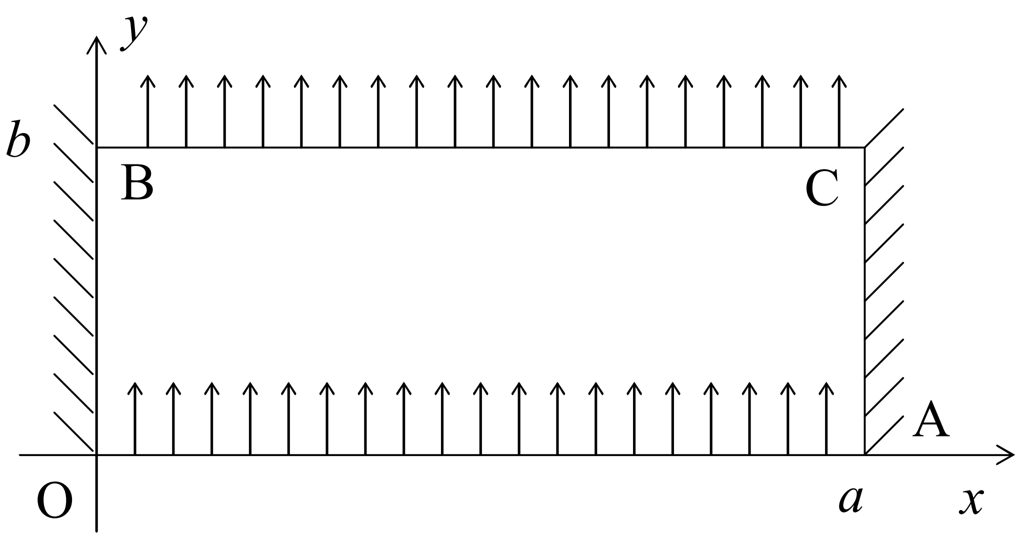
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАРИНЕЦЬ В.В., ПАГІРЯ М.М., РЕГО В.Л.

РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

**(методична розробка з практичних занять
для студентів IV та V курсів заочного
відділення математичного факультету)**



УЖГОРОД 2001

ЗМІСТ

ВСТУП. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА виЗНАЧЕННЯ

Означення 1. Співвідношення, яке пов'язує деякою функціональною залежністю незалежні змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n$, невідому функцію $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ та її частинні похідні за цими змінними, називається диференціальним рівнянням з частинними похідними (ДРЧП).

В загальному випадку ДРЧП можна записати у вигляді

$$F\left(x_1, x_2, \ldots x_n, U, \frac{\partial U}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^m U}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}\right) = 0, \qquad m = k_1 + \cdots + k_n, \tag{1}$$

де F – задана функція своїх аргументів.

Означення 2. Порядок старшої частинної похідної з тих, які входять у рівняння (1), називається порядком ДРЧП (1).

Означення 3. Довільна m разів неперервно диференційовна функція $U = U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, яка, будучи підставлена в рівняння (1) замість невідомої функції та її частинних похідних, перетворює це рівняння в тотожність за незалежними змінними, називається розв'язком ДРЧП (1).

Велике число задач механіки і фізики зводиться до ДРЧП. При цьому виявляється, що одне й те ж рівняння може описувати цілком різні по своїй природі явища і процеси. У зв'язку з цим для дослідження досить широкого кола задач механіки і фізики використовується порівняно невелике число різних видів диференціальних рівнянь. Вивченням таких рівнянь і займається розділ математики "Рівняння математичної фізики".

Надалі будемо розглядати виключно диференціальні рівняння другого порядку з двома незалежними змінними x, y вигляду.

$$F\left(x, y, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) = 0. \tag{2}$$

Означення 4. ДРЧП (2) називається лінійним, якщо воно лінійне відносно невідомої функції та всіх її частинних похідних.

Лінійне ДРЧП (2) має вигляд

$$\begin{aligned} a_{11}(x,y)U_{xx} + 2a_{12}(x,y)U_{xy} + a_{22}(x,y)U_{yy} + \\ + b_1(x,y)U_x + b_2(x,y)U_y + c(x,y)U = f(x,y). \end{aligned} \tag{3}$$

Зауваження. Тут і надалі використовуватимемо наступні позначення для похідних:

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad U_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad U_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad U_{xy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad U_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}.$$

Якщо в (3) всі коефіцієнти a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c є сталими, то ДРЧП (3) називається лінійним зі сталими коефіцієнтами, у протилежному випадку – лінійним зі змінними коефіцієнтами.

Рівняння (3) називається лінійним однорідним, якщо $f(x,y) \equiv 0$, і лінійним неоднорідним у протилежному випадку.

Означення 5. ДРЧП (2) називається квазілінійним, якщо воно є лінійним відносно старших похідних. Таке рівняння записується у вигляді:

$$a_{11}U_{xx} + 2a_{12}U_{xy} + a_{22}U_{yy} + f\left(x, y, U, U_x, U_y\right) = 0, \tag{4}$$

де $a_{ij} = a_{ij}\left(x, y, U, U_x, U_y\right)$, $i, j = 1,2$.

Вся різноманітність квазілінійних ДРЧП (4), де $a_{ij} = a_{ij}\left(x, y\right)$, $i, j = 1,2$, може бути поділена на три типи (класи). У кожному класі є простіші рівняння, які називаються канонічними. Розв’язки рівнянь одного й того ж класу мають багато спільних властивостей; для вивчення цих властивостей досить розглядати відповідні канонічні рівняння. Методам побудови розв’язків канонічних рівнянь та вивченню їх властивостей і присвячені пропоновані завдання лабораторних робіт.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1
КЛАСИФІКАЦІЯ ДРЧП ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ДВОМА НЕЗАЛЕЖНИМИ ЗМІННИМИ ТА ЗВЕДЕННЯ ЇХ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ

Теоретичні відомості

Розглянемо [1] квазілінійне ДРЧП другого порядку вигляду
$$a_{11}(x,y)U_{xx} + 2a_{12}(x,y)U_{xy} + a_{22}(x,y)U_{yy} = F(x,y,U,U_x,U_y). \tag{1.1}$$
Здійснимо в рівнянні (1.1) заміну незалежних змінних за формулами
$$\xi = \varphi(x,y), \quad \eta = \psi(x,y), \tag{1.2}$$
які встановлюють взаємно однозначну відповідність між точками (ξ,η) і (x,y) відповідних областей. Будемо вимагати, щоб функції $\varphi(x,y)$ та $\psi(x,y)$ були неперервними разом з частинними похідними до другого порядку включно. Маємо:
$$U_x = U_\xi \cdot \xi_x + U_\eta \cdot \eta_x, \qquad U_y = U_\xi \cdot \xi_y + U_\eta \cdot \eta_y,$$
$$\begin{aligned}
U_{xx} &= U_{\xi\xi}(\xi_x)^2 + 2U_{\xi\eta}\cdot\xi_x\cdot\eta_x + U_{\eta\eta}(\eta_x)^2 + U_\xi\cdot\xi_{xx} + U_\eta\cdot\eta_{xx},\\
U_{yy} &= U_{\xi\xi}(\xi_y)^2 + 2U_{\xi\eta}\cdot\xi_y\cdot\eta_y + U_{\eta\eta}(\eta_y)^2 + U_\xi\cdot\xi_{yy} + U_\eta\cdot\eta_{yy},\\
U_{xy} &= U_{\xi\xi}\cdot\xi_x\cdot\xi_y + U_{\xi\eta}(\xi_x\cdot\eta_y + \xi_y\cdot\eta_x) + U_{\eta\eta}\cdot\eta_x\cdot\eta_y + U_\xi\cdot\xi_{xy} + U_\eta\cdot\eta_{xy}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$
Підставляючи (1.3) в (1.1), одержимо
$$\alpha_{11}U_{\xi\xi} + 2\alpha_{12}U_{\xi\eta} + \alpha_{22}U_{\eta\eta} = F(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta), \tag{1.4}$$
де
$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= a_{11}(\xi_x)^2 + 2a_{12}\xi_x\cdot\xi_y + a_{22}(\xi_y)^2,\\
\alpha_{12} &= a_{11}\xi_x\cdot\eta_x + a_{12}(\xi_x\cdot\eta_y + \xi_y\cdot\eta_x) + a_{22}\xi_y\cdot\eta_y,\\
\alpha_{22} &= a_{11}(\eta_x)^2 + 2a_{12}\eta_x\cdot\eta_y + a_{22}(\eta_y)^2.
\end{aligned} \tag{1.5}$$
Із формул (1.5) очевидно: якщо функція $z = \varphi(x,y)$ є деяким частинним розв’язком рівняння
$$a_{11}(z_x)^2 + 2a_{12}z_x\cdot z_y + a_{22}(z_y)^2 = 0, \tag{1.6}$$
то в (1.4) коефіцієнт $\alpha_{11} = 0$.

Таким чином, задача вибору нових незалежних змінних ξ, η пов’язана зі знаходженням розв’язків рівняння (1.6).

Поряд із рівнянням (1.6) розглянемо рівняння
$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dy\cdot dx + a_{22}(dx)^2 = 0, \tag{1.7}$$
яке називається ***характеристичним*** для ДРЧП (1.1), а його інтеґрали – характеристиками.

Має силу

ЛЕМА. Якщо $z = \varphi(x,y)$ є деяким розв’язком рівняння (1.6), тоді співвідношення $c = \varphi(x,y)$ є загальним інтеґралом (1.7).

Справедливе і обернене твердження, а саме: якщо $c=\varphi(x,y)$ є загальним інтеґралом (1.7), тоді $z=\varphi(x,y)$ є розв'язком рівняння (1.6) (вважається, що коефіцієнти a_{ij}, $i,j=1,2$, є неперервними функціями в розглядуваній області і не перетворюються в нуль).

Нехай $a_{11}\neq 0$. Тоді із (1.7) маємо

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}+\sqrt{\Delta}}{a_{11}},\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}-\sqrt{\Delta}}{a_{11}},\tag{1.8}$$

де $\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$.

Означення. Рівняння (1.1) в області D називається рівнянням

– гіперболічного типу, якщо дискримінант $\Delta>0$ для всіх $(x,y)\in \mathrm{D}$;
– параболічного типу, якщо $\Delta=0$ для всіх $(x,y)\in \mathrm{D}$;
– еліптичного типу, якщо $\Delta<0$ для всіх $(x,y)\in \mathrm{D}$.

Безпосередньою перевіркою переконуємося в справедливості тотожності

$$\alpha_{12}^2-\alpha_{11}\alpha_{22}=\left(a_{12}^2-a_{11}a_{22}\right)\left[\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}\right],\tag{1.9}$$

де $\dfrac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\varphi_x & \varphi_y\\ \psi_x & \psi_y\end{vmatrix}$. Згідно наших припущень $\dfrac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}\neq 0$, отже, тип диференціального рівняння (1.1) є інваріантом відносно перетворення незалежних змінних (1.2).

Рівняння гіперболічного типу. У цьому випадку $\Delta>0$, а отже, із (1.8) одержимо дві дійсні різні сім'ї характеристик $c_1=\varphi(x,y)$, $c_2=\psi(x,y)$. Покладемо в (1.2) $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$. Тоді в (1.4) $\alpha_{11}=\alpha_{22}=0$, а отже, матимемо

$$U_{\xi\eta}=\frac{F_1\left(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta\right)}{2\alpha_{12}}\ .\tag{1.10}$$

Рівняння (1.10) є першою канонічною формою ДРЧП гіперболічного типу.

Покладаючи $\alpha=\dfrac{\xi+\eta}{2}$, $\beta=\dfrac{\xi-\eta}{2}$, із (1.10) одержимо другу канонічну форму ДРЧП гіперболічного типу

$$U_{\alpha\alpha}-U_{\beta\beta}=F_2\left(\alpha,\beta,U,U_\alpha,U_\beta\right).\tag{1.10$'$}$$

Рівняння параболічного типу. Для рівнянь параболічного типу $\Delta=0$, і рівняння (1.7) має один загальний інтеґрал $c=\varphi(x,y)$. Покладемо в цьому випадку $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\eta(x,y)$, де $\eta(x,y)$ – довільна двічі неперервно диференційовна функція, незалежна від $\varphi(x,y)$. Тоді

$$\alpha_{11}=\left(\sqrt{a_{11}}\cdot\xi_x+\sqrt{a_{22}}\cdot\xi_y\right)^2\equiv 0\,,$$

а значить,

$$\alpha_{12}=\left(\sqrt{a_{11}}\cdot\xi_x+\sqrt{a_{22}}\cdot\xi_y\right)\cdot\left(\sqrt{a_{11}}\cdot\eta_x+\sqrt{a_{22}}\cdot\eta_y\right)\equiv 0.$$

Таким чином, із (1.4) одержуємо

$$U_{\eta\eta}=\frac{F_1\left(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta\right)}{\alpha_{22}}. \qquad (1.11)$$

Рівняння (1.11) є канонічною формою ДРЧП параболічного типу.

Рівняння еліптичного типу. Для рівнянь еліптичного типу $\Delta<0$ в розглядуваній області. Тоді характеристичне рівняння має дві комплексно спряжені сім'ї характеристик $c_1=\rho(x,y)+i\sigma(x,y)$, $c_2=\rho(x,y)-i\sigma(x,y)$. Щоб не мати справи з комплексними змінними, вводимо нові незалежні змінні за формулами

$$\xi=\rho(x,y),\quad \eta=\sigma(x,y).$$

В результаті підстановки одержимо: $\alpha_{11}=\alpha_{22}$ і $\alpha_{12}=0$. Таким чином, рівняння (1.4) запишеться у вигляді

$$U_{\xi\xi}+U_{\eta\eta}=\frac{F_1\left(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta\right)}{\alpha_{11}}. \qquad (1.12)$$

Рівняння (1.12) є канонічною формою ДРЧП еліптичного типу.

Зауваження 1. ДРЧП (1.1) в різних областях площини xOy може належати до різних типів.

Зауваження 2. Якщо б ми розглядали лінійні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, тоді канонічні форми були б також лінійними рівняннями зі сталими коефіцієнтами. В цьому випадку рівняння ще більше можна спростити. Для цього вводять нову невідому функцію $V(\xi,\eta)$ за формулою $U=e^{\lambda\xi+\mu\eta}\cdot V$, де λ, μ – сталі, які вибирають таким чином, щоб коефіцієнти при V_ξ і V_η (у випадку рівнянь гіперболічного та еліптичного типів) або при V_η і V (у випадку рівнянь параболічного типу) перетворилися в нуль. Отже, у випадку лінійних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами приходимо до канонічних форм:

$V_{\xi\xi}+V_{\eta\eta}+\gamma V=f(\xi,\eta)$ – еліптичний тип,

$$\left.\begin{array}{l}V_{\xi\eta}+\gamma V=f(\xi,\eta)\\ V_{\xi\xi}-V_{\eta\eta}+\gamma V=f(\xi,\eta)\end{array}\right\} \text{ – гіперболічний тип,}$$

$V_{\eta\eta}+b_1V_\xi=f(\xi,\eta)$ – параболічний тип.

ПРИКЛАДИ. Визначити тип та звести до канонічного вигляду наступні ДРЧП:

1. $U_{xx}-yU_{yy}+U=0.$

Розв'язання. Маємо: $a_{11}=1,\ a_{12}=0,\ a_{22}=-y,\ \Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=y$. Таким чином, в області $y>0$ рівняння є гіперболічного типу, а в області $y<0$ – еліптичного.

а) Нехай $y>0$. Рівняння характеристик (1.8) мають вигляд

$$\frac{dy}{dx}=-\sqrt{y},\quad \frac{dy}{dx}=\sqrt{y},$$

а їх загальні інтеґрали є $x-2\sqrt{y}=c_1$, $x+2\sqrt{y}=c_2$. Вводимо заміну незалежних змінних

$$\xi=x-2\sqrt{y},\qquad \eta=x+2\sqrt{y}.$$

Тоді

$$U_x=U_\xi+U_\eta,\quad U_y=\frac{1}{\sqrt{y}}\left(U_\eta-U_\xi\right),\quad U_{xx}=U_{\xi\xi}+2U_{\xi\eta}+U_{\eta\eta},$$

$$U_{yy}=\frac{1}{y}\left(U_{\xi\xi}-2U_{\xi\eta}+U_{\eta\eta}\right)-\frac{1}{2y^{3/2}}\left(U_\eta-U_\xi\right).$$

Підставивши знайдені похідні в задане рівняння, одержимо

$$U_{\xi\eta}=\frac{U_\xi-U_\eta}{2(\eta-\xi)}-\frac{1}{4}U.$$

Характеристиками є праві і ліві вітки парабол $(x-c)^2=y$ (на рис. 1 суцільна і пунктирна лінії). Вершини парабол, які лежать на осі *Ox*, не належать характеристикам, тому що в цих точках $\Delta=0$.

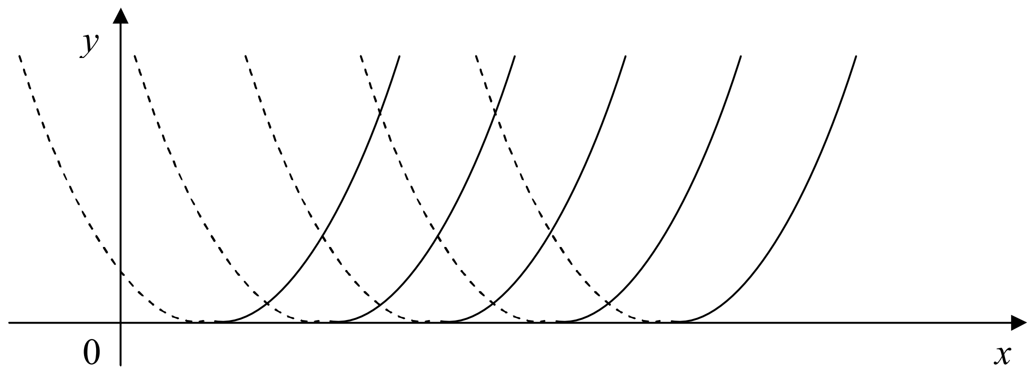


Рис. 1

Одержаній канонічній формі можна надати іншого вигляду. Для цього вводимо нові незалежні змінні

$$\alpha=\frac{\xi+\eta}{2},\quad \beta=\frac{\xi-\eta}{2},$$

$$U_\xi=\frac{1}{2}\left(U_\alpha+U_\beta\right),\quad U_\eta=\frac{1}{2}\left(U_\alpha-U_\beta\right),\quad U_{\xi\eta}=\frac{1}{4}\left(U_{\alpha\alpha}-U_{\beta\beta}\right).$$

Підставивши знайдені частинні похідні в одержану канонічну форму, матимемо

$$U_{\alpha\alpha} - U_{\beta\beta} = -\frac{1}{\beta}U_{\beta} - U\,.$$

б) В області $y < 0$ маємо $x - 2i\sqrt{-y} = c_1$, $x + 2i\sqrt{-y} = c_2$. Вводимо підстановку $\xi = x$, $\eta = 2\sqrt{-y}$. Тоді

$$U_x = U_{\xi}, \quad U_y = -\frac{1}{\sqrt{-y}}U_{\eta}, \quad U_{xx} = U_{\xi\xi}, \quad U_{yy} = -\frac{1}{y}U_{\eta\eta} - \frac{1}{2(-y)^{3/2}}U_{\eta}.$$

Підставивши знайдені похідні в задане рівняння, одержимо

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = -\frac{1}{\eta}U_{\eta} - U.$$

2. $e^{2x}U_{xx} + 2e^{x+y}U_{xy} + e^{2y}U_{yy} = 0.$

Розв'язання. Тут $a_{11} = e^{2x}$, $a_{12} = e^{x+y}$, $a_{22} = e^{2y}$, $\Delta = e^{2(x+y)} - e^{2x}\cdot e^{2y} \equiv 0.$ Отже, задане рівняння є рівнянням параболічного типу на всій площині. Знаходимо характеристики:

$$\frac{dy}{dx} = e^{y-x}, \quad c = e^{-x} - e^{-y}.$$

Вводимо нові незалежні змінні за формулами: $\xi = e^{-x} - e^{-y}$, $\eta = x$. Очевидно, що $\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0.$ Маємо:

$$U_x = -e^{-x}U_{\xi} + U_{\eta}, \quad U_y = e^{-y}U_{\xi}, \quad U_{yy} = e^{-2y}U_{\xi\xi} - e^{-y}U_{\xi},$$

$$U_{xy} = -e^{-x-y}U_{\xi\xi} + e^{-y}U_{\xi\eta}, \quad U_{xx} = e^{-2x}U_{\xi\xi} - 2e^{-x}U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta} + e^{-x}U_{\xi}.$$

Підставивши знайдені похідні в задане рівняння, одержимо канонічну форму ДРЧП параболічного типу

$$U_{\eta\eta} = e^{-\eta}\left(e^{-\eta\xi} - \xi e^{-\eta} - 1\right)U_{\xi}.$$

3. $U_{xx} + 2U_{xy} + 4U_{yy} + 2U_x + 3U_y = 0.$

Розв'язання. Маємо лінійне однорідне ДРЧП зі сталими коефіцієнтами. Визначаємо тип:

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 1 - 4 = -3 < 0,$$

тобто задане ДРЧП є рівнянням еліптичного типу на всій площині.

Знаходимо характеристики:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\sqrt{3}i}{1}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1-\sqrt{3}i}{1};$$

$$c_1 = (y - x) + i\sqrt{3}x, \quad c_2 = (y - x) - i\sqrt{3}x.$$

Вводимо нові незалежні змінні: $\xi = y - x$, $\eta = \sqrt{3}x.$ Маємо:

$$U_x=-U_\xi+\sqrt{3}U_\eta,\quad U_y=U_\xi,\quad U_{yy}=U_{\xi\xi},$$
$$U_{xx}=U_{\xi\xi}-2\sqrt{3}U_{\xi\eta}+3U_{\eta\eta},\quad U_{xy}=-U_{\xi\xi}+\sqrt{3}U_{\xi\eta}.$$

Підставивши знайдені похідні в рівняння, одержуємо

$$U_{\xi\xi}+U_{\eta\eta}+\frac{1}{3}U_\xi+\frac{2}{\sqrt{3}}U_\eta=0. \tag{1.13}$$

Вводимо нову невідому функцію $V(\xi,\eta)$ згідно з формулою

$$U(\xi,\eta)=e^{\lambda\xi+\mu\eta}\cdot V(\xi,\eta),$$

де λ і μ – довільні поки що сталі. Знаходимо похідні:

$$U_\xi=e^{\lambda\xi+\mu\eta}\left(V_\xi+\lambda V\right),\quad U_\xi=e^{\lambda\xi+\mu\eta}\left(V_\eta+\mu V\right),$$
$$U_{\xi\xi}=e^{\lambda\xi+\mu\eta}\left(V_{\xi\xi}+2\lambda V_\xi+\lambda^2 V\right),\quad U_{\eta\eta}=e^{\lambda\xi+\mu\eta}\left(V_{\eta\eta}+2\mu V_\eta+\mu^2 V\right).$$

Після підстановки знайдених похідних у рівняння (1.13) одержимо:

$$V_{\xi\xi}+V_{\eta\eta}+\left(2\lambda+\frac{1}{3}\right)V_\xi+\left(2\mu+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)V_\eta+\left(\lambda^2+\mu^2+\frac{1}{3}\lambda+\frac{2}{\sqrt{3}}\mu\right)V=0.$$

Вибираємо сталі λ і μ таким чином, щоб $2\lambda+3=0,\ 2\mu+\frac{2}{\sqrt{3}}=0.$ Тоді маємо:

$$V_{\xi\xi}+V_{\eta\eta}=\frac{13}{36}V.$$

Це і є канонічна форма заданого лінійного однорідного рівняння еліптичного типу зі сталими коефіцієнтами.

ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ №1

Варіант	Визначити тип та звести до канонічного вигляду наступні ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними:
1	1. $U_{xx}+2U_{xy}+5U_{yy}+2U_x+3U_y=0.$ 2. $U_{xx}-2\cos xU_{xy}-\left(3+\sin^2 x\right)U_{yy}-yU_y=0.$ 3. $U_{xx}+2U_{xy}+U_{yy}+3U_x-5U_y+4U=0.$
2	1. $U_{xy}+2U_{yy}-3U_x+4U_y=0.$ 2. $xU_{xx}+2\sqrt{xy}U_{xy}+yU_{yy}-U_x=0\quad(xy\ge 0).$ 3. $2U_{xx}+2U_{xy}+U_{yy}+4U_x+4U_y+U=0.$
3	1. $U_{xx}+6U_{xy}+9U_{yy}+U_x-2U_y=0.$ 2. $\left(1+x^2\right)U_{xx}+\left(1+y^2\right)U_{yy}+xU_x+yU_y=0.$ 3. $U_{xx}+4U_{xy}+3U_{yy}+5U_x+U_y+4U=0.$

4	1. $U_{xx}+4U_{yy}-2U_x+3U_y-U=0.$ 2. $e^xU_{xy}+U_{yy}+U_x+xU_y=0.$ 3. $U_{xx}-2xU_{xy}+x^2U_{yy}-2U_y=0.$
5	1. $4U_{xx}+4U_{xy}+U_{yy}-3U_x+U_y=0.$ 2. $U_{xx}+\left(1+y^2\right)U_{yy}+U_x=x^2.$ 3. $x^2U_{xx}-y^2U_{yy}=0.$
6	1. $2U_{xx}-2\sqrt{5}U_{xy}+3U_{yy}-U_x+U_y=0.$ 2. $U_{xx}-2xU_{xy}+\left(x^2-1\right)U_{yy}+yU_x=0.$ 3. $x^2U_{xx}+2xyU_{xy}+y^2U_{yy}=0.$
7	1. $U_{xy}-U_{yy}+U_x+6U_y+U=(y+x)^2.$ 2. $4U_{xx}-4xU_{xy}+x^2U_{yy}-U_x+U_y=0.$ 3. $y^2U_{xx}+x^2U_{yy}=0.$
8	1. $U_{xx}-2U_{xy}+2U_{yy}+U_x-U_y=0.$ 2. $\sin^2 yU_{xx}-e^{2x}U_{yy}+3U_x-5U=\ln 2.$ 3. $U_{xx}+4U_{xy}+4U_{yy}-U_x+3U=0.$
9	1. $U_{xx}-2\sqrt{3}U_{xy}+2U_{yy}+U_x-U_y=e^{\sqrt{3}}.$ 2. $2e^xU_{xx}+2e^{\frac{1}{2}(x+y)}U_{xy}+e^yU_{yy}=0.$ 3. $U_{xx}+4U_{xy}+5U_{yy}+U_x+2U_y=0.$
10	1. $U_{xx}+2\sqrt{2}U_{xy}+2U_{yy}-U_x+U_y=0.$ 2. $U_{xx}+2\cos xU_{xy}+\left(1+\cos^2 x\right)U_{yy}+U+xU_y=0.$ 3. $U_{xx}+2U_{xy}-3U_{yy}+2U_x+6U_y=0.$
11	1. $U_{xy}+3U_{yy}-5U_x+U_y+U=0.$ 2. $yU_{xx}-xU_{yy}+U_x+yU_y=0 \quad (xy<0).$ 3. $U_{xx}-2U_{xy}+U_{yy}+2U_x-U_y+3U=0.$
12	1. $2U_{xx}-2U_{xy}+U_{yy}-5U_y+6U=0.$ 2. $xU_{xy}+yU_{yy}+U+e^xU_y=0.$ 3. $9U_{xx}-6U_{xy}+U_{yy}+2U_x-3U_y=0.$
13	1. $U_{xx}-2U_{xy}+U_{yy}+3U_x-4U_y+U=0.$ 2. $U_{xx}+xyU_{yy}=9 \quad (xy>0).$ 3. $2U_{xy}-U_{xx}+5U_x+6U=0.$

14	1. $U_{xx} - 2U_{xy} + 5U_{yy} + 4U_x - U = 5.$ 2. $U_{xx} + xyU_{yy} - \frac{x}{2}U_x + \frac{x}{2}U_y = 0 \quad (xy < 0).$ 3. $\mathrm{tg}^2\, xU_{xx} - 2y \cdot \mathrm{tg}\, xU_{xy} + y^2U_{yy} + \mathrm{tg}^3\, xU_x = 0.$
15	1. $y^2U_{xx} - e^{2x}U_{yy} + U_x = 0.$ 2. $9U_{xx} + 3U_{xy} + 0{,}25U_{yy} - U_y + U_x = 0.$ 3. $y^2U_{xx} + 2xyU_{xy} + 2x^2U_{yy} + yU_y = 0.$
16	1. $U_{xx} + y^2U_{yy} + 2U_y + 3U = 0.$ 2. $U_{yy} + 4e^{2y}U_{xy} - U_x + U_y - e^x = 0.$ 3. $U_{xx} + 6U_{xy} + 9U_{yy} - 5U_y = 4U.$
17	1. $U_{xx} + 2e^xU_{xy} + e^{2x}U_{yy} - U_x \ln\lvert U\rvert = 0.$ 2. $U_{xx} + 2U_{xy} + 5U_{yy} + 3U_y + 2U_x = 0.$ 3. $U_{xx} + 4U_{xy} - 2U_y + 7U = y^2.$
18	1. $9U_{xx} - 6U_{xy} + 2U_{yy} - 3U_y + 2U_x = 0.$ 2. $12xU_{xx} + 12\sqrt{xy}U_{xy} + 3yU_{yy} - U_x \cdot U = 0, \quad xy \geq 0.$ 3. $2U_{xy} - 7U_{yy} + 4U_y - 6U_x = ye^x.$
19	1. $U_{xy} - 2U_{yy} + 4U_y - 3U_x = 0.$ 2. $e^{2x}U_{xx} + 4e^{x+y}U_{xy} + 5e^{2y}U_{yy} = \sin U.$ 3. $4U_{xx} - 12U_{xy} + 9U_{yy} - U = 2y.$
20	1. $2U_{xx} + 2U_{xy} + U_{yy} + 4U_y + 4U_x + U = 0.$ 2. $e^xU_{xy} + U_{yy} + xU_y + U_x - \mathrm{tg}\,U = 0.$ 3. $U_{xx} - 2xU_{xy} + x^2U_{yy} - 2U_y + e^{x+y} = 0.$
21	1. $U_{xx} + 4U_{xy} + 4U_{yy} - U_y + U_x + 3U = 0.$ 2. $2U_{xx} - 2e^yU_{xy} + e^{2y}U_{yy} - U_y + U_x = 0.$ 3. $U_{xx} - 8U_{xy} - 6U_y + 3U_x = \mathrm{tg}(x + y).$
22	1. $U_{xy} - 2U_{yy} - 4U_y + 3U_x + e^{\sqrt{2}x} = 0.$ 2. $U_{xx} - 2\,\mathrm{ctg}\, xU_{xy} + \mathrm{ctg}^2\, xU_{yy} + U_y \cdot U = 0.$ 3. $2U_{xx} + 2\sqrt{2}yU_{xy} + (1 + y^2)U_{yy} + yU_y = 0.$
23	1. $y^2U_{xx} - 2y\cos xU_{xy} + \cos^2 xU_{yy} + \mathrm{tg}\, x = 0.$ 2. $U_{xx} - 2\sqrt{5}U_{xy} + 4U_{yy} - U_y + U_x = 0.$ 3. $U_{xx} + 2e^{0{,}5x}U_{xy} + 2e^xU_{yy} + (U_x - U_y)^2 = 0.$

24	1. $U_{xx}+4U_{xy}+8U_{yy}+2U_y-U_x=0.$ 2. $e^{2y}U_{xx}+e^yU_{xy}+0{,}25U_{yy}+\mathrm{ch}(U_x+U_y)=U.$ 3. $U_{xx}-2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}U_{xy}+\cos xU_{yy}=\sin^2 x.$
25	1. $U_{xx}+2U_{xy}-3U_{yy}+U_y+2U_x=0.$ 2. $xU_{xx}-yU_{yy}+0{,}5(U_x-U_y)-e^U=0, \quad xy\le 0.$ 3. $x^2U_{xx}-2x\,\mathrm{tg}\,yU_{xy}+\mathrm{tg}^2\,yU_{yy}+yU_y=2xU.$
26	1. $\sin^2 xU_{yy}+2\cos xU_{xy}-U_{xx}=yU_x.$ 2. $5U_{xx}-2U_{xy}+U_{yy}-4U_y+U_x+5U=0.$ 3. $U_{xx}+xU_{xy}+0{,}25x^2U_{yy}+\sin U=0.$
27	1. $U_{xx}+2U_{xy}+2U_{yy}+U_y-U_x=xy.$ 2. $yU_{xx}-2U_{xy}+\mathrm{sh}\,U=0.$ 3. $U_{yy}+2\sin yU_{xy}+(1-\cos^2 y)U_{xx}+x\,\mathrm{tg}\,y=0.$
28	1. $U_{xx}-6U_{xy}+9U_{yy}-3U_y+5U_x+U=0.$ 2. $U_{yy}+U_{xy}+5xU_y-yU_x+ye^x=0.$ 3. $U_{xx}-2e^{0{,}5y}U_{xy}+2e^yU_{yy}=U^2.$
29	1. $0{,}25U_{xx}-U_{xy}+U_{yy}+5U_x-6U=0.$ 2. $U_{xx}+2xU_{xy}+(1+x^2)U_{yy}+yU_x=0.$ 3. $8U_{xx}-4U_{xy}+U_y-3U_x=(y-1)U.$
30	1. $U_{xx}+2U_{xy}+2U_{yy}+5xyU=0.$ 2. $U_{yy}+6U_{xy}-5U_y+U_x=U.$ 3. $\sec xU_{xx}+2U_{xy}+\cos xU_{yy}+xe^U=0.$

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2
МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК (МЕТОД БІЖУЧИХ ХВИЛЬ)

Теоретичні відомості

Поширеним методом інтеґрування деяких небагаточисельних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку є так званий метод характеристик. Суть методу полягає в тому, що спочатку задане ДРЧП другого порядку зводять до канонічної форми. Інтеґруючи одержане канонічне рівняння та переходячи до старих змінних, знаходимо шуканий розв'язок. Проілюструємо цей метод на прикладі задачі Коші для рівняння вільних коливань нескінченої однорідної струни.

Постановка задачі. Знайти неперервний розв'язок диференціального рівняння

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty, \tag{2.1}$$

який задовольняє початкові умови

$$U(x,0) = \varphi(x), \quad U_t(x,0) = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \tag{2.2}$$

де $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ – задані функції. Будемо вважати, що розв'язок задачі Коші (2.1),(2.2) існує.

1. Знаходимо [1-4] загальний розв'язок рівняння (2.1). Для цього зведемо його до канонічного вигляду. Рівняння характеристик $dx^2 - a^2 dt^2 = 0$ розпадається на два рівняння $dx - adt = 0$, $dx + adt = 0$, інтеґралами яких є сім'ї прямих $x - at = c_1, \quad x + at = c_2$. Вводимо нові незалежні змінні

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at \tag{2.3}$$

Маємо:

$$U_x = U_\xi + U_\eta, \quad U_{xx} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta},$$

$$U_t = -aU_\xi + aU_\eta, \quad U_{tt} = a^2 U_{\xi\xi} - 2a^2 U_{\xi\eta} + a^2 U_{\eta\eta}.$$

Підставивши знайдені значення похідних U_{xx} та U_{tt} в рівняння (2.1), одержимо

$$U_{\xi\eta} = 0. \tag{2.4}$$

Позначимо $U_\eta = V$. Тоді рівняння (2.4) запишеться у вигляді

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = 0.$$

Останнє рівняння справджує довільна функція, яка не залежить від ξ. Таким чином, $V = f(\eta)$, а отже,

$$U_\eta(\xi,\eta) = f(\eta). \tag{2.5}$$

Інтеґруємо рівняння (2.5), рахуючи ξ за параметр. Маємо

$$U(\xi,\eta) = \int f(\eta) d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta). \tag{2.6}$$

Які б не були двічі неперервно диференційовні функції f_1 і f_2, функція $U(\xi,\eta)$, визначена формулою (2.6), є розв'язком рівняння (2.4). Поскільки всякий розв'язок рівняння (2.4) може бути поданий у вигляді (2.6) при відповідному виборі f_1 і f_2, то формула (2.6) є загальним інтеґралом рівняння (2.4). Отже, функція

$$U(x,t)=f_1(x-at)+f_2(x+at) \tag{2.7}$$

є загальним інтеґралом рівняння (2.1). Формула (2.7) вперше була одержана французьким математиком Жаном Лероном Д'Аламбером (1717-1783) у 1747 році.

2. Визначаємо розв'язок задачі Коші (2.1),(2.2). Для цього знаходимо функції f_1 і f_2 таким чином, щоб виконувалися початкові умови (2.2):

$$U(x,0)=f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x), \tag{2.8}$$

$$U_t(x,0)=-af_1'(x)+af_2'(x)=\psi(x). \tag{2.9}$$

Інтеґруючи рівність (2.9), одержимо:

$$f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x),$$

$$f_2(x)-f_1(x)=\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(z)dz+c \quad (x_0, c-const),$$

звідки знаходимо

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(z)dz-\frac{c}{2}, \quad f_2(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(z)dz+\frac{c}{2}. \tag{2.10}$$

Рівності (2.10) мають силу для довільних значень арґументу. Підставляючи (2.10) в (2.7), маємо

$$U(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz. \tag{2.11}$$

Якщо функція $\psi(x)$ неперервна разом з першою похідною, а $\varphi(x)$ – двічі неперервно диференційовна, тоді функція $U(x,t)$, подана формулою (2.11), є єдиним двічі неперервно диференційовним розв'язком задачі Коші (2.1),(2.2).

Фізична інтерпретація розв'язку. Зауважимо, що кожна з функцій $f_1(x-at)$ і $f_2(x+at)$ є розв'язком рівняння (2.1). Розглянемо розв'язок рівняння (2.1)

$$U_1(x,t)=f_1(x-at).$$

Нехай нам задана деяка точка x_0. Припустимо, що із цієї точки в додатньому напрямку осі Ox в момент часу $t=0$ розпочинає рухатися спостерігач зі швидкістю a. В момент часу t_1 він знаходитиметься в точці $x_1=x_0+at_1$. Величина відхилення, яку спостерігач бачитиме в точці x_1 в момент часу t_1, буде рівна $U_1=f_1(x_1-at_1)=f_1(x_0)$. Таким чином, спостерігач в довільний момент часу буде бачити в точці, де він знаходиться, одну і ту ж величину відхилення,

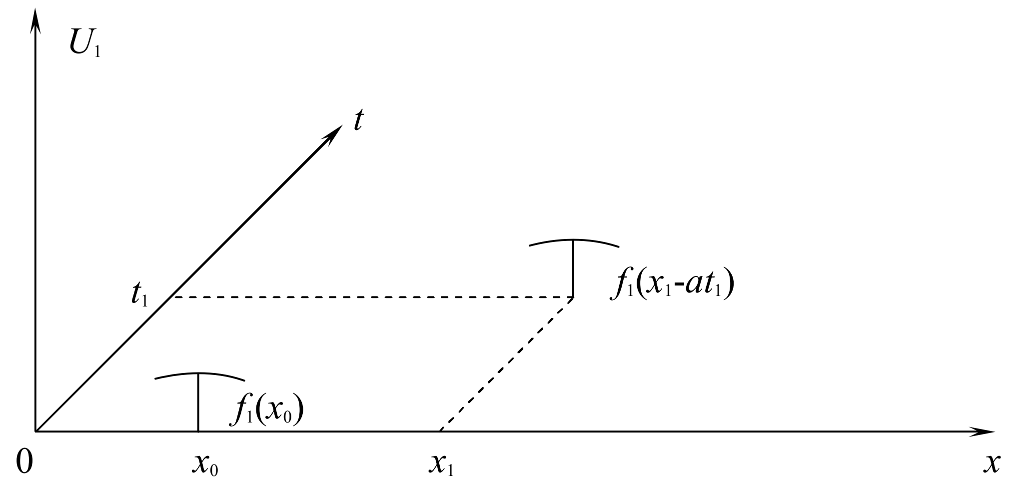


Рис. 2

рівну $f_1(x_0)$. Звідси випливає, що початковий профіль $U_1(x,0) = f_1(x)$ буде рухатися зі швидкістю a в додатньому напрямку осі Ox як жорстка система, не змінюючи форми (див. рис. 2).

У зв'язку з цим розв'язок $U_1 = f_1(x - at)$ називають ***прямою біжучою хвилею***. Аналоґічне трактування можна дати і розв'язку $U_2 = f_2(x + at)$. Цей розв'язок називається ***зворотньою біжучою хвилею***. При цьому профіль рухається як жорстка система у від'ємному напрямку осі Ox зі швидкістю a.

Таким чином, довільний розв'язок рівняння (2.1) є ***суперпозиція*** (накладання) прямої та зворотньої біжучих хвиль.

ПРИКЛАД 1. Знайти закон вільних коливань однорідної нескінченої струни, якщо початкове відхилення задається рівностями

$$U(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad |x| > l, \\ 2hl^{-1}(l - x), & \text{при} \quad 0 < x < l, \\ 2hl^{-1}(l + x), & \text{при} \quad -l < x < 0, \end{cases}$$

де l – заданий відрізок. Початкова швидкість відсутня. Побудувати на рисунку профіль струни в різні моменти часу.

Розв'язання. Згідно формули (2.11) маємо

$$U(x,t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2}.$$

Зобразимо на рисунку профіль струни в різні моменти часу. На рис. 3 і рис. 4 в лівому стовпці зображена в різні моменти часу хвиля $U_2 = \frac{1}{2}\varphi(x + at)$, яка біжить вліво, а в правому стовпці – в ті ж моменти часу хвиля $U_1 = \frac{1}{2}\varphi(x - at)$, яка біжить вправо. В середньому стовпці показана сума цих хвиль. До того часу, поки $t < \frac{l}{a}$, є проміжки, де обидві хвилі накладаються одна на одну; починаючи з моменту $t = \frac{l}{a}$ ці хвилі уже не накладаються, а розбігаються в різні боки.

Із цього можна зробити висновок про характер коливання точки струни з фіксованою абсцисою x. Якщо $x > l$, то в початковий момент часу точка струни знаходиться на осі Ox і вона не бере участі в початковому відхиленні. Хвиля, яка біжить вправо, дійде до цієї точки в момент часу $t_1 = \frac{x-l}{a}$. З цього моменту точка струни почне коливатися. Як тільки хвиля пройде через розглядувану точку, тобто починаючи з часу $t_2 = \frac{x+l}{a}$, ця точка знову повертається в стан спокою. В момент часу t_1 до точки доходить передній фронт хвилі, а в момент t_2 – задній. Таким чином, розглядувана точка струни бере участь у коливному процесі при

$$\frac{x-l}{a} < t < \frac{x+l}{a}.$$

Якщо $0 < x < l$, то через цю точку проходить уже як пряма, так і зворотня хвилі. Передній фронт обох хвиль розміщується перед точкою: задній фронт зворотньої хвилі пройде через точку в момент $t_1 = \frac{l-x}{a}$, а задній фронт прямої хвилі – в момент $t_2 = \frac{l+x}{a}$. При $t > t_2$ точка струни знаходитиметься в спокої, тобто буде лежати на осі Ox. Аналогічно, якщо $x < -l$, то точка бере участь у коливному процесі при $\frac{-x-l}{a} < t < \frac{l-x}{a}$, якщо ж $0 > x > -l$, то коливання закінчується, коли через точку пройде задній фронт зворотньої хвилі, тобто при $t = \frac{l-x}{a}$.

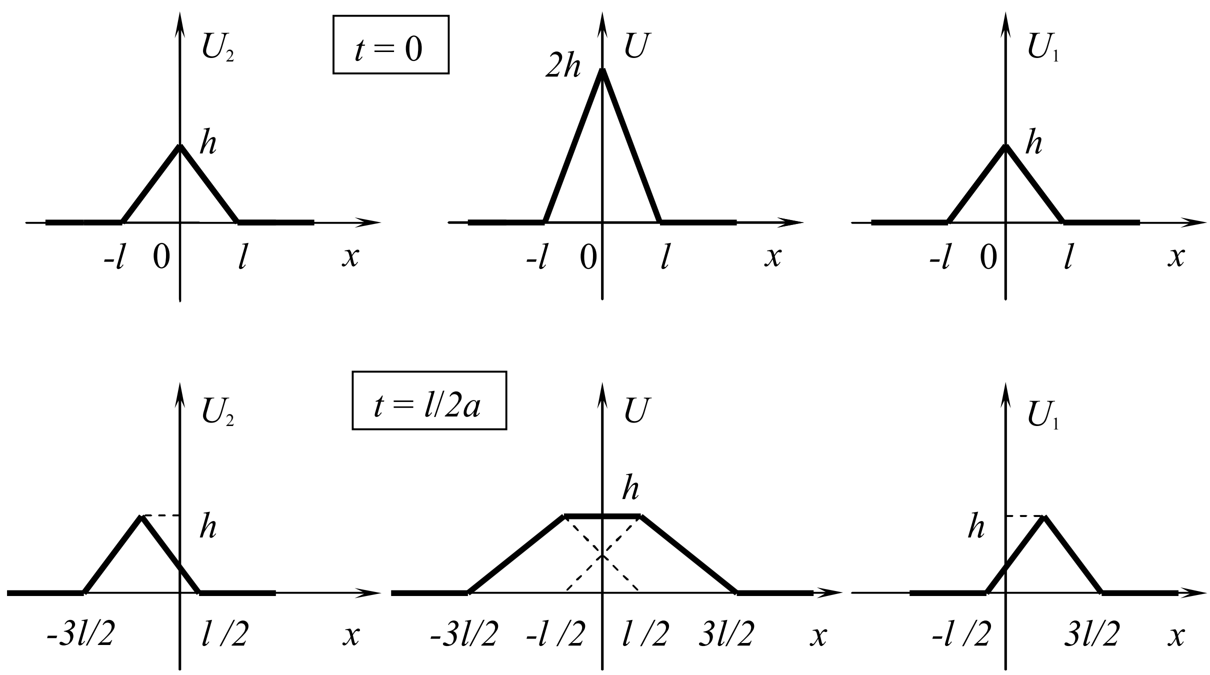


Рис. 3

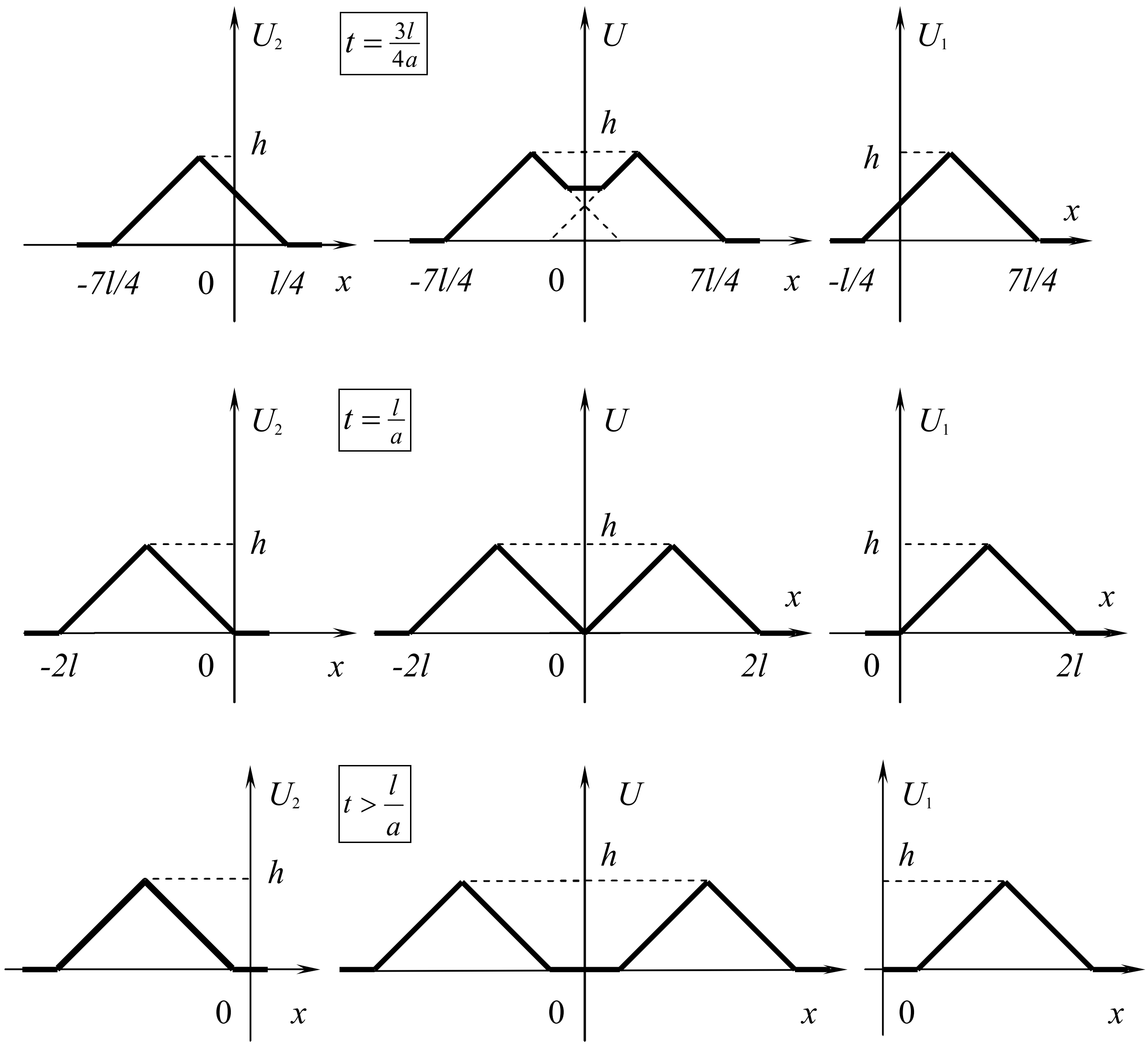


Рис. 4

ПРИКЛАД 2. Знайти закон вільних коливань однорідної нескінченої струни, якщо початкове відхилення рівне нулеві, а початкова швидкість

$$\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) = \begin{cases} V_0 = const, & x \in [-l;l], \\ 0, & x \in (-\infty;-l) \cup (l;+\infty). \end{cases}$$

Побудувати на рисунку профіль струни в різні моменти часу.

Розв'язання. Згідно з формулою (2.11) маємо

$$U(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz = \Phi(x+at) - \Phi(x-at), \quad \Phi(x) = \frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{x}\psi(z)dz. \qquad (*)$$

Бачимо, що і в цьому випадку розв'язок складається із двох хвиль: прямої хвилі $U_1 = -\Phi(x-at)$ і зворотньої хвилі $U_2 = \Phi(x+at)$. В початковий момент часу маємо

$$U(x,0) = U_1(x,0) + U_2(x,0) = -\Phi(x) + \Phi(x) = 0.$$

Обчислимо функцію $\Phi(x)$ для нашого випадку:

$$\Phi(x)=\frac{1}{2a}\int_0^x V_0 dz=\frac{V_0 x}{2a},\quad \text{якщо}\quad x\in[-l;l];$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{2a}\int_0^l V_0 dz=\frac{V_0 l}{2a},\quad \text{якщо}\quad x>l;$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{2a}\int_0^{-l} V_0 dz=-\frac{V_0 l}{2a},\quad \text{якщо}\quad x<-l.$$

Перейдемо до ґеометричної побудови розв’язку $U(x,t)$. В лівому стовпчику побудуємо ґрафіки зворотньої хвилі $U_2=\Phi(x+at)$ в різні моменти часу, а в правому стовпчику – ґрафіки прямої хвилі $U_1=-\Phi(x-at)$ у ті ж моменти часу. В середньому стовпчику покажемо результуюче відхилення точок струни (див. рис. 5).

Відзначимо, що характер коливань суттєво відрізняється від поширення хвиль відхилення. Розглянемо точку струни, що знаходиться в момент $t=0$ в початку координат. З ростом t ця точка буде підійматися вгору – це видно із формули (*), – поскільки проміжок інтеґрування $(-at,at)$ розширюється. При $t=\frac{l}{a}$ одержимо

$$U\left(0,\frac{l}{a}\right)=\frac{1}{2a}\int_{-l}^{l} V_0 dx=\frac{V_0 l}{a}=h.$$

Якщо тепер брати $t>\frac{l}{a}$, то все одно буде $U(0,t)=h$, тому що за межами проміжку $[-l,l]$ функція $\psi(x)$ рівна нулеві. Тому на рисунках, які відповідають значенням $t>\frac{l}{a}$, відхилення $U(0,t)$ залишається сталим.

Розглянемо точку $x_1=\frac{l}{2}$. Спочатку, поки $t<\frac{l}{2a}$, вона буде підійматися вгору під дією обох хвиль: прямої і зворотньої. При $t>\frac{l}{2a}$ відхилення зворотньої хвилі в цій точці набуде сталого значення $\frac{h}{2}$ і точка буде продовжувати підійматися вже тільки під дією прямої хвилі. Нарешті, при $t>\dfrac{3l}{2a}$ відхилення обох хвиль досягнуть величини $\frac{h}{2}$ і зміщення $U\left(\frac{l}{2},t\right)$ стане рівним h.

