УДК 510 DOI:10.24144/2616-7700.2018.2(33).41-44

О. В. Варцаба, І. А. Мич, В. В. Ніколенко (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

СИГНАТУРНА РЕШІТКА ОДНОГО КЛАСУ АЛГЕБР

In the paper has been explored structure class of algebra which are given above binary square matrices with conjunctions, disjunctions and turn operations. Lattice signature is observed in one class of algebra and her connection with equivalent lattice. The lattice is constructed of some class of algebra.

У роботі досліджується структура класів алгебр, які задані над бінарними квадратними матрицями з операціями кон'юнкції, диз'юнкції та поворотів. Вивчається сигнатурна решітка такого класу алгебр, її зв'язок з екваціональною решіткою, будуються решітки деяких класів алгебр.

Дана робота є продовженням досліджень, приведених у статтях [1-3].

Наведемо деякі поняття теорії алгебраїчних систем [4], які використовуються у роботі.

Означення 1. *Алгебраїчною системою називається кортеж* U=(A,Ω_F,Ω_P), *який складається з трьох множин: непустої множини* A, *множини операцій* $\Omega_F = \{F_0, F_1, \ldots, F_\xi, \ldots\}$ *визначених на множині* A *та множини предикатів* $\Omega_P = \{P_0, P_1, \ldots, P_\eta, \ldots\}$ *заданих на множині* A.

Множина A називається носієм або основною множиною системи U, її елементи – елементами системи U.

Потужність A називається потужністю або порядком системи U і позначається $|U|$.

Означення 2. *Алгебраїчна система* $U = (A, \Omega_F, \Omega_P)$ *називається алгеброю, якщо* $\Omega_P = \varnothing$ *і моделлю, якщо* $\Omega_F = \varnothing$.

Означення 3. *Непуста підмножина* A_1 *основної множини* A *деякої алгебраїчної системи* $U = (A, \Omega)$ *називається замкнутою в системі* U, *якщо* A *замкнена відносно кожної операції* $F_\xi \in \Omega$ *цієї системи: результат будь-якої операції над довільними елементами* A_1 *належить* A_1.

Розглянемо довільний клас R алгебраїчних систем заданого типу ($m_0, \ldots, m_\xi$, $n_0, \ldots, n_\eta$). Цьому типу ставимо у відповідність набір Ω функціональних і предикатних символів $F_0, F_1, \ldots, F_\xi, P_0, P_1, \ldots, P_\eta$, арність яких дорівнює числам $m_0, \ldots, m_\xi$, $n_0, \ldots, n_\eta$ і розглядаються як загальні імена відповідних операцій і предикатів систем класу R. Сукупність указаних символів будемо називати сигнатурою класу R.

Задати на множині A систему U сигнатури Ω – це значить задати деяку непусту множину A і кожному сигнатурному знаку поставити у відповідність його значення – деяку операцію або предикат відповідної арності на A.

Означення 4. *Універсальні алгебри* U_1 *і* U_2 *із заданими системами операцій* Ω_1 *і* Ω_2 *називаються однотипними, якщо можна встановити взаємно однозначну відповідність між* Ω_1 *і* Ω_2, *причому відповідні операції* $\omega_1 \in \Omega_1$ *і* $\omega_2 \in \Omega_2$ *мають однакову арність.*

Нехай $M = \{U_n = (A, \Omega)\}$, $n = 1, 2, ...$ – клас однотипних алгебр. Позначимо через $R(U_n)$ множину всіх тотожностей алгебри U_n.

