УДК 517.9:519.46

М.І. Сєров, М.М. Сєрова, Т.О. Карпалюк (Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка)

ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПІВ СИМЕТРІЇ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕННЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ НАВ'Є–СТОКСА

There was conducted a generalization of the three–dimensional system of convection–diffusion equations, invariant with respect to a generalized Galilean algebra, to the system of type Navier–Stokes preserving invariance relatively generalized Galilean algebra (in the case of one and two spatial variables).

Проведено узагальнення тривимірної системи рівнянь конвекції дифузії, інваріантної відносно узагальненої алгебри Галілея, до системи типу Нав'є–Стокса зі збереженням інваріантності відносно узагальненої алгебри Галілея (у випадку однієї та двох просторових змінних).

Вступ Система рівнянь Нав'є–Стокса, названа за іменами французького фізика Клода–Луї Нав'є та британського математика Джорджа Габріеля Стокса, є однією з найважливіших у гідродинаміці. Вона застосовується у математичному моделюванні багатьох природних явищ і технічних задач. Варіації системи рівнянь Нав'є–Стокса використовують для опису руху повітряних мас атмосфери, зокрема, при формуванні прогнозу погоди. Одним із застосувань цієї системи є опис течій у мантії Землі. На сьогоднішній день багато математичних моделей використовують для моделювання нестаціонарних режимів магістральних газопроводів, але всі вони базуються на системі рівнянь Нав'є–Стокса. Ми розглянемо одну з модифікацій системи Нав'є–Стокса:

$$\begin{aligned}
&\vec{u_0} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \Delta\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p,\\
&\rho_t + div(\rho\vec{u}) = 0,\\
&p = f(\rho),
\end{aligned} \tag{1}$$

де $\vec{u} = (u^1, u^2, ..., u^n)$ — векторне поле швидкостей, $u^a = u^a(x)$, $\rho = \rho(x)$ — густина, $p = p(x)$ — тиск рідини, $x = (x_0, \vec{x})$, $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $a = \overline{1, n}$, $f(\rho)$ — довільна гладка функція.

1. Постановка задачі та позначення Важко переоцінити значимість системи (1) у математичному моделюванні різних явищ гідродинаміки, але, незважаючи на численні переваги, система рівнянь Нав'є–Стокса має один суттєвий недолік: використовуватись вона може лише для опису процесів, де розмірність векторного поля $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ співпадає з кількістю незалежних просторових змінних $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Звичайно, в природі існують гідродинамічні процеси, в яких ці дві величини не співпадають, тобто $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$, а $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, де $m \neq n$. Тоді для моделювання таких процесів система Нав'є–Стокса не може бути застосована, і треба використовувати якісь інші рівняння чи системи. Як же отримати такі системи? У цій роботі ми пропонуємо метод, оснований на принципах симетрії, при якому у якості моделі, що має різну розмірність векторного поля і простору незалежних змінних, вибираємо такі узагальнення системи Нав'є–Стокса, які повторюють її симетрійні властивості.

Слід зазначити, що основу системи рівнянь Нав'є–Стокса складає система рівнянь Бюргерса

$$\vec{u_0} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \Delta\vec{u} = 0, \tag{2}$$

де $\vec{u} = \vec{u}(x) \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_0, \vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Ця система інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея вигляду

$$\begin{gathered}\partial_0, \quad \partial_a = \frac{\partial}{\partial_a}, \quad G_a = x_0\partial_a + \partial_{u^a}, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - u^a\partial_{u^a}, \\ \Pi = x_0^2\partial_0 + x_0 x_a\partial_a + (x_a - x_0u^a)\partial_{u^a}.\end{gathered} \tag{3}$$

Як відомо, система рівнянь Бюргерса (2) є узагальненням скалярного рівняння Бюргерса

$$u_0 + uu_1 - u_{11} = 0, \tag{4}$$

де $u = u(x_0, x_1)$, індекси внизу означають диференціювання за відповідною змінною; і її алебра інваріантності (3) відповідає алгебрі $AG_2(1,1)$ рівняння Бюргерса (4):

$$\begin{gathered}\partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0\partial_1 + \partial_u, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u\partial_u, \\ \Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + (x_1 - x_0u)\partial_u.\end{gathered} \tag{5}$$

У свою чергу, скалярне рівняння Бюргерса можна отримати при дослідженні максимальної алебри інваріантності нелінійного рівняння конвекції дифузії

$$u_0 + f(u)u_1 - u_{11} = 0. \tag{6}$$

Як відомо, це рівняння інваріантне відносно узагальненої алгебри Галілея тільки тоді, коли воно еквівалентне рівнянню Бюргерса.

