МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАРИНЕЦЬ В.В., РЕГО В.Л.

РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

(МЕТОДИЧНА РОЗРОБКА З ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ)

ЧАСТИНА І

Класифікація диференціальних рівнянь

з частинними похідними другого порядку.

Рівняння гіперболічного типу.

УЖГОРОД 2006

Дана методична розробка складена у відповідності до затвердженої Навчально-методичним управлінням по вищій освіті 23 січня 1985 року програми (індекс УМУ-20/190) дисципліни “Рівняння математичної фізики” для студентів державних університетів зі спеціальності 0101 – математика та 0102 – прикладна математика.

Основна мета посібника – допомогти студенту навчитися розв’язувати задачі по двох розділах вказаної дисципліни:

а) класифікація та зведення до канонічного вигляду диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку;

б) рівняння гіперболічного типу.

В посібнику викладені необхідні короткі теоретичні відомості з даних розділів, розв’язані типові задачі, складені завдання для аудиторної та самостійної роботи. На початку кожної теми наводиться перелік питань, які студент повинен вивчити, і дається посилання на літературу зі вказівкою параґрафів та сторінок.

ТЕМА І
КЛАСИФІКАЦІЯ ТА ЗВЕДЕННЯ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Вивчити*:

1. Основні поняття та визначення теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними (ДРЧП).
2. Класифікація ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними.
3. Зведення до канонічного вигляду ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними.
4. Канонічні форми лінійних ДРЧП другого порядку зі сталими коефіцієнтами.
5. Класифікація та зведення до канонічного вигляду ДРЧП другого порядку з багатьма незалежними змінними.

Розв'язати приклади: №№ 1-6 згідно [4] і №№ 3, 12-15, 101-103 згідно [5], або п.1: №№ 1, 3, 10, п.2: №№ 1-6, 11-15, 19-22 згідно [6], с.24-25.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1. Основні поняття та визначення теорії ДРЧП

Означення 1. Співвідношення між незалежними змінними $x_1, x_2, ..., x_n$, невідомою функцією $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ та її частинними похідними називається ***диференціальним рівнянням з частинними похідними*** (ДРЧП).

Означення 2. ДРЧП називається ***рівнянням m-го порядку***, якщо воно містить хоча б одну частинну похідну m-го порядку і не містить похідних вищих порядків.

У загальному випадку ДРЧП m-го порядку має вигляд

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, ..., u_{x_n}, ..., u_{x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n}}\right) = 0, \tag{1}$$

де $\sum_{i=1}^{n} k_i = m$, F – задана функція своїх арґументів, а

$$u_{x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n}} = \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} ... \partial x_n^{k_n}}.$$

*[1], розділ I, §§1-6; [2], вступ, розділ II, §§1-3, стор. 10-12б 29-40; [3], розділ I, §1, стор. 11-22; [6], розділ I, §§1.1-1.5, стор. 5-23.

Означення 3. Всяка m разів неперервно диференційовна в області задання рівняння (1) функція $u(x_1,x_2,...,x_n)$, яка, будучи підставлена в дане рівняння замість невідомої функції та її частинних похідних, перетворює його в тотожність, називається ***розв'язком*** ДРЧП (1).

Означення 4. ДРЧП називається ***лінійним***, якщо воно лінійне відносно невідомої функції та всіх її частинних похідних.

Лінійне ДРЧП другого порядку запишеться у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x_1,x_2,...,x_n)u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x_1,x_2,...,x_n)u_{x_i}+c(x_1,x_2,...,x_n)u=f(x_1,x_2,...,x_n). \quad (2)$$

Рівняння (2) називається ***лінійним однорідним***, якщо $f(x_1,x_2,...,x_n)\equiv 0$, і ***лінійним неоднорідним*** у протилежному випадку. Якщо всі коефіцієнти a_{ij}, b_i, c є сталими, то ДРЧП (2) називається ***лінійним зі сталими коефіцієнтами***.

Означення 5. ДРЧП називається ***квазілінійним***, якщо воно є лінійним відносно старших похідних.