Означення 5. *Алгебра U_1 екваціонально вкладається в алгебру U_2 ($U_1, U_2 \in M$), якщо $R(U_1) \subset R(U_2)$.*

Означення 6. *Алгебри U_1 і U_2 ($U_1, U_2 \in M$) називаються еквауіонально еквівалентними, якщо $R(U_1) = R(U_2)$.*

Означення 7. *Клас алгебр M утворює еквауіональну решітку, якщо для будь-яких алгебр $U_1, U_2 \in M$ існують алгебри $U_3, U_4 \in M$ такі, що мають місце рівності*

$$R(U_3) = R(U_1) \cap R(U_2),$$

$$R(U_4) = R(U_1) \cup R(U_2).$$

Означення 8. *Алгебри $U_1 = (A_1, \Omega_1)$ і $U_2 = (A_2, \Omega_2)$ називаються одноносієвими, якщо $A_1 = A_2$.*

Нехай $N = \{U_n = (A_{n\times n}, \Omega)\}$ – клас одноносієвих алгебр.

Означення 9. *Алгебра $U_1 = (A,\, \Omega_1)$ називається сигнатурним розширенням (звуженням) алгебри $U_2 = (A,\, \Omega_2)$, якщо $\Omega_2 \subset \Omega_1$ ($\Omega_1 \subset \Omega_2$).*

Означення 10. *Алгебра $U_3 = (A,\, \Omega_3)$ називається сигнатурним об'єднанням (перетином) алгебр $U_1 = (A,\, \Omega_1)$, $U_2 = (A,\, \Omega_2)$, якщо $\Omega_3 = \Omega_1 \cup \Omega_2$ ($\Omega_3 = \Omega_1 \cap \Omega_2$).*

Означення 11. *Клас алгебр N називається сигнатурно замкненим, якщо для будь-яких алгебр $U_1 = (A,\, \Omega_1)$, $U_2 = (A,\, \Omega_2)$ існують алгебри $U_3 = (A,\, \Omega_3)$, $U_4 = (A,\, \Omega_4)$ такі, що*

$$\Omega_3 = \Omega_1 \cup \Omega_2,\ \Omega_4 = \Omega_1 \cap \Omega_2. \tag{1}$$

Означення 12. *Алгебра $U_{\max} \in N$ ($U_{\min} \in N$) називається Ω-максимальною (Ω-мінімальною) в N, якщо $\Omega_{\max} = \bigcup \Omega_i$ ($\Omega_{\min} = \bigcap \Omega_i$) для усіх сигнатур алгебр класу N.*

Твердження 1. *Нехай $N = \{U_i = (A_{n\times n}, \Omega_i)\}$ – сигнатурно замкнений клас одноносієвих алгебр, $|\Omega|$ – потужність сигнатури алгебри. Алгебри класу N відносно операцій сигнатурного об'єднання і перетину утворюють решітку, яка не перевищує $2^{|\Omega|}$ – мірний куб.*

Доведення випливає з приведених вище означень.

Означення 13. *Алгебра $U_i = (A_{n\times n}, \Omega_i)$ ($\Omega_i \neq \Omega_{\min}$) називається Ω-атомарною в N, якщо $\Omega_{\min} \subset \Omega_i$ і для будь-якої алгебри $U_j \in N$ такої, що $U_j \neq U_{\min}$ виконується співвідношення $\Omega_j \not\subset \Omega_i$.*

Твердження 2. *Якщо у сигнатурно замкненому класі N є k Ω-атомарних алгебр, то алгебри цього класу утворюють k-мірний Ω-куб.*

Доведення. Нехай $N-$ сигнатурно замкнений клас одноносієвих алгебр. Побудуємо k-мірний Ω-куб: $U_{\min}$ – елемент нульового ярусу; Ω-атомарні алгебри U_{i_1}, $U_{i_2}, \ldots U_{i_k}$ є елементами першого ярусу; елементи другого ярусу утворюються з елементів першого ярусу за допомогою операції об'єднання сигнатур атомарних алгебр і т.д. Продовжуючи цю процедуру ми побудуємо всі елементи k-мірного кубу.

Зауваження. Аналогічно Ω-куб можемо побудувати використовуючи множину k-атомарних алгебр і операцію перетину.