2. Узагальнення рівняння (6) **на випадок системи та її інваріантність відносно узагальненої алгебри Галілея.** У літературі спостерігалися спроби замінити систему рівнянь Нав'є –Стокса іншою системою, в якій $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$, а $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, де m і n не обов'язково рівні. На нашу думку, це потрібно робити так. Спочатку розглянемо узагальнення скалярного рівняння (6) системою рівнянь конвекції дифузії

$$U_0 = \Delta U + F^a(U)U_a, \tag{7}$$

де $U \in \mathbb{R}^m$, $x = (x_0, \vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $U_a = \dfrac{\partial U}{\partial x_a}$, $F^a(U)$ — довільні функціональні матриці розмірності $m \times m$, $a = \overline{1, n}$, та дослідимо її симетрійні властивості. Система (7) при конкретних нелінійностях та значеннях n, m знаходить широке застосування при описі різноманітних фізичних, хімічних, біологічних процесів. Так, математичні моделі, що базуються на цій системі, застосовуються у макрокінетиці, основний зміст якої є вивчення ролі дифузії, теплопередачі та конвекції в протіканні хімічних реакцій. Розв'язання широкого кола науково–технічних проблем передбачає дослідження явища вільної конвекції. Процес тепломасообміну має велике практичне значення для інтенсифікації теплоенергетичних і хімікотехнологічних процесів у різних сферах промисловості. Для нас ця система важлива ще й тому, що кількість просторових змінних і розмірність векторного поля U тут може бути як однаковою, так і різною.

Спочатку перед нами була поставлена задача: знайти такі матриці $F^a(U)$, при яких система (7) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея. Цю задачу ми розв'язали для випадків $m \leq 3$ і $n \leq 3$. Зокрема нами встановлено, що при $m \leq n$ система (7) галілеївськи неінваріантна, при $m = n$ у класі систем (7) лише система Бюргерса (2) інваріантна відносно алгебри $AG_2(1,n)$ (для випадку $m = n = 2$ див. роботу [1]). Якщо ж $m > n$, то тут ситуація наступна:

a) $(m,n) = (2,1)$. Встановлено, що існує 5 локально нееквівалентних систем класу (7), інваріантних відносно алгебри $AG_2(1,1)$ (див. роботу [2]);

b) $(m,n) = (3,1)$. Нами встановлено, що існує 18 локально нееквівалентних систем класу (7), інваріантних відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$;

c) $(m,n) = (3,2)$. У цьому випадку існує 4 локально нееквівалентні системи класу (7), інваріантні відносно алгебри $AG_2(1,2)$.

Справедливі наступні твердження.

Теорема 1. *Система (7) при $m = 3$, $n = 1$ інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея*

$$\begin{gathered} AG_2\,(1,1) =< \partial_0, \partial_1, G = x_0\partial_1 + Q_1, D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + Q_2, \\ \Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + x_1Q_1 + x_0Q_2 + Q_3 > \end{gathered} \tag{8}$$

тоді і тільки тоді, коли вона має вигляд:

$$\begin{aligned} &w_0^1 + w^1w_1^1 = w_{11}^1 + \lambda_{12}w_1^2 + \lambda_{13}(w^3)^{2l-1}w_1^3 + G^1, \\ &w_0^2 + w^1w_1^2 = w_{11}^2 - 2w^2w_1^1 + \lambda_{22}(w^3)^l w_1^2 + \lambda_{23}(w^3)^{3l-1}w_1^3 + G^2, \\ &w_0^3 + w^1w_1^3 = w_{11}^3 - \frac{w^3}{l}w_1^1 + \lambda_{32}(w^3)^{1-l}w_1^2 + \lambda_{33}(w^3)^l w_1^3 + G^3, \end{aligned} \tag{9}$$

при $Q_1 = \partial_{w^1}$, $Q_2 = -w^1\partial_{w^1} - 2w^2\partial_{w^2} - \dfrac{1}{l}w^3\partial_{w^3}$, $Q_3 = \partial_{w^2}$, λ_{ij} — довільні сталі, $l \neq 0$ — стала, значення якої, а також функцій w^a, G^a подані у таблиці 1; або

$$\begin{aligned} &w_0^1 + w^1w_1^1 = w_{11}^1 + \psi(w^3)w_1^2 + G^1, \\ &w_0^2 + w^1w_1^2 = w_{11}^2 - 2w^2w_1^1 + G^2, \\ &w_0^3 + w^1w_1^3 = w_{11}^3 + G^3, \end{aligned} \tag{10}$$

при $Q_1 = \partial_{w^1}$, $Q_2 = -w^1\partial_{w^1} - 2w^2\partial_{w^2}$, $Q_3 = \partial_{w^2}$, $\psi(w^3)$ — довільна функція, значення w^a, G^a подані у таблиці 2; або

$$\begin{aligned} &w_0^1 + w^1w_1^1 = w_{11}^1 + (w^2)^{2l-1}\psi^{12}w_1^2 + (w^2)^{2l}\psi^{13}w_1^3 + G^1, \\ &w_0^2 + w^1w_1^2 = w_{11}^2 - \frac{w^2}{l}w_1^1 + (w^2)^l\psi^{22}w_1^2 + (w^2)^{l+1}\psi^{23}w_1^3 + G^2, \\ &w_0^3 + w^1w_1^3 = w_{11}^3 + (w^2)^{l-1}\psi^{32}w_1^2 + (w^2)^l\psi^{33}w_1^3 + G^3, \end{aligned} \tag{11}$$

при $Q_1 = \partial_{w^1}$, $Q_2 = -w^1\partial_{w^1} - \dfrac{1}{l}w^2\partial_{w^2}$, $Q_3 = 0$, $\psi^{ab}(w^3)$ — довільні функції, $a, b = \overline{1,3}$, $l \neq 0$ — стала, значення якої, а також функцій w^a, G^a подані в таблиці 3.