Якщо взяти точку $x_2>l$, то відхилення зворотньої хвилі в цій точці постійно рівне $\frac{h}{2}$; відхилення прямої хвилі спочатку рівне $-\frac{h}{2}$, і точка почне підійматися вгору тільки тоді, коли до неї дійде нахилений проміжок прямої хвилі, тобто при $t=\frac{x-l}{a}$. Точка підніметься на максимальну висоту h, коли через неї почне знову проходити горизонтальний проміжок прямої хвилі, тобто при $t>\frac{x+l}{a}$.

З часом кожна точка струни під дією початкових швидкостей, які надані проміжку струни $[-l,l]$, підніметься на висоту h і далі буде весь час залишатися на цій висоті.

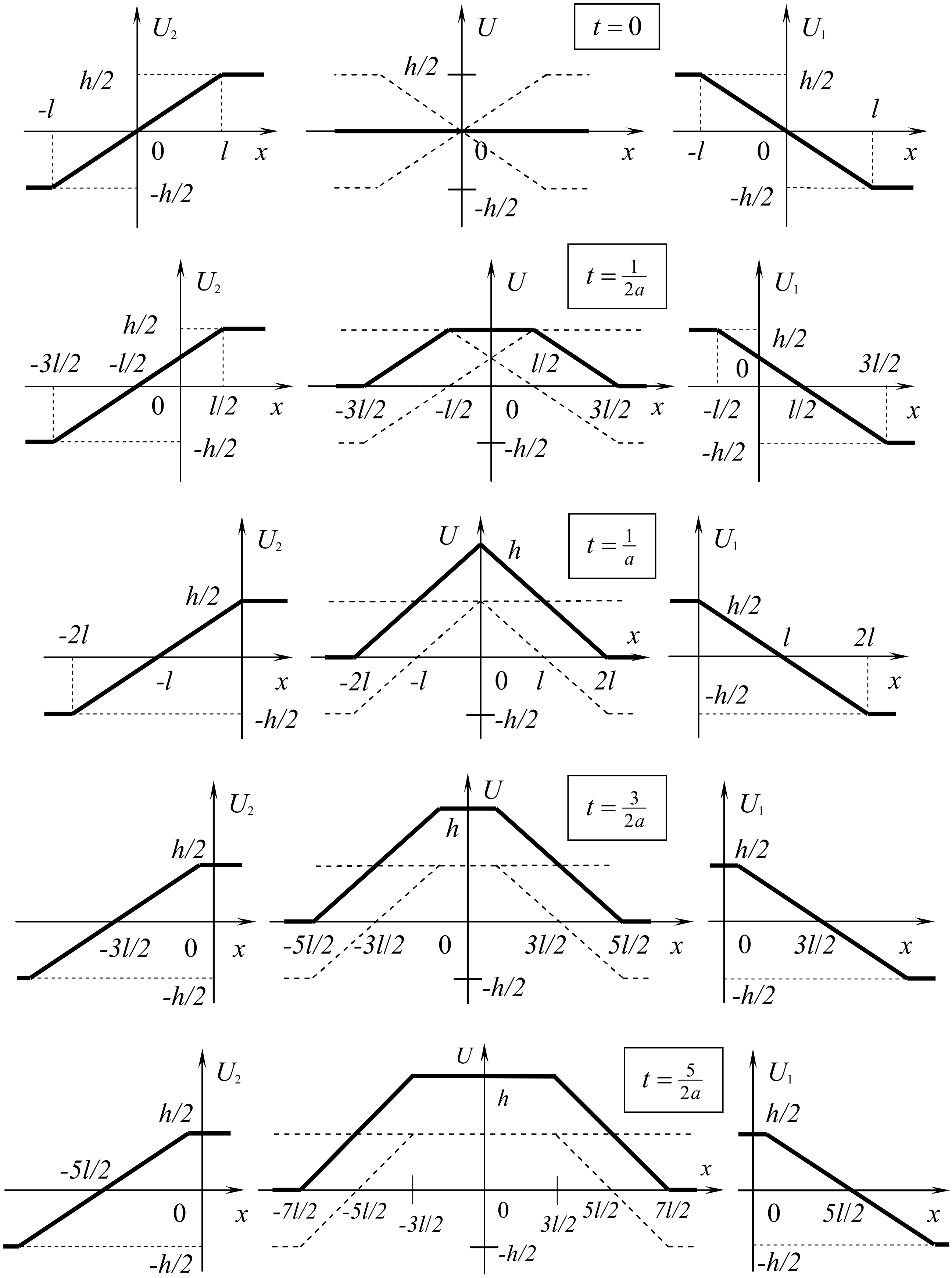


Рис. 5

ПРИКЛАД 3. Знайти розв'язок рівняння

$$x^2U_{xx} - 2xyU_{xy} - 3y^2U_{yy} = 0 \quad (xy \neq 0), \tag{2.12}$$

який справджує початкові умови

$$U\big|_{y=1} = \varphi_0(x), \qquad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=1} = \varphi_1(x). \tag{2.13}$$

Розв'язання. Знаходимо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння. Маємо:

$$\frac{dy}{dy} = \frac{xy \pm 2xy}{x^2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{y}{x}, \quad c_2 = x\sqrt[3]{y}\,.$$

1. Вводимо нові незалежні змінні $\xi = \dfrac{y}{x}$, $\eta = x\sqrt[3]{y}$ і зводимо рівняння (2.12) до канонічного вигляду.

$$U_x = -\frac{y}{x^2}U_\xi + \sqrt[3]{y}U_\eta, \qquad U_y = \frac{1}{x}U_\xi + \frac{x}{3\sqrt[3]{y^2}}U_\eta,$$

$$U_{xx} = \frac{y^2}{x^4}U_{\xi\xi} - 2\frac{y\sqrt[3]{y}}{x^2}U_{\xi\eta} + \sqrt[3]{y^2}U_{\eta\eta} + 2\frac{y}{x^3}U_\xi,$$

$$U_{yy} = \frac{1}{x^2}U_{\xi\xi} + \frac{2}{3\sqrt[3]{y^2}}U_{\xi\eta} + \frac{x^2}{9\sqrt[3]{y^4}}U_{\eta\eta} - \frac{2x}{9\sqrt[3]{y^5}}U_\eta,$$

$$U_{xx} = -\frac{y}{x^3}U_{\xi\xi} + \frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{y}}{x}U_{\xi\eta} + \frac{x}{3\sqrt[3]{y}}U_{\eta\eta} - \frac{1}{x^2}U_\xi + \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}U_\eta.$$

Підклавши знайдені похідні в рівняння (2.12), одержимо

$$U_{\xi\eta} - \frac{3}{4\eta}U_\xi = 0. \tag{2.14}$$

Рівняння (2.14) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(U_\eta - \frac{3}{4\eta}U\right) = 0,$$

звідки випливає, що $\dfrac{\partial U}{\partial\eta} - \dfrac{3}{4\eta}U = f(\eta)$, де $f(\eta)$ – довільна неперервна функція одного арґументу η. Вважаючи в останньому рівнянні ξ за параметр, можемо його зінтеґрувати як звичайне диференціальне рівняння, але при цьому довільна стала інтеґрування буде функцією параметра ξ. Отже,

$$U(\xi,\eta) = e^{\int\frac{3}{4\eta}d\eta}\left(f_1(\xi) + \int e^{-\int\frac{3}{4\eta}d\eta}\cdot f(\eta)d\eta\right) = \eta^{\frac{3}{4}}\left[f_1(\xi) + f_2(\eta)\right].$$

Переходячи в останній рівності до старих незалежних змінних, одержимо загальний розв'язок рівняння (2.12)

$$U(x,y) = \sqrt[4]{x^3y}\left[f_1\left(\frac{y}{x}\right) + f_2\left(x\sqrt[3]{y}\right)\right]. \tag{2.15}$$

2. Знаходимо розв’язок задачі Коші (2.12),(2.13). Для цього функції f_1, f_2 у (2.15) вибираємо так, щоб виконувалися початкові умови (2.13). Маємо:

$$U\Big|_{y=1} = \sqrt[4]{x^3}\left[f_1\left(\frac{1}{x}\right)+f_2(x)\right]=\varphi_0(x).$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=1} = \frac{1}{4}\sqrt[4]{x^3}\left[f_1\left(\frac{1}{x}\right)+f_2(x)\right]+\sqrt[4]{x^3}\left[\frac{1}{x}\frac{df_1\left(\frac{1}{x}\right)}{d\left(\frac{1}{x}\right)}+\frac{1}{3}xf_2'(x)\right]=\varphi_1(x),$$

звідки знаходимо

$$f_2(x)=\frac{3}{4}\int_{x_0}^{x} z^{-\frac{7}{4}}\left[\varphi_1(z)-\frac{\varphi_0(z)}{4}\right]dz+\frac{3}{4}x^{-\frac{3}{4}}\varphi_0(x)+C,$$

$$f_1\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\varphi_0(x)-\frac{3}{4}\int_{x_0}^{x} z^{-\frac{7}{4}}\left[\varphi_1(z)-\frac{\varphi_0(z)}{4}\right]dz-C \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad f_1(\alpha)=\frac{1}{4}\alpha^{\frac{3}{4}}\varphi_0\left(\frac{1}{\alpha}\right)-\frac{3}{4}\int_{x_0}^{\frac{1}{\alpha}} z^{-\frac{7}{4}}\left[\varphi_1(z)-\frac{\varphi_0(z)}{4}\right]dz-C,$$

де $\alpha=\dfrac{1}{x}$.

Підставивши знайдені функції в (2.15), одержимо розв’язок задачі Коші (2.12),(2.13)

$$U(x,y)=\frac{3}{4}\varphi_0\left(x\sqrt[3]{y}\right)+\frac{1}{4}y\varphi_0\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{3}{16}\sqrt[4]{x^3y}\int_{x\sqrt[3]{y}}^{\frac{x}{y}}\varphi_0(z)z^{-\frac{7}{4}}dz-\frac{3}{4}\sqrt[4]{x^3y}\int_{x\sqrt[3]{y}}^{\frac{x}{y}}\varphi_1(z)z^{-\frac{7}{4}}dz\,.$$

ПРИКЛАД 4. Розв’язати задачу Коші:

$$3U_{xx}+2U_{xy}-U_{yy}+\frac{4}{y-x}\left(U_y+U_x\right)=x-y, \qquad (2.16)$$

$$U(0,y)=1,\quad U_x(0,y)=y^2. \qquad (2.17)$$

Розв’язання. Знаходимо загальний розв’язок рівняння (2.16). Маємо:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\pm 4}{6}\quad\Rightarrow\quad c_1=y-x,\quad c_2=3y+x\,.$$

1. Вводимо нові незалежні змінні $\xi=y-x$, $\eta=3y+x$ і зводимо рівняння (2.16) до канонічного вигляду:

$$U_x=U_\eta-U_\xi,\quad U_y=U_\xi+3U_\eta,\quad U_{xx}=U_{\xi\xi}-2U_{\xi\eta}+U_{\eta\eta},$$
$$U_{yy}=U_{\xi\xi}+6U_{\xi\eta}+9U_{\eta\eta},\quad U_{xy}=-U_{\xi\xi}-2U_{\xi\eta}+3U_{\eta\eta}.$$

Підставивши знайдені похідні в рівняння (2.16), одержимо

$$-16U_{\xi\eta}+\frac{16}{\xi}U_\eta=-\xi$$

або

$$U_{\xi\eta}-\frac{U_\eta}{\xi}=\frac{\xi}{16}. \qquad (2.18)$$

Введемо підстановку $U_\eta=z(\xi,\eta)$, тоді рівняння (2.18) набуде вигляду

$$z_\xi-\frac{z}{\xi}=\frac{\xi}{16},$$

звідки

$$z(\xi,\eta)=e^{\int\frac{d\xi}{\xi}}\left(f(\eta)+\int\frac{\xi}{16}e^{-\int\frac{d\xi}{\xi}}d\xi\right)=\xi f(\eta)+\frac{\xi^2}{16}=U_\eta,$$

тоді

$$U(\xi,\eta)=\int\left(\xi f(\eta)+\frac{\xi^2}{16}\right)d\eta+f_1(\xi)=f_1(\xi)+\xi f_2(\eta)+\frac{\xi^2\eta}{16},$$

а отже, загальний розв’язок рівняння (2.16) має вигляд

$$U(x,y)=f_1(y-x)+(y-x)f_2(3y+x)+\frac{(y-x)^2(3y+x)}{16}. \qquad (2.19)$$

2. Визначимо функції f_1 та f_2 таким чином, щоб для функції (2.19) виконувалися початкові умови (2.17). Маємо:

$$U_x(x,y)=-\frac{df_1(y-x)}{d(y-x)}-f_2(3y+x)+(y-x)\frac{df_2(3y+x)}{d(3y+x)}+\frac{(y-x)^2}{16}-(3y+x)\frac{(y-x)}{8}.$$

Тоді

$$U(0,y)\equiv yf_2(3y)+f_1(y)+3y\frac{y^2}{16},$$

$$U_x(0,y)\equiv-\frac{df_1(y)}{dy}-f_2(3y)+y\frac{df_2(3y)}{d(3y)}+\frac{y^2}{16}-\frac{3y^2}{8}.$$

З початкових умов (2.17) маємо:

$$\begin{cases} f_1(y)+yf_2(3y)=1-\dfrac{3y^3}{16}, & (2.20)\\ -\dfrac{df_1(y)}{dy}-f_2(3y)+y\dfrac{df_2(3y)}{d(3y)}=y^2+\dfrac{5y^2}{16}=\dfrac{21y^2}{16}. & (2.21)\end{cases}$$

Продиференціюємо рівність (2.20) за змінною y, тоді

$$\frac{df_1(y)}{dy}+f_2(3y)+3y\frac{df_2(3y)}{d(3y)}=-\frac{9y^2}{16}. \qquad (2.22)$$

Додавши рівності (2.21) та (2.22), дістанемо:

$$4y\frac{df_2(3y)}{d(3y)}=\frac{3y^2}{4},$$

або

$$df_2(3y)=\frac{3y}{16}d(3y).$$

Звідси $f_2(3y)=\dfrac{(3y)^2}{32}+C$, тобто $f_2(\alpha)=\dfrac{\alpha^2}{32}+C$, де $C=const$. Тоді з рівності (2.20)

$$f_1(y)=1-\frac{3y^3}{16}-yf_2(3y)=1-\frac{15}{32}y^3-Cy.$$

Підставивши знайдені функції $f_1(y)$ і $f_2(\alpha)$ у загальний розв'язок (2.19), одержимо розв'язок задачі Коші (2.16),(2.17):

$$U(x,y)=(y-x)\left(\frac{(3y+x)^2}{32}+C\right)+1-\frac{15}{32}(y-x)^3-C(y-x)+$$

$$+\frac{3y+x}{16}(y-x)^2=1+xy^2+\frac{x^3-3x^2y}{2}.$$

ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ №2

Варіант	Зінтеґрувати диференціальне рівняння	Знайти розв'язок задачі Коші	Знайти закон вільних коливань однорідної нескінченої струни та зобразити ґрафічно її профіль в різні моменти часу, якщо:
1	2	3	4
1	$U_{xy}+2U_{yy}+U_x+$ $+2U_y=0.$	$y^2U_{yy}-x^2U_{xx}=0,$ $U(x,1)=8\sqrt{x},$ $U_y(x,1)=0.$	початкове відхилення задається рівностями $U(x,0)=\begin{cases}0, & \lvert x\rvert\ge l,\\ 0{,}01(l-x), & 0<x<l,\\ 0{,}01(l+x), & -l<x<0.\end{cases}$ а початкова швидкість рівна нулеві.
2	$U_{xx}+2U_{xy}-3U_{yy}+$ $+2U_x+6U_y=0.$	$U_{xx}+2U_{xy}-3U_{yy}=0,$ $U(x,0)=3x^2,$ $U_y(x,0)=0.$	початкова швидкість задається рівностями $U_t(x,0)=\begin{cases}0, & \lvert x\rvert\ge h,\\ 0{,}01a, & 0<x<h,\\ -0{,}01a, & -h<x<0.\end{cases}$ а початкове відхилення рівне нулеві.
3	$(x^2+\cos y)U_{xy}-$ $-\sin yU_x+2xU_y=0.$	$U_{xx}+4U_{xy}-5U_{yy}+$ $+U_x-U_y=0,$ $U(x,0)=x,$ $U_y(x,0)=2.$	початкова швидкість точок струни рівна нулеві, а початкове відхилення задається рівністю $U(x,0)=h^2\dfrac{\sin x}{x}.$

4	$U_{xx}-2xU_{xy}-$ $-(2x+1)U_{yy}-$ $-\frac{1}{x+1}\left(U_x+U_y\right)=0$ $(x\neq -1).$	$U_{xx}=9U_{yy}$, $U(x,0)=\sin x$, $U_y(x,0)=6\cos x$.	початкова швидкість відмінна від нуля лише на проміжку $[0;l]$, де вона рівна $\frac{a}{100}$. Початкове відхилення рівне нулеві.
5	$x^2U_{xx}-2xyU_{xy}+$ $+y^2U_{yy}+xU_x+$ $+yU_y=0.$	$2U_{xy}-U_{yy}=0$, $U\big\|_{y=-x}=5x$, $\frac{\partial U}{\partial y}\Big\|_{y=-x}=e^{-x}$.	початкова швидкість рівна нулеві. Початкове відхилення відмінне від нуля тільки на проміжку $(c,2c)$, де воно має форму ламаної з вершинами в точках $(c;0)$, $\left(\frac{3c}{2};2\right)$, $(2c;0)$. $t_k=\frac{ck}{2a}$, $k=1,2,3$.
6	$x^2U_{xx}-y^2U_{yy}-$ $-2yU_y=0.$	$U_{xy}+U_{yy}+U_x+$ $+U_y=0$, $U\left(x,\frac{x}{2}\right)=2-x$, $U_y\left(x,\frac{x}{2}\right)=0$.	початкова швидкість точок струни відмінна від нуля тільки на проміжку $[-c,c]$, де вона рівна 4, а початкове відхилення рівне нулеві. $t_k=\frac{ck}{2a}$, $k=1,2,3$.
7	$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial U}{\partial x}\right)=$ $=x^2\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}.$	$4y^2U_{xx}+$ $+2\left(1-y^2\right)U_{xy}-U_{yy}-$ $-\frac{2y\left(2U_x-U_y\right)}{1+y^2}=0$, $U(x,0)=4x^3$, $U_y(x,0)=0$.	початкове відхилення відмінне від нуля тільки на проміжках $(-2c,-c)$ і $(c,2c)$ і має форму ламаної з вершинами в точках $(-2c;0)$, $\left(-\frac{3c}{2};-2\right)$, $(-c;0)$, $(c;0)$, $\left(\frac{3c}{2};2\right)$, $(2c;0)$. Початкова швидкість рівна нулеві.
8	$(x-y)U_{xy}+U_x+$ $+U_y=0.$	$\left(1+x^2\right)U_{xx}-$ $-\left(1+y^2\right)U_{yy}+xU_x-$ $-yU_y=0$, $U(x,0)=0$, $U_y(x,0)=2$.	початкове відхилення рівне нулеві, а початкова швидкість має стале значення ψ_0 на проміжку струни $[x_1,x_2]$ і рівна нулеві зовні цього проміжку.
9	$U_{xy}+yU_x+xU_y+$ $+xyU=0.$	$U_{xx}-2xU_{xy}+x^2U_{yy}-$ $-\frac{1}{x+1}\left(U_x+U_y\right)=0$, $U(2,y)=6y$, $U_x(2,y)=0$.	початкова швидкість точок струни рівна нулеві, а початкове відхилення задається рівностями $U(x,0)=\begin{cases}0, & x<x_1,\\ \varphi(x), & x_1<x<x_2<0,\\ 0, & x>x_2,\end{cases}$ де $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{x_1-x}{x_1+x_2}2h, & x_1<x<\frac{x_1-x_2}{2},\\ \frac{x_2-x}{3x_2-x_1}2h, & \frac{x_1-x_2}{2}<x<x_2.\end{cases}$

10	$U_{xx} - e^{-2x}U_{yy} +$ $+U_x = 0.$	$U_{xx} + 2\cos xU_{xy} -$ $-\sin^2 yU_{yy} -$ $-\sin xU_y = 0,$ $U(x, \sin x) = \varphi_0(x),$ $U_y(x, \sin x) = \varphi_1(x).$	початкове відхилення точок струни рівне нулеві, а початкова швидкість $U_t\big\|_{t=0} = \begin{cases} 0, & x < c, \\ \dfrac{hx(2c-x)}{2c^2}, & x \in [c, 2c], \\ 0, & x > 2c. \end{cases}$
11	$e^y U_{xy} + cos\,xU_{yy} -$ $-cos\,xU_y = 0.$	$x^2U_{xx} - y^2U_{yy} = 0,$ $U\big\|_{y=1} = 3x,$ $\dfrac{\partial U}{\partial y}\Big\|_{y=1} = 6x^2.$	початкове відхилення рівне $U(x,0) = \begin{cases} 0, & \|x\| > 2, \\ 4 - x^2, & -2 \le x \le 2, \end{cases}$ а початкова швидкість рівна нулеві.
12	$U_{xx} - 2xU_{xy} +$ $+x^2U_{yy} - U_y = 0$ $(x \ne 0).$	$U_{xy} + U_y = 0,$ $U(x,x) = \sin x,$ $U_y(x,x) = e^x.$	початкове відхилення рівне нулеві, а початкова швидкість $\dfrac{\partial U}{\partial t}\Big\|_{t=0} = \begin{cases} 0, & \|x\| > 1, \\ 2, & -1 \le x \le 1. \end{cases}$
13	$U_{xx} + xyU_{yy} +$ $+\dfrac{x}{2}U_y - \dfrac{1}{2x}U_x = 0$ $(x < 0, \quad y > 0).$	$U_{xx} - yU_{yy} - \dfrac{1}{2}U_y = 0$ $(y > 0),$ $U(x,1) = \cos x,$ $U_y(x,1) = 0.$	початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення $U(x,0) = \begin{cases} 0, & \|x\| > \dfrac{\pi}{2}, \\ 2\cos x, & -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$
14	$(1+x^2)U_{xx} -$ $-(1+y^2)U_{yy} +$ $+xU_x - yU_y = 0.$	$U_{xy} + U_x = 0,$ $U\big\|_{y=x} = e^{-x},$ $\dfrac{\partial U}{\partial y}\Big\|_{y=x} = 0.$	початкова швидкість рівна $\dfrac{\partial U}{\partial t}\Big\|_{t=0} = \begin{cases} 0, & \|x\| > 4, \\ \frac{a}{50}, & 0 \le x \le 4, \\ -\frac{a}{50}, & -4 \le x < 0, \end{cases}$ а початкове відхилення рівне нулеві.
15	$(e^x + e^y)U_{xy} +$ $+e^xU_y + e^yU_x = 0.$	$U_{yy} + U_{xy} + U_y = 0,$ $U\big\|_{y=2x} = x,$ $\dfrac{\partial U}{\partial y}\Big\|_{y=2x} = e^{-x}.$	початкове відхилення відмінне від нуля тільки на проміжку $(0;\pi)$, де воно рівне $2\sin x$, а початкова швидкість рівна нулеві.
16	$U_{xx} - e^{2(x-y)}U_{yy} -$ $-U_x + e^{2(x-y)}U_y +$ $+8e^{2x+y} = 0.$	$3U_{xx} - 2U_{xy} - 5U_{yy} = 0,$ $U(0,y) = y,$ $U_x(0,y) = 1.$	початкове відхилення в усіх точках струни рівне нулеві, а початкова швидкість відмінна від нуля тільки на проміжках $[-2l,-l]$ і $[l,2l]$, де вона має стале значення $2a$.

