{\varepsilon}\varphi(u,x), \tag{10}$$

де

$$C(x)\varphi(u) := c(u;x)\varphi'(u),$$
$$\sup_{u\in R^d, x\in E} |l^{\varepsilon}\varphi(u,x)| \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Доведення. Скористаємося лемою 1 та алгебраїчною тотожністю

$$ab - 1 = (a-1) + (b-1) + (a-1)(b-1). \tag{11}$$

Тоді

$$L^{\varepsilon}\varphi(u,x) = \varepsilon^{-3}\lambda(u)\left[\int_0^{\infty} F_u(ds)Q_{\varepsilon^2 s}G^{\varepsilon}(x)\Gamma_s^{\varepsilon}(x) - I\right]\varphi(u,x) =$$

$$\varepsilon^{-3}\lambda(u)\int_0^{\infty} F_u(ds)\left[Q_{\varepsilon^2 s}\Gamma_s^{\varepsilon}(x) - I\right]\varphi(u,x) + \varepsilon^{-3}\lambda(u)\left[G^{\varepsilon}(x) - I\right]\varphi(u,x) +$$

$$\varepsilon^{-3}\lambda(u)\int_0^{\infty} F_u(ds)\left[G^{\varepsilon}(x) - I\right]\left[Q_{\varepsilon^2 s}\Gamma_s^{\varepsilon}(x) - I\right]\varphi(u,x).$$

Розглянемо перший доданок. Використаємо знову алгебраїчну тотожність (11):

$$\varepsilon^{-3}\lambda(u)\int_0^{\infty} F_u(ds)\left(\Gamma_s^{\varepsilon}(x)Q_{\varepsilon^2 s} - I\right) = F_{\Gamma}^{\varepsilon} + F_Q^{\varepsilon} + l_2^{\varepsilon}(x),$$

де

$$F_{\Gamma}^{\varepsilon} := \varepsilon^{-3}\lambda(u)\int_0^{\infty} F_u(ds)\left(\Gamma_s^{\varepsilon}(x) - I\right),$$

$$F_Q^{\varepsilon} := \varepsilon^{-3}\lambda(u)\int_0^{\infty} F_u(ds)\left(Q_{\varepsilon^2 s} - I\right),$$

$$l_1^\varepsilon := \varepsilon^{-3}\lambda(u)\int_0^\infty F_u(ds)\left(\Gamma_s^\varepsilon(x) - I\right)\left(Q_{\varepsilon^2 s} - I\right).$$

Тоді згідно означення напівгрупи $\Gamma_s^\varepsilon(x)$ та генератора $\Gamma^\varepsilon(x)$:

$$F_\Gamma^\varepsilon\varphi(u) = \varepsilon^{-3}\lambda(u)\int_0^\infty F_u(ds)\Gamma^\varepsilon(x)\int_0^s \Gamma_{s_1}^\varepsilon(x)ds_1\varphi(u) =$$

$$= \varepsilon^{-3}\lambda(u)\Gamma^\varepsilon(x)\int_0^\infty \overline{F}_u(s)\Gamma_s^\varepsilon(x)ds\varphi(u) = a(u;x)\varphi'(u) + l_2^\varepsilon(x)\varphi(u),$$

де $\overline{F}_u(s) := 1 - F_u(s)$ та

$$l_2^\varepsilon(x)\varphi(u) := \varepsilon^{-3}\lambda(u)\left(\int_{R^d}\left(\varphi(u+\varepsilon^3 v) - \varphi(u) - \varepsilon^3 v\varphi'(u)\right)\Gamma(u,dv;x) + \right.$$

$$\left. + \Gamma^\varepsilon(x)\int_0^\infty \overline{F}_u(s)(\Gamma_s^\varepsilon(x) - I)ds\varphi(u)\right) =$$

$$\varepsilon^{-3}\lambda(u)\left(\frac{1}{2}\int_{R^d}\varepsilon^6 v^2\varphi''(u + k(v)\varepsilon v)\Gamma(u,dv;x) + \right.$$