Квазілінійне ДРЧП другого порядку має вигляд

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(x_1,x_2,...,x_n,u,u_{x_1},u_{x_2},...,u_{x_n}\right)u_{x_ix_j}=f(x_1,x_2,...,x_n,u,u_{x_1},u_{x_2},...,u_{x_n}).$$

2. Класифікація та зведення до канонічного вигляду ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними

Розглянемо [2,6] квазілінійне ДРЧП другого порядку вигляду

$$a_{11}(x,y)u_{xx}+2a_{12}(x,y)u_{xy}+a_{22}(x,y)u_{yy}=f(x,y,u,u_x,u_y), \quad (3)$$

де $a_{ij}(x,y)$, $i,j=1,2,$ неперервні функції в деякій області **G**.

Здійснимо в рівнянні (3) заміну незалежних змінних за формулами

$$\xi=\varphi(x,y), \quad \eta=\psi(x,y), \quad (4)$$

які встановлюють взаємно однозначну відповідність між точками (ξ,η) і (x,y) відповідних областей, тобто з (4) x і y визначаються як однозначні функції незалежних змінних ξ та η : $x=\Phi(\xi,\eta)$, $y=\Psi(\xi,\eta)$. Вважатимемо, що функції $\varphi(x,y)$ та $\psi(x,y)$ при $(x,y)\in\mathbf{G}$ є неперервними разом з частинними похідними до другого порядку включно.

Введемо позначення: $u\left(\Phi(\xi,\eta),\Psi(\xi,\eta)\right)=U(\xi,\eta)$. Тоді

$$\begin{aligned}
&u_x=\xi_xU_\xi+\eta_xU_\eta, \quad u_y=\xi_yU_\xi+\eta_yU_\eta,\\
&u_{xx}=\xi_x^2U_{\xi\xi}+2\xi_x\eta_xU_{\xi\eta}+\eta_x^2U_{\eta\eta}+\xi_{xx}U_\xi+\eta_{xx}U_\eta,\\
&u_{yy}=\xi_y^2U_{\xi\xi}+2\xi_y\eta_yU_{\xi\eta}+\eta_y^2U_{\eta\eta}+\xi_{yy}U_\xi+\eta_{yy}U_\eta,\\
&u_{xy}=\xi_x\xi_yU_{\xi\xi}+(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)U_{\xi\eta}+\eta_x\eta_yU_{\eta\eta}+\xi_{xy}U_\xi+\eta_{xy}U_\eta.
\end{aligned} \quad (5)$$

Підклавши (5) у (2), одержимо нове рівняння вигляду

$$\alpha_{11}(\xi,\eta)U_{\xi\xi} + 2\alpha_{12}(\xi,\eta)U_{\xi\eta} + \alpha_{22}(\xi,\eta)U_{\eta\eta} = F(\xi,\eta,U,U_{\xi},U_{\eta}), \qquad (6)$$

де

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \xi_x^2 a_{11} + 2\xi_x\xi_y a_{12} + \xi_y^2 a_{22}, \\ \alpha_{22} &= \eta_x^2 a_{11} + 2\eta_x\eta_y a_{12} + \eta_y^2 a_{22}, \\ \alpha_{12} &= \xi_x\eta_x a_{11} + (\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x)a_{12} + \xi_y\eta_y a_{22}. \end{aligned} \qquad (7)$$

Зауважимо, що часто формули (5) записують, замінюючи $U(\xi,\eta)$ на $u(\xi,\eta)$. Однак при цьому символи u_ξ і u_η в правій частині рівностей (5) слід розуміти як похідні вздовж ліній відповідно $\eta = const$ і $\xi = const$:

$$u_\xi = \frac{d}{d\xi}\left(u\big|_{\eta=const}\right), \quad u_\eta = \frac{d}{d\eta}\left(u\big|_{\xi=const}\right),$$

тобто як U_ξ і U_η, а не як частинні похідні по ξ або по η від функції $u(x,y)$, оскільки вирази u_ξ і u_η не мають змісту, поки не вибрана друга координата η або ξ.

Із (7) очевидно: якщо функція $z = \varphi(x,y)$ є деяким частинним розв'язком рівняння

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_x z_y + a_{22}z_y^2 = 0, \qquad (8)$$

то в (6) коефіцієнт $\alpha_{11} = 0$.

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}(dx)^2 = 0, \qquad (9)$$

яке називається ***характеристичним*** для рівняння (3), а його інтеґрали – ***характеристиками***.