Таблиця 1. Набір значень l, w^a, G^a для системи (9).

№	l	w^a	G^a
1.	l	$w^1 = u^1$ $w^2 = u^2 - \frac{(u^1)^2}{2}$ $w^3 = u^3$	$G^1 = 0$ $G^2 = (w^1_1)^2$ $G^3 = 0$
2.	1	$w^1 = u^1$ $w^2 = u^2 - \frac{(u^1)^2}{2}$ $w^3 = e^{u^3}$	$G^1 = 0$ $G^2 = (w^1_1)^2$ $G^3 = -\frac{(w^3_1)^2}{w^3}$
3.	$\frac{l}{2}$	$w^1 = u^1$ $w^2 = u^2 - \frac{(u^1)^2}{2}+$ $+u^3 \ln \sqrt{u^3}$ $w^3 = u^3$	$G^1 = 0$ $G^2 = (w^1_1)^2 - \frac{(w^3_1)^2}{2w^3}$ $G^3 = 0$
4.	l	$w^1 = \frac{u^2}{u^1}$ $w^2 = \frac{u^3}{u^1} - \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{u^1}\right)^2$ $w^3 = u^1$	$G^1 = \frac{2w^1_1 w^3_1}{w^3} - \frac{2w^2}{w^3} w^3_1$ $G^2 = (w^1_1)^2 + \frac{2w^2_1 w^3_1}{w^3}$ $G^3 = 0$
5.	$\frac{1}{3}$	$w^1 = u^1$ $w^2 = u^2 - \frac{(u^1)^2}{2}$ $w^3 = u^3 - u^1 u^2 + \frac{(u^1)^3}{3}$	$G^1 = 0$ $G^2 = (w^1_1)^2$ $G^3 = 2w^1_1 w^2_1 - 2w^2 w^2_1$
6.	$-\frac{1}{2}$	$w^1 = \frac{u^2}{u^1}$ $w^2 = \frac{u^3}{u^1} - \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{u^1}\right)^2 -$ $-\frac{1}{2u^1} \ln u^1$ $w^3 = u^1$	$G^1 = \frac{2w^1_1 w^3_1}{w^3} - \frac{2w^2}{w^3} w^3_1$ $G^2 = (w^1_1)^2 + \frac{2w^2_1 w^3_1}{w^3} - \frac{(w^3_1)^2}{2(w^3)^3}$ $G^3 = 0$

Таблиця 2. Набір значень w^a, G^a для системи (10).

№	w^a	G^a
1.	$w^1 = u^1$ $w^2 = u^2 - \frac{(u^1)^2}{2}$ $w^3 = u^3$	$G^1 = 0$ $G^2 = (w_1^1)^2$ $G^3 = 0$
2.	$w^1 = \frac{u^2}{u^1}$ $w^2 = \frac{u^3}{u^1} - \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{u^1}\right)^2$ $w^3 = u^1$	$G^1 = \frac{2w_1^1 w_1^3}{w^3} - \frac{2w^2}{w^3} w_1^3$ $G^2 = (w_1^1)^2 + \frac{2w_1^2 w_1^3}{w^3}$ $G^3 = 0$

Таблиця 3. Набір значень l, w^a, G^a для системи (11).

№	l	w^a	G^a
1	2	3	4
1.	1	$w^1 = u^1$ $w^2 = e^{-u^2}$ $w^3 = u^3 e^{-ku^2}$	$G^1 = 0$ $G^2 = -\frac{(w_1^2)^2}{w^2}$ $G^3 = -\frac{2kw_1^2 w_1^3}{w^2} + \frac{k^2 w^3 (w_1^2)^2}{(w^2)^2}$
2.	1	$w^1 = u^1 + u^3 \ln u^3$ $w^2 = u^3$ $w^3 = u^2 + \ln u^3$	$G^1 = -\frac{(w_1^2)^2}{w^2}$ $G^2 = 0$ $G^3 = \frac{(w_1^2)^2}{(w^2)^2}$
3.	1	$w^1 = u^1$ $w^2 = e^{-u^2}$ $w^3 = u^3 - \frac{(u^2)^2}{2}$	$G^1 = 0$ $G^2 = -\frac{(w_1^2)^2}{w^2}$ $G^3 = \frac{(w_1^2)^2}{(w^2)^2}$
4.	l	$w^1 = u^1$ $w^2 = u^2$ $w^3 = u^3 (u^2)^k$	$G^1 = 0$ $G^2 = 0$ $G^3 = \frac{k(k+1) w^3 (w_1^2)^2}{(w^2)^2} - \frac{2kw_1^2 w_1^3}{w^2}$
5.	1	$w^1 = u^1 + u^3 \ln u^3$ $w^2 = u^3$ $w^3 = u^2 (u^3)^k$	$G^1 = -\frac{(w_1^2)^2}{w^2}$ $G^2 = 0$ $G^3 = \frac{k(k+1) w^3 (w_1^2)^2}{(w^2)^2} - \frac{2kw_1^2 w_1^3}{w^2}$
6.	l	$w^1 = u^1$ $w^2 = u^2$	$G^1 = 0$ $G^2 = 0$

