УДК 512.53+512.64

О. В. Зубарук (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО ЗОБРАЖУВАЛЬНИЙ ТИП НАПІВГРУПИ S_{32}^0 НАД ДОВІЛЬНИМ ПОЛЕМ

In this paper we study matrix representations of a semigroup that is the simplest amplification of the wild semigroup $S_{32} =< a, b \,|\, a^3 = a, b^2 = b >$, namely the semigroup $S_{32}^0 =< a, b \,|\, a^3 = a, b^2 = b, ab = 0 >$. We prove that the semigroup S_{32}^0 has finite representation type over an arbitrary field.

У цій роботі вивчаються матричні зображення напівгрупи, яка є найпростішим посиленням дикої напівгрупи $S_{32} =< a, b \,|\, a^3 = a, b^2 = b >$, а саме напівгрупи $S_{32}^0 =< a, b \,|\, a^3 = a, b^2 = b, ab = 0 >$. Доведено, що напівгрупа S_{32}^0 має скінченний зображувальний тип над довільним полем.

У загальному випадку задача про класифікацію (з точністю до подібності) пар матриць над полем до цих пір не розв'язана. Більше того, вона давно вважається еталоном максимальної складності для класифікаційних задач теорії зображень, і задачі, які містять в собі вказану задачу про пару матриць, називають дикими, а решту — ручними (точні означення див. в роботі [1]). Особливу наукову цінність мають результати про повну класифікацію пар матриць над полем, що задовольняють прості алгебраїчні співвідношення. Першою такою задачею стала задача про класифікацію пар матриць A, B, що задовольняють співвідношення $A^2 = B^2 = AB = BA = 0$, розв'язок якої над полем характеристики 2 випливає із результатів роботи [2]. Над полями інших характеристик відповідь аналогічна; ідея розв'язання цієї задачі полягає у зведенні її до класичної задачі лінійної алгебри про жмуток матриць, канонічна форма для яких знайдена ще в позаминулому столітті Кронекером і Вейєрштрасом.

У 1968 році І. М. Гельфанд і В. А. Пономарьов [3] отримали повну класифікацію пар матриць A, B таких, що $AB = BA = 0$. Пізніше (незалежно та іншим методом) ця задача була розв'язана в [4].

У 1975 році В. М. Бондаренко [5] отримав (у зв'язку з описом модулярних зображень діедральних груп) повну класифікацію пар матриць A, B таких, що $A^2 = B^2 = 0$, застосувавши метод самовідтворних матричних задач (незалежно, методом І. М. Гельфанда і В. А. Пономарьова, ця задача розв'язана К. Рінгелем [6]). Подальший розвиток цього методу В. М. Бондаренком (разом із розвитком Ю. А. Дроздом теорії ручних та диких задач) дозволив, зокрема, описати ручні скінченні групи над полем довільної характеристики [7].

В роботах [8–13] досліджувалися матричні зображення напівгруп, породжених двома потентними елементами з додатковими простими співвідношеннями (елемент a називається потентним, якщо $a^n = a$ для деякого $n \neq 1$). У цій роботі продовжується вивчення зображень таких напівгруп.

Автор щиро вдячна В. М. Бондаренку за постановку задачі та цінні поради.

1. Формулювання основного результату. Протягом всієї статті K позначає довільне поле.

Нехай S_{32}^0 позначає напівгрупу з нулем із системою твірних $0, a, b$ та визначальними співвідношеннями

1) $0^2 = 0,\ 0a = a0 = 0,\ 0b = b0 = 0;$

2) $a^3 = a,\ b^2 = b$;

3) $ab = 0$.

Ця напівгрупа є найпростішим посиленням нескінченної напівгрупи $S_{32} =< a, b \,|\, a^3 = a, b^2 = b >$, задача про опис матричних зображень якої є дикою.

Згідно загального означення матричних зображень напівгруп, матричне зображення напівгрупи S_{32}^0 над полем K — це довільний гомоморфізм $T : S_{32}^0 \to M_n(K)$, де $M_n(K)$ напівгрупа (відносно множення) всіх квадратних матриць порядку n над полем K (n називається розмірністю зображення T). Будемо завжди вважати, що матриця $T(0)$ є нульовою; по суті це не є обмеженням, бо при цій вимозі ми "втрачаємо" лише одне нерозкладне зображення розмірності 1, яке кожному елементу напівгрупи зіставляє одиничний елемент поля (див. [14]). Тоді зображення $T : S_{32}^0 \to M_n(K)$ напівгрупи S_{32}^0 однозначно задається парою матриць $R = \{A = T(a), B = T(b)\}$, такою, що $A^3 = A$, $B^2 = B$, $AB = 0$.