З курсу звичайних диференціальних рівнянь відомо: якщо $z = \varphi(x,y)$ – деякий розв'язок рівняння (8), тоді співвідношення $C = \varphi(x,y)$ є загальним інтеґралом рівняння (9). Має силу і обернене твердження.

Нехай $a_{11} \neq 0$ $(a_{22} \neq 0)$. Тоді із (9) маємо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}}, \quad \left(\frac{dx}{dy} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{22}}\right), \qquad (10)$$

де $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$.

Означення. Рівняння (3) в області $\mathbf{D} \subset \mathbf{G}$ називається рівнянням

а) ***гіперболічного типу***, якщо дискримінант $\Delta > 0$ для всіх $(x,y) \in \mathbf{D}$;

б) ***параболічного типу***, якщо $\Delta = 0$ при $(x,y) \in \mathbf{D}$;

в) ***еліптичного типу***, якщо $\Delta < 0$ при $(x,y) \in \mathbf{D}$.

Безпосередньою перевіркою можна переконатися в справедливості тотожності

$$\alpha_{12}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22} = \left(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}\right)\Im^2,$$

де якобіан $\Im \equiv \dfrac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}.$

Згідно наших припущень $\Im \neq 0$ в області **G**, отже, тип ДРЧП (3) є інваріант відносно перетворення незалежних змінних (4).

<u>Рівняння гіперболічного типу.</u> В цьому випадку $\Delta > 0$ при $(x,y) \in \mathrm{D}$, а отже, із (10) одержуємо дві дійсні різні сім'ї характеристик $C_1 = \varphi(x,y)$, $C_2 = \psi(x,y)$. Легко показати [3], що при цьому $\varphi(x,y)$ і $\psi(x,y)$ є незалежними, тобто $\Im \neq 0$ при $(x,y) \in \mathbf{D}$. Покладемо $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$. Тоді в рівнянні (6) $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$, тобто матимемо

$$U_{\xi\eta} = \frac{F\left(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta\right)}{2\alpha_{12}}, \quad \alpha_{12} \neq 0. \tag{11}$$

Рівняння (11) є першою канонічною формою рівнянь гіперболічного типу. Покладаючи в (11) $\alpha = \xi + \eta$, $\beta = \xi - \eta$, одержимо другу канонічну форму рівнянь гіперболічного типу:

$$\overline{U}_{\alpha\alpha} - \overline{U}_{\beta\beta} = F_1\left(\alpha,\beta,\overline{U},\overline{U}_\alpha,\overline{U}_\beta\right), \quad U\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \overline{U}(\alpha,\beta).$$

<u>Рівняння параболічного типу.</u> Для ДРЧП параболічного типу $\Delta = 0$ при $(x,y) \in \mathbf{D}$, і рівняння (9) має один загальний інтеграл $C = \varphi(x,y)$. Покладемо $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$, де $\eta(x,y)$ – довільна двічі неперервно диференційовна функція, незалежна від $\varphi(x,y)$. Тоді згідно (7)

$$\alpha_{11} = \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)^2 \equiv 0,$$

а отже

$$\alpha_{12} = \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)\left(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y\right) \equiv 0.$$

Таким чином, із (6) одержуємо:

$$U_{\eta\eta} = \frac{F\left(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta\right)}{\alpha_{22}}, \quad \alpha_{22} \neq 0. \tag{12}$$

Рівняння (12) є канонічною формою рівнянь параболічного типу.

<u>Рівняння еліптичного типу.</u> Для ДРЧП еліптичного типу $\Delta < 0$ при $(x,y) \in \mathbf{D}$, і відповідне характеристичне рівняння (9) має дві комплексно-спряжені сім'ї характеристик $C_1 = \rho(x,y) + i\sigma(x,y)$, $C_2 = \rho(x,y) - i\sigma(x,y)$, причому [6] функції $\rho(x,y)$ і $\sigma(x,y)$ при $(x,y) \in \mathbf{D}$ є незалежними. Введемо нові незалежні змінні (4) наступним чином: $\xi = \rho(x,y)$, $\eta = \sigma(x,y)$. В результаті такої підстановки одержимо: $\alpha_{11}=\alpha_{22}$ і $\alpha_{12}=0$. Таким чином, ДРЧП (6) запишеться у вигляді

$$U_{\xi\xi}+U_{\eta\eta}=\frac{F(\xi,\eta,U,U_{\xi},U_{\eta})}{\alpha_{11}},\quad \alpha_{11}\neq 0. \tag{13}$$

Рівняння (13) є канонічною формою рівнянь еліптичного типу.