17	$U_{xx}-2\cos xU_{xy}-$ $-\left(3+\sin^2 x\right)U_{yy}+$ $+U_x+\sin xU_y-$ $-(\cos x+2)U_y=0.$	$U_{xy}+U_{yy}=12,$ $U(x,1)=0,$ $U_y(x,1)=0.$	початкова швидкість точок струни рівна нулеві, а початкове відхилення задається рівностями: $U(x,0)=\begin{cases}0, & \lvert x\rvert>2\pi,\\ 1-\cos x, & \lvert x\rvert\le 2\pi.\end{cases}$
18	$x^2U_{xx}-4xyU_{xy}+$ $+3y^2U_{yy}+$ $+4xU_x=0,$ $xy\neq 0.$	$U_{xx}-2U_{xy}+U_{yy}+$ $+U_x-U_y=0,$ $U(0,y)=y,$ $U_x(0,y)=0.$	початкове відхилення рівне нулеві, а початкова швидкість відмінна від нуля лише на проміжку $[-l;0]$ $(l=const>0)$, де вона має стале значення V_0.
19	$U_{xx}-2\sin xU_{xy}-$ $-\left(3+\cos^2 x\right)U_{yy}+$ $+U_x+(2-\sin x)U_y-$ $-\cos xU_y=0.$	$e^yU_{xy}-U_{yy}+$ $+U_y=0,$ $U(x,0)=-0{,}5x^2,$ $U_y(x,0)=0.$	початкова швидкість точок струни рівна нулеві, а початкове відхилення $(h,l=const>0)$: $U(x,0)=\begin{cases}0, & \lvert x\rvert>l,\\ 2h\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right), & -l\le x\le l.\end{cases}$
20	$U_{xy}+yU_y+U=0.$	$U_{xx}+2\sin xU_{xy}-$ $-\cos^2 xU_{yy}+(\sin x+$ $+\cos x+1)U_y+U_x=0,$ $U(x,-\cos x)=1+2\sin x,$ $U_y(x,-\cos x)=\sin x.$	початкове відхилення точок струни рівне нулеві, а початкова швидкість $U_t(x,0)=\begin{cases}0, & \lvert x\rvert>h,\\ 0{,}02, & 0\le x\le h,\\ -0{,}02, & -h\le x<0.\end{cases}$
21	$e^yU_{xy}+U_{yy}+$ $+e^{2y}U_x+$ $+\left(e^y-1\right)U_y=0.$	$yU_{xx}-(x+y)U_{xy}+$ $+xU_{yy}=0 \quad (x>0),$ $U(x,0)=x^3,$ $U_y(x,0)=0.$	початкова швидкість точок струни рівна нулеві, а початкове відхилення $U(x,0)=\begin{cases}0, & \lvert x\rvert>1,\\ 0{,}01(1-x), & 0\le x\le 1,\\ -0{,}01(1+x), & -1\le x<0.\end{cases}$
22	$U_{xx}-e^{-2x}U_{yy}+$ $+U_x=0.$	$U_{xx}-2U_{xy}+4e^y=0,$ $U(0,y)=\varphi(y),$ $U_x(0,y)=\psi(y).$	початкове відхилення точок струни рівне нулеві, а початкова швидкість $U_t(x,0)=\begin{cases}0, & \lvert x\rvert>4,\\ 2x, & \lvert x\rvert\le 4.\end{cases}$
23	$x^2U_{xx}-2xyU_{xy}+$ $+y^2U_{yy}+$ $+xU_x+yU_y=0.$	$U_{xx}-2U_{xy}-3U_{yy}=0,$ $U(0,y)=0,$ $U_x(0,y)=-3y.$	початкова швидкість точок струни рівна нулеві, а початкове відхилення $U(x,0)=\begin{cases}0, & x\notin[-2;4],\\ x+2, & -2\le x\le 2,\\ 4x-x^2, & 2<x\le 4.\end{cases}$

24	$U_{xy}+U_{yy}+$ $+U_x+U_y=0.$	$U_{xx}+4xU_{xy}-$ $-5x^2U_{yy}-x^{-1}U_x=0$ $(x\neq 0),$ $U\left(x,\frac{1}{2}x^2\right)=0,$ $U_y\left(x,\frac{1}{2}x^2\right)=-1.$	початкове відхилення в усіх точках струни рівне нулеві, а початкова швидкість відмінна від нуля лише на проміжку $(0;2\pi)$, де вона описується функцією $\psi(x)=A\sin 2x$ $(A=const)$.
25	$U_{xx}-2xU_{xy}+$ $+x^2U_{yy}+U_y=0$ $(x\neq 0).$	$U_{xx}-2U_{xy}-3U_{yy}+$ $+4(U_x+U_y)=0,$ $U(2y,y)=0,$ $U_x(2y,y)=1.$	початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення відмінне від нуля тільки на проміжку $(-1;2)$, де воно має форму ламаної з вершинами в точках $(-1;0),(1{,}5;4),(2;0)$.
26	$U_{xy}+xU_x+$ $+U+cos\,y=0.$	$2U_{xx}-5U_{xy}+3U_{yy}=0,$ $U(0,y)=0,$ $U_x(0,y)=3y.$	початкове відхилення рівне нулеві, а початкова швидкість відмінна від нуля лише на проміжку $[-2;2]$, де вона задана функцією $\psi(x)=-2x$.
27	$(\mathrm{sh}\,x+y\,\mathrm{ch}\,x)U_y+$ $+\mathrm{ch}\,x(U_{xy}+U)=0.$	$3U_{xx}-10U_{xy}+$ $+3U_{yy}=0.$ $U(x,x)=2,$ $U_y(x,x)=2x.$	початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення відмінне від нуля тільки на проміжку $(-2;2)$, де воно має форму ламаної з вершинами в точках $(-2;0),(0;4),(1;4),(2;0)$.
28	$U_{xy}+U_y+xU_x+$ $+xU+x^2y=0.$	$U_{xx}-yU_{yy}-\frac{1}{2}U_y=0$ $(y>0),$ $U(x,1)=\cos x,$ $U_y(x,1)=0.$	початкове відхилення рівне нулеві, а початкова швидкість відмінна від нуля лише на проміжку $[3;6]$, де вона задана функцією $\psi(x)=\frac{2}{9}x^2$.
29	$3U_{xx}-10U_{xy}+$ $+3U_{yy}-2U_x+$ $+4U_y+\frac{5}{16}U=0.$	$U_{xx}-2\sin xU_{xy}+$ $+\sin^2 xU_{yy}-$ $-\mathrm{ctg}\,xU_x=0.$ $U(x,0)=0,$ $U_y(x,0)=\cos 2x.$	початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення відмінне від нуля тільки на проміжку $(-4;4)$, де воно має форму ламаної з вершинами в точках $(-4;0),(-2;4),(2;-4),(4;0)$.
30	$3U_{xx}+10U_{xy}+$ $+3U_{yy}+U_x+U_y+$ $+\frac{1}{16}U=16e^{\frac{y+x}{16}}.$	$e^xU_{xy}+U_{yy}=0.$ $U\left(x,e^{-x}\right)=0,$ $U_y\left(x,e^{-x}\right)=e^{2x}.$	початкове відхилення рівне нулеві, а початкова швидкість відмінна від нуля лише на проміжках: $[-4;-2]$, де вона рівна $a^2=const$, і $[2;4]$, де вона рівна $-a^2$.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3
МІШАНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ. МЕТОД ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ

Одним з найбільш поширених методів інтеґрування диференціальних рівнянь з частинними похідними є метод відокремлення змінних або метод Фур'є. На жаль, цей метод не є універсальним. Його можна застосувати тільки до лінійних рівнянь деякого спеціального вигляду.

1. Лінійні однорідні рівняння з однорідними крайовими умовами. Викладемо схему методу Фур'є [1-4] для мішаної задачі: в області $\mathrm{D} = \{t > 0, \quad 0 < x < l\}$ знайти розв'язок $U(x,t)$ рівняння

$$a(t)U_{tt} + b(t)U_t + c(t)U = \frac{1}{r(x)}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)U_x\right) - q(x)U\right\}, \qquad (3.1)$$

де $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $r(x)$, $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ – неперервні функції при $0 \le t \le T$ і $0 \le x \le l$, причому

$$a(t) \ge a_0 > 0, \quad r(x) \ge r_0 > 0, \quad p(x) \ge p_0 > 0, \quad q(x) \ge 0,$$

який справджував би початкові

$$U(x,0) = \varphi(x), \quad U_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l \qquad (3.2)$$

та крайові умови

$$\alpha_0 U(0,t) + \alpha_1 U_x(0,t) = 0, \quad \beta_0 U(l,t) + \beta_1 U_x(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \qquad (3.3)$$

де сталі α_0, α_1, β_0, β_1 такі, що $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \ne 0$, $\beta_0^2 + \beta_1^2 \ne 0$.

I. Спочатку шукаємо нетривіальний розв'язок рівняння (3.1), який справджував би крайові умови (3.3), у вигляді

$$U(x,t) = T(t)X(x) \ne 0. \qquad (3.4)$$

Підклавши (3.4) в рівняння (3.1), після відокремлення змінних одержимо

$$\frac{a(t)T''(t) + b(t)T'(t) + c(t)T(t)}{T(t)} = \frac{\dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{dX(x)}{dx}\right] - q(x)X(x)}{r(x)X(x)}. \qquad (3.5)$$

Поскільки ліва частина рівності (3.5) є функцією тільки арґументу t, а права – тільки x, то рівність (3.5) можлива тоді і тільки тоді, коли ліва і права частини рівні одній і тій же сталій. Позначимо цю сталу через $-\lambda$. Тоді маємо

$$a(t)T''(t) + b(t)T'(t) + [c(t) + \lambda]T(t) = 0, \qquad (3.6)$$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dX(x)}{dx}\right] - [\lambda r(x) - q(x)]X(x) = 0. \qquad (3.7)$$

Підставивши (3.4) в крайові умови (3.3), після скорочення на $T(t) \ne 0$ дістанемо:

$$\alpha_0 X(0) + \alpha_1 X'(0) = 0, \quad \beta_0 X(l) + \beta_1 X'(l) = 0. \qquad (3.8)$$

Таким чином, для визначення функції $X(x)$ ми прийшли до наступної ***задачі Штурма-Ліувілля***: знайти ті значення параметру λ (власні значення), при яких існують нетривіальні розв’язки (власні функції) крайової задачі (3.7), (3.8), а також знайти ці розв’язки. Мають силу наступні твердження:

1) Множина всіх власних значень задачі (3.7),(3.8) нескінчена і може бути записана у вигляді послідовності $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k,\ldots$, де $|\lambda_1|\le|\lambda_2|\le\cdots\le|\lambda_k|\le\cdots$ і $\lim\limits_{k\to\infty}|\lambda_k|=\infty$. Всі значення λ_k є дійсними.

2) Кожному власному значенню λ_k відповідає одна лінійно незалежна власна функція $X_k(x)$. Вся сукупність власних функцій утворює послідовність

$$X_1(x), X_2(x), \ldots, X_k(x), \ldots$$

3) Послідовність власних функцій $\{X_k(x)\}$ є ортоґональною системою з вагою $r(x)$ на відрізку $[0,l]$, тобто для всіх j і k

$$\int\limits_0^l r(x)X_j(x)X_k(x)dx=0,\quad j\ne k. \tag{3.9}$$

4) ***Теорема Стеклова.*** Всяка функція $F(x)$, неперервна на $[0,l]$ разом зі своїми похідними до другого порядку включно, яка справджує крайові умови (3.8), розкладається в ряд Фур’є за системою $\{X_k(x)\}$ власних функцій задачі Штурма-Ліувілля (3.7),(3.8):

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}F_kX_k(x),\quad F_k=\frac{\int\limits_0^l r(x)X_k(x)F(x)dx}{\int\limits_0^l r(x)X_k^2(x)dx}, \tag{3.10}$$

який збігається абсолютно і рівномірно.

Нехай задача Штурма-Ліувілля (3.7),(3.8) розв’язана, тобто знайдені власні значення λ_k і власні функції $X_k(x),\ k=1,2,\ldots$

Розглянемо рівняння (3.6) при $\lambda=\lambda_k$. Через те, що $a(t)\ge a_0>0$, то завжди існує фундаментальна система $\{T_{k,1}(t), T_{k,2}(t)\}$ частинних розв’язків рівняння (3.6). Загальний розв’язок рівняння (3.6) рівний

$$T_k(t)=a_kT_{k,1}(t)+b_kT_{k,2}(t), \tag{3.11}$$

де a_k і b_k – довільні сталі.

Підставляємо знайдені власні функції $X_k(x)$ і (3.11) в (3.4). Маємо:

$$U_k(x,t)=[a_kT_{k,1}(t)+b_kT_{k,2}(t)]X_k(x),\quad k=1,2,\ldots. \tag{3.12}$$

Складемо ряд із розв’язків (3.12)

$$U(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}[a_kT_{k,1}(t)+b_kT_{k,2}(t)]X_k(x). \tag{3.13}$$

Якщо ряд (3.13) і ряди, що одержуються з нього двократним почленним диференціюванням за змінними x і t, збігаються рівномірно, то сума цього ряду задовільнятиме рівняння (3.1) і крайові умови (3.3).

ІІ. Вибираємо довільні сталі a_k і b_k так, щоб (3.13) справджував і початкові умови (3.2). Для цього підставляємо (3.13) у (3.2). Маємо:

$$U(x,0) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} c_k X_k(x) = \varphi(x), \tag{3.14}$$

$$U_t(x,0) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} d_k X_k(x) = \psi(x), \tag{3.15}$$

де

$$c_k = a_k T_{k_1}(0) + b_k T_{k_2}(0), \quad d_k = a_k T'_{k_1}(0) + b_k T'_{k_2}(0). \tag{3.16}$$

Вважаємо, що функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ підпадають під умови теореми Стеклова. Тоді їх можна подати у вигляді (3.14), (3.15) відповідно, якщо покласти

$$c_k = \frac{\int_0^l r(x)\varphi(x)X_k(x)dx}{\int_0^l r(x)X_k^2(x)dx}, \quad d_k = \frac{\int_0^l r(x)\psi(x)X_k(x)dx}{\int_0^l r(x)X_k^2(x)dx}. \tag{3.17}$$

Підставляємо значення c_k і d_k із (3.17) в (3.16) і визначаємо a_k, b_k (вони визначаються однозначно, поскільки визначник системи (3.16) відмінний від нуля). Визначивши a_k і b_k із (3.16) і підставивши їх у (3.13), одержимо розв'язок поставленої мішаної задачі (3.1)-(3.3) (обґрунтування методу Фур'є див. в [1]).

2. Інтеґрування мішаної задачі у випадку неоднорідного рівняння. Розглянемо змішану задачу: в області D знайти розв'язок $U(x,t)$ рівняння

$$a(t)U_{tt} + b(t)U_t + c(t)U = \frac{1}{r(x)}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)U_x\right) - q(x)U\right\} + f(x,t), \tag{3.1$'$}$$

який справджував би умови (3.2), (3.3).

Розв'язок задачі (3.1′),(3.2),(3.3) шукаємо у вигляді

$$U(x,t) = Z(x,t) + V(x,t), \tag{3.18}$$

де $Z(x,t)$ є розв'язок мішаної задачі (3.1)-(3.3), а $V(x,t)$ – розв'язок рівняння (3.1′), який справджує однорідні початкові умови

$$V(x,0) = 0, \quad V_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l \tag{3.2$'$}$$

і крайові умови (3.3).

Згідно викладеного в пункті **1** $Z(x,t)$ визначається за формулою (3.13). Функцію $V(x,t)$ шукаємо у вигляді

$$V(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{T}_k(t) X_k(x), \tag{3.19}$$

де $X_k(x)$ – власні функції задачі Штурма-Ліувілля (3.7),(3.8). Очевидно, що $V(t,x)$ справджує крайові умови (3.3). Функції $\overline{T}_k(t)$ визначаємо так, щоб ряд (3.19) задовольнив рівняння (3.1′) і початкові умови (3.2′). Надалі будемо вважати, що $f(x,t)$ як функція змінної x підпадає під умови теореми Стеклова. Отже,

$$f(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)X_k(x), \quad f_k(t)=\frac{\int\limits_0^l r(x)f(t,x)X_k(x)dx}{\int\limits_0^l r(x)X_k^2(x)dx}.$$

Підставивши (3.19) в рівняння (3.1′) і початкові умови (3.2′), одержимо

$$a(t)\overline{T}_k''(t)+b(t)\overline{T}_k'(t)+\left[c(t)+\lambda_k\right]\overline{T}_k(t)=f_k(t), \qquad (3.20)$$

$$\overline{T}_k(0)=0, \quad \overline{T}_k'(0)=0, \quad k=1,2,\ldots. \qquad (3.21)$$

Таким чином, функції $\overline{T}_k(t)$ повинні бути розв’язками задач Коші (3.20), (3.21). На підставі умов, накладених на коефіцієнти рівняння (3.1), остання задача Коші для довільного $k\in \mathrm{N}$ завжди має єдиний розв’язок $\overline{T}_k(t)$. Підставивши цей розв’язок у (3.19), а (3.19) у (3.18), одержимо шуканий розв’язок

$$U(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_kT_{k_1}(t)+b_kT_{k_2}(t)\right]X_k(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\overline{T}_k(t)X_k(x).$$

3. Загальна мішана задача. Розглянемо мішану задачу: в області D знайти розв’язок рівняння (3.1′), який справджував би початкові умови (3.2) і крайові умови

$$\alpha_0U(0,t)+\alpha_1U_x(0,t)=\omega_1(t), \quad \beta_0U(l,t)+\beta_1U_x(l,t)=\omega_2(t), \quad 0\le t\le T. \qquad (3.3')$$

Розв’язок задачі (3.1′),(3.2),(3.3′) шукаємо у вигляді

$$U(x,t)=W(x,t)+\omega(x,t), \qquad (3.22)$$

де $\omega(x,t)$ – довільна двічі неперервно диференційовна функція, яка справджує крайові умови (3.3′). Наприклад, якщо $\alpha_1=\beta_1=0$, $\alpha_0=\beta_0=1$, то за $\omega(x,t)$ можна взяти функцію

$$\omega(x,t)=\omega_1(t)+\frac{x}{l}\left(\omega_2(t)-\omega_1(t)\right).$$

Підклавши (3.22) в (3.1′), (3.2) і (3.3′), приходимо до задачі визначення функції $W(x,t)$:

$$a(t)W_{tt}+b(t)W_t+c(t)W=\frac{1}{r(x)}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)W_x\right)-q(x)W\right\}+f_1(t,x), \qquad (3.1'')$$

$$W(x,0)=\varphi_1(x), \quad W_t(x,0)=\psi_1(x), \quad 0\le x\le l, \qquad (3.2'')$$

$$\alpha_0W(0,t)+\alpha_1W_x(0,t)=0, \quad \beta_0W(l,t)+\beta_1W_x(l,t)=0, \quad 0\le t\le T, \qquad (3.3'')$$

де

$$f_1(x,t)=f(x,t)+\frac{1}{r(x)}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\omega_x(x,t)\right)-q(x)\omega\right\}-a(t)\omega_{tt}-b_1(t)\omega_t-c(t)\omega,$$

$$\varphi_1(x)=\varphi(x)-\omega(x,0), \quad \psi_1(x)=\psi(x)-\omega_t(x,0).$$

Метод інтеґрування мішаної задачі (3.1′′),(3.2′′),(3.3′′) дано в пункті **2.**

4. Мішані задачі зі стаціонарними неоднорідностями. Мішана задача вигляду

$$a(t)U_{tt}+b(t)U_t+cU=\frac{1}{r(x)}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)U_x\right)-q(x)U\right\}+f(x), \qquad (3.1''')$$

$$U(x,0)=\varphi(x),\quad U_t(x,0)=\psi(x),\quad 0\le x\le l, \qquad (3.2''')$$

$$\alpha_0U(0,t)+\alpha_1U_x(0,t)=\gamma_1,\quad \beta_0U(l,t)+\beta_1U_x(l,t)=\gamma_2,\quad 0\le t\le T, \qquad (3.3''')$$

де c, γ_1, γ_2 – задані сталі, називається мішаною задачею зі стаціонарними неоднорідностями (вона є частинним випадком загальної змішаної задачі). В цьому випадку розв’язок задачі (3.1′′′),(3.2′′′),(3.3′′′) шукаємо у вигляді

$$U(x,t)=W(x,t)+\omega(x), \qquad (3.23)$$

де функція $\omega(x)$ (статичний прогин) є розв’язком крайової задачі

$$c\omega=\frac{1}{r(x)}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\omega'(x)\right)-q(x)\omega\right\}+f(x), \qquad (3.24)$$

$$\alpha_0\omega(0)+\alpha_1\omega'(0)=\gamma_1,\quad \beta_0\omega(l)+\beta_1\omega'(l)=\gamma_2. \qquad (3.25)$$

Тоді для визначення $W(x,t)$ одержуємо наступну мішану задачу:

$$a(t)W_{tt}+b(t)W_t+cW=\frac{1}{r(x)}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)W_x\right)-q(x)W\right\},$$

$$W(x,0)=\varphi(x)-\omega(x),\quad W_t(x,0)=\psi(x),\quad 0\le x\le l,$$

$$\alpha_0W(0,t)+\alpha_1W_x(0,t)=0,\quad \beta_0W(l,t)+\beta_1W_x(l,t)=0,\quad 0\le t\le T,$$

а ця задача вже розглянута в пункті **1.**

Зауваження. Очевидно, що розв’язок задачі (3.1′′′),(3.2′′′),(3.3′′′) можна шукати у вигляді (3.23) лише тоді, коли крайова задача (3.24),(3.25) має розв’язок. Якщо статичний прогин $\omega(x)$ не існує, тоді задачу (3.1′′′),(3.2′′′),(3.3′′′) інтеґрують як загальну мішану задачу методом, викладеним у пункті **3.**

ПРИКЛАД 1. Визначити вільні коливання однорідної струни, закріпленої на кінцях $x=0$ і $x=l$, якщо в початковий момент часу вона мала форму $U(x,0)=\varphi(x)$, а початкова швидкість точок струни рівна $\psi(x)$. Дати фізичну інтерпретацію одержаного розв’язку.

Розв’язання. Описаний процес коливання однорідної струни приводить до мішаної задачі: в області $\mathrm{D}=\{0<x<l,\quad 0<t<T\}$ знайти розв’язок $U(x,t)$ рівняння

$$U_{tt}=a^2U_{xx}, \qquad (3.26)$$

який справджував би початкові і крайові умови

$$U(x,0)=\varphi(x),\quad U_t(x,0)=\psi(x),\quad 0\le x\le l, \qquad (3.27)$$

$$U(0,t)=0,\quad U(l,t)=0,\quad 0\le t\le T. \qquad (3.28)$$

I. Рівняння і крайові умови однорідні. Отже, шукаємо розв’язок у вигляді (3.4) згідно з викладеним у пункті **1.** Маємо:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\quad X(0)=0,\quad X(l)=0; \qquad (3.30)$$

$$T''(t)+a^2\lambda T(t)=0. \qquad (3.31)$$

Дослідимо задачу Штурма-Ліувілля (3.30).

1) Нехай $\lambda = 0$. Тоді $X(x) = c_1 + c_2 x$. Підставляємо в крайові умови: $c_1 = 0,\ c_2 l = 0 \Rightarrow c_2 = 0$. Отже, $X(x) \equiv 0$ і $\lambda = 0$ не є власним значенням задачі (3.30).

2) При $\lambda < 0$ загальний розв'язок рівняння задачі (3.30) матиме вигляд $X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Підкладаємо його в крайові умови:

$$c_1 + c_2 = 0,$$

$$c_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = c_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}l} - e^{-\sqrt{-\lambda}l}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0.$$

Тоді із першого рівняння системи маємо, що $c_2 = 0$, а отже, $X(x) \equiv 0$ і $\lambda < 0$ не є власним значенням задачі (3.30).

3) При $\lambda > 0$ загальний розв'язок рівняння може бути поданий у вигляді $X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$. Крайові умови дають:

$$X(0) \equiv c_1 = 0, \qquad X(l) \equiv c_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

Щоб одержати нетривіальний розв'язок, потрібно знайти ті значення параметра λ, при яких $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$. Отже, власними значеннями будуть числа

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2,$$

де n – довільне натуральне число. Цим власним значенням відповідають власні функції

$$X_n(x) = c_2 \sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Підклавши знайдені значення λ_n в рівняння (3.31) і зінтеґрувавши його, одержимо

$$T_n(t) = A\cos\frac{\pi n}{l}at + B\sin\frac{\pi n}{l}at,$$

де A і B – довільні сталі. Підставимо знайдені функції $X_n(x)$ і $T_n(t)$ в (3.29). Маємо:

$$U_n(x,t) = \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l}at + B_n \sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x, \quad A_n = Ac_2, \quad B_n = Bc_2.$$

На підставі лінійності і однорідності рівняння (3.26) сума частинних розв'язків

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{\pi n}{l}at + B_n \sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x \qquad (3.32)$$

також буде розв'язком рівняння (3.26), який справджуватиме крайові умови (3.28) (вважаємо, що $\varphi(x)$ неперервна разом з похідними до третього порядку включно і $\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$, а $\psi(x)$ неперервна разом з похідними до другого порядку включно, причому $\psi(0) = \psi(l) = 0$).

II. Визначаємо A_n і B_n так, щоб ряд (3.32) справджував і початкові умови. Маємо:

$$U(x,0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{\pi n}{l}x,\quad U_t(x,0)=\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n}{l}aB_n\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

З останніх рівностей випливає, що

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi,\quad B_n=\frac{2}{\pi na}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд (3.32), одержимо шуканий розв'язок мішаної задачі (3.26)-(3.28).

Фізична інтерпретація розв'язку. Покладемо

$$\alpha_n=\sqrt{A_n^2+B_n^2},\quad \operatorname{tg}\varphi_n=\frac{A_n}{B_n}.$$

Тоді

$$U_n(x,t)=\alpha_n\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\left(\frac{\pi n}{l}at+\varphi_n\right). \tag{3.33}$$

Із формули (3.33) видно, що всі точки струни здійснюють гармонічні коливання з однією й тією ж частотою $\omega_n=n\pi al^{-1}$ і фазою φ_n. Амплітуда коливання залежить від абсциси x точки струни й рівна $\alpha_n\sin\frac{\pi n}{l}x$. При такому коливанні всі точки струни одночасно досягають максимального відхилення в той чи інший бік і одночасно проходять положення рівноваги. Такі коливання струни називають *стоячими хвилями*.

Стояча хвиля $U_n(x,t)$ матиме стільки нерухомих на протязі всього процесу точок, скільки коренів має рівняння $\sin\frac{\pi n}{l}x=0$ в проміжку $[0,l]$. Таких точок буде $(n+1)$: $x=m\frac{l}{n}$, $m=\overline{0,n}$. Нерухомі точки називаються <u>вузлами</u> стоячої хвилі. Посередині між вузлами розташовуються точки, в яких відхилення досягають максимуму; такі точки називаються <u>пучностями</u>.

Кожна струна може мати власні коливання лише строго визначених частот $\omega_n=\frac{n\pi a}{l}$. Ці частоти називаються <u>власними частотами</u> струни.

Висота тону звучання струни залежить від частоти коливань. Частота $\omega_1=\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$, де T величина сили натягу, ρ лінійна густина струни, називається частотою <u>основного тону</u>. Інші тони, які відповідають частотам, кратним ω_1, називаються <u>обертонами</u>.

Розв'язок (3.32) є суперпозицією стоячих хвиль. При цьому характер звучання струни (тон, сила звуку, тембр) буде залежати від співвідношення між амплітудами окремих обертонів. (Докладніше про фізичну інтерпретацію розв'язку змішаної задачі для рівняння вільних коливань однорідної скінченої струни див. в [1]).

ПРИКЛАД 2. Знайти розв'язок мішаної задачі:

$$U_{tt}=a^2U_{xx}-\frac{\pi a}{l}U_t+2xt,\qquad t>0,\qquad 0<x<l, \tag{3.34}$$

$$U(x,0)=0,\qquad U_t(x,0)=0,\qquad 0\le x\le l, \tag{3.35}$$

$$U(0,t)=\mu_1(t),\qquad U(l,t)=0,\qquad t\ge 0. \tag{3.36}$$

Розв'язання. Рівняння (3.34) і крайові умови (3.36) неоднорідні, отже, маємо загальну мішану задачу. Шукаємо розв'язок у вигляді

$$U(x,t)=W(x,t)+\omega(x,t), \tag{3.37}$$

де

$$\omega(t,x)=\mu_1(t)+\frac{x}{l}(0-\mu_1(t))=\left(1-\frac{x}{l}\right)\mu_1(t). \tag{3.38}$$

Підставивши (3.37) з урахуванням (3.38) у (3.35) і (3.36), одержимо

$$W_{tt}=a^2W_{xx}-\frac{\pi a}{l}W_t+2xt-\left(1-\frac{x}{l}\right)\left[\mu_1''(t)+\frac{\pi a}{l}\mu_1'(t)\right], \tag{3.34$'$}$$

$$W(x,0)=-\left(1-\frac{x}{l}\right)\mu_1(0),\quad W_t(x,0)=-\left(1-\frac{x}{l}\right)\mu_1'(0), \tag{3.35$'$}$$

$$W(0,t)=0,\quad W(l,t)=0. \tag{3.36$'$}$$

Таким чином, задача звелася до задачі з однорідними крайовими умовами (випадок **2**).