$$\left. + (\Gamma^\varepsilon(x))^2\int_0^\infty \overline{F}_u(s)\int_0^s \Gamma_{s_1}^\varepsilon(x)\varphi(u)ds_1 ds\right) =$$

$$\varepsilon^{-3}\lambda(u)\left(\frac{1}{2}\int_{R^d}\varepsilon^6 v^2\varphi''(u + k(v)\varepsilon v)\Gamma(u,dv;x) + (\Gamma^\varepsilon(x))^2\int_0^\infty \overline{F}_u^{(2)}(s)\Gamma_s^\varepsilon(x)\varphi(u)ds\right),$$

$|k(v)| \le 1$, $\overline{F}_u^{(2)}(s) := \int_s^\infty \overline{F}_u(s_1)ds_1$. При виконанні умови 3 теореми для функції $\varphi \in C^2(R^d)$

$$\sup_{u\in R^d, x\in E}|l_2^\varepsilon(x)\varphi(u)| \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Розглянемо F_Q^ε:

$$F_Q^\varepsilon\varphi(x) = \varepsilon^{-1}\lambda(u)\int_0^\infty F_u(ds)\mathbb{Q}\int_0^s Q_{\varepsilon^2 s_1}ds_1\varphi(x) =$$

$$\varepsilon^{-1}\lambda(u)\mathbb{Q}\int_0^\infty \overline{F}_u(s)Q_{\varepsilon^2 s}ds\varphi(x) = \varepsilon^{-1}\mathbb{Q}\varphi(x) + l_3^\varepsilon(u)\varphi(x),$$

де

$$l_3^\varepsilon(u)\varphi(x) := \varepsilon^{-1}\lambda(u)\mathbb{Q}\int\limits_0^\infty \overline{F}_u(s)\left(Q_{\varepsilon^2 s} - I\right) ds\varphi(x) =$$

$$\varepsilon\lambda(u)\mathbb{Q}^2\int\limits_0^\infty F_u^{(2)}(s)Q_{\varepsilon^2 s}ds\varphi(x).$$

За умов 1 та 3 теореми для функції $\varphi \in C(E)$ справедливе співвідношення:

$$\sup_{u\in R^d, x\in E} |l_3^\varepsilon(u)\varphi(x)| \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Розглянемо знехтуючий член l_1^ε на тест функціях $\varphi \in C^2(R^d \times E)$:

$$l_1^\varepsilon\varphi(u,x) = \varepsilon^{-1}\lambda(u)\Gamma^\varepsilon(x)\mathbb{Q}\int\limits_0^\infty F_u(ds)\int\limits_0^s \Gamma_t^\varepsilon(x)dt\int\limits_0^s Q_{\varepsilon^2 t}(x)dt\varphi(u,x).$$

Використовуючи означення $\Gamma^\varepsilon(x)$ (9) та умови 1, 3 теореми для тест функцій $\varphi \in C^2(R^d \times E)$ одержимо співвідношення

$$\sup_{u\in R^d, x\in E} |l_1^\varepsilon\varphi(x)| \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Скориставшись формулою Тейлора, отримаємо:

$$\varepsilon^{-3}\lambda(u)\left[G^\varepsilon(x) - I\right]\varphi(u,x) = \varepsilon^{-3}\lambda(u)\int\limits_{R^d} G(u,dv;x)(\varphi(u+\varepsilon^3 v, x) - \varphi(u,x)) =$$

$$\lambda(u)b(u;x)\varphi'(u,x) + l_4^\varepsilon(x)\varphi(u,x),$$

де

$$l_4^\varepsilon(x)\varphi(u,x) := \varepsilon^{-3}\lambda(u)\int\limits_{R^d} G(u,dv;x)(\varphi(u+\varepsilon^3 v,x) - \varphi(u,x) - \varepsilon^3 v\varphi'(u,x)).$$