Зауваження 1. ДРЧП (3) в різних областях площини xOy може належати до різних типів.

Зауваження 2. Якщо в рівнянні (8) $a_{11}\neq 0$ $(a_{22}\neq 0)$, то його можна записати у вигляді

$$\left[a_{11}z_x+\left(a_{12}+\sqrt{\Delta}\right)z_y\right]\cdot\left[a_{11}z_x+\left(a_{12}-\sqrt{\Delta}\right)z_y\right]=0,$$
$$\left(\ \left[a_{22}z_y+\left(a_{12}+\sqrt{\Delta}\right)z_x\right]\cdot\left[a_{22}z_y+\left(a_{12}-\sqrt{\Delta}\right)z_x\right]=0\ \right),$$

тобто

$$a_{11}z_x+\left(a_{12}+\sqrt{\Delta}\right)z_y=0,\quad a_{11}z_x+\left(a_{12}-\sqrt{\Delta}\right)z_y=0,$$
$$\left(a_{22}z_y+\left(a_{12}+\sqrt{\Delta}\right)z_x=0,\quad a_{22}z_y+\left(a_{12}-\sqrt{\Delta}\right)z_x=0\right).$$

У процесі інтеґрування одержаних лінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку приходимо до рівнянь (10).

Зауваження 3. Якщо розглядати лінійні ДРЧП другого порядку зі сталими коефіцієнтами, тоді канонічні форми будуть також лінійними рівняннями зі сталими коефіцієнтами. В цьому випадку одержані рівняння вдається спростити шляхом введення нової невідомої функції $V(\xi,\eta)$ згідно формули

$$U(\xi,\eta)=e^{\lambda\xi+\mu\eta}\cdot V(\xi,\eta),$$

де λ, μ – сталі, які вибираються таким чином, щоб коефіцієнти при V_{ξ} і V_{η} (у випадку рівнянь гіперболічного та еліптичного типів) або при V_{η} і V (у випадку рівнянь параболічного типу) перетворилися в нуль. Таким чином, у випадку лінійних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами одержуємо наступні канонічні форми:

$$V_{\xi\xi}+V_{\eta\eta}+\gamma V=g(\xi,\eta)\ \text{– еліптичний тип;}$$
$$V_{\eta\eta}+b_1V_{\xi}=g(\xi,\eta)\ \text{– параболічний тип;}$$
$$\left.\begin{array}{l} V_{\xi\eta}+\gamma V=g(\xi,\eta)\\ V_{\xi\xi}-V_{\eta\eta}+\gamma V=g(\xi,\eta)\end{array}\right\}\ \text{– гіперболічний тип.}$$

ПРИКЛАДИ. Дати повне визначення, вказати тип та звести до канонічного вигляду наступні ДРЧП:

1. $u_{xx}-yu_{yy}+u(x,y)=0,\quad y\neq 0.$ (14)

Розв'язання. Задане рівняння є лінійним однорідним ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними зі змінними коефіцієнтами.

Для визначення типу ДРЧП складемо дискримінант

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = y.$$

а) Нехай $y > 0$. Тоді рівняння (14) є рівнянням гіперболічного типу. Із відповідного характеристичного рівняння

$$(dy)^2 - y(dx)^2 = 0$$

знаходимо дві дійсні різні сім'ї характеристик

$$C_1 = x - 2\sqrt{y}, \quad C_2 = x + 2\sqrt{y}.$$

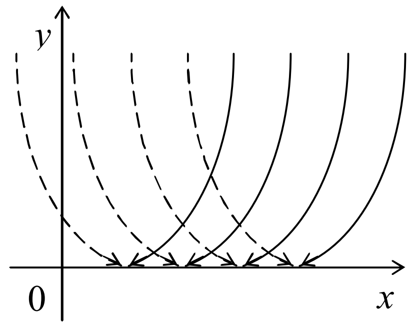


Рис. 1

Характеристиками є праві і ліві вітки сім'ї парабол $y = 0{,}25(x - C)^2$ (рис. 1). Вершини парабол, які лежать на осі Ox, не належать характеристикам, тому що в цих точках $\Delta = 0$ ($y = 0$ – лінія параболічності).