Розв'язок одержаної задачі шукаємо за формулою

$$W(x,t)=Z(x,t)+V(x,t), \tag{3.39}$$

де

$$Z(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_nT_{n,1}(t)+b_nT_{n,2}(t)\right]X_n(x), \tag{3.40}$$

а $X_n(x)$ – власні функції задачі Штурма-Ліувілля (3.30). $T_{n,1}(t)$ і $T_{n,2}(t)$ визначаємо з рівняння

$$T_n''+\frac{\pi a}{l}T_n'+\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2T_n=0.$$

Його характеристичне рівняння

$$r^2+\frac{\pi a}{l}r+\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2=0$$

має корені

$$r_{1,2}=-\frac{\pi a}{2l}\pm\sqrt{\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2\left(\frac{1}{4}-n^2\right)}=\frac{\pi a}{l}\left(-\frac{1}{2}\pm iq_n\right),$$

де $q_n^2=-\frac{1}{4}+n^2$. Таким чином,

$$T_{n,1}=e^{-\frac{\pi a}{2l}t}\cos q_nt,\qquad T_{n,2}=e^{-\frac{\pi a}{2l}t}\sin q_nt,$$

$$Z(x,t)=e^{-\frac{\pi a}{2l}t}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos q_n t+b_n\sin q_n t\right]\sin\frac{\pi n}{l}x. \quad (3.41)$$

Шукаємо коефіцієнти a_n і b_n так, щоб виконувалися початкові умови (3.35′). При $t=0$ маємо:

$$-\left(1-\frac{x}{l}\right)\mu_1(0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{\pi n}{l}x,\quad -\left(1-\frac{x}{l}\right)\mu_1'(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{\pi a}{2l}a_n+b_n q_n\right]\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

а отже,

$$a_n=-\frac{2}{l}\int_0^l\left(1-\frac{\xi}{l}\right)\mu_1(0)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi=-\frac{2}{\pi n}\mu_1(0),$$

$$-\frac{\pi a}{2l}a_n+b_n q_n=-\frac{2}{l}\int_0^l\left(1-\frac{\xi}{l}\right)\mu_1'(0)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi=-\frac{2}{\pi n}\mu_1'(0)\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad b_n=-\frac{1}{q_n}\left[\frac{2}{\pi n}\mu_1'(0)+\frac{a}{\ln}\mu_1(0)\right].$$

Тоді

$$Z(x,t)=-e^{-\frac{\pi a}{2l}t}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n\pi}\mu_1(0)\cos q_n t+\left(\frac{2}{\pi}\mu_1'(0)+\frac{a}{l}\mu_1(0)\right)\frac{1}{nq_n}\sin q_n t\right]\sin\frac{\pi n}{l}x. \quad (3.42)$$

Функцію $V(x,t)$ шукаємо у вигляді

$$V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{T}_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x, \quad (3.43)$$

де $\overline{T}_n(t)$ є розв'язок задачі Коші

$$\overline{T}_n''+\frac{\pi a}{l}\overline{T}_n'+\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2\overline{T}_n=f_n(t), \quad (3.44)$$

$$\overline{T}_n(0)=0,\qquad \overline{T}_n'(0)=0, \quad (3.45)$$

причому

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l\left\{2\xi t-\left(1-\frac{\xi}{l}\right)\left[\mu_1''(t)+\frac{\pi a}{l}\mu_1'(t)\right]\right\}\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\left[(-1)^n 2tl+\mu_1''(t)+\frac{\pi a}{l}\mu_1'(t)\right].$$

Зінтеґрувавши задачу Коші (3.44),(3.45) і підклавши (3.43), (3.42) і (3.38) у (3.37), одержимо шуканий розв'язок мішаної задачі (3.34),(3.35),(3.36)

$$U(t,x)=-e^{-\frac{\pi a}{2l}t}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n\pi}\mu_1(0)\cos q_n t+\left(\frac{2}{\pi}\mu_1'(0)+\frac{a}{l}\mu_1(0)\right)\frac{1}{nq_n}\sin q_n t\right]\sin\frac{\pi n}{l}x+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\overline{T}_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x+\left(1-\frac{x}{l}\right)\mu_1(t).$$

ПРИКЛАД 3. Знайти розв'язок змішаної задачі:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + (3+2x), \qquad t>0, \qquad 0<x<l, \tag{3.46}$$

$$U(x,0)=0, \qquad U_t(x,0)=0, \qquad 0\le x\le l, \tag{3.47}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \qquad U(l,t)=0, \qquad t\ge 0. \tag{3.48}$$

Розв'язання. Рівняння (3.46) неоднорідне, однак вільний член не залежить від часу. Отже, мішана задача (3.46),(3.47),(3.48) є задачею зі стаціонарними неоднорідностями. Шукаємо розв'язок $U(x,t)$ у вигляді

$$U(x,t)=W(x,t)+\omega(x), \tag{3.49}$$

де статичний прогин $\omega(x)$ є розв'язком крайової задачі

$$a^2\omega'' + (3+2x) = 0, \tag{3.50}$$

$$\omega'(0)=0, \quad \omega(l)=0, \tag{3.51}$$

а $W(x,t)$ визначаємо з мішаної задачі

$$W_{tt} = a^2 W_{xx}, \qquad t>0, \qquad 0<x<l, \tag{3.46′}$$

$$W(x,0) = -\omega(x), \qquad W_t(x,0)=0, \qquad 0\le x\le l, \tag{3.47′}$$

$$\left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \qquad W(l,t)=0, \qquad t\ge 0. \tag{3.48′}$$

Знаходимо розв'язок задачі (3.50),(3.51). Маємо:

$$\omega(x) = \frac{x^2}{a^2}\left(\frac{3}{2}+\frac{x}{3}\right) + c_1x + c_2 .$$

Підклавши знайдений загальний розв'язок рівняння (3.50) у крайові умови (3.51) і визначивши сталі c_1 і c_2 , дістанемо

$$\omega(x) = -\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{3}{2}+\frac{x}{3}\right) + \frac{l^2}{a^2}\left(\frac{3}{2}+\frac{l}{3}\right). \tag{3.52}$$

Розв'язок мішаної задачі (3.46′),(3.47′),(3.48′) шукаємо за допомогою методу Фур'є:

$$W(x,t) = T(t)X(x) \ne 0 . \tag{3.53}$$

Підклавши (3.53) в (3.46′) і (3.48′) та відокремивши змінні, одержимо

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0 ; \tag{3.54}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 , \tag{3.55}$$

$$X'(0)=0, \quad X(l)=0 . \tag{3.56}$$

Дослідимо задачу Штурма-Ліувілля (3.55),(3.56).

1) Якщо $\lambda=0$, то (3.55) набуде вигляду $X''(x)=0$. Загальний розв'язок такого рівняння є $X(x)=c_1+c_2x$. Підкладаємо його в крайові умови (3.56) і визначаємо c_1 і c_2:

$$X'(0)\equiv c_2=0, \qquad X(l)\equiv c_1+c_2l=0,$$

звідки $c_1=c_2=0$. Отже, при $\lambda=0$ нетривіальних розв'язків не існує.

2) Нехай $\lambda < 0$. Тоді загальний розв'язок рівняння (3.55) має вигляд $X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Визначаємо c_1 і c_2:

$$X'(0) \equiv \sqrt{-\lambda}(c_1 - c_2), \quad X(l) \equiv c_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}l} + e^{-\sqrt{-\lambda}l}\right) = 0,$$

звідки $c_1 = 0$, а отже, і $c_2 = 0$, тобто $X(x) \equiv 0$. Таким чином, $\lambda < 0$ не є власним значенням.

3) При $\lambda > 0$ загальний розв'язок рівняння (3.55) подається у вигляді

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x. \tag{3.57}$$

Підклавши (3.57) в (3.56), одержимо

$$X'(0) = \sqrt{\lambda}c_2 = 0, \quad X(l) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}l = 0.$$

Нетривіальні розв'язки задачі (3.55),(3.56) існуватимуть для тих значень параметра λ, при яких

$$\cos\sqrt{\lambda}l = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2l}\pi\right)^2, \qquad n = 1,2,\ldots.$$

Таким чином,

$$X_n(x) = c_1 \cos\frac{2n-1}{2l}\pi x.$$

Підклавши знайдені значення λ_n в рівняння (3.54) і зінтеґрувавши його, одержимо

$$T_n(t) = c_3 \cos\frac{2n-1}{2l}\pi at + c_4 \sin\frac{2n-1}{2l}\pi at. \tag{3.59}$$

Підставляємо (3.58) і (3.59) в (3.53) і сумуємо:

$$W(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n-1}{2l}\pi at + b_n \sin\frac{2n-1}{2l}\pi at\right)\cos\frac{2n-1}{2l}\pi x, \tag{3.60}$$

де $a_n = c_1 c_3$, $b_n = c_1 c_4$.

Коефіцієнти a_n і b_n визначаємо із початкових умов (3.47):

$$W(x,0) = \frac{x^2}{a^2}\left(\frac{3}{2} + \frac{x}{3}\right) - \frac{l^2}{a^2}\left(\frac{3}{2} + \frac{l}{3}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n-1}{2l}\pi x,$$

$$W_t(x,0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2l}\pi a b_n \cos\frac{2n-1}{2l}\pi x \quad \Rightarrow \quad b_n = 0,$$

а з першого рівняння системи

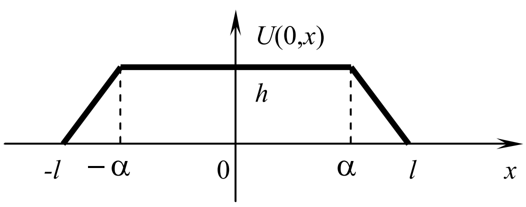
$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \left[\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{3}{2} + \frac{x}{3}\right) - \frac{l^2}{a^2}\left(\frac{3}{2} + \frac{l}{3}\right)\right]\cos\frac{2n-1}{2l}\pi x dx =$$

$$= \frac{16l^2}{[(2n-1)\pi]^3 a^2}\left[\frac{4l}{(2n-1)\pi} + (-1)^n(3 + 2l)\right].$$

На підставі (3.49) одержуємо шуканий розв'язок поставленої задачі (3.46),(3.47),(3.48):

$$U(x,t)=\frac{l^2}{a^2}\left(\frac{3}{2}+\frac{l}{3}\right)-\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{3}{2}+\frac{x}{3}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16l^2}{[(2n-1)\pi]^3a^2}\times$$
$$\times\left[\frac{4l}{(2n-1)\pi}+(-1)^n(3+2l)\right]\cos\frac{2n-1}{2l}\pi at\cos\frac{2n-1}{2l}\pi x.$$

ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ №3

Варіант	Розв'язати задачу та дати фізичну інтерпретацію одержаного результату	Знайти розв'язок мішаної задачі:
1	2	3
1	Однорідна струна, кінці якої закріплені в точках $x=0$ і $x=l$, відтягнута в початковий момент часу в точці $x=c\in(0,l)$ на величину h і відпущена без початкової швидкості. Визначити зміщення довільної точки струни $U(x,t)$.	$U_{tt}=U_{xx}-\frac{\pi}{3}U_t+\frac{2\pi}{27}x^2,$ $t>0,\ 0<x<3,$ $U(x,0)=0,\ U_t(x,0)=2,\ 0\le x\le 3,$ $\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right\|_{x=0}=0,\ U(3,t)=2t,\ t\ge 0.$
2	Знайти закон коливань однорідної струни, початкова форма зміщення якої зображена на рис. 6,  *Рис. 6* а початкова швидкість всіх її точок рівна нулеві.	$U_{tt}=\frac{1}{4}U_{xx}-U+\sin x,$ $t>0,\ 0<x<1,$ $U(x,0)=0,\ U_t(x,0)=0,\ 0\le x\le 1,$ $\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right\|_{x=0}=0,\ \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right\|_{x=1}=0,\ t\ge 0.$
3	Вивчити вільні коливання однорідної струни, закріпленої на кінцях $x=0$ і $x=l$, якщо в початковому положенні струна знаходилася в спокої, а її точкам на проміжку $[\alpha,\beta]\subset(0,l)$ надано сталу початкову швидкість V_0.	$U_{tt}=U_{xx}+\frac{4}{x+1}U_x+\frac{2}{(x+1)^2}U,$ $t>0,\ 0<x<2,$ $U(x,0)=x(x-2),\ U_t(x,0)=0,\ 0\le x\le 2,$ $U(0,t)=0,\ U(2,t)=0,\ t\ge 0.$ Ввести заміну: $U(x,t)=\frac{1}{(x+1)^2}Z(x,t).$

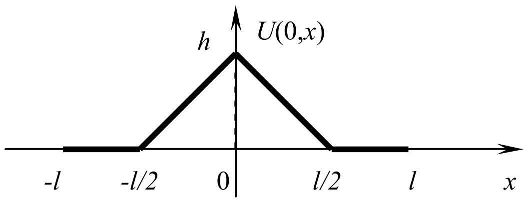
4	Знайти закон коливань однорідної струни, закріпленої на кінцях $x=-l$, $x=l$, якщо в початковий момент часу струна мала форму параболи, симетричної відносно центра струни, причому максимальне початкове зміщення рівне h, а початкова швидкість рівна нулеві.	$U_{tt}+U=U_{xx}+2t\left(x^2-2lx\right),$ $t>0,\ 0<x<l,$ $U(x,0)=0,\ U_t(x,0)=0,\ 0\le x\le l,$ $U(0,t)=0,\ \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right\|_{x=l}=0,\ t\ge 0.$
5	Вивчити вільні коливання однорідної струни, закріпленої на кінцях $x=0$ і $x=2$, якщо початкова форма струни задається функцією $\varphi(x)=A\sin\frac{\pi nx}{2}\quad(A-const),$ а початкова швидкість рівна нулеві.	$U_{tt}=U_{xx}+n\pi\,\mathrm{th}\frac{n\pi x}{2}U_x+\mathrm{ch}^{-1}\frac{n\pi x}{2},$ $t>0,\ 0<x<2,$ $U(x,0)=0,\ U_t(x,0)=0,\ 0\le x\le 2,$ $\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right\|_{x=0}=0,\ U(2,t)=0,\ t\ge 0.$ Ввести заміну: $\mathrm{ch}\frac{n\pi x}{2}U(x,t)=Z(x,t).$
6	Вивчити вільні коливання однорідної струни, закріпленої на кінцях $x=0$ і $x=l$, якщо в початковий момент часу точки струни знаходилися в стані спокою, а надана їм швидкість була рівна $\psi(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<x_0-\delta,\\ V_0\cos\frac{\pi(x-x_0)}{2\delta}, & x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]\subset(0;l),\\ 0, & x_0+\delta<x\le l,\end{cases}$	$U_{tt}=a^2U_{xx}-6,\ t>0,\ 0<x<l,$ $U(x,0)=0,\ U_t(x,0)=0,\ 0\le x\le l,$ $\left.\left(\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{1}{2}U\right)\right\|_{x=0}=0,\ U(l,t)=0,\ t\ge 0.$
7	Однорідна струна, закріплена на кінцях $x=0$ і $x=l$, яка має в початковий момент часу форму $U(x,0)=\frac{16}{5}h\left[\left(\frac{x}{l}\right)^4-2\left(\frac{x}{l}\right)^3+\frac{x}{l}\right],$ де $h>0$ – досить мале число, почала коливатися без початкової швидкості. Знайти закон вільних коливань струни.	$U_{tt}=a^2U_{xx},\ t>0,\ 0<x<l,$ $U(x,0)=\varphi_0(x),\ U_t(x,0)=\varphi_1(x),\ 0\le x\le l,$ $\left.\left(\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{2h_1}{T_0}U\right)\right\|_{x=0}=0,$ $\left.\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{2h_2}{T_0}U\right)\right\|_{x=l}=0,\ t\ge 0.$
8	Однорідна струна довжини l, закріплена на обох кінцях, знаходиться в прямолінійному положенні рівноваги. Знайти відхилення $U(x,t)$ струни для довільного моменту часу, якщо вона збуджується початковою швидкістю $U_t(x,0)=\begin{cases}V_0=const, & \|x-c\|\le\frac{\pi}{2h},\\ 0, & \|x-c\|>\frac{\pi}{2h}.\end{cases}$	$U_{tt}=a^2U_{xx}+\frac{Q}{E}x^2,\ t>0,\ 0<x<1,$ $U(x,0)=0,\ U_t(x,0)=0,\ 0\le x\le 1,$ $U_x(0,t)=0,\ U_x(1,t)=\frac{Q}{E}t^2,\ t\ge 0$ $(Q,E=const).$

9	Вивчити вимушені поперечні коливання однорідної струни, закріпленої на лівому кінці $x=0$, під дією рівномірно розподіленої по струні збурюючої сили $$f(t,x)=-A\omega^2\frac{x^2}{l}\sin\omega t,$$ яка викликає зміщення правого кінця $x=l$, рівне $A\sin\omega t$ $(A,\omega-const)$. Початкове відхилення точок струни рівне нулеві, а їх початкова швидкість рівна $\psi(x)=A\omega\frac{x}{l}$.	$U_{tt}=a^2U_{xx}-\frac{1}{4}U$, $t>0$, $0<x<l$, $U(x,0)=0$, $\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right\|_{t=0}=\psi(x)$, $0\le x\le l$, $U_x(0,t)=0$, $U_x(l,t)=0$, $t\ge 0$.
10	Знайти вимушені коливання однорідної струни, закріпленої на кінцях $x=0$ і $x=l$, на яку в момент часу $t=0$ починає діяти стала сила $-\rho g$ (ρ – лінійна густина струни). Початкове відхилення і початкова швидкість точок струни рівні нулеві.	$U_{tt}=a^2U_{xx}$, $t>0$, $0<x<l$, $U(x,0)=\varphi(x)$, $\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right\|_{t=0}=0$, $0\le x\le l$, $\left.\left(\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{1}{4}U\right)\right\|_{x=0}=0$, $U_x(l,t)=0$, $t\ge 0$.
11	Знайти вимушені коливання однорідної струни без початкових зміщень і швидкостей, яка закріплена на кінцях $x=0$ і $x=l$, якщо на струну діє рівномірно розподілена сила з густиною $$A\rho x(x-l)\sin\omega t,\ \omega=const$$ (ρ – лінійна густина струни).	$U_{tt}=a^2U_{xx}$, $t>0$, $0<x<l$, $U(x,0)=0$, $\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right\|_{t=0}=x(x-l)^2$, $0\le x\le l$, $U(0,t)=0$, $[U_x(l,t)-hU(l,t)]=0$, $t\ge 0$.
12	Знайти закон вільних коливань однорідної струни довжини l, якщо в початковий момент часу струні надано форму кривої $U(x,0)=\frac{x(l-x)}{8l}$, а потім відпущено без початкової швидкості. Струна закріплена на кінцях $x=0$, $x=l$.	$U_{tt}=U_{xx}+lx(x-2l)$, $t>0$, $0<x<l$, $U(x,0)=0$, $U_t(x,0)=0$, $0\le x\le l$, $U(0,t)=0$, $U_x(l,t)=0$, $t\ge 0$.
13	Вивчити вільні коливання однорідної струни, закріпленої на кінцях $x=0$, $x=l$, якщо в початковий момент часу точкам струни на проміжку $\left[\frac{l}{4},\frac{3l}{4}\right]$ була надана швидкість, рівна $\frac{a}{10}$ (a – стала, що фігурує в рівнянні коливань струни). Початкове відхилення відсутнє.	$U_{tt}=U_{xx}+x^2(x-l)t^2$, $t>0$, $0<x<l$, $U(x,0)=0$, $U_t(x,0)=0$, $0\le x\le l$, $U_x(0,t)=0$, $U(l,t)=0$, $t\ge 0$.

14	Знайти закон вільних коливань однорідної струни довжини l, якщо в початковий момент часу струні було надано форму кривої $$\varphi(x)=\frac{l}{100}\sin\frac{\pi x}{2l},$$ а потім струна була відпущена без початкової швидкості. Струна закріплена в лівому кінці $x=0$, а правий кінець $x=l$ вільний.	$U_{xx}-a^2U_{tt}-2hU_t-b^2U=0,$ $t>0,\ 0<x<l,$ $U(x,0)=A,\ U_t(x,0)=0,\ 0\le x\le l,$ $U(0,t)=U(l,t)=A,\ t\ge 0$ $(a,h,b,A=const>0).$
15	Знайти закон вільних коливань однорідної струни, правий кінець $x=l$ якої закріплений, а лівий $x=0$ – вільний. Початкове відхилення рівне $$\varphi(x)=-\frac{x^2-l^2}{10l},$$ а початкова швидкість рівна нулеві.	$xU_{xx}+2U_x-\frac{x}{a^2}U_{tt}=-\frac{\rho}{T},$ $t>0,\ 1<x<l\ \left(\frac{\rho}{T}=const>0\right),$ $U(x,0)=0,\ U_t(x,0)=0,\ 1\le x\le l,$ $U(1,t)=0,\ U(l,t)=0,\ t\ge 0.$ Ввести заміну: $Z(x,t)=xU(x,t).$
16	Знайти закон вільних коливань однорідної струни з вільними кінцями $x=0$ і $x=6$, якщо в початковий момент часу струна знаходилася в спокої, а її точкам було надано початкову швидкість $$\psi(x)=V_0+V_1\cos\frac{\pi x}{3}\quad (V_0,V_1-const).$$	$U_{tt}=U_{xx}-2U_x+U-2e^x,$ $t>0,\ 0<x<l,$ $U(x,0)=e^x(x-l),\ U_t(x,0)=0,\ 0\le x\le l,$ $U_x(0,t)-U(0,t)=1,\ U(l,t)=0,\ t\ge 0.$ Ввести підстановку: $U(x,t)=e^xZ(x,t).$
17	Однорідна струна, закріплена на кінці $x=l$, коливається за рахунок зміщення лівого кінця $x=0$, яке відбувається за законом $\mu(t)=t^2$. Початкові відхилення та швидкість точок струни рівні нулеві. Визначити зміщення $U(t,x)$ довільної точки струни.	$U_{tt}=a^2U_{xx}-bU_t+e^{-t}(3x^2+8x),$ $t>0,\ 0<x<2,$ $U(x,0)=\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right\|_{t=0}=0,\ 0\le x\le 2,$ $U(0,t)=0,\ U_x(2,t)+U(2,t)=0,\ t\ge 0.$
18	Вивчити вимушені коливання однорідної струни, закріпленої на кінцях $x=0$, $x=1$, під дією зовнішньої сили інтенсивності $te^{-t}x(x-1)$, якщо початкові відхилення та швидкість точок струни рівні нулеві.	$U_{tt}=a^2U_{xx}-\sin t,\ t>0,\ 0<x<l,$ $U(x,0)=\frac{x^2}{2l},\ U_t(x,0)=1,\ 0\le x\le l,$ $U(0,t)=\sin t,\ U_x(l,t)=1,\ t\ge 0.$

19	Знайти закон вільних коливань однорідної струни, лівий кінець $x=0$ якої вільний, а правий $x=l$ закріплений, якщо в початковий момент часу струна знаходилася в спокої, а початкова швидкість її точок рівна $\psi(x)=x^2-l^2$.	$U_{tt}=U_{xx}-2U_t+6x^2,\ t>0,\ 0<x<3,$ $U(x,0)=U_t(x,0)=0,\ 0\le x\le 3,$ $U_x(0,t)=0,\ U_x(3,t)+2U(3,t)=0,\ t\ge 0.$
20	Вивчити поперечні коливання однорідної струни довжиною l з нерухомо закріпленими кінцями, які викликані неперервно розподіленою по струні силою густини $\rho x(x-l)\cos\omega t$, де $\omega=const$, ρ – лінійна густина струни, вважаючи, що реакцією навколишнього середовища можна нехтувати.	$U_{tt}=a^2U_{xx},\ t>0,\ 0<x<3,$ $U(x,0)=2\sin\frac{\pi x}{2},\ U_t(x,0)=x^2-4x+2,$ $0\le x\le 3,$ $U(0,t)=2t,\ U_x(3,t)=2t,\ t\ge 0.$
21	Однорідна струна, закріплена на кінцях $x=-l$ і $x=l$, коливається тільки за рахунок початкової швидкості її точок $\psi(x)=\frac{l^2}{4}\sin\frac{\pi(x+l)}{2l}.$ Визначити зміщення $U(t,x)$ довільної точки струни.	$U_{tt}=a^2U_{xx}-U_t,\ t>0,\ 0<x<1,$ $U(x,0)=2x,\ U_t(x,0)=x^2-2x,\ 0\le x\le 1,$ $U_x(0,t)=2e^{-t},\ U_x(1,t)=2,\ t\ge 0.$
22	Знайти закон вільних коливань однорідної струни довжини l з пружно закріпленими кінцями, причому коефіцієнти пружності на обох кінцях рівні, а точки закріплення пружин зміщені на сталу величину V_0, якщо початкові відхилення і швидкість точок струни рівні нулеві.	$U_{tt}=U_{xx}-\frac{4U_x}{x}+\frac{6U}{x^2},\ t>0,\ 1<x<3,$ $U(x,0)=0,\ U_t(x,0)=x^2(x-1)^2(x-3),$ $1\le x\le 3;$ $U_x(1,t)-2U(1,t)=0,\ U(3,t)=0,\ t\ge 0.$ Ввести заміну: $U(x,t)=x^2Z(x,t)$.
23	Вивчити вільні коливання однорідної струни, кінці якої $x=0$ і $x=2$ вільні, якщо в момент часу $t=0$ струні було надано форму кривої $\varphi(x)=\frac{1}{20}\cos 2\pi x$, а початкова швидкість точок струни рівна $V_0=const$.	$U_{tt}=a^2U_{xx}-\frac{V_0x^2}{2l}\sin t,\ t>0,\ 0<x<l,$ $U(x,0)=0,\ U_t(x,0)=V_0=const,$ $0\le x\le l,$ $U(0,t)=0,\ U_x(l,t)=V_0\sin t,\ t\ge 0.$
24	Однорідна $(a=1)$ струна, лівий кінець $x=0$ якої закріплений, а правий $x=3$ вільний, коливається тільки за рахунок початкового зміщення її точок $\varphi(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<2,\\ -2(x-3)^2+2, & 2\le x\le 3.\end{cases}$ Визначити зміщення $U(t,x)$ довільної точки струни.	$U_{tt}=a^2U_{xx}+e^{-t}(x-l)^2x^2,\ t>0,$ $0<x<l,$ $U(x,0)=0,\ U_t(x,0)=3,\ 0\le x\le l,$ $U_x(0,t)=0,\ U_x(l,t)+3U(l,t)=9t,\ t\ge 0.$

25	Однорідна струна, обидва кінці $x=0$ і $x=\pi$ якої вільні, коливається в середовищі з опором, пропорційним швидкості, під дією зовнішньої сили інтенсивності $f(t,x)=Ae^{-2t}+B\cos 4x$ (A, B – сталі). Початкові відхилення і швидкість точок струни рівні нулеві. Визначити зміщення $U(t,x)$ довільної точки струни.	$\frac{x^2}{a^2}U_{tt}=x^2U_{xx}+4xU_x+2U,$ $t>0,\ 1<x<l,$ $U(x,0)=0,\ U_t(x,0)=x^{-2}(x-1)(x-l)^2,$ $1\le x\le l,$ $U(1,t)=0,\ U_x(l,t)=0,\ t\ge 0.$ Ввести заміну: $Z(x,t)=x^2U(x,t).$
26	Знайти закон вільних коливань однорідної $(a=2)$ струни довжини l, лівий кінець якої закріплений пружно, а правий – жорстко, якщо в початковий момент часу струна знаходилася в спокої, а початкова швидкість її точок була рівна $\psi(x)=x^2(x-l)$.	$U_{tt}=a^2U_{xx}-0{,}01x^2\cos t,\ t>0,$ $0<x<10,$ $U(x,0)=1,\ U_t(x,0)=0,\ 0\le x\le 10,$ $U_x(0,t)=0,\ U(10,t)=\cos t,\ t\ge 0.$
27	Вивчити процес коливань однорідної струни довжини l, правий кінець якої вільний, а лівий закріплений, якщо коливання відбуваються тільки за рахунок рівномірно розподіленої вздовж струни зовнішньої сили (A, B – сталі) $F(t,x)=Ae^{-t}\sin\frac{3\pi}{2l}x-Bt\sin\frac{5\pi}{2l}x.$	$U_{tt}=\frac{1}{4}U_{xx},\ t>0,\ 0<x<1,$ $U(x,0)=3x-2x^2,\ U_t(x,0)=x,\ 0\le x\le 1,$ $U(0,t)=0,\ U_x(1,t)+U(1,t)=2t,\ t\ge 0.$
28	Знайти закон вільних коливань однорідної струни довжини l, якщо в початковий момент часу струні було надано форму кривої $\varphi(x)=\frac{1}{20}\cos\frac{\pi x}{2l}$, після чого струна була відпущена без початкової швидкості. Лівий кінець струни вільний, а правий нерухомо закріплений.	$U_{tt}=25U_{xx},\ t>0,\ 0<x<5,$ $U(x,0)=0,\ U_t(x,0)=x+\frac{x^3}{75},$ $0\le x\le 5,$ $U_x(0,t)=t,\ U_x(5,t)=2t,\ t\ge 0.$
29	Знайти закон вимушених коливань однорідної струни довжини l із пружно закріпленими кінцями (коефіцієнти пружності на обох кінцях рівні 1) під дією рівномірно розподіленої уздовж струни зовнішньої сили інтенсивності $f(t,x)=2tx^2(x-l)^2,$ якщо початкові відхилення та швидкість точок струни рівні нулеві.	$U_{tt}=a^2(U_{xx}+12),\ t>0,\ 0<x<1,$ $U(x,0)=3x-2x^3,\ U_t(x,0)=0{,}1x(x-1),$ $0\le x\le 1,$ $U(0,t)=0,\ U(1,t)=1,\ t\ge 0.$

30	Вивчити процес коливань однорідної струни, кінці якої $x=0$ і $x=l$ закріплені, в середовищі з опором, пропорційним швидкості, якщо початкова швидкість точок струни рівна нулеві, а початкова форма зміщення струни зображена на рис. 7.  *Рис. 7*	$U_{tt}=U_{xx}-\cos t\left(\frac{x^3}{3}+x\right),$ $t>0,\ \ 0<x<2,$ $U(x,0)=x+x^2,\ \ U_t(x,0)=V_0=const,$ $0\le x\le 2,$ $U_x(0,t)=\cos t,\ \ U_x(2,t)=5\cos t,\ \ t\ge 0.$

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №4
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

Теоретичні відомості

Рівняння параболічного типу часто зустрічаються при вивченні процесів теплопровідності та дифузії. До цього типу рівнянь приводяться також задачі [1-3] про рух в'язкої рідини, про поширення електромаґнітних полів в провідних середовищах тощо.