1	2	3	4
		$w^3=\dfrac{u^3}{u^2}+l\ln u^2$	$G^3=\dfrac{2w_1^2w_1^3}{w^2}-\dfrac{l(w_1^2)^2}{(w^2)^2}$
7.	1	$w^1=u^1$ $w^2=e^{\frac{u^3}{u^2}}$ $w^3=u^2$	$G^1=0$ $G^2=\dfrac{2w_1^2w_1^3}{w^3}-\dfrac{(w_1^2)^2}{w^2}$ $G^3=0$
8.	1	$w^1=u^1+u^2\ln u^2+u^3\ln u^3$ $w^2=u^3$ $w^3=\dfrac{u^2}{u^3}$	$G^1=-\dfrac{w^3(w_1^2)^2}{w^2}-\dfrac{w^2(w_1^3)^2}{w^3}-$ $-\dfrac{(w_1^2)^2}{w^2}-2w_1^2w_1^3,$ $G^2=0 \quad G^3=\dfrac{2w_1^2w_1^3}{w^2}$
9.	1	$w^1=u^1+u^3\ln u^2+\dfrac{1}{2}u^2\ln^2 u^2$ $w^2=u^2$ $w^3=\dfrac{u^3}{u^2}+\ln u^2$	$G^1=-\dfrac{w^3(w_1^2)^2}{w^2}-2w_1^2w_1^3+\dfrac{(w_1^2)^2}{w^2}$ $G^2=0$ $G^3=\dfrac{2w_1^2w_1^3}{w^2}-\dfrac{(w_1^2)^2}{(w^2)^2}$
10.	1	$w^1=u^1$ $w^2=e^{-\frac{1}{p}\arctan\frac{u^3}{u^2}}$ $w^3=\ln((u^2)^2+(u^3)^2)-\dfrac{2k}{p}\arctan\dfrac{u^3}{u^2}$	$G^1=0$ $G^2=w_1^2w_1^3-(2k+1)\dfrac{(w_1^2)^2}{w^2}$ $G^3=\dfrac{(w_1^3)^2}{2}-2(p^2+k^2)\dfrac{(w_1^2)^2}{(w^2)^2}$

У таблиці 3 $p\neq 0$, k — довільні сталі.

Доведення. Для доведення застосуємо алгоритм С. Лі (див., наприклад, [3]– [5]). Інфінітезимальний оператор алгебри інваріантності системи (7) (у випадку $m=3$, $n=1$) має вигляд:

$$X=\xi^\mu(x,u)\partial_\mu+\eta^a(x,u)\partial_{u^a}, \tag{12}$$

де $\mu=0,1$, $a=\overline{1,3}$.

З умови інваріантності системи (7) відносно оператора (12)

$$\tilde X[u_0^a-u_{11}^a-F^{ab}u_1^b]\,|_{u_0^a=u_{11}^a+F^{ab}u_1^b}=0,$$

де $\tilde X$ — продовження оператора X, маємо систему визначальних рівнянь для знаходження координат оператора X та уточнення невідомих функцій:

$$\xi_1^0=\xi_{u^a}^\mu=0,\quad \xi_0^0-2\xi_1^1=0, \tag{13}$$
$$\eta_{u^bu^c}^a=0, \tag{14}$$
$$\eta_1^bF^{ab}-\eta_0^a+\eta_{11}^a=0, \tag{15}$$
$$\eta^cF_{u^c}^{ab}-\eta_{u^c}^aF^{cb}+\eta_{u^b}^cF^{ac}+\xi_1^1F^{ab}+\delta_{ab}\xi_0^1+2\eta_{1u^b}^a=0, \tag{16}$$

де $\mu=0,1$, $a,b,c=\overline{1,3}$, δ_{ab} — символ Кронекера, індекс внизу біля функції означає диференціювання за відповідним аргументом.

Знайдемо матриці $F^a(U)$, при яких система (7) (для $m = 3$, $n = 1$) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея (8). Для знаходження компонент цих матриць необхідно підставити відповідні ξ^μ, η^a ($\mu = 0, 1$, $a = \overline{1,3}$), (одержані із зображень операторів узагальненої алгебри Галілея) у систему визначальних рівнянь (13)–(16), та розв'язати її. Проілюструємо доведення теореми на прикладі зображення алгебри (8):

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0\partial_1 + \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u^1\partial_{u^1} - 2u^2\partial_{u^2},$$
$$\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + x_1(\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}) - x_0(u^1\partial_{u^1} + 2u^2\partial_{u^2}) + k\partial_{u^2},$$