Вводимо заміну незалежних змінних

$$\xi = x - 2\sqrt{y}, \quad \eta = x + 2\sqrt{y}.$$

Тоді

$$u_x = U_\xi + U_\eta, \quad u_y = \frac{1}{\sqrt{y}}\left(U_\eta - U_\xi\right),$$

$$u_{xx} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}, \quad u_{yy} = y^{-1}\left(U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}\right) - \left(2y^{3/2}\right)^{-1}\left(U_\eta - U_\xi\right).$$

Підклавши знайдені похідні в рівняння (14), одержимо:

$$U_{\xi\eta} = 0{,}5(\eta - \xi)^{-1}\left(U_\xi - U_\eta\right) - 0{,}25U(\xi, \eta). \qquad (15)$$

Зведемо рівняння (14) до другої канонічної форми в розглядуваній області. Для цього вводимо нові незалежні змінні

$$\alpha = \xi + \eta, \quad \beta = \xi - \eta.$$

Тоді

$$U_\xi = \overline{U}_\alpha + \overline{U}_\beta, \quad U_\eta = \overline{U}_\alpha - \overline{U}_\beta, \quad U_{\xi\eta} = \overline{U}_{\alpha\alpha} - \overline{U}_{\beta\beta},$$

а отже, із (15) матимемо

$$\overline{U}_{\alpha\alpha} - \overline{U}_{\beta\beta} = -\beta^{-1}\overline{U}_\beta - 0{,}25\overline{U}(\alpha, \beta).$$

б) В області $y < 0$ ДРЧП (14) є рівнянням еліптичного типу. Маємо дві комплексно-спряжені сім'ї характеристик: $C_3 = x - 2i\sqrt{-y}$, $C_4 = x + 2i\sqrt{-y}$. Покладемо $\xi = x$, $\eta = 2\sqrt{-y}$. Тоді

$$u_x = U_\xi, \quad u_y = -(-y)^{-1/2}U_\eta, \quad u_{xx} = U_{\xi\xi}, \quad u_{yy} = -y^{-1}U_{\eta\eta} - \left[2(-y)^{3/2}\right]^{-1}U_\eta.$$

Підклавши знайдені похідні в рівняння (14), одержимо

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = -\eta^{-1}U_\eta - U(\xi, \eta).$$

2. $e^{2x}u_{xx} + 2e^{x+y}u_{xy} + e^{2y}u_{yy} + \ln\left[u^2(x,y)+1\right] = 0.$ (16)

Розв'язання. Рівняння (16) є квазілінійним ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними. Визначимо його тип:

$$\Delta = e^{2(x+y)} - e^{2x}\cdot e^{2y} = 0.$$

Отже, задане рівняння у всій дійсній площині є рівнянням параболічного типу. Знаходимо його єдину сім'ю характеристик:

$$y'(x) = e^{y-x}, \quad C = e^{-x} - e^{-y}.$$

Покладемо $\xi = e^{-x} - e^{-y}$, $\eta = x$. Очевидно, що якобіан такого перетворення $\Im \neq 0$. Тоді

$$u_x = -e^{-x}U_\xi + U_\eta, \quad u_y = e^{-y}U_\xi, \quad u_{yy} = e^{-2y}U_{\xi\xi} - e^{-y}U_\xi,$$

$$u_{xx} = e^{-2x}U_{\xi\xi} - 2e^{-x}U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta} + e^{-x}U_\xi, \quad u_{xy} = -e^{-x-y}U_{\xi\xi} + e^{-y}U_{\xi\eta}.$$

Підклавши знайдені похідні в рівняння (16), одержимо:

$$U_{\eta\eta} - \xi\left(1-\xi e^{\eta}\right)^{-1}U_\xi + e^{-2\eta}\ln\left[U^2(\xi,\eta)+1\right] = 0.$$

3. $u_{xx} + 2u_{xy} + 4u_{yy} + 2u_x + 3u_y = 3\sin\sqrt{3}x.$ (17)

Розв'язання. Рівняння (17) є лінійним неоднорідним ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними зі сталими коефіцієнтами.