Для тест функцій $\varphi \in C^2(R^d \times E)$ вірна оцінка:

$$|l_1^\varepsilon(x)\varphi(u,x)| \le \varepsilon^{-3}\lambda(u)\left|\int\limits_{R^d} G(u,dv;x)\varepsilon^6 v^2\varphi''(u+k_v\varepsilon^3 v,x)\right| \le$$

$$\le \varepsilon^3 K\lambda(u)\int\limits_{R^d} v^2 G(u,dv;x),$$

де $|k_v| \le 1, K := \sup\limits_{u\in R^d, x\in E} |\varphi''(u,x)|$

Згідно побудови напівгруп $\Gamma_\varepsilon^t(x), Q_{\varepsilon^2 t}, t \ge 0, x \in E$ та операторів $G^\varepsilon(x), x \in E$ зрозуміла оцінка

$$\sup_{u\in R^d, x\in E}\left|\varepsilon^{-3}\lambda(u)\int\limits_0^\infty F_u(ds)\left[G^\varepsilon(x) - I\right]\left[Q_{\varepsilon^2 s}\Gamma_s^\varepsilon(x) - I\right]\varphi(u,x)\right| \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0$$

для тест функцій $\varphi \in C^2(R^d \times E)$.

Лема 3 доведена.

Доведення теореми 1. Для $\varphi \in C(E)$ зрозуміле співвідношення

$$\Pi\varphi(x) = \int_E \varphi(x)\pi(dx) =: \widehat{\varphi}.$$

Позначимо для $\varphi \in C^1(R^d)$ усереднений оператор

$$\widehat{C}\varphi(u) := \widehat{c}(u)\varphi'(u), \tag{12}$$

що породжує усереднене диференціальне рівняння (6).

Проблема сингуляргого збурення (див. [1], Розділ 5) для оператора $L_0^\varepsilon = \varepsilon^{-1}\mathbb{Q} + C(x)$ розв'язується на збурених тест функціях $\varphi^\varepsilon = \varphi + \varepsilon\varphi_1$:

$$L_0^\varepsilon\varphi^\varepsilon = \varepsilon^{-1}Q\varphi + [C(x)\varphi + Q\varphi_1] + \varepsilon C(x)\varphi_1.$$

Згідно твердження 5.6. [1] розв'язок проблеми сингулярного збурення для оператора L_0^ε має вигляд

$$L_0^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u,x) = \widehat{C}\varphi(u) + \varepsilon l^\varepsilon(x)\varphi(u)$$

на збурених функціях $\varphi^\varepsilon(u,x) = \varphi(u) + \varepsilon\varphi_1(u,x)$, $\varphi \in C^2(R^d)$, де усереднений оператор $\widehat{C}$ визначений (12),

$$l^\varepsilon(x) = C(x)R_0(C(x) - \widehat{C}).$$

Таким чином, розв'язок проблеми сингулярного збурення для L_0^ε та розклад (10) дозволяє зробити висновок, що НМВЕ $\xi^\varepsilon(t), t \geq 0$ (5) у схемі усереднення слабко збігається до розв'язку диференціального рівняння (6), що задається генератором $\widehat{C}$ (12) та початковою умовою (7).

Теорема 1 доведена.

Автор висловлює щиру подяку академіку НАН України Королюку В.С. за постановку задачі та цінні зауваження щодо методів її розв'язання.

1. *Koroliuk V.S., Limnios N.* Stochastic Systems in Merging Phase Space. – Singapore: World Scientific Publishers, 2005. – 331 p.
2. *Королюк В.С.* Марковские случайные эволюции с независимыми приращениями в схеме асимптотически малой диффузии // Укр. матем. журн. – 2010. – 57, №6. – С. 22-26.
3. *Sviridenko M.N.* Martingale characterization of limit distributions in the space of functions without discontinuities of second kind // Math. Notes. – 1998. – 43, No 5. – P. 398-402.
4. *Pinsky M.A.* Lectures on Random Evolutions. – Singapore: World Scientific Publishers, 1991. – 135 p.
5. *Королюк В.С., Турбин А.Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. – К.: Наукова думка, 1976. – 184 с.
6. *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы. – М. Физматгиз, 1967. – 860 с.

Одержано 10.10.2012