де $k \in \mathbb{R}$ — довільна стала. Це зображення алгебри визначає координати оператора X:

$$\begin{aligned}
&\xi^0 = ax_0^2 + 2\kappa x_0 + d_0,\\
&\xi^1 = ax_0x_1 + \kappa x_1 + gx_0 + d_1,\\
&\eta^1 = a(x_1 - x_0u^1) - \kappa u^1 + g,\\
&\eta^2 = a(x_1u^1 - 2x_0u^2 + k) - 2\kappa u^2 + gu^1,\\
&\eta^3 = 0,
\end{aligned} \tag{17}$$

де a, κ, g, d_μ — довільні сталі, $\mu = 0, 1$. Підставивши (17) у систему визначальних рівнянь (13)–(16), бачимо, що рівняння (13), (14) виконуються тотожньо. Рівняння (15) та (16) після розщеплення за змінними x_0, x_1 зводяться до наступної системи для знаходження функцій $F^{ab}(U)$ та уточнення координат інфінітезимального оператора:

$$(\delta_{c1} + \delta_{c2})\, F^{ab}_{u^c} - \delta_{a2}F^{1b} + \delta_{b1}F^{a2} + \delta_{ab} = 0, \tag{18}$$
$$\left(-\delta_{c1}u^1 - 2\delta_{c2}u^2\right) F^{ab}_{u^c} + \delta_{a1}F^{1b} + 2\delta_{a2}F^{2b} - \delta_{b1}F^{a1} - 2\delta_{b2}F^{a2} + F^{ab} = 0, \tag{19}$$
$$kF^{ab}_{u^2} + 2\delta_{a2}\delta_{b1} = 0, \tag{20}$$
$$\left(\delta_{b1} + \delta_{b2}u^1\right) F^{ab} + \delta_{a1}u^1 + 2\delta_{a2}u^2 = 0. \tag{21}$$

Систему (18)–(21) задовольняє стала $k = 1$ та наступна функціональна матриця

$$F = (F^{ab}) = \begin{pmatrix} -(\psi+1)u^1 & \psi & 0 \\ -2u^2 + (1-\psi)\left(u^1\right)^2 & (\psi-1)u^1 & 0 \\ 0 & 0 & -u^1 \end{pmatrix},$$

де $\psi = \psi(u^3)$ — довільна гладка функція. Здійснивши заміну змінних

$$w^1 = u^1, \quad w^2 = u^2 - \frac{\left(u^1\right)^2}{2}, \quad w^3 = u^3$$

отримуємо систему (10), де w^a, G^a описані у першому пункті таблиці 2.

Аналогічно розв'язавши систему визначальних рівнянь для всіх зображень алгебри (8) та підібравши відповідні заміни, що наведені в таблицях 1-3 отримуємо системи (9), (10), (11), описані у формулюванні теореми. Теорему доведено.

Теорема 2. *Система (7) при $m = 3$, $n = 2$ інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея*

$$\begin{aligned}
AG_2(1,2) = <\partial_0, \partial_a, G_a = x_0\partial_a + Q_a,\\
J_{12} = x_1\partial_2 - x_2\partial_1 + Q_3, D = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a + Q_4,\\
\Pi = {x_0}^2\partial_0 + x_0x_a\partial_a + x_0Q_4 + x_aQ_a + Q_5 >
\end{aligned} \tag{22}$$

тоді і тільки тоді коли вона має вигляд:

$$\begin{aligned}&\vec{u}_0+(\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u}=\Delta\vec{u}+(u^3)^k(\lambda_1\vec{\nabla}u^3+\lambda_2\vec{\nabla}^{\perp}u^3),\\&u^3_0+(\vec{u}\vec{\nabla})u^3=\Delta u^3+u^3(\lambda_3\vec{\nabla}\vec{u}+\lambda_4\vec{\nabla}^{\perp}\vec{u}),\end{aligned}\tag{23}$$

при $Q_a=\partial_{u^a}$, $Q_3=u^1\partial_{u^2}-u^2\partial_{u^1}$, $Q_4=-u^a\partial_{u^a}+2\lambda_3u^3\partial_{u^3}$, $Q_5=0$, $\lambda_3=-\frac{1}{k+1}$; *або*

$$\begin{aligned}&\vec{u}_0+(\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u}=\Delta\vec{u},\\&u^3_0+(\vec{u}\vec{\nabla})u^3=\Delta u^3+\varphi\vec{\nabla}^{\perp}\vec{u},\end{aligned}\tag{24}$$

при $Q_a=\partial_{u^a}$, $Q_3=u^1\partial_{u^2}-u^2\partial_{u^1}$, $Q_4=-u^a\partial_{u^a}$, $Q_5=0$; *або*

$$\begin{aligned}&\vec{u}_0+(\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u}=\Delta\vec{u},\\&u^3_0+(\vec{u}\vec{\nabla})u^3=\Delta u^3+\lambda\vec{\nabla}^{\perp}\vec{u}+sinu^3\vec{D}\vec{u}+cosu^3\vec{D}^{\perp}\vec{u},\end{aligned}\tag{25}$$