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 1 - 4 = -3 < 0.$$

Отже, (17) є рівнянням еліптичного типу у всій дійсній площині. Маємо:

$$y'(x) = 1 \pm \sqrt{3}i, \quad C_1 = y - x + \sqrt{3}ix, \quad C_2 = y - x - \sqrt{3}ix.$$

Перетворення незалежних змінних

$$\xi = y - x, \quad \eta = \sqrt{3}x$$

дає

$$u_x = -U_\xi + \sqrt{3}U_\eta, \quad u_y = U_\xi, \quad u_{yy} = U_{\xi\xi},$$

$$u_{xx} = U_{\xi\xi} - 2\sqrt{3}U_{\xi\eta} + 3U_{\eta\eta}, \quad u_{xy} = -U_{\xi\xi} + \sqrt{3}U_{\xi\eta},$$

а отже, рівняння (17) зведеться до вигляду

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + \tfrac{1}{3}U_\xi + \tfrac{2}{\sqrt{3}}U_\eta = \sin\eta. \tag{18}$$

Для спрощення рівняння (18) вводимо нову невідому функцію $V(\xi,\eta)$:

$$U(\xi,\eta) = e^{\lambda\xi+\mu\eta}\cdot V(\xi,\eta),$$

де λ і μ – довільні сталі. Маємо:

$$U_\xi = e^{\lambda\xi+\mu\eta}\left(V_\xi + \lambda V\right), \quad U_\eta = e^{\lambda\xi+\mu\eta}\left(V_\eta + \mu V\right),$$

$$U_{\xi\xi} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}\left(V_{\xi\xi} + 2\lambda V_\xi + \lambda^2 V\right), \quad U_{\eta\eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}\left(V_{\eta\eta} + 2\mu V_\eta + \mu^2 V\right).$$

Після підстановки знайдених похідних у рівняння (18) одержимо:

$$V_{\xi\xi}+V_{\eta\eta}+\left(2\lambda+\tfrac{1}{3}\right)V_{\xi}+\left(2\mu+\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right)V_{\eta}+\left(\lambda^2+\mu^2+\tfrac{1}{3}\lambda+\tfrac{2}{\sqrt{3}}\mu\right)V=e^{-\lambda\xi-\mu\eta}\sin\eta. \quad (19)$$

Вибираємо сталі λ і μ таким чином, щоб $2\lambda+\frac{1}{3}=0,\ 2\mu+\frac{2}{\sqrt{3}}=0.$ Тоді (19) запишеться у вигляді

$$V_{\xi\xi}+V_{\eta\eta}=\tfrac{13}{36}V(\xi,\eta)+e^{\frac{1}{6}\xi+\frac{1}{\sqrt{3}}\eta}\sin\eta.$$

3. Класифікація та зведення до канонічного вигляду ДРЧП другого порядку з багатьма незалежними змінними

Нехай задане квазілінійне ДРЧП вигляду

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}u_{x_i x_j}=f(x_1,x_2,...,x_n,u,u_{x_1},u_{x_2},...,u_{x_n}), \quad (20)$$

де всі коефіцієнти a_{ij} є сталими.

Введемо [6] нові незалежні змінні $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ за допомогою неособливого лінійного перетворення

$$\xi_k=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ki}x_i, \quad k=\overline{1,n}. \quad (21)$$

Тоді ДРЧП (20) зведеться до рівняння

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\overline{a}_{kp}U_{\xi_k\xi_p}(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)=F(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,U,U_{\xi_1},U_{\xi_2},...,U_{\xi_n}), \quad (22)$$

де

$$\overline{a}_{kp}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\alpha_{ki}\alpha_{pj}. \quad (23)$$

Формули (23) перетворення коефіцієнтів при других похідних від функції u при заміні незалежних змінних згідно формул (21) співпадають з формулами перетворення коефіцієнтів квадратичної форми

$$\Omega(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i x_j, \quad (24)$$

якщо в ній здійснити лінійне перетворення

$$x_i=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}\eta_k, \quad i=\overline{1,n}. \quad (25)$$