Простішим представником рівнянь параболічного типу є ***рівняння теплопровідності***

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right). \tag{4.1}$$

Нехай $\overline{\mathrm{D}}$ – обмежена область простору (x, y, z). Позначимо через $Ц$ в просторі (x, y, z, t) циліндр, основою якого є область D, а твірні паралельні осі Ot. Нехай $Ц_T$ – частина цього циліндра, обмежена знизу площиною $t = 0$ і згори площиною $t = T$ $(T > 0)$. Частину поверхні циліндра $Ц_T$, яка складається із його нижньої основи $(t = 0)$ та бічної поверхні, позначимо через Γ. Верхню основу позначимо через H. Має силу наступна

ТЕОРЕМА. Функція $U(x, y, z, t)$, яка задовільняє однорідне рівняння теплопровідності (4.1) в циліндрі $Ц_T$ і неперервна в $Ц_T \cup \Gamma \cup H$, набуває найбільшого і найменшого значення на Γ, тобто або при $t = 0$, або на бічній поверхні циліндра $Ц_T$.

Фізична задача про поширення тепла в тонкому стержні з теплоізольованою бічною поверхнею зводиться до однієї з мішаних задач: знайти розв'язок диференціального рівняння

$$U_t = a^2 U_{xx} + f(x,t), \quad 0 < t \le T, \quad 0 < x < l, \tag{4.2}$$

який справджував би початкову умову

$$U(0, x) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l \tag{4.3}$$

і одну із крайових умов:

$$U(t,0) = \mu_1(t), \quad U(t,l) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T \tag{4.4^1}$$

(на кінцях стержня задана температура),

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = \gamma_1(t), \quad \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=l} = \gamma_2(t), \quad 0 \le t \le T \tag{4.4^2}$$

(на кінцях стержня заданий тепловий потік),

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = h_0\{U(t,0) - U_0(t)\}, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=l} = h_1\{U(t,l) - U_1(t)\}, \quad 0 \le t \le T \tag{4.4^3}$$

(на кінцях стержня заданий теплообмін із зовнішнім середовищем, температури якого є $U_0(t)$ і $U_1(t)$).

Задача (4.2),(4.3),(4.4[1]) називається ***першою мішаною задачею*** для рівняння теплопровідності.

ТЕОРЕМА. Перша мішана задача для рівняння теплопровідності в області $0 \le t \le T$, $0 \le x \le l$ має єдиний розв'язок.

Фізична задача про поширення тепла в стержні при умові теплообміну із зовнішнім середовищем через бічну поверхню приводить до інтеґрування диференціального рівняння

$$U_t = a^2 U_{xx} - \alpha^2 U + f(x,t), \tag{4.2'}$$

де $\alpha^2 = \dfrac{h}{c\rho}$ (h – коефіцієнт теплообміну);

$$f(x,t) = \alpha^2 \theta(x,t) + \frac{F(x,t)}{c\rho},$$

$\theta(x,t)$ – температура зовнішнього середовища, $F(x,t)$ – інтенсивність внутрішніх джерел тепла. Початкова і крайові умови для рівняння (4.2′) формуються аналоґічно, як і для рівняння (4.2).

Схема інтеґрування мішаних задач для рівняння теплопровідності є аналоґічною схемі розв'язування змішаних задач для рівнянь гіперболічного типу.

ПРИКЛАД 1. Знайти закон розподілу температури всередині стержня довжини l, якщо в початковий момент часу температура стержня описувалася функцією $U_0\left(1 - x^2 l^{-2}\right)$, в лівому кінці стержня температура змінюється по закону $U_0 \cos\omega t$ $\left(U_0, \omega = const\right)$, а в правому підтримується нульова температура. Всередині стержня є джерела і поглиначі тепла; їх інтенсивність (в розрахунку на одиницю маси стержня) рівна $U_0 \omega l^{-1}(x - l)\sin\omega t$. Бічна поверхня стержня теплоізольована.

Розв'язання. Даний фізичний процес приводить до інтеґрування мішаної задачі: знайти розв'язок диференціального рівняння

$$U_t = a^2 U_{xx} - U_0 \omega \frac{l - x}{l} \sin\omega t, \quad 0 < t \le T, \quad 0 < x < l, \tag{4.5}$$

який справджує початкову умову

$$U(x,0) = U_0\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right), \quad 0 \le x \le l \tag{4.6}$$

і крайові умови

$$U(0,t) = U_0 \cos\omega t, \quad U(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T. \tag{4.7}$$

Зведемо задачу (4.5)-(4.7) до мішаної задачі з однорідними крайовими умовами. Для цього шукаємо розв'язок $U(x,t)$ у вигляді

$$U(x,t) = Z(x,t) + V(x,t), \tag{4.8}$$

де $V(x,t)$ – двічі неперервно диференційовна в області $\mathrm{D} = \{0 < t \le T, \quad 0 < x < l\}$ функція, яка справджує крайові умови (4.7). Маємо:

$$V(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{l}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]=\left(1-\frac{x}{l}\right)U_0\cos\omega t.$$

Підставивши (4.8) в (4.5), (4.6) і (4.7), одержимо задачу для визначення функції $Z(x,t)$:

$$Z_t=a^2Z_{xx},\quad 0<t\le T,\quad 0<x<l, \tag{4.5′}$$

$$Z(x,0)=U_0\frac{lx-x^2}{l^2},\quad 0\le x\le l, \tag{4.6′}$$

$$Z(0,t)=Z(l,t)=0,\quad 0\le t\le T. \tag{4.7′}$$

Задачу (4.5′),(4.6′),(4.7′) розв'язуємо методом Фур'є. Одержимо

$$Z(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{4.9}$$

де

$$c_n=\frac{2}{l}\int_0^l U_0\frac{lx-x^2}{l^2}\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{4U_0}{(\pi n)^3}\left[1-(-1)^n\right]=\begin{cases}0, & n=2k,\\ \dfrac{8U_0}{(\pi n)^3}, & n=2k-1.\end{cases}$$

Таким чином,

$$U(x,t)=U_0\frac{x-l}{l}\cos\omega t+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8U_0}{\left(\pi(2k-1)\right)^3}e^{-\left(\frac{(2k-1)\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{(2k-1)\pi}{l}x.$$

ПРИКЛАД 2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$U_t=a^2U_{xx}-\alpha^2U,\quad 0<t\le T,\quad 0<x<l, \tag{4.10}$$

який справджує початкову умову

$$U(x,0)=0,\quad 0\le x\le l \tag{4.11}$$

і крайові умови

$$U(0,t)=U_0,\quad \left.\left(\frac{\partial U}{\partial x}+HU\right)\right|_{x=l}=0,\quad 0\le t\le T,\quad U_0=const. \tag{4.12}$$

Дати фізичну інтерпретацію поставленої задачі.

Розв'язання. Потрібно визначити температуру тонкого однорідного стержня довжини l в будь-який момент часу t, якщо початкова його температура рівна нулеві, на лівому його кінці підтримується стала температура U_0, а через правий кінець $x=l$ і через бічну поверхню стержня проходить теплообмін із зовнішнім середовищем, температура якого рівна нулеві. Задача (4.10)-(4.12) є задачею зі стаціонарними неоднорідностями. Тому розв'язок шукаємо у вигляді

$$U(x,t)=Z(x)+V(x,t), \tag{4.13}$$

де $Z(x)$ – розв'язок крайової задачі

$$a^2Z''-\alpha^2Z=0, \tag{4.14}$$

$$Z(0)=U_0,\quad Z'(l)+HZ(l)=0, \tag{4.15}$$

а $V(x,t)$ – розв'язок мішаної задачі

$$V_t = a^2 V_{xx} - \alpha^2 V, \tag{4.10'}$$

$$V(x,0) = -Z(x), \tag{4.11'}$$

$$V(0,t) = 0, \quad \left.\left(\frac{\partial V}{\partial x} + HV\right)\right|_{x=l} = 0. \tag{4.12'}$$

Інтеґруємо задачу (4.14),(4.15). Одержимо:

$$Z = c_1 e^{\frac{\alpha}{a}x} + c_2 e^{-\frac{\alpha}{a}x}, \qquad c_2 = \frac{(\alpha + aH)U_0 e^{\frac{\alpha}{a}l}}{2\alpha \operatorname{ch}\frac{\alpha}{a}l + 2aH \operatorname{sh}\frac{\alpha}{a}l}, \qquad c_1 = U_0 - c_2 .$$

Таким чином,

$$Z(x) = \frac{(\alpha - aH)U_0 e^{-\frac{\alpha}{a}l} e^{\frac{\alpha}{a}x} + (\alpha + aH)U_0 e^{\frac{\alpha}{a}l} e^{-\frac{\alpha}{a}x}}{2\alpha \operatorname{ch}\frac{\alpha}{a}l + 2aH \operatorname{sh}\frac{\alpha}{a}l} = \frac{\alpha \operatorname{ch}\frac{\alpha}{a}(l-x) + aH \operatorname{sh}\frac{\alpha}{a}(l-x)}{\alpha \operatorname{ch}\frac{\alpha}{a}l + aH \operatorname{sh}\frac{\alpha}{a}l} U_0 .$$

Інтеґруємо мішану задачу (4.10')-(4.12'):

$$V(t,x) = X(x)\cdot T(t) \neq 0 \tag{4.17}$$

Відокремивши змінні в рівнянні (4.10') і умовах (4.12'), одержимо

$$T'(t) + \left(\alpha^2 - a^2\lambda\right)T(t) = 0 , \tag{4.18}$$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 , \tag{4.19}$$

$$X(0) = 0 , \quad X'(l) + HX(l) = 0 . \tag{4.20}$$

Знайдемо власні значення і власні функції задачі (4.19),(4.20).

1) Нехай $\lambda = 0$. Тоді $X(x) = c_1 x + c_2$. Із умов (4.20) одержуємо:

$$c_2 = 0 , \ c_1 + Hc_1 l = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0 .$$

Отже, $\lambda = 0$ не є власним значенням.

2) При $\lambda > 0$ маємо $X(x) = c_3 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_4 e^{-\sqrt{\lambda}x}$. Згідно з крайовими умовами (4.20) маємо:

$$c_4 + c_3 = 0 , \quad \sqrt{\lambda}\left(c_3 e^{\sqrt{\lambda}l} - c_4 e^{-\sqrt{\lambda}l}\right) + H\left(c_3 e^{\sqrt{\lambda}l} + c_4 e^{-\sqrt{\lambda}l}\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$c_3\left[\sqrt{\lambda}\left(c_3 e^{\sqrt{\lambda}l} + c_4 e^{-\sqrt{\lambda}l}\right) + H\left(c_3 e^{\sqrt{\lambda}l} - c_4 e^{-\sqrt{\lambda}l}\right)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad c_3 = 0 , \quad c_4 = 0 .$$

Таким чином, і в цьому випадку задача (4.19),(4.20) має тільки тривіальний розв'язок $X(x) \equiv 0$.

3) Якщо $\lambda < 0$, то $X(x) = c_1 \cos\sqrt{-\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{-\lambda}x$. Підставимо одержаний розв'язок у крайові умови (4.20). Маємо:

$$c_1 = 0 , \quad c_2\left(\sqrt{-\lambda}\cos\sqrt{-\lambda}l + H\sin\sqrt{-\lambda}l\right) = 0 .$$

З останньої рівності випливає, що задача (4.19),(4.20) має нетривіальний розв'язок при тих значеннях λ, при яких

$$\operatorname{tg}\sqrt{-\lambda}l = -\frac{\sqrt{-\lambda}}{H}, \tag{4.21}$$

причому $X(x)=c_2\sin\sqrt{-\lambda}x$. Позначимо розв'язки рівняння (4.21) як $\sqrt{-\lambda}=\mu_n$, $n=1,2,\ldots$ Тоді

$$X_n(x)=c_2\sin\mu_n x,\quad T_n(t)=c_6 e^{-\left(\alpha^2+a^2\mu_n^2\right)t},$$
$$V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{-\left(\alpha^2+a^2\mu_n^2\right)t}\sin\mu_n x. \tag{4.22}$$

Коефіцієнти c_n визначаємо із початкової умови (4.11):

$$c_n=-\frac{\int\limits_0^l Z(x)\sin\mu_n x\,dx}{\int\limits_0^l\sin^2\mu_n x\,dx}=-\frac{2U_0a^2\mu_n\left(\mu_n+H^2\right)}{\left(a^2\mu_n^2+\alpha^2\right)\left[l\left(\mu_n^2+H^2\right)+H\right]}.$$

Підклавши (4.16) і (4.22) в (4.13), одержимо розв’язок поставленої мішаної задачі

$$U(x,t)=\frac{\alpha\,\mathrm{ch}\frac{\alpha}{a}(l-x)+aH\,\mathrm{sh}\frac{\alpha}{a}(l-x)}{\alpha\,\mathrm{ch}\frac{\alpha}{a}l+aH\,\mathrm{sh}\frac{\alpha}{a}l}U_0-$$
$$-2U_0a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n\left(\mu_n+H^2\right)}{\left(a^2\mu_n^2+\alpha^2\right)\left[l\left(\mu_n^2+H^2\right)+H\right]}e^{-\left(\alpha^2+a^2\mu_n^2\right)t}\sin\mu_n x.$$

ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ №4

Варіант	Розв’язати задачу:	Зінтеґрувати мішану задачу та дати фізичну інтерпретацію:
1	Знайти розподіл температури всередині однорідного ізотропного стержня довжини l, якщо в початковий момент часу температура точок стержня описується функцією $$\varphi(x)=\frac{m_2}{l}x+m_1-\frac{m_1}{l^2}x^2,$$ в лівому кінці підтримується стала температура m_1, а в правому – стала температура m_2. Теплообмін вільний. Бічна поверхня теплоізольована.	$U_t=U_{xx}-\alpha^2U,\ 0<t\le T,\ 0<x<l,$ $U(x,0)=x^2(x-l)^2,\ 0\le x\le l,$ $U_x(0,t)=0,\ U_x(l,t)=0,\ 0\le t\le T.$

2	Дано тонкий однорідний стержень, початкова температура якого рівна нулеві. На кінці $x=l$ підтримується нульова температура, а на кінці $x=0$ вона зростає пропорційно часу, що минає: $$U(0,t)=At,\ \ A=const.$$ Бічна поверхя стержня теплоізольована. Знайти закон зміни температури всередині стержня.	$U_t=a^2U_{xx},\ \ 0<t\le T,\ \ 0<x<2,$ $U(x,0)=2x(x-2)^2,\ \ 0\le x\le 2,$ $U_x(0,t)=0,\ \ U_x(2,t)+HU(2,t)=0,$ $0\le t\le T.$
3	Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні довжини l при вільному теплообміні, якщо початкова температура стержня задана рівністю $$U(x,0)=U_0\left(\frac{x}{l}\right)^2\ (U_0-const).$$ Бічна поверхня стержня та його лівий кінець теплоізольовані, а в правому кінці підтримується стала температура U_0.	$U_t=a^2U_{xx}-2t\sin\frac{7\pi}{l}x,$ $0<t\le T,\ \ 0<x<l,$ $U(x,0)=0,\ \ 0\le x\le l,$ $U(0,t)=0,\ \ U(l,t)=0,\ \ 0\le t\le T.$
4	В скінченому стержні довжини l обидва кінці теплоізольовані, а початкова температура його стала й рівна U_0. Визначити температуру стержня $U(x,t)$ в будь-який момент часу, якщо стержень однорідний ізотропний і його бічна поверхня теплоізольована.	$U_t=U_{xx}-U+4x,\ \ 0<t\le T,\ \ 0<x<l,$ $U(x,0)=0,\ \ 0\le x\le l,$ $U(0,t)=0,\ \ U(l,t)=0,\ \ 0\le t\le T.$
5	Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні довжини l при вільному теплообміні, якщо початкова температура стержня рівна $x(x-l)^2$, Бічна поверхня стержня та його правий кінець теплоізольовані, а в лівому кінці підтримується нульова температура.	$U_t=a^2U_{xx}-(x^2-.l^2)\sin t,$ $0<t\le T,\ \ 0<x<l,$ $U(x,0)=0,\ \ 0\le x\le l,$ $\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right\|_{x=0}=0,\ \ U(l,t)=0,\ \ 0\le t\le T.$
6	Дано тонкий однорідний стержень довжини l, початкова температура якого рівна $U_0+xl^{-1}(U_1-U_0),\ \ U_1,U_0=const$. Кінець стержня $x=0$ підтримується при сталій температурі U_0, а кінець $x=l$ – при сталій температурі U_1. Через бічну поверхю стержня проходить теплообмін із зовнішнім середовищем нульової температури. Визначити температуру стержня в довільний момент часу t.	$U_t=a^2U_{xx},\ \ 0<t\le T,\ \ 0<x<3,$ $U(x,0)=cx^2(9-2x),\ \ 0\le x\le 3$ $(c-const),$ $\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right\|_{x=0}=0,\ \ \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right\|_{x=3}=0,\ \ 0\le t\le T.$

7	Дано тонкий однорідний стержень довжини l, початкова температура якого рівна Axl^{-1} $(A = const)$, а всередині стержня діють джерела тепла інтенсивності $f(x,t) = -Ae^{-t}x^2l^{-2}$. На кінці $x = 0$ підтримується нульова температура, а на кінці $x = l$ температура змінюється по закону Ae^{-t}. Знайти розподіл температури вздовж стержня при $t > 0$, якщо його бічна поверхня теплоізольована.	$U_t = U_{xx} - U,\quad 0 < t \le T,\quad 0 < x < l,$ $U(x,0) = 2(x^2 - l^2),\quad 0 \le x \le l,$ $\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right\|_{x=0} = 0,\quad U(l,t) = 0,\quad 0 \le t \le T.$
8	Дано тонкий однорідний стержень довжини l, початкова температура якого рівна $U_0 = const$. В кінці $x = l$ підтримується стала температура U_0, а на кінці $x = 0$ і через бічну поверхню стержня проходить теплообін із зовнішнім середовищем, температура якого U_0. Всередині стержня діють джерела тепла сталої інтенсивності Q. Визначити температуру стержня в довільний момент часу $t > 0$.	$U_t = a^2U_{xx} + \omega\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)\cos\omega t,$ $0 < t \le T,\quad 0 < x < 2,$ $U(x,0) = 0,\quad 0 \le x \le 2,$ $U(0,t) = \sin\omega t,\quad U(2,t) = 0,\quad 0 \le t \le T.$
9	Дано тонкий однорідний стержень довжини l, бічна поверхня якого теплоізольована, а початкова температура рівна $x(x-l)^2$. На кінці стержня $x = 0$ підтримується нульова температура, а на кінці $x = l$ проходить теплообмін із зовнішім середовищем, температура якого рівна нулеві. Визначити температуру стержня в довільний момент часу $t > 0$.	$U_t = 36U_{xx} + \frac{\pi}{10}\sin\frac{\pi x}{4},$ $0 < t \le T,\quad 0 < x < 2,$ $U(x,0) = 0,\quad 0 \le x \le 2,$ $U(0,t) = 0,\quad U_x(2,t) = 0,\quad 0 \le t \le T.$
10	Дано тонкий однорідний стержень довжини l, початкова температура якого рівна нулеві. На кінці $x = 0$ підтримується нульова температура, а на кінці $x = l$ вона змінюється по закону $A\sin\omega t$ $(A,\omega = const)$. Знайти розподіл температури вздовж стержня при $t > 0$, якщо бічна поверхня його теплоізольована, а всередині стержня діють джерела тепла інтенсивності $$f(x,t) = A\omega\cos\omega t\frac{x^2}{l^2}.$$	$U_t = U_{xx} - \alpha^2U,\quad 0 < t \le T,\quad 0 < x < l,$ $U(x,0) = 3\cos\frac{4\pi}{l}x + 4,\quad 0 \le x \le l,$ $U_x(0,t) = 0,\quad U_x(l,t) = 0,\quad 0 \le t \le T.$

11	Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні одиничної довжини, якщо початкова температура стержня рівна нулеві, на лівому кінці вона змінюється за законом $A\left(1-e^{-\alpha t}\right)$, $A, \alpha = const$, а через правий кінець проходить теплообмін із зовнішнім середовищем, температура якого рівна нулеві (коефіцієнт теплообміну рівний 1). Бічна поверхня стержня теплоізольована, а всередині стержня діють джерела тепла інтенсивності $\frac{A\alpha}{3} e^{-\alpha t}\left(3-x^2\right)$.	$U_t = a^2 U_{xx} - U, \quad 0 < t \le T, \quad 0 < x < l,$ $U(x,0) = x(x-l), \quad 0 \le x \le l,$ $U(0,t) = U(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T.$
12	В однорідному скінченому стержні з теплоізольованою бічною поверхнею обидва кінці теплоізольовані, а початкова температура рівна $$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{2U_0}{l} x^2, & 0 \le x < \frac{l}{2}; \\ \frac{2U_0}{l} (l-x)^2, & \frac{l}{2} \le x < l. \end{cases}$$ Знайти розподіл температури вздовж стержня при $t > 0$.	$U_t = U_{xx} - \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \sin t,$ $0 < t \le T, \quad 0 < x < 2,$ $U(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 2,$ $U(0,t) = 0, \quad U(2,t) = 0, \quad 0 \le t \le T.$
13	Знайти закон розподілу температури в однорідному ізотропному стержні довжини l, якщо в початковий момент температура стержня рівна нулеві, правий кінець і бічна поверхня теплоізольовані, а в лівому кінці підтримується нульова температура. Всередині стержня діють джерела тепла інтенсивності $$f(x,t) = -\frac{x}{l}(l-x)^2 \cos \omega t \quad (\omega = const).$$	$U_t = a^2 U_{xx} - \alpha^2 U, \quad 0 < t \le T, \quad 0 < x < 5,$ $U(x,0) = \frac{x}{5}(5-x), \quad 0 \le x \le 5,$ $U(0,t) = 0, \quad U(5,t) = 0, \quad 0 \le t \le T.$
14	Дано тонкий однорідний стержень довжини l з теплоізольованою бічною поверхнею, початкова температура якого рівна $$\varphi(x) = \frac{cx(l-x)}{l^2}.$$ Кінці стержня підтримуються при температурі, рівній нулеві. Визначити температуру стержня в момент часу $t > 0$.	$U_t = a^2 U_{xx} - \alpha^2 U + 4x,$ $0 < t \le T, \quad 0 < x < l,$ $U(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l,$ $U_x(0,t) = 0, \quad U_x(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T.$