Розглянемо сигнатурно замкнений клас одноносієвих алгебр $N_4 = \{U_i = (A_{4\times4}, \Omega_i)\}$, де $A_{4\times4}$ – множина бінарних матриць розміром 4×4, $\Omega_i = \{\vee, \wedge, T_0, T_1, \ldots, T_7\}$. У цьому класі $\Omega_{\min}$-мінімальною алгеброю є алгебра $U_{\min} = (A_{4\times4}, \wedge, \vee, T_0)$, а $\Omega_{\max}$-максимальною – $U_{\max} = (A_{4\times4}, \vee, \wedge, T_0, T_1, \ldots, T_7)$.

Кожній алгебрі $U_i \in N_4$ поставимо у відповідність 7-мірний вектор $T(U_i) = (a_1^i, a_2^i, \ldots, a_7^i)$, де $a_i^j = \begin{cases} 1, & \text{якщо } T_j \in \Omega_i, \\ 0, & \text{якщо } T_j \notin \Omega_i, \end{cases}$ $j = 1, 2, \ldots, 7.$
Вектор $T(U_i)$ називається типом алгебри U.

Задамо операції над типами алгебр:

$$T(U_i) \vee T(U_t) = T(U_k), T(U_i) \wedge T(U_t) = T(U_k), \tag{2}$$

де $a_j^k = a_j^i \vee a_j^t$, $\left(a_j^k = a_j^i \wedge a_j^t\right)$ – операція диз'юнкції (кон'юнкції).

Множина всіх булевих 7-мірних векторів з операціями (2) утворює 7-мірний куб. Між алгебрами класу N_4 і множиною всіх бінарних 7-мірних векторів існує взаємнооднозначна відповідність. Звідси випливає справедливість теореми.

Теорема 1. *Алгебри класу N_4 відносно операцій (2) утворюють 7-мірний Ω-куб.*

Побудований 7-мірний куб складається з 128 вершин і 889 ребер.

Твердження 3. *Для кожної вершини $T(U_i)$ k-ярусу 7-мірного кубу існують підрешітки $R_1(U_i), R_2(U_i)$ такі, що в решітці $R_1(U_i)$ $T(U_i)$ є мінімальним елементом, а в решітці $R_2(U_i)$ – максимальним елементом.*

Твердження 4. *Якщо алгебра U_1 належить k_1-ярусу Ω-куба, а алгебра U_2 належить k_2-ярусу і $k_1 > k_2$, $\Omega_2 \subset \Omega_1$, то в Ω-кубі існує підрешітка, яка є $k_1 - k_2$-мірним кубом з мінімальним елементом U_2 і максимальним — U_1.*

Означення 14. [1] *Множину операцій повороту $M_k = \{T_{j1}, T_{j2}, \ldots, T_{jk}\} \subset \{T_1, T_2, \ldots, T_7\}$ будемо називати повною, якщо в результаті застосування операції суперпозиції до елементів цієї множини можемо отримати всі операції повороту $T_i, i = 1, 2, \ldots, 7$.*

Означення 15. *Множину операцій $M_k = \{T_{j1}, T_{j2}, \ldots, T_{jk}\} \subset \{T_1, T_2, \ldots, T_7\}$ будемо називати замкненою, якщо в результаті суперпозиції операцій цієї множини отримаємо тільки операції з M_k.*

Означення 16. *Алгебри з повними системами операцій повороту називаються повними, а з замкненими системами операцій повороту — замкненими.*

Розіб'ємо клас алгебр N_4 на чотири підкласи: замкнені алгебри, замкнені повні алгебри, незамкнені неповні, незамкнені повні.

У роботі [2] зазначено, що замкненими алгебрами в класі N_4 є дев'ять алгебр; замкнутою повною є одна алгебра; неповними є дев'ятнадцять алгебр, а решта 107 алгебр є незамкненими повними.

У роботі [1] показано, що в замкненій алгебрі, яка є $\Omega_{\max}$- алгеброю, ДНФ співпадає з ДДНФ. Аналогічно, це можна показати для довільної замкненої алгебри.