при $Q_a=\partial_{u^a}$, $Q_3=u^1\partial_{u^2}-u^2\partial_{u^1}+\frac{2}{k}\partial_{u^3}$, $Q_4=-u^a\partial_{u^a}$, $Q_5=0$; *або*

$$\begin{aligned}&\vec{u}_0+(\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u}=\Delta\vec{u}+\vec{L}\omega,\\&u^3_0+(\vec{u}\vec{\nabla})u^3=\Delta u^3-k(\vec{u}\vec{L})\omega-\omega\vec{\nabla}\vec{u},\end{aligned}\tag{26}$$

при $Q_a=ku^a\partial_{u^3}+\partial_{u^a}$, $Q_3=u^1\partial_{u^2}-u^2\partial_{u^1}$, $Q_4=-u^a\partial_{u^a}-2u^3\partial_{u^3}$, $Q_5=2k\partial_{u^3}$.

У формулах (23)–(26): $\vec{L}=\lambda_1\vec{\nabla}+\lambda_2\vec{\nabla}^{\perp}$, $\vec{D}=(\vec{c}\vec{\nabla}^{\perp},\vec{c}\vec{\nabla})$, $\vec{D}^{\perp}=(\vec{c}\vec{\nabla},-\vec{c}\vec{\nabla}^{\perp})$, $\vec{c}=(c_1,c_2)$, $\vec{\nabla}=(\partial_1,\partial_2)$, $\vec{\nabla}^{\perp}=(\partial_2,-\partial_1)$, $\vec{u}=(u^1,u^2)$, $\omega=u^3-\frac{k}{2}\vec{u}^2$, φ *— довільна гладка функція,* c_i, λ_j, λ, k *— довільні сталі,* $i=\overline{1,2}$, $j=\overline{1,4}$.

Доведення теореми 2 базується на стандартному методі С. Лі (див., наприклад, [3]– [5]) та проводиться аналогічно до доведення теореми 1.

2. Узагальнення систем рівнянь конвекції дифузії, інваріантних відносно узагальненої алгебри Галілея, до систем типу Нав'є–Стокса

У теоремах 1,2 (відповідно, для $(m,n)=(3,1)$ та $(m,n)=(3,2)$) наведені системи (7), інваріантні відносно узагальненої алгебри Галілея. Тепер залишається зробити завершальний крок: узагальнити одержані системи до систем типу Нав'є–Стокса. Зазначимо, що таке узагальнення у випадку двовимірного векторного поля $\vec{u}$ та однієї просторової змінної виконувалось у роботах [7], [8]. Ми ж покажемо це для $\vec{u}\in\mathbb{R}^3$.

У випадку $m=3$, $n=1$ розглянемо систему (10), значення w^a, G^a якої описані у першому рядку таблиці 2. Після відповідної підстановки вона має вигляд

$$\begin{aligned}&u^1_0+u^1u^1_1-u^1_{11}-\psi(u^3)\left(u^2-\tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)_1=0,\\&u^2_0+u^1u^2_1-u^2_{11}-\psi(u^3)u^1\left(u^2-\tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)_1+2\left(u^2-\tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)u^1_1=0,\\&u^3_0+u^1u^3_1-u^3_{11}=0,\end{aligned}\tag{27}$$

та інваріантна відносно узагальненої алебри Галілея (8) при

$$Q_1=\partial_{u^1}+u^1\partial_{u^2},\quad Q_2=-u^1\partial_{u^1}-2u^2\partial_{u^2},\quad Q_3=\partial_{u^2}.$$

Узагальнимо систему (27) наступною системою

$$\begin{aligned}&u^1_0+u^1u^1_1-u^1_{11}-\psi(u^3)\left(u^2-\tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)_1=f^1p_1,\\&u^2_0+u^1u^2_1-u^2_{11}-\psi(u^3)u^1\left(u^2-\tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)_1+2\left(u^2-\tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)u^1_1=f^2p_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0^3{+}u^1u_1^3{-}u_{11}^3{=}f^3p_1, \\ \rho_0 + \partial_1[\vec{g}\vec{u}] = 0, \\ p = f(\rho), \end{aligned} \tag{28}$$

де $\vec{g} = (g^1, g^2, g^3)$, f^a, g^a $(a = \overline{1,3})$ — довільні гладкі функції аргумента ρ. Вимагаємо, щоб система (28) була інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея (8), де

$$Q_1 = \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}, \quad Q_2 = -u^1\partial_{u^1} - 2u^2\partial_{u^2} - ku^3\partial_{u^3} - l\rho\partial_\rho, \quad Q_3 = \partial_{u^2}. \tag{29}$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 3. *Якщо система (28) має вигляд*

$$\begin{aligned} &u_0^1{+}u^1u_1^1{-}u_{11}^1{-}\psi\left(u^2{-}\tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)_1{=}0, \\ &u_0^2{+}u^1u_1^2{-}u_{11}^2{-}\psi u^1\!\left(u^2{-}\tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)_1{+}2\left(u^2{-}\tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)u_1^1{=}c_1\rho^2\rho_1, \\ &u_0^3{+}u^1u_1^3{-}u_{11}^3{=}c_2\rho_1, \\ &\rho_0 + (u^1\rho)_1 + \lambda(u^3\rho^2)_1 = 0, \\ &p = f(\rho), \end{aligned} \tag{30}$$