15	Дано тонкий однорідний стержень довжини l, бічна поверхня якого теплоізольована. Початкова температура стержня рівна $$U(0,x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x\le \frac{l}{2}; \\ (l-x)^2, & \frac{l}{2}<x\le l. \end{cases}$$ На обох кінцях стержня проходить теплообмін із зовнішнім середовищем нульової температури. Визначити температуру стержня в момент часу $t>0$.	$U_t=a^2U_{xx}-\alpha^2U,\ \ 0<t\le T,\ \ 0<x<3,$ $U(x,0)=m_0\dfrac{x^2}{6},\ \ 0\le x\le 3,$ $U_x(0,t)=0,\ \ U_x(3,t)=m_0,\ \ 0\le t\le T$ $(m_0=const).$
16	Дано тонкий однорідний стержень довжини l, початкова температура якого $\varphi(x)=x^2-lx-1$. На обох кінцях стержня та через бічну поверхню проходить теплообмін (із однаковим коефіцієнтом, рівним довжині стержня) із навколишнім середовищем, температура якого рівна нулеві. Визначити температуру стержня в довільний момент часу $t>0$.	$U_t=a^2U_{xx},\ \ 0<t\le T,\ \ 0<x<1,$ $U(x,0)=0{,}5u_0x^2,\ \ 0\le x\le 1,$ $U_x(0,t)=0,\ \ U_x(1,t)=u_0,\ \ 0\le t\le T,$ $(u_0=const).$
17	Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні довжини l при вільному теплообміні, якщо початкова температура точок стержня рівна $$\varphi(x)=U_0x^2l^{-2}\quad (U_0=const),$$ бічна поверхня та його лівий кінець теплоізольовані, а правий кінець підтримується при температурі U_0.	$U_t=a^2U_{xx}-2x(x-1)t,\ \ 0<t\le T,\ \ 0<x<1,$ $U(x,0)=3\sin 7\pi x,\ \ 0\le x\le 1,$ $U(0,t)=0,\ \ U(1,t)=0,\ \ 0\le t\le T.$
18	Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні довжини l при вільному теплообміні, якщо початкова температура стержня $\varphi(x)=x(x-l)^2$, його бічна поверхня та правий кінець теплоізольовані, а лівий кінець підтримується при нульовій температурі.	$U_t=U_{xx}-4U+12t,$ $0<t\le T,\ \ 0<x<\frac{1}{2},$ $U(x,0)=3,\ \ 0\le x\le \frac{1}{2},$ $U_x(0,t)=0,\ \ U_x\left(\frac{1}{2},t\right)=0,\ \ 0\le t\le T.$
19	Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні довжини l, лівий кінець якого теплоізольований, а правий підтримується при нульовій температурі, якщо початкова температура стержня рівна нулеві, а через його бічну поверхню проходить теплообмін із довкіллям сталої температури U_0.	$U_t=a^2U_{xx},\ \ 0<t\le T,\ \ 0<x<4,$ $U(x,0)=0,\ \ 0\le x\le 4,$ $U_x(0,t)-U(0,t)=5t,\ \ U(4,t)=5t,$ $0\le t\le T.$

20	Дано тонкий однорідний стержень довжини l, початкова температура якого рівна $U_0 = const$. Обидва кінці стержня теплоізольовані, а через його бічну поверхню проходить теплообмін із навколишнім середовищем сталої температури $U_1 \neq U_0$. Знайти закон зміни температури в стержні при $t > 0$.	$U_t = a^2 U_{xx} - U + 2e^{-2t} \cos \frac{5\pi}{2l} x,$ $0 < t \le T, \quad 0 < x < l,$ $U(x,0) = x^2 - l^2, \quad 0 \le x \le l,$ $U_x(0,t) = 0, \quad U(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T.$
21	Дано тонкий однорідний стержень довжини l із теплоізольованою бічною поверхнею, початкова температура якого рівна нулеві. Правий кінець стержня підтримується при нульовій температурі, лівий – теплоізольований. Всередині стержня є джерела та поглиначі тепла сумарної інтенсивності $f(x,t) = l^{-1}(l^2 - x^2)\sin \alpha t \quad (\alpha = const).$ Визначити температуру стержня в довільний момент часу $t > 0$.	$U_t = lU_{xx} + \frac{x^2}{2l}, \quad 0 < t \le T, \quad 0 < x < l,$ $U(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l,$ $U_x(0,t) = 0, \quad U_x(l,t) = t, \quad 0 \le t \le T.$
22	Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні довжини l, якщо в початковий момент часу температура стержня рівна $\varphi(x) = A_0 \sin \frac{9\pi}{2l} x$, де $A_0 = const$, правий кінець і бічна поверхня теплоізольовані, а в лівому кінці підтримується нульова температура. Всередині стержня діють джерела тепла інтенсивності $f(x,t) = 2A_0 t \sin \frac{\pi}{2l} x$.	$U_t = a^2 U_{xx} - \beta U, \quad 0 < t \le T, \quad 0 < x < 1,$ $U(x,0) = x - 1, \quad 0 \le x \le 1,$ $U_x(0,t) - 2U(0,t) = 0, \quad U(1,t) = 0,$ $0 \le t \le T, \quad \beta = const > 0.$
23	В однорідному ізотропному стержні довжини l, початкова температура якого рівна нулеві, правий кінець і бічна поверхня теплоізольовані, а до лівого кінця підводиться потік тепла $q_0 t \quad (q_0 = const)$. Знайти розподіл температури в стержні.	$U_t = a^2 U_{xx} - 6U, \quad 0 < t \le T, \quad 0 < x < l,$ $U(x,0) = 1 - \cos \frac{2\pi}{l} x, \quad 0 \le x \le l,$ $U(0,t) = 0, \quad U_x(l,t) + hU(l,t) = 0,$ $0 \le t \le T, \quad h = const > 0.$
24	Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні довжини l, якщо в початковий момент часу температура стержня рівна нулеві, а обидва кінці та бічна поверхня теплоізольовані. Усередині стержня діють джерела та поглиначі тепла сумарної інтенсивності $2A_0\left(1 - \cos \frac{4\pi}{l} x\right)\cos \omega t \quad (A_0, \omega = const).$	$U_t = 9U_{xx} - \beta U + x + 2 + \beta t\left(\frac{x^2}{3} + 2\right),$ $0 < t \le T, \quad 0 < x < 3,$ $U(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 3,$ $U(0,t) = 2t, \quad U(3,t) = 5t, \quad 0 \le t \le T$ $(\beta = const > 0).$

25	Знайти розподіл температури в однорідному ізотропному стержні довжини l, правий кінець якого теплоізольований, а на лівому кінці та через бічну поверхню проходить теплообмін із навколишнім середовищем нульової температури (коефіцієнт теплообміну рівний 1), якщо початкова температура стержня рівна $$\varphi(x) = x^2 - 2l(x+1).$$	$U_t = U_{xx} + A(x + t\cos\pi x),$ $0 < t \le T,\quad 0 < x < 8,$ $U(x,0) = 0,\quad 0 \le x \le 8,$ $U_x(0,t) = At,\quad U_x(8,t) = At,\quad 0 \le t \le T$ $(A = const).$
26	Дано тонкий однорідний стержень довжини l із теплоізольованою бічною поверхнею, початкова температура якого рівна нулеві. Лівий кінець стержня підтримується при нульовій температурі, а на правому температура зростає з бігом часу: $U(l,t) = Bt,\quad B = const$. Визначити температуру стержня в довільний момент часу $t > 0$.	$U_t = a^2 U_{xx} - 4U + t(2 - \cos 7\pi x),$ $0 < t \le T,\quad 0 < x < 6,$ $U(x,0) = 0,\quad 0 \le x \le 6,$ $U_x(0,t) = 0,\quad U_x(6,t) = 0,\quad 0 \le t \le T.$
27	Знайти розподіл температури всередині однорідного ізотропного стержня довжини l, якщо початкова температура стержня рівна нулеві, правий кінець та бічна поверхня теплоізольовані, а на лівому кінці температура зростає за законом $U(0,t) = At,\quad A = const$.	$U_t = a^2 U_{xx} - \alpha^2 U,\quad 0 < t \le T,\quad 0 < x < l,$ $U(x,0) = 2A\cos Ax + \sin Ax,\quad 0 \le x \le l,$ $U_x(0,t) - \frac{1}{2}U(0,t) = 0,\quad U(l,t) = 0,$ $0 \le t \le T\quad (\alpha = const,$ $A = const > 0,$ причому $\operatorname{tg} Al = -2A).$
28	Дано тонкий однорідний стержень довжини l із теплоізольованою бічною поверхнею та правим кінцем, початкова температура якого задана функцією $$\varphi(x) = A\left(1 + x - 0{,}5l^{-1}x^2\right).$$ На лівому кінці стержня температура спадає за законом $Ae^{-t},\quad A = const$, а всередині стержня діють поглиначі тепла інтенсивності $-Ae^{-t}$. Визначити температуру стержня при $t > 0$.	$U_t = 25U_{xx} - 5U + x^2(1 - 0{,}175x)\operatorname{sh} 5t,$ $0 < t \le T,\quad 0 < x < 5,$ $U(x,0) = 0,\quad 0 \le x \le 5,$ $U_x(0,t) = 0,\quad U_x(5,t) + U(t,5) = 0,\quad 0 \le t \le T.$
29	Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні довжини l із теплоізольованою бічною поверхнею, обидва кінці якого підтримуються при нульовій температурі, якщо початкова температура точок стержня рівна $$\varphi(x) = A\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{l}\right).$$	$U_t = U_{xx} - \alpha^2 U + tx^2(x - 1{,}5l),$ $0 < t \le T,\quad 0 < x < l,$ $U(x,0) = 0,\quad 0 \le x \le l,$ $U_x(0,t) = 0,\quad U_x(l,t) = 0,\quad 0 \le t \le T.$

30	Дано тонкий однорідний стержень довжини l із теплоізольованою бічною поверхнею та лівим кінцем, якщо на правому кінці стержня температура спадає за законом Ae^{-t}, $A = const$, а всередині стержня діють поглиначі тепла інтенсивності $$f(x,t) = -Ae^{-t}\frac{x^2}{l^2}.$$ Початкова температура стержня стала й рівна A. Визначити температуру стержня в довільний момент часу $t > 0$.	$U_t = U_{xx} + Ax, \quad 0 < t \le T, \quad 0 < x < 1,$ $U(x,0) = A(x+1), \quad 0 \le x \le 1,$ $U(0,t) = A, \quad U(1,t) = 2A, \quad 0 \le t \le T$ $(A = const)$.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

Теоретичні відомості

До рівнянь еліптичного типу приводить вивчення стаціонарних процесів різної фізичної природи (теплопровідність, дифузія, рівновага та інші). Простішим представником рівнянь еліптичного типу є ***рівняння Лапласа***:

$$\Delta U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} = 0.$$

Означення. Функція $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається *гармонічною* в обмеженій області D, якщо вона в цій області двічі неперервно диференційовна і задовольняє рівняння Лапласа.

Функція $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається гармонічною в необмеженій області D^*, якщо в кожній точці цієї області, яка знаходиться на скінченій віддалі від початку координат, $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ двічі неперервно диференційовна, задовольняє рівняння Лапласа і для досить великих $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ має силу нерівність (***умова реґулярності на нескінченості***)

$$\left| U(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right| \le \frac{C}{r^{n-2}},$$

де C – деяка стала.

У випадку двовимірного простору умова реґулярності на нескінченості запишеться у вигляді:

$$\left| U(x, y) \right| \le C.$$

Рівняння

$$\Delta U = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

називається ***рівнянням Пуассона***.

ТЕОРЕМА. Функція $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, гармонічна всередині обмеженої області D і неперервна в замкнутій області $\mathrm{D} \cup \mathrm{S} \equiv \overline{\mathrm{D}}$, досягає свого найбільшого і найменшого значення тільки на границі області S, не приймаючи ні мінімуму, ні максимуму в області D.

Постановка задач

1. ***Внутрішня (зовнішня) задача Діріхле***: знайти гармонічну в $\mathrm{D}\ (\mathrm{D}^*)$ і неперервну в замкнутій області $\overline{\mathrm{D}}\ (\overline{\mathrm{D}}^*)$ функцію $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, яка набуває на границі області S заданих значень

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big|_{\mathrm{S}} = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{5.1}$$

де $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – задана неперервна на S функція.

2. ***Внутрішня (зовнішня) задача Неймана***: знайти гармонічну в $\mathrm{D}\,(\mathrm{D}^*)$ і неперервну разом з частинними похідними першого порядку в $\overline{\mathrm{D}}\,(\overline{\mathrm{D}}^*)$ функцію $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, яка на S справджує крайову умову

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \vec{n}}\right|_{\mathrm{S}} = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{5.2}$$

де $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до S, $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – задана неперервна функція на S. Надалі будемо вважати, що інтеґрал від $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по поверхні S рівний нулеві (виконується *умова стаціонарності теплового поля*).

3. ***Третя внутрішня (зовнішня) крайова задача***: знайти гармонічну в $\mathrm{D}\,(\mathrm{D}^*)$ і неперервну разом з частинними похідними першого порядку в $\overline{\mathrm{D}}\,(\overline{\mathrm{D}}^*)$ функцію $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, яка справджує крайову умову

$$\left.\left[\frac{\partial U}{\partial \vec{n}} + \varphi_3(x_1, x_2, \ldots, x_n)U\right]\right|_{\mathrm{S}} = \varphi_4(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{5.3}$$

де $\varphi_3(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\varphi_4(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – задані неперервні на S функції.

Аналоґічно ставляться крайові задачі і для рівняння Пуассона.

ТЕОРЕМА. Як внутрішня, так і зовнішня задача Діріхле для рівняння Пуассона має не більше одного розв’язку в розглядуваній області.

Інтеґрування крайових задач для деяких областей методом відокремлення змінних

Крайові задачі для рівняння Лапласа у випадку прямокутних областей розв’язуються методом відокремлення змінних.

У випадку круга, сектора, кільця переходимо до полярної системи координат

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi .$$

Рівняння Лапласа в полярній системі координат записується у вигляді

$$U_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}U_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}U_{\varphi\varphi} = 0 . \tag{5.4}$$

ПРИКЛАД 1. Знайти стаціонарний розподіл температури всередині нескінченого циліндра радіуса l, якщо на лівій половині поверхні циліндра ($0 \le \varphi \le \pi$) підтримується температура $-T$, а на правій половині ($-\pi \le \varphi \le 0$) – температура T. Знайти розв’язок у формі ряду і у формі інтеґрала Пуассона. Обчислити температуру в точці $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\rho = \frac{l}{2}$.

Розв’язання. Зауважимо, що температура циліндра не залежить від координати z, тобто вона є функцією $U(\rho, \varphi)$. Таким чином, наша задача зводиться до задачі стаціонарного розподілу температури в крузі радіуса l: в області $0 \le \rho < l$, $0 \le \varphi < 2\pi$ знайти розв’язок диференціального рівняння (5.4), який справджує умови

$$U(l,\varphi)=\begin{cases}-T, & 0\le\varphi<\pi,\\ T, & -\pi\le\varphi<0.\end{cases} \tag{5.5}$$

Відзначимо, що на підставі єдиності розв'язку задачі (5.5),(5.4) $U(\rho,\varphi)=U(\rho,\varphi+2\pi)$.

Розв'язок крайової задачі (5.4),(5.5) шукаємо у вигляді

$$U(\rho,\varphi)=R(\rho)\Phi(\varphi)\ne 0,\quad \Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi). \tag{5.6}$$

Підклавши (5.6) в (5.4) і відокремивши змінні, одержимо

$$\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0, \tag{5.7}$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right)-\lambda R(\rho)=0. \tag{5.8}$$

Рівняння (5.7) матиме нетривіальні періодичні з періодом 2π розв'язки тільки тоді, коли $\lambda=n^2$, де n – ціле число, причому $\Phi(\varphi)=c_1\cos n\varphi+c_2\sin n\varphi$, $n=0,1,2,\ldots$

Із рівняння Ейлера (5.8) при $n>0$ маємо

$$R(\rho)=C\rho^n+D\rho^{-n},\quad C,D=const.$$

Поскільки $U(\rho,\varphi)$ є гармонічною функцією, то слід покласти $D=0$, поскільки інакше $U(\rho,\varphi)\xrightarrow{\rho\to 0}\infty$. Отже, $R(\rho)=C\rho^n$. При $n=0$ одержуємо $R(\rho)=c_3\ln\rho+c_4$. На підставі гармонічності $U(\rho,\varphi)$ при $\rho=0$ маємо $c_3=0$, тобто $R(\rho)=c_4$. Таким чином,

$U_n(\rho,\varphi)=\rho^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)$, $n=0,1,2,\ldots$ ($A_n=c_1\cdot C$, $B_n=c_2\cdot C$).

Розглянемо суму одержаних частинних розв'язків

$$U(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi). \tag{5.9}$$

Якщо ряд (5.9) збігається і його можна почленно диференціювати двічі за ρ і за φ, тоді сума ряду також буде гармонічною функцією. Отже, залишилося вибрати коефіцієнти A_n і B_n так, щоб для (5.9) виконувалися крайові умови (5.5). Маємо:

$$\sum_{n=0}^{\infty}l^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)=\begin{cases}-T, & 0\le\varphi<\pi,\\ T, & -\pi\le\varphi<0,\end{cases}$$

звідки $A_n=0$,

$$l^nB_n=\frac{T}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\sin n\varphi d\varphi-\int_{0}^{\pi}\sin n\varphi d\varphi\right]=\frac{2T}{\pi n}\left[(-1)^n-1\right],\quad B_n=\begin{cases}0, & n=2k,\\ -\dfrac{4T}{\pi n l^n}, & n=2k+1.\end{cases}$$

Підставивши знайдені значення коефіцієнтів в (5.9), одержимо шуканий розв'язок

$$U(\rho,\varphi)=-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{l}\right)^{2k+1}\frac{4T}{(2k+1)\pi}\sin(2k+1)\varphi.$$

Знайдемо розв'язок поставленої задачі за допомогою інтеґрала Пуассона:

$$U(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_1(\psi)\frac{l^2-\rho^2}{\rho^2-2l\rho\cos(\varphi-\psi)+l^2}d\psi,$$

де

$$\varphi_1(\psi)=\begin{cases}-T, & 0\le\varphi<\pi,\\ T, & -\pi\le\varphi<0.\end{cases}$$

При $0<\varphi<\pi,\ 0<\rho<l$ маємо:

$$U(\rho,\varphi)=\frac{2T}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{l^2-\rho^2}{2\rho l\sin\varphi}-T\,.$$

В точці $\rho=\frac{l}{2},\ \varphi=\frac{\pi}{2}$ температура рівна

$$U\left(\tfrac{l}{2},\tfrac{\pi}{2}\right)=\tfrac{2T}{\pi}\operatorname{arctg}\tfrac{3}{4}-T\approx T(0{,}41-1)=-0{,}59T.$$

Розв'язування крайових задач для рівняння Пуассона методом власних функцій

Розглянемо задачу: в прямокутній області $D=\{0<x<a,\quad 0<y<b\}$ знайти розв'язок рівняння

$$\Delta U=F(x,y), \tag{5.10}$$

який справджує умови

$$U(0,y)=\varphi_1(y),\ U(a,y)=\varphi_2(y);\ U(x,0)=\psi_1(x),\ U(x,b)=\psi_2(x). \tag{5.11}$$

Шукаємо розв'язок задачі (5.10),(5.11) у вигляді

$U(x,y)=U_1(x,y)+U_2(x,y),$

де $U_1(x,y),\ U_2(x,y)$ є розв'язками задач

$$\Delta U_1=0\,, \tag{5.10′}$$

$$U_1(0,y)=\varphi_1(y)\ \ U_1(a,y)=\varphi_2(y);\ U_1(x,0)=\psi_1(x),\ U_1(x,b)=\psi_2(x). \tag{5.11′}$$

$$\Delta U_2=F(x,y), \tag{5.12}$$

$$U_2(0,y)=U_2(a,y)=U_2(x,0)=U_2(x,b)=0\,. \tag{5.13}$$

Задачу (5.10′),(5.11′) розбиваємо на дві задачі:

$\Delta\omega=0$, $\omega(0,y)=\omega(a,y)=0,\ \omega(x,0)=\psi_1(x),\ \omega(x,b)=\psi_2(x),$

$\Delta Z=0,\ Z(0,y)=\varphi_1(y),\ Z(a,y)=\varphi_2(y),\ Z(x,0)=Z(x,b)=0\,.$

Очевидно, що $U_1(x,y)=\omega(x,y)+Z(x,y)$. Знайдемо $\omega(x,y)$. Для цього застосуємо метод Фур'є. Маємо:

$$Y''(y)-\lambda Y(Y)=0, \tag{5.14}$$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \tag{5.15}$$

$$X(0)=X(a)=0. \tag{5.16}$$

Розв'язавши задачу Штурма-Ліувілля (5.15),(5.16), одержуємо

$$\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2,\ \ X_n(x)=\sin\frac{\pi n}{a}x,\quad n=\overline{1,\infty}\,.$$

Тоді із (5.14) маємо

$$Y_n(y) = A_n e^{\frac{\pi n}{a}y} + B_n e^{-\frac{\pi n}{a}y}.$$

Таким чином,

$$\omega(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n e^{\frac{\pi n}{a}y} + B_n e^{-\frac{\pi n}{a}y}\right]\sin\frac{\pi n}{a}x. \tag{5.17}$$

Для визначення коефіцієнтів A_n і B_n використовуємо крайові умови на сторонах $y=0$ і $y=b$:

$$\psi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty}[A_n + B_n]\sin\frac{\pi n}{a}x, \quad \psi_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n e^{\frac{\pi n}{a}b} + B_n e^{-\frac{\pi n}{a}b}\right]\sin\frac{\pi n}{a}x,$$

звідки

$$\begin{aligned} A_n + B_n &= \frac{2}{a}\int_0^a \psi_1(x)\sin\frac{\pi n}{a}x\,dx, \\ A_n e^{\frac{\pi n}{a}b} + B_n e^{-\frac{\pi n}{a}b} &= \frac{2}{a}\int_0^a \psi_2(x)\sin\frac{\pi n}{a}x\,dx. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Визначивши із (5.18) A_n, B_n і підставивши їх у (5.17), знайдемо $\omega(x,y)$. Аналогічно знаходимо $Z(x,y)$:

$$Z(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\widetilde{A}_n e^{\frac{\pi n}{b}x} + \widetilde{B}_n e^{-\frac{\pi n}{b}x}\right]\sin\frac{\pi n}{b}y, \tag{5.17′}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_n + \widetilde{B}_n &= \frac{2}{b}\int_0^b \varphi_1(y)\sin\frac{\pi n}{b}y\,dy, \\ \widetilde{A}_n e^{\frac{\pi n}{b}a} + \widetilde{B}_n e^{-\frac{\pi n}{b}a} &= \frac{2}{b}\int_0^b \varphi_2(y)\sin\frac{\pi n}{b}y\,dy. \end{aligned} \tag{5.18′}$$

Інтеґруємо задачу (5.12),(5.13). Для цього розв'яжемо спочатку задачу Штурма-Ліувілля: знайти ті значення параметра λ, для яких існують нетривіальні розв'язки задачі

$$\Delta V + \lambda V = 0, \tag{5.19}$$

$$V(0,y) = V(a,y) = V(x,0) = V(x,b) = 0. \tag{5.20}$$

Покладемо $V(x,y) = X(x)\cdot Y(y) \neq 0$. Відокремивши змінні у (5.19) і (5.20), одержимо:

$$\begin{cases} X''(x) + \mu X(x) = 0, \\ X(0) = X(a) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} Y''(y) + (\lambda - \mu)Y(y) = 0, \\ Y(0) = Y(b) = 0. \end{cases}$$

Маємо:

$$\mu = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2, \quad X(x) = \sin\frac{\pi n}{a}x; \quad \lambda - \mu = \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2, \quad Y(y) = \sin\frac{\pi n}{b}y;$$

$$\lambda_{nm} = \pi^2\left(\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{a^2}\right),\ V_{nm}(x,y)=\sin\frac{\pi n}{a}x\,\sin\frac{\pi n}{b}y,\ n,m\in \mathrm{N}.$$

Шукаємо розв'язок задачі (5.12),(5.13) у вигляді

$$U_2(x,y)=\sum_{n,m=1}^{\infty}A_{nm}V_{nm}(x,y). \tag{5.21}$$

Вважаємо, що ряд (5.21) збігається і його можна почленно диференціювати двічі за x і y. Очевидно, що ряд (5.21) справджує крайові умови (5.13). Вибираємо A_{nm} так, щоб (5.21) був розв'язком рівняння (5.12). Для цього розкладемо $F(x,y)$ в подвійний ряд Фур'є за системою власних функцій $V_{nm}(x,y)$ задачі (5.19),(5.20):

$$F(x,y)=\sum_{n,m=1}^{\infty}\widetilde{A}_{nm}V_{nm}(x,y), \tag{5.22}$$

$$\widetilde{A}_{nm}=\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a F(x,y)\sin\frac{\pi m}{b}y\sin\frac{\pi n}{a}x\,dx\,dy. \tag{5.23}$$

Підставивши (5.21) і (5.22) в рівняння (5.12), одержимо

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}A_{nm}\Delta V_{nm}=\sum_{n,m=1}^{\infty}\widetilde{A}_{nm}V_{nm}.$$

Оскільки $\Delta V_{nm}+\lambda_{nm}V_{nm}=0$, то

$$-\sum_{n,m=1}^{\infty}A_{nm}\lambda_{nm}V_{nm}=\sum_{n,m=1}^{\infty}\widetilde{A}_{nm}V_{nm},$$

отже,

$$A_{n,m}=-\frac{1}{\lambda_{nm}}\widetilde{A}_{nm}.$$

Таким чином, шуканий розв'язок запишеться у вигляді ряду

$$U(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n e^{\frac{\pi n}{a}y}+B_n e^{-\frac{\pi n}{a}y}\right]\sin\frac{\pi n}{a}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\widetilde{A}_n e^{\frac{\pi n}{b}x}+\widetilde{B}_n e^{-\frac{\pi n}{b}x}\right]\sin\frac{\pi n}{b}y-$$

$$-\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{n,m}}\widetilde{A}_{n,m}V_{n,m}(x,y),$$

коефіцієнти якого визначаються з систем (5.18) та (5.18′), а також з рівностей (5.23).

Зауваження. Якщо функція $F(x,y)$ є простою, то інколи розв'язки задачі (5.12),(5.13) вдається знайти шляхом підбору.

ТЕОРЕМА. У двовимірному просторі довільні два розв'язки задачі Неймана (внутрішньої чи зовнішньої), які мають неперервні аж до краю частинні похідні першого порядку, відрізняються на сталий доданок.

Зауваження. У випадку трьох і більше незалежних змінних твердження теореми справедливе для внутрішньої задачі Неймана. Розв'язок зовнішньої задачі Неймана є єдиним.

Крім сформульованих трьох основних крайових задач для рівнянь еліптичного типу, на практиці зустрічаються задачі, коли на частині границі області задана умова, наприклад, типу (5.1), на іншій частині границі області – умова (5.2) або (5.3) тощо.