Матричні зображення $R = \{A, B\}$ і $R' = \{A', B'\}$ напівгрупи S_{32}^0 називаються еквівалентними, якщо $A' = CAC^{-1}$ і $B' = CBC^{-1}$ для деякої оборотної матриці C. Матричне зображення R називається розкладним, якщо воно еквівалентне прямій сумі двох зображень, і нерозкладним в іншому разі. Для матричних зображень напівгрупи $S = S_{32}^0$ (як і для будь-якої скінченної напівгрупи) має місце теорема Крулля-Шмідта про однозначність розкладу довільного матричного зображення в пряму суму нерозкладних.

Кажуть, що напівгрупа має скінченний зображувальний тип над полем K, якщо з точністю до еквівалентності існує лише скінченне число нерозкладних зображень над полем K.

Переходимо до формулювання основого результату.

Теорема 1. *Напівгрупа S_{32}^0 має скінченний зображувальний тип над довільним полем K*

2. Доведення теореми 1. Доведення проводяться за схемою, запропонованою В. М. Бондаренком (див., зокрема, [14]).

Ми однією і тією буквою E позначаємо одиничну матрицю будь-якого порядку $m \geq 0$. При переході до еквівалентних матричних зображень вдповідні матриці позначаються, як правило, тими ж буквами (щоб не ускладнювати позначення).

Випадок, коли поле K є алгебраїчно замкнутим характеристики 0 розглянуто в роботі [8]. Аналогічно теорема доводиться для довільного поля характеристики $p \neq 2$. Розглянемо випадок, коли характеристика поля дорівнює 2.

Нехай $R = \{A, B\}$ — матричне зображення напівгрупи S_{32}^0 над полем K. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що матриця A має наступний вигляд (який отримується із жорданової нормальної форми однаковою перестановкою рядків і стовпців):

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & E & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишемо матрицю B у блоковому вигляді з блоками такого ж розміру, як і в матриці A:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix}.$$

Скористаємося рівністю $AB = 0$:

$$\begin{pmatrix} E & 0 & E & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

або

$$\begin{pmatrix} B_{11}+B_{31} & B_{12}+B_{32} & B_{13}+B_{33} & B_{14}+B_{34} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Внаслідок цього маємо $B_{31} = 0$, $B_{32} = 0$, $B_{33} = 0$, $B_{34} = 0$, $B_{21} = 0$, $B_{22} = 0$, $B_{23} = 0$, $B_{24} = 0$, $B_{11} = 0$, $B_{12} = 0$, $B_{13} = 0$, $B_{14} = 0$, тобто

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix}.$$

Тепер використаємо рівність $B^2 = B$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо наступні рівності:

$$B_{44}B_{41} = B_{41}, \tag{1}$$

$$B_{44}B_{42} = B_{42}, \tag{2}$$

$$B_{44}B_{43} = B_{43}, \tag{3}$$

$$B_{44}^2 = B_{44}. \tag{4}$$

Таким чином, наше матричне зображення $R = \{A, B\}$ породжується матрицями

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & E & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix},$$

де блоки B_{41}, B_{42}, B_{43} і B_{44} задовольняють співвідношення (1) – (4).

Далі з'ясуємо, коли матричне зображення $R = \{A, B\}$ еквівалентне матричному зображенню $\overline{R} = \{\overline{A}, \overline{B}\}$ такого ж вигляду, а саме

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & E & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \overline{B}_{41} & \overline{B}_{42} & \overline{B}_{43} & \overline{B}_{44} \end{pmatrix}.$$

Нехай X — оборотна матриця, така що $\overline{A} = XAX^{-1}$, $\quad \overline{B} = XBX^{-1}$, що еквівалентно $\overline{A}X = XA$, $\overline{B}X = XB$. Очевидно, що з подібності матриць $\overline{A}$ і A випливає їх рівність.

Спочатку використаємо рівність $\overline{A}X = XA$ (де матриця X розбита на блоки у відповідності з розбиттям матриць A і B):

$$\begin{pmatrix} E & 0 & E & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 & E & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Як наслідок, отримуємо:

$$\begin{pmatrix} X_{11} + X_{31} & X_{12} + X_{32} & X_{13} + X_{33} & X_{14} + X_{34} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} + X_{11} & 0 \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} + X_{21} & 0 \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} + X_{31} & 0 \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} + X_{41} & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо $X_{14} = 0$, $X_{21} = 0$, $X_{24} = 0$, $X_{31} = 0$, $X_{32} = 0$, $X_{34} = 0$, $X_{41} = 0$, $X_{42} = 0$, $X_{43} = 0$ і $X_{11} = X_{33}$, а отже,

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & 0 \\ 0 & X_{22} & X_{23} & 0 \\ 0 & 0 & X_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_{44} \end{pmatrix}.$$

Із рівностей (4) і вигляду матриці X випливає, що блок B_{44} матриці B вважати рівним

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(потрібно розглянути XBX^{-1} при $X_{12} = 0$, $X_{13} = 0$, $X_{23} = 0$, $X_{11} = E$, $X_{22} = E$). Тоді із рівностей (1) – (3) маємо, що

$$B_{41} = \begin{pmatrix} M_{41} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_{42} = \begin{pmatrix} M_{42} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_{43} = \begin{pmatrix} M_{43} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(нульові горизонтальні смуги в усіх матрицях B_{4j} містять однакове число рядків).