де $\psi = \psi(u^3)$ — довільна гладка функція, λ, c_i $(i = 1, 2)$ — довільні сталі, то вона інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея, базисні генератори якої задаються формулами

$$\begin{aligned} &\partial_0, \partial_1, G{=}x_0\partial_1{+}\partial_{u^1}{+}u^1\partial_{u^2}, D{=}2x_0\partial_0{+}x_1\partial_1{-}u^1\partial_{u^1}{-}2u^2\partial_{u^2}{-}\rho\partial_\rho, \\ &\Pi{=}{x_0}^2\partial_0{+}x_0x_1\partial_1{+}x_1(\partial_{u^1}{+}u^1\partial_{u^2}){-}x_0(u^1\partial_{u^1}{+}2u^2\partial_{u^2}{+}\rho\partial_\rho){+}\partial_{u^2}. \end{aligned} \tag{31}$$

Доведення. Для зручності в обчисленнях позначимо $\rho = u^4$. Тоді після підстановки останнього рівняння в перші три та заміни

$$f^1\dot{f} = \tilde{f}^1$$

отримаємо систему

$$\begin{aligned} &u_0^1{+}u^1u_1^1{-}u_{11}^1{-}\psi(u^3)\left(u^2{-}\tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)_1 {-}\tilde{f}^1u_1^4 = 0, \\ &u_0^2{+}u^1u_1^2{-}u_{11}^2{-}\psi(u^3)u^1\left(u^2{-}\tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)_1{+}2\left(u^2{-}\tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)u_1^1{-}\tilde{f}^2u_1^4 = 0, \\ &u_0^3{+}u^1u_1^3{-}u_{11}^3{-}\tilde{f}^3u_1^4 = 0, \\ &u_0^4 + \dot{g^a}u^au_1^4 + g^au_1^a = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Для доведення застосуємо алгоритм С. Лі (див., наприклад, [3]– [5]). Інфінітезимальний оператор алгебри інваріантності системи (32) має вигляд:

$$X = \xi^\mu(x, u)\partial_\mu + \eta^b(x, u)\partial_{u^b}, \tag{33}$$

де $\mu = 0, 1$, $b = \overline{1,4}$.

З умови інваріантності системи (32) відносно оператора (33)

$$\tilde{X}S\mid_{S=0} = 0, \tag{34}$$

де S – ліва частина системи (32); отримаємо систему визначальних рівнянь для знаходження координат оператора X та уточнення невідомих функцій, яку ми тут не приводимо через її громіздкість.

Зображення операторів Q_i з (29) визначає базисні оператори узагальненої алгебри Галілея:

$$\partial_0, \partial_1, G = x_0\partial_1 + \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}, D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u^1\partial_{u^1} - 2u^2\partial_{u^2} - ku^3\partial_{u^3} - lu^4\partial_{u^4},$$
$$\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + x_1(\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}) - x_0(u^1\partial_{u^1} + 2u^2\partial_{u^2} + ku^3\partial_{u^3} + lu^4\partial_{u^4}) + \partial_{u^2},$$

де $k, l \in \mathbb{R}$ — довільні сталі, та координати оператора X:

$$\begin{aligned}
\xi^0 &= ax_0^2 + 2\kappa x_0 + d_0,\\
\xi^1 &= ax_0x_1 + \kappa x_1 + gx_0 + d_1,\\
\eta^1 &= a(x_1 - x_0u^1) - \kappa u^1 + g,\\
\eta^2 &= a(x_1u^1 - 2x_0u^2 + 1) - 2\kappa u^2 + gu^1,\\
\eta^3 &= -k(ax_0 + \kappa)u^3,\\
\eta^4 &= -l(ax_0 + \kappa)u^4,
\end{aligned}$$

де a, κ, g, d_μ – довільні сталі, $\mu = 0, 1$.

Підставивши відповідні ξ^μ, η^b ($\mu = 0, 1$, $b = \overline{1, 4}$) у систему визначальних рівнянь, отриману з умови (34), та розв'язавши її, уточнюємо значення невідомих функцій та сталих. Отже, систему визначальних рівнянь задовольняють

$$\begin{aligned}
&\tilde f^1 = 0, \quad \tilde f^2 = c_1(u^4)^2, \quad \tilde f^3 = c_2,\\
&g^1 = u^4, \quad g^2 = 0, \quad g^3 = \lambda(u^4)^2,\\
&k = 0, \quad l = 1.
\end{aligned}$$

Виконавши зворотню заміну $u^4 = \rho$, отримуємо систему (30), інваріантну відносно алгебри (31). Теорему доведено.