Теорема 2. *У замкнених алгебрах класу N_4 ДНФ співпадають з ДДНФ.*

Всі неповні алгебри є елементами 3-мірних кубів, максимальними елементами яких є алгебри типів (1001001), (0110001), (0000111). Неповні алгебри, разом з алгеброю $\Omega_{\max}$ утворюють підрешітку 7-мірного Ω-куба.

Позначимо через $N_k = \{U_i = (A_{k\times k}, \Omega_i)\}$, $k \in \mathbb{N}$ – сигнатурно замкнений клас односієвих алгебр, де $A_{k\times k}$–множина бінарних матриць розміром $k \times k$, $\Omega_i \subset \{\vee, \wedge, T_0, T_1, \ldots, T_7\}$.

Теорема 3. *Алгебри класу N_k, $k \in \mathbb{N}$ відносно операцій сигнатурного об'єднання і перетину утворюють 7-мірний куб.*

Нехай $N = \{U = (A, \Omega_i)\}$ – сигнатурно замкнений клас односієвих алгебр і $U_{max} = (A, \Omega_i) \in N$ – Ω-максимальна алгебра цього класу.

Означення 17. *Клас алгебр N називається Ω-повним, якщо для будь-якої алгебри $\Omega_i \subset \Omega_{max}$ існує $U_i = (A, \Omega_i) \in N$.*

Твердження 5. *Якщо N Ω-повний клас алгебр, то він містить $2^{|\Omega_{max}|}$ алгебр, які відносно операцій (1) утворюють $2^{|\Omega_{max}|}$-мірний куб.*

Твердження 6. *Якщо N – клас замкнених односієвих алгебр, то алгебри цього класу утворюють дистрибутивну решітку, яка є підрешіткою $2^{|\Omega_{max}|}$ -мірного кубу.*

Означення 18. *Множина алгебр $T(M) = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \in M$ утворює Т-базис, якщо*
1. Для будь-яких $U_i, U_j \in T(M)$, $i \neq j$ виконується нерівність $R(U_i) \neq R(U_j)$.
2. Для будь-якої алгебри $U \in M$ існує алгебра $U_i \in T(M)$ така, що $R(U) = R(U_i)$.

Дане означення узагальнює поняття Т-базису, приведеному в [5].

Твердження 7. *Нехай $U_1 = (A, \Omega_1)$ і $U_2 = (A, \Omega_2) \in N$.*
1. Якщо $\Omega_1 \neq \Omega_2$, то $R(U_1) \neq R(U_2)$.
2. Якщо $R(U_1) = R(U_2)$, то $\Omega_1 = \Omega_2$.
3. Якщо $\Omega_1 \subset \Omega_2$, то $R(U_1) \subset R(U_2)$.

З останніх тверджень і означення Т-базису випливає справедливість теореми.

Теорема 4. *Якщо у замкненому класі односієвих алгебр $N = \{U = (A, \Omega)\}$ Т-базис утворює еквацiональну решітку, то вона ізоморфна сигнатурній решітці цього класу.*

1. *Мич І. А., Ніколенко В. В.* Повні системи тотожностей в одному класі алгебр // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2017. – Вип. 1 (30). – С. 79–86.
2. *Мич І. А., Ніколенко В. В.* Досконалі диз'юнктивні нормальны форми в одному класі алгебр // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2017. – Вип. 2 (31). – С. 123–128.
3. *Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В.* Досконалі диз'юнктивні нормальні форми алгебри $U_(2)$ // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – Ужгород, – 2018. – Вип. 1 (32). – С. 124–129.
4. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. – М.: Наука., 1970. – 392с.
5. *Николенко В. В.* Эквациональное описание некоторых классов алгебр. IV Всесоюзная конференция по математической логике. – Кишинев.– 1976. – С. 103.

Одержано 10.11.2018