Отже,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Враховуючи сказане, використаємо тепер рівність $\overline{B}X = XB$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \overline{M}_{41} & \overline{M}_{42} & \overline{M}_{43} & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & 0 & 0 \\ 0 & X_{22} & X_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_{44}^{11} & X_{44}^{12} \\ 0 & 0 & 0 & X_{44}^{21} & X_{44}^{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & 0 & 0 \\ 0 & X_{22} & X_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_{44}^{11} & X_{44}^{12} \\ 0 & 0 & 0 & X_{44}^{21} & X_{44}^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси, зокрема, випливає, що блоки X_{44}^{12} і X_{44}^{21} — нульові, а тоді ця матрична рівність еквівалентна наступним рівностям:

$$X_{44}^{11} M_{41} = \overline{M}_{41} X_{11},$$

$$X_{44}^{11} M_{42} = \overline{M}_{42} X_{22} + \overline{M}_{41} X_{12},$$

$$X_{44}^{11} M_{43} = \overline{M}_{43} X_{11} + \overline{M}_{41} X_{13} + \overline{M}_{42} X_{23}.$$

Згідно означення, введеного в [15], приходимо до задачі про матричні зображення наступної частково впорядкованої множини L з інволюцією:

$$L = \{l_1 < l_2 < l_3\}, l_1^* = l_3.$$

Згідно результатів цієї ж роботи вказана частково впорядкована множина з інволюцією має (з точністю до еквівалентності) скінченне число нерозкладних зображень.

Теорема доведена.

Список використаної літератури

1. *Дрозд Ю. А.* О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 104–114.
2. *Башев В. А.* Представления группы $Z_2 \times Z_2$ в поле характеристики 2 // Докл. АН СССР. – 1961. – **141**, вып. 5. – С. 1015–1018.
3. *Гельфанд И. М., Пономарьов В. А.* Неразложимые представления группы Лоренца // Успехи мат. наук. – 1968 . – **23**, вып. 2. – С. 3–60.
4. *Назарова Л. А., Ройтер А. В., Сергейчук В. В., Бондаренко В. М.* Применение модулей над диадой для классификации конечных p-групп, обладающих абелевой подгруппой индекса p, и пар взаимно аннулирующих операторов // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 69–92.

5. *Бондаренко В. М.* Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 // Мат. сб. – 1975. – **96**, вып. 1. – С. 63–74.
6. *Ringel C.* Indecomposable representations of dihedral 2-groups // Math. Ann. – 1975. – **214**, № 1. – P. 19–34.
7. *Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А.* Представленческий тип конечных групп // Модули и представления: Записки науч. семинаров ЛОМИ. – 1977. – **71**. – С. 24–41.
8. *Зубарук О. В.* Про матричні зображення однієї напівгрупи // Науковий вісник Ужгородського нац. ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2013. – **24**, № 1. – С. 53–59.
9. *Бондаренко В., Зубарук О.* Алгебра Ауслендера для пар ідемпотентних матриць з сендвіч-співвідношеннями // Вісник Київського нац. ун-ту імені Тараса Шевченка (Математика. Механіка.). – 2014. – вип. 1. – С. 49–52.
10. *Бондаренко В. М., Зубарук О. В.* Алгебра Ауслендера для пар ідемпотентних матриць з подвійним сендвіч-співвідношенням // Вісник Київського нац. ун-ту імені Тараса Шевченка (серія: фізико-математичні науки). – 2014. – вип. 4. – С. 9–13.
11. *Зубарук О. В.* Про Алгебру Ауслендера однієї напівгрупи, породженої двома потентними елементами // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова (серія 1. Фізико-математичні науки). – 2014. – № 16. – С. 73–81.
12. *Бондаренко В. М., Зубарук О. В.* Σ-функція числа параметрів для системи матричних зображень // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, № 3. – С. 56–64.
13. *Bondarenko V. M., Tertychna O. M., Zubaruk O. V.* On classification of pairs of potent linear operators with the simplest annihilation condition // Algebra and Discrete Mathematics. – 2016. – **21**, N 1. – P. 18–23.
14. *Бондаренко В. М., Костишин Е. М.* Модулярні зображення напівгрупи T_2 // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Серія: математика і інформатика. – 2011. – **22**. – С. 26–34.
15. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления и формы слабо пополненных частично упорядоченных множеств // Линейная алгебра и теория представлений. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1983. – С. 19—54.

Одержано 15.01.2018