У випадку $m = 3$, $n = 2$ розглянемо, наприклад, систему (24). Вона інваріантна відносно узагальненої алебри Галілея

$$\begin{gathered}
AG_2(1, 2) =< \partial_0, \partial_a, G_a = x_0\partial_a + \partial_{u^a},\\
J_{12} = x_1\partial_2 - x_2\partial_1 + u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1}, D = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - u^a\partial_{u^a},\\
\Pi = {x_0}^2\partial_0 + x_0x_a\partial_a + x_a\partial_{u^a} - x_0u^a\partial_{u^a} > .
\end{gathered}$$

Узагальнимо систему (24) наступною системою

$$\begin{aligned}
&u_0^a + u^bu_b^a - \Delta u^a = f^{ab}p_b,\\
&u_0^3 + u^bu_b^3 - \Delta u^3 + \varphi\epsilon_{ab}u_b^a = f^{3b}p_b,\\
&\rho_0 + \partial_a(g^{ac}u^c) = 0,\\
&p = f(\rho),
\end{aligned} \tag{35}$$

де $f^{cb} = f^{cb}(\rho)$, $g^{ac} = g^{ac}(\rho)$, ($a, b = 1, 2$, $c = \overline{1, 3}$), $\varphi = \varphi(u^3)$ — довільні гладкі функції своїх аргументів, $\epsilon_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Вимагаємо, щоб система (35) була інваріантною відносно узагальненої алгебри Галілея (22), де

$$Q_a = \partial_{u^a}, Q_3 = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1}, Q_4 = -u^a\partial_{u^a} - k\rho\partial_\rho, Q_5 = 0.$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 4. *Якщо система (35) має вигляд*

$$\begin{aligned} &u_0^a+u^b u_b^a-\Delta u^a=(\delta_{ab}c_1+\epsilon_{ab}c_2)\rho_b,\\ &u_0^3+u^b u_b^3-\Delta u^3-\varphi\epsilon_{ab}u_b^a=0,\\ &\rho_0+(\rho u^a)_a=0,\\ &p=f(\rho), \end{aligned} \tag{36}$$

де $\delta_{ab}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, c_i *— довільні сталі,* $a, b, i = 1, 2$, *то вона інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея, базисні генератори якої задаються формулами*

$$\partial_0, \partial_a, G_a = x_0\partial_a + \partial_{u^a}, J_{12} = x_1\partial_2 - x_2\partial_1 + u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1},$$
$$D=2x_0\partial_0+x_a\partial_a-u^a\partial_{u^a}-2\rho\partial_\rho, \Pi={x_0}^2\partial_0+x_0x_a\partial_a+x_a\partial_{u^a}-x_0(u^a\partial_{u^a}+2\rho\partial_\rho).$$

Доведення теореми 4 базується на стандартному методі С. Лі та проводиться аналогічно до доведення теореми 3.

Зауваження 1. *Аналогічно до того, як це зроблено в теоремах 3, 4, всі інші системи конвекції–дифузії, одержані в теоремах 1, 2, можна узагальнити до систем типу Нав'є–Стокса зі збереженням інваріантності відносно узагальненої алгебри Галілея.*

Висновки Оскільки одержані системи узагальнюють тривимірну систему рівнянь Нав'є–Стокса у випадках, відповідно, однієї та двох просторових змінних не тільки по формі, а й мають аналогічні симетрійні властивості — задовольняють принципу відносності Галілея, то вони претендують на опис реальних процесів гідродинаміки. Підсумовуючи сказане вище, можна зробити висновок, що метод С. Лі є потужним методом, за допомогою якого серед класу математичних моделей можна відібрати ті, що задовольняють тому чи іншому принципу відносності.

1. *Жадан Т. О.* Інваріантність системи рівнянь дифузії-конвекції відносно узагальненої алгебри Галілея. // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка.: в.12, 2004. — С. 70-75
2. *Глеба А. В.* Симетрійні властивості і точні розв'язки нелінійних галілей-інваріантних рівнянь: Дис... канд. ф.-м. наук: 01.01.03.— К.,—2003. — 120с.
3. *Lie S.* Über Integration durch bestimmente Integrale von einer Klasse lineare partiellen Differentialgleichungen 6. — Leipzig: 1881. — P. 328-368.
4. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400с.
5. *Olver P.* Applications of Lie groups to differential equations. — Berlin: Springer, 1986.
6. *Серов М. І., Карпалюк Т. О.* Інваріантність системи рівнянь конвекції дифузії відносно узагальненої алгебри Галілея у випадку тривимірного векторного поля. // Математичний вісник НТШ, т.7, 2010. — С.200-221
7. *Сєрова М. М.* Некласичне узагальнення одновимірної системи рівнянь Нав'є–Стокса. — Симетрія і інтегровність рівнянь математичної фізики: збірник статей // Зб. праць Інституту математики НАН України, т.3, №2, — К: 2006. — 400с.
8. *Сєров М.І., Сєрова М.М., Омелян О.М., Карпалюк Т.О.* Галілеївська інваріантність системи нелінійних рівнянь реакції-конвекції-дифузії. — Матеріали Українського математичного конгресу (до 100-річчя від дня народження М.М. Боголюбова). К: 2009. — URL:http://www.imath.kiev.ua/congress2009/Abstracts/Serov.pdf

Одержано 29.10.2012