ПРИКЛАД 2. Знайти гармонічну функцію всередині кругового сектора $0 \le \rho \le R,\ 0 \le \varphi \le \alpha$, яка справджує крайовим умовам

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = \left.\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha} = 0,\ \ U(R,\varphi) = A\cos\frac{\pi}{\alpha}\varphi. \tag{5.24}$$

Розв'язання. Розв'язок поставленої задачі шукаємо у вигляді

$$U(\rho,\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi) \ne 0\,.$$

Відокремивши змінні у рівнянні (5.4) і в перших двох крайових умовах (5.24), одержимо:

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda R(\rho) = 0\,, \tag{5.25}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0, \\ &\Phi'(0) = \Phi'(\alpha) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.26}$$

Із (5.26) маємо:

$$\lambda = \left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2,\ \ \Phi(\varphi) = c_1\cos\frac{\pi n}{\alpha}\varphi,\ \ \ n = 0,1,2\ldots$$

Підкладемо знайдені значення λ в (5.25) і визначимо $R(\rho)$:

$$R(\rho) = C\rho^{\frac{\pi n}{\alpha}},\ \ \ n = 0,1,2\ldots$$

Таким чином,

$$U(\rho,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \rho^{\frac{\pi n}{\alpha}} \cos\frac{\pi n}{\alpha}\varphi\,. \tag{5.27}$$

Сталі A_n в (5.27) визначаємо так, щоб задовольнялась і третя крайова умова в (5.24). Маємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n R^{\frac{\pi n}{\alpha}} \cos\frac{\pi n}{\alpha}\varphi = A\cos\frac{\pi}{\alpha}\varphi,\ \ \Rightarrow\ \ A_n = \begin{cases} 0, & n \ne 1, \\ AR^{-\frac{\pi}{\alpha}}, & n = 1. \end{cases}$$

Отже,

$$U(\rho,\varphi) = A\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos\frac{\pi}{\alpha}\varphi\,.$$

ПРИКЛАД 3. У півсмузі $0 \le x \le a,\ 0 \le y < \infty$ (рис. 8) знайти розв'язок рівняння Лапласа який справджує умови

$$U(0,y)=0,\ \ U(a,y)=0,\ \ 0\le y<\infty, \tag{5.28}$$

$$U(x,0)=-\sin\frac{8\pi}{a}x,\ \ U(x,\infty)=0,\ \ 0\le x\le a. \tag{5.29}$$

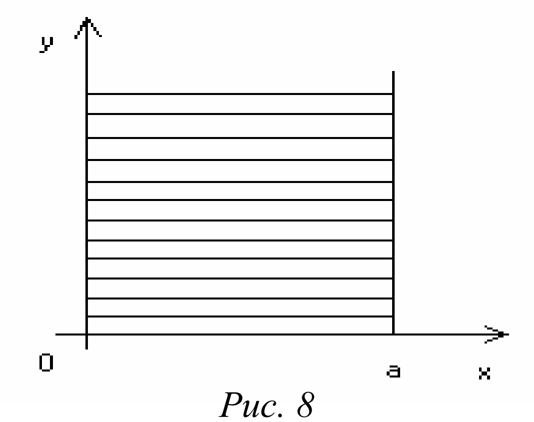


Рис. 8

Розв'язання. Шукаємо нетривіальний розв'язок рівняння Лапласа, який справджував би крайові умови (5.28), у вигляді

$$U(x,y)=X(x)\cdot Y(y)\neq 0. \tag{5.30}$$

Відокремивши змінні в рівнянні Лапласа і в (5.28), одержимо:

$$Y''(y)-\lambda Y(y)=0, \tag{5.31}$$

$$\left.\begin{aligned} &X''(x)+\lambda X(x)=0,\\ &X(0)=X(a)=0. \end{aligned}\right\} \tag{5.32}$$

Розв'язавши задачу Штурма-Ліувілля (5.32), матимемо:

$$\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2,\ \ X_n(x)=\sin\frac{\pi n}{a}x,\ \ n=1,2,\ldots$$

Підклавши знайдені значення λ_n (5.31) і зінтеґрувавши одержане рівняння, знаходимо

$$Y_n(y)=A_n e^{\frac{\pi n}{a}y}+B_n e^{-\frac{\pi n}{a}y},\ \ n=1,2,\ldots,$$

де A_n і B_n – довільні сталі. Таким чином, на підставі (5.30) одержуємо:

$$U_n(x,y)=\left(A_n e^{\frac{\pi n}{a}y}+B_n e^{-\frac{\pi n}{a}y}\right)\sin\frac{\pi n}{a}x,\ \ \ n=1,2,\ldots$$

На підставі другої з умов (5.29) $A_n=0$. Маємо

$$U(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{-\frac{\pi n}{a}y}\sin\frac{\pi n}{a}x.$$

Щоб отримати розв'язок поставленої задачі, визначаємо сталі B_n так, щоб задовольнялась і перша із умов (5.29):

$$\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{\pi n}{a}x=-\sin\frac{8\pi}{a}x,$$

звідки $B_8=-1;\ B_n=0,\ n\neq 8.$ Отже, розв'язком поставленої задачі є функція

$$U(x,y)=-e^{-\frac{8\pi}{a}y}\sin\frac{8\pi}{a}x.$$

Зауваження. Якщо в області G, обмеженій замкнутою поверхнею S, проходить стаціонарний потенціальний рух нестискуваної однорідної рідини, то для визначення закону руху цієї рідини достатньо знайти потенціал $U(x,y,z)$ поля швидкостей $\vec{V}$, який є розв'язком задачі Неймана

$$\Delta U(x,y,z)=0,\quad \left.\frac{\partial U}{\partial \vec{n}}\right|_S=f(x,y,z),$$

де $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до поверхні S, а $f(x,y,z)$ – задана на поверхні S функція, рівна проекції швидкості в точках цієї поверхні на зовнішню нормаль. Якщо $U(x,y,z)$ знайдено, то поле швидкостей рівне $\vec{V}=-\mathrm{grad}U$. Якщо область G обмежена циліндричною поверхнею з твірною, паралельною осі Oz, а вектор швидкості не залежить від z, тоді потенціал поля $U(x,y)$ є функцією тільки змінних x і y, тобто $U(x,y)$ є розв'язком задачі

$$\Delta U(x,y)=0,\quad \left.\frac{\partial U}{\partial \vec{n}}\right|_{\mathrm{S}}=f(x,y).$$

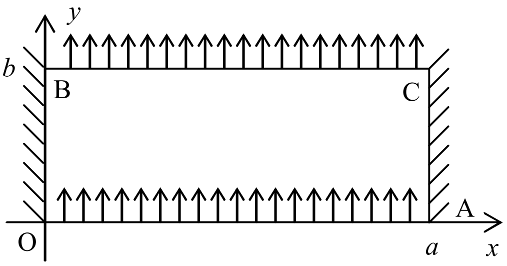
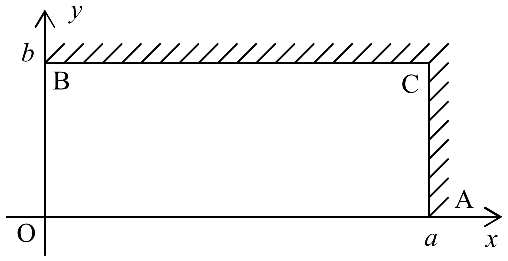
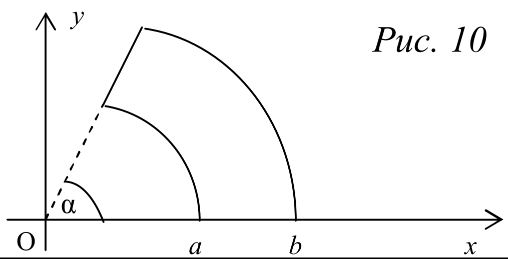
При цьому для існування розв'язку поставленої задачі $f(x,y)$ потрібно задати таким чином, щоб

$$\int_{\ell} f(x,y)dl=0,$$

де ℓ - лінія перетину поверхні S площиною xOy.

ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ №5

Варіант	Розв'язати задачу:	Зінтеґрувати крайову задачу та дати фізичну інтерпретацію:
1	Знайти форму рівноваги прямокутної мембрани зі сторонами *2a* і *2b*, яка перебуває під дією рівномірно розподіленого навантаження $P=const$ (початок координат вибраний у центрі мембрани). Сторони нерухомо закріплені. Обчислити прогин центру мембрани, вважаючи відношення $b:a$ рівним 2.	$\Delta U=0,\ \ 2<\rho<4,\ \ 0<\varphi\le 2\pi,$ $U(2,\varphi)=A\sin^2\varphi\ \ (A=const),$ $\left.\frac{\partial U}{\partial \rho}\right\|_{\rho=4}=0,\ \ 0<\varphi\le 2\pi.$
2	Знайти закон стаціонарного розподілу температури всередині нескінченого кругового циліндра радіуса *l*, якщо на його поверхні підтримується температура $U(l,\varphi)=U_0\sin\varphi\ \ (U_0=const).$ Розв'язок знайти у формі ряду і у формі інтеґрала Пуассона.	$\Delta U=2x,\ \ 0<x<a,\ \ 0<y<b,$ $U(0,y)=0,\ \ U(a,y)=0,\ \ 0\le y\le b,$ $\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right\|_{y=0}=0,\ \ \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right\|_{y=b}=0,\ \ 0\le x\le a.$

3	Дано прямокутну пластинку OACB (рис. 8). Через сторону OA тепло рівномірно підводиться, через BC – рівномірно відводиться, а дві інші сторони OB і AC покриті тепловою ізоляцією. Знайти стаціонарну температуру внутрішніх точок пластинки.  *Рис. 8*	$\Delta U = B\sin 8\varphi,\quad 0<\rho<2,\quad 0<\varphi<\frac{\pi}{4},$ $U(\rho,0)=0,\quad U\left(\rho,\frac{\pi}{4}\right)=0,\quad 0\le\rho\le 2,$ $U(2,\varphi)=A\sin 4\varphi,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$ $(A, B = const).$
4	Знайти положення рівноваги мембрани, яка має форму півкруга радіуса a, якщо на неї діє рівномірно розподілене навантаження $Q\sin\varphi$ $(Q = const)$. Краї мембрани нерухомо закріплені.	$\Delta U = 0,\ \ 0<x<a,\ \ 0<y<b,$ $U(x,0)=A,\ \ U(x,b)=Ax^2(x-a)^2,$ $0\le x\le a\quad (A=const),$ $U_x(0,y)=0,\ \ U_x(a,y)=0,\ \ 0\le y\le b.$
5	Дві сторони AC і BC прямокутної однорідної пластинки OACB (рис. 9) покриті тепловою ізоляцією, а на двох інших підтримується нульова температура. Знайти стаціонарний розподіл температури при умові, що в пластинці виділяється тепло з густиною $Q = const$.  *Рис. 9*	$\Delta U = 0,\quad 0<\rho<a,\quad 0<\varphi<\pi,$ $U(\rho,0)=0,\quad U(\rho,\pi)=0,\quad 0\le\rho\le a,$ $U(a,\varphi)=5\sin\varphi,\quad 0\le\varphi\le\pi.$
6	Знайти стаціонарний розподіл температури в пластинці, яка має форму криволінійного прямокутника, дві сторони якого утворені дугами концентричних кіл, а дві інші – відрізками радіусів (рис. 10), якщо грань $\rho = b$ має температуру $T_0\sin\frac{2\pi}{\alpha}\varphi$ $(T_0 = const)$, а інші підтримуються при нульовій температурі.  *Рис. 10*	$\Delta U = Ay,\quad 0<x<4,\quad 0<y<2,$ $U(x,0)=0,\quad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right\|_{y=2}=0,\quad 0\le x\le 4,$ $U(0,y)=0,\quad \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right\|_{x=4}=0,\quad 0\le y\le 2$ $(A=const).$

7	Знайти стаціонарний розподіл температури в прямокутній пластинці, дві протилежні грані $y=0$ і $y=b$ якої підтримуються при температурах нуль та $T_0\left(x^2-a^2\right)^2$ $\left(T_0=const\right)$ відповідно, а дві інші грані $(x=\pm a)$ випромінюють тепло по закону Ньютона в навколишнє середовище, температура якого рівна нулеві.	$\Delta U=12\rho^2,\quad a<\rho<b,\quad 0<\varphi\le 2\pi,$ $U(a,\varphi)=0,\quad \left.\frac{\partial U}{\partial\rho}\right\|_{\rho=b}=0,\quad 0<\varphi\le 2\pi.$
8	Знайти стаціонарний розподіл температури всередині нескінченого кругового циліндра радіуса *l*, якщо на поверхні циліндра підтримується стала температура, рівна нулеві в тих точках, де $\alpha<\varphi<2\pi$, і $2\pi u_0\alpha^{-1}$ в тих точках, де $0<\varphi<\alpha$ $\left(u_0,\alpha=const\right)$. Розглянути випадок, коли α досить мале.	$\Delta U=\sin x\sin y,\quad 0<x,y<\pi,$ $U(x,0)=\sin x,\quad U(x,\pi)=\sin x,$ $0\le x\le\pi,$ $U(0,y)=0,\quad U(\pi,y)=0,\quad 0\le y\le\pi.$
9	Тонка плівка натягнута на дротяний каркас, який проектується на площину *xOy* в прямокутник зі сторонами $x=0$, $x=l$, $y=0$, $y=m$; відхилення точок контура від площини *xOy* задається рівностями: $U(0,y)=0,\ U(l,y)=0,$ $U(x,0)=0,\ U(x,m)=h\sin\frac{\pi x}{l}$ $(h=const)$. Знайти форму поверхні, по якій розміститься плівка.	$\Delta U=-4,\quad 0<\rho<a,\quad 0<\varphi\le 2\pi,$ $U(a,\varphi)=0,\quad 0<\varphi\le 2\pi.$
10	Тонка плівка натягнута на дротяний каркас, який проектується на площину *xOy* в круговий сектор $0\le\varphi\le\alpha<2\pi,\ 0\le\rho\le R$. На плівку діє рівномірно розподілене навантаження $q=const$. Сторони $\varphi=0$ і $\varphi=\alpha$ вільні, а край $\rho=R$ нерухомо закріплений. Знайти форму поверхні, по якій розміститься плівка.	$\Delta U=0,\quad 0<x<+\infty,\quad 0<y<b,$ $\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right\|_{y=0}=0,\quad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right\|_{y=b}+U(x,b)=0,$ $0\le x<+\infty;$ $U(0,y)=Ay^2(y-b)^2,\quad U(+\infty,y)=0,$ $0\le y\le b\quad (A=const).$
11	Визначити форму прогину однорідної прямокутної мембрани зі сторонами *a* і *b*, якщо три сторони $x=a$, $y=0$, $y=b$ вільні, а на четвертій задане відхилення $$U(0,y)=y\left(3y^2-2by\right).$$	$\Delta U=2\cos 2\varphi,\quad a<\rho<b,\quad 0<\varphi\le 2\pi,$ $U(a,\varphi)=0,\quad \left.\frac{\partial U}{\partial\rho}\right\|_{\rho=b}=0,\quad 0<\varphi\le 2\pi.$
12	Напівкругла мембрана радіуса *a* нерухомо закріплена на півколі і вільна на прямолінійному краї. Знайти форму прогину мембрани під рівномірним навантаженням $q=const$.	$\Delta U=0,\quad 0<x<+\infty,\quad 0<y<l,$ $U_y(x,0)=0,\quad U_y(x,l)=0,\quad 0\le x<+\infty,$ $U(0,y)=\cos\frac{\pi}{l}y,\quad U(+\infty,y)=0,$ $0\le y\le b.$

13	Усередині нескінченого кругового циліндра радіуса l проходить рух нестискуваної рідини. Вважаючи рух сталим, потенціальним і плоскопаралельним, знайти закон цього руху, якщо проекція швидкості $\vec{v}$ на зовнішню нормаль до циліндра в кожній точці задається формулою: $\text{пр}_{\vec{n}}\vec{v} = v_0 \sin 2\varphi, \quad v_0 = const.$	$\Delta U = -2, \quad 0 < x < a, \quad -\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2},$ $U\left(x, -\frac{b}{2}\right) = 0, \quad U\left(x, \frac{b}{2}\right) = 0, \quad 0 \le x \le a;$ $U(0, y) = 0, \quad U(a, y) = 0, \quad -\frac{b}{2} \le y \le \frac{b}{2}.$
14	Усередині нескінченого кругового циліндра радіуса l проходить рух нестискуваної рідини. Вважаючи рух сталим, потенціальним і плоскопаралельним, знайти закон цього руху, якщо проекція швидкості $\vec{v}$ на зовнішню нормаль до циліндра в кожній точці задається формулою: $$\text{пр}_{\vec{n}}\vec{v} = \begin{cases} -v_0 & 0 < \varphi < \pi, \\ v_0 & -\pi < \varphi < 0 \end{cases} \quad (v_0 = const).$$	$\Delta U = 6y, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b,$ $\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right\|_{y=0} = 0, \quad U(x, b) = 0, \quad 0 \le x \le a,$ $U(0, y) = 0, \quad U(a, y) = 0, \quad 0 \le y \le b.$
15	Знайти стаціонарний розподіл температури в прямокутній пластинці, яка підігрівається джерелом тепла, що виділяє на одиницю площі тепло $Q = const$, якщо через сторони пластинки тепловіддача в навколишнє середовище нульової температури проходить по закону Ньютона.	$\Delta U = 0, \quad a < \rho < b, \quad 0 < \varphi \le 2\pi,$ $\left.\frac{\partial U}{\partial \rho}\right\|_{\rho=a} = A\cos\varphi, \quad U(b, \varphi) = B\sin 2\varphi + Q,$ $0 < \varphi \le 2\pi \quad (A, B, Q = const).$
16	Знайти розподіл потенціалу електростатичного поля всередині прямокутника OACB (див. рис. 8, 9) зі сторонами OA=a, OB=b. Уздовж сторони OB потенціал рівний $$u_0 y^2 (y - b), \; u_0 = const,$$ а три інші сторони заземлені. Електричні заряди всередині прямокутника відсутні.	$\Delta U = 0, \quad R < \rho < +\infty, \quad 0 < \varphi < 2\pi,$ $U(R, \varphi) = T_0 \sin\varphi \cos 4\varphi, \quad 0 < \varphi \le 2\pi$ $(T_0 = const).$
17	Знайти положення рівноваги прямокутної мембрани під дією рівномірно розподіленої зовнішньої сили сталої інтенсивності P, якщо сторони мембрани $x = 0$ і $y = b$ нерухомо закріплені, а сторони $x = a$ і $y = 0$ – вільні.	$\Delta U = 1, \quad 2 < \rho < 4, \quad 0 < \varphi \le 2\pi,$ $U(2, \varphi) = 1, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial \rho}\right\|_{\rho=4} = 2\cos\varphi,$ $0 < \varphi \le 2\pi.$
18	Знайти стаціонарний розподіл температури зовні однорідної кругової пластинки радіуса R, якщо до границі пластинки підводиться тепловий потік $\frac{1}{2}\sin\varphi\cos 2\varphi$.	$\Delta U = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b,$ $U(x, 0) = 0, \quad U(x, b) = \frac{b}{a} T x (x - a),$ $0 \le x \le a;$ $U(0, y) = 0, \quad U(a, y) = T y (y - b),$ $0 \le y \le b \quad (T = const).$

19	Знайти положення рівноваги мембрани, яка має форму кругового сектора $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, під дією навантаження $Q\cos\varphi$ $(Q = const)$, якщо краї $\rho = 1$ та $\varphi = \frac{\pi}{2}$ нерухомо закріплені, а край $\varphi = 0$ вільний.	$\Delta U = 0,\quad 0 < x < a,\quad 0 < y < b,$ $U_y(x,0) = 0,\quad U(x,b) = 0,\quad 0 \le x \le a;$ $U(0,y) = 0,\quad U_x(a,y) = Q(y^2 - b^2),$ $0 \le y \le b\quad (Q = const).$
20	Знайти форму рівноваги однорідної прямокутної мембрани OACB (див. рис. 8, 9), закріпленої по краях, якщо до мембрани прикладений нормальний тиск $P = const$ на одиницю площі.	$\Delta U = 0,\quad 0 < \rho < R,\quad -\alpha < \varphi < \alpha,$ $U_\varphi(\rho,-\alpha) = 0,\quad U_\varphi(\rho,\alpha) = 0,\quad 0 \le \rho \le R,$ $U(R,\varphi) = A\sin\frac{\pi\varphi}{2\alpha},\quad -\alpha \le \varphi \le \alpha$ $(A, \alpha = const).$
21	Визначити стаціонарний розподіл температури у пластинці, яка має форму криволінійного прямокутника – півкільця, дві сторони якого утворені дугами концентричних кіл $\rho = a$ та $\rho = b$, а дві інші – відрізками радіусів $\varphi = 0$ та $\varphi = \pi$. Грань $\rho = a$ має температуру $A\sin^2\varphi$ $(A = const)$, грань $\rho = b$ теплоізольована, а інші підтримуються при нульовій температурі.	$\Delta U = B\cos x,\quad 0 < x < \pi,\quad 0 < y < 1,$ $U_y(x,0) = 0,\quad U(x,b) = 0,\quad 0 \le x \le \pi;$ $U(0,y) = 0,\quad U_x(\pi,y) + hU(\pi,y) = 0,$ $0 \le y \le 1\quad (B, h - const,\quad h > 0).$
22	Визначити стаціонарний розподіл температури в однорідній прямокутній пластинці $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 4$, сторони $x = 0$ та $x = 1$ якої теплоізольовані, а на інших температура задається рівностями: $U(x,0) = A,\ U(x,4) = Bx\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3}\right)\ (A, B = const).$	$\Delta U = \rho^2 \sin\varphi\cos\varphi,\quad 0 < \rho < R,$ $0 < \varphi \le 2\pi,$ $U(R,\varphi) = 0,\quad 0 < \varphi \le 2\pi.$
23	Визначити форму прогину однорідної круглої мембрани радіуса *R*, якщо відхилення точок краю мембрани задається функцією $f(\varphi) = 4\sin\varphi\cos^2\varphi.$	$\Delta U = A\cos\frac{x}{4}\sin 2y,\quad 0 < x < 2\pi,$ $0 < y < \frac{\pi}{2}\quad (A = const),$ $U(x,0) = 0,\quad U\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = 0,\quad 0 \le x \le 2\pi;$ $U_x(0,y) = 0,\quad U(2\pi,y) = 0,\quad 0 \le y \le \frac{\pi}{2}.$
24	Знайти форму рівноваги однорідної прямокутної мембрани $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b$, сторона $x = a$ якої вільна, а на інших відхилення задається рівностями: $U(x,0) = A\sin\frac{5\pi}{2a}x,\ U(x,b) = Bx(x-a)^2,$ $U(0,y) = 0\ (A, B = const).$	$\Delta U = 12\rho^2\cos 2\varphi,\quad a < \rho < b,$ $0 < \varphi \le 2\pi,$ $U(a,\varphi) = 0,\quad U_\rho(b,\varphi) = 0,\quad 0 < \varphi \le 2\pi.$

25	Визначити стаціонарний розподіл температури в однорідній пластинці, яка має форму кругового сектора $0 \le \rho \le 4,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$, якщо прямолінійні сторони пластинки теплоізольовані, а на дузі проходить теплообмін по закону Ньютона з навколишнім середовищем нульової температури. Усередині пластинки виділяється тепло з густиною $Q = const$.	$\Delta U = 0,\ \ 0 < x < +\infty,\ \ 0 < y < l,$ $U(x,0) = 0,\ \ U_y(x,l) = 0,\ \ 0 \le x < +\infty,$ $U(0,y) = 2y(y-l)^2,\ \ U(+\infty,y) = 0,$ $0 \le y \le l.$
26	Визначити стаціонарний розподіл температури в однорідній прямокутній пластинці $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, сторона $x = 0$ якої теплоізольована, сторони $x = a$ та $y = 0$ підтримуються при нульовій температурі, а до сторони $y = b$ підводиться тепловий потік $B\left(x^2 - a^2\right)$, $B = const$.	$\Delta U = \rho^2,\ \ a < \rho < b,\ \ 0 < \varphi \le 2\pi,$ $U(a,\varphi) = 0,\ \ U_\rho(b,\varphi) = 0,\ \ 0 < \varphi \le 2\pi.$
27	У напівкруглій мембрані радіуса $R = 1$ прямолінійний край теплоізольований, а на півколі температура змінюється згідно з законом $A\cos^2\varphi\ \ (A = const)$. Знайти стаціонарний розподіл температури, якщо в мембрані виділяється тепло з інтенсивністю $q = const$.	$\Delta U = 0,\ \ 0 < x < +\infty,\ \ 0 < y < 4,$ $U_y(x,0) - hU(x,0) = 0,\ \ U(x,4) = 0,$ $0 \le x < +\infty,$ $U(0,y) = y^2(4-y),\ \ U(+\infty,y) = 0,$ $0 \le y \le 4\ \ (h = const > 0).$
28	Знайти стаціонарний розподіл температури в круглій пластинці радіуса R, якщо на краї пластинки проходить теплообмін по закону Ньютона з навколишнім середовищем, температура якого описується функцією $h^{-1}(A + B\sin\varphi + C\cos 2\varphi)$, де $h > 0$ – коефіцієнт теплообміну; A, B, C – сталі.	$\Delta U = 16e^{-2x},\ \ 0 < x, y < 1,$ $U_y(x,0) = 0,\ \ U(x,1) = 0,\ \ 0 \le x \le 1,$ $U_x(0,y) = 0,\ \ U(1,y) = 0,\ \ 0 \le y \le 1.$
29	Визначити стаціонарний розподіл температури в однорідній пластинці, яка має форму кругового сектора $0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, якщо прямолінійні сторони пластинки підтримуються при нульовій температурі, а на дузі проходить тепловіддача в навколишнє середовище температури $T_0 \sin 6\varphi\ \ (T_0 = const)$ по закону Ньютона.	$\Delta U = \frac{A}{\pi l} x(\pi - x),\ \ 0 < x < \pi,\ \ 0 < y < l,$ $U(x,0) = 0,\ \ U_y(x,l) = 0,\ \ 0 \le x \le \pi,$ $U(0,y) = 0,\ \ U(\pi,y) = 0,\ \ 0 \le y \le l.$
30	Визначити форму прогину однорідної прямокутної мембрани $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b$, до якої прикладений нормальний тиск $P = const$ на одиницю площі, якщо сторони мембрани $x = 0$ та $x = a$ вільні, а сторони $y = 0$ та $y = b$ пружно закріплені.	$\Delta U = 0,\ \ R < \rho < +\infty,\ \ 0 < \varphi < 2\pi,$ $U_\rho(R,\varphi) + hU(R,\varphi) = T_0\cos^3 2\varphi,$ $0 < \varphi \le 2\pi\ \ (T_0 = const).$

ЛІТЕРАТУРА

1. *Перестюк М.О., Маринець В.В.* Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2001. – 334 с.
2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
3. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Физматгиз, 1988. – 512 с.
4. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.
5. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.
6. *Бицадзе А.В., Калиниченко Б.Ф.* Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1977. – 224 с.
7. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1980. – 668 с.
8. *Комеч А.И.* Практическое решение уравнений математической физики. – М.: МГУ, 1986. – 160 с.
9. *Лебедев Н.Н., Скальская И.П., Уфлянд Я.С.* Сборник задач по математической физике. – М.: Гостехиздат, 1955. – 420 с.
10. *Смирнов М.М.* Задачи по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1968. – 112 с.