Вираз (24) називається ***характеристичною квадратичною формою*** для ДРЧП (20). Відповідним вибором коефіцієнтів α_{ki} в (25) квадратичну форму (24) можна звести до канонічного вигляду

$$\overline{\Omega}(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\eta_k^2, \quad (26)$$

де коефіцієнти λ_k рівні ± 1 або нулеві, тобто

$$\bar{a}_{kp} = \begin{cases} 0, & k \neq p, \\ \lambda_k, & k = p. \end{cases}$$

Таким чином, якщо в (21) коефіцієнти α_{ki} є такими, що неособливе перетворення (25) зводить (24) до канонічної форми (27), то рівняння (22) набуде вигляду

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k U_{\xi_k \xi_k}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, U, U_{\xi_1}, U_{\xi_2}, \ldots, U_{\xi_n}). \qquad (28)$$

Згідно закону інерції для квадратичних форм число додатніх, рівних нулеві і від'ємних коефіцієнтів λ_k інваріантне відносно неособливого лінійного перетворення, яке зводить квадратичну форму до канонічного вигляду. У зв'язку з цим, ДРЧП (20) називають рівнянням

а) ***еліптичного типу***, якщо в (28) $\lambda_k = 1$ для всіх $k = \overline{1, n}$;

б) ***параболічного типу***, якщо хоча б один із коефіцієнтів λ_k в (28) рівний нулеві;

в) ***гіперболічного типу***, якщо в (28) всі λ_k відмінні від нуля, але серед них є один коефіцієнт із знаком, протилежним знакам інших коефіцієнтів;

г) ***ультрагіперболічного типу***, якщо в (28) всі λ_k відмінні від нуля, але серед них $r > 1$ коефіцієнтів є додатніми, а $n - r > 1$ – від'ємними.

На практиці тип рівняння (20) можна визначити вже з канонічного вигляду характеристичної квадратичної форми, поскільки коефіцієнти λ_k в (28) і (26) співпадають.

Зауваження 1. Якщо в рівнянні (20) $a_{ij} = a_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то класифікацію та зведення до канонічного вигляду таких рівнянь здійснюють в точці розглядуваної області.

Зауваження 2. Якщо рівняння (20) лінійне зі сталими коефіцієнтами, то рівняння (28) також буде лінійним зі сталими коефіцієнтами, тобто запишеться у вигляді

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\lambda_k U_{\xi_k \xi_k} + b_k U_{\xi_k} \right) + cU = f_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n). \qquad (29)$$

Нехай у (29) всі $\lambda_k \neq 0$. Тоді після введення нової невідомої функції $V(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ згідно формули

$$U(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = V(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) e^{-0,5 \sum_{k=1}^{n} b_k \lambda_k^{-1} \xi_k},$$

рівняння (29) зведеться до простішого вигляду

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k V_{\xi_k \xi_k} + c_1 V(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = f_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n).$$

ПРИКЛАД. Дати повне визначення, вказати тип та звести до канонічного вигляду ДРЧП

$$u_{x_1x_3} - 5u_{x_2x_3} + u_{x_2x_4} - 2{,}5u_{x_2} = 0, \quad u = u(x_1, x_2, x_3, x_4). \tag{30}$$

Розв'язання. Задане рівняння є лінійним однорідним ДРЧП другого порядку з чотирма незалежними змінними зі сталими коефіцієнтами. Щоб звести його до канонічного вигляду, складаємо характеристичну квадратичну форму

$$\Omega(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_3 - 5x_2x_3 + x_2x_4.$$

Шляхом виділення повних квадратів послідовно відносно кожної з незалежних змінних останній вираз можна подати у вигляді

$$\Omega(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(x_1 + \tfrac{1}{4}x_3\right)^2 - \left(x_1 - \tfrac{1}{4}x_3\right)^2 + \left(x_2 - \tfrac{5}{4}x_3 + \tfrac{1}{4}x_4\right)^2 - \left(x_2 + \tfrac{5}{4}x_3 - \tfrac{1}{4}x_4\right)^2,$$

тобто канонічний вигляд характеристичної квадратичної форми є

$$\overline{\Omega}(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = \eta_1^2 - \eta_2^2 + \eta_3^2 - \eta_4^2, \tag{31}$$

де

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0{,}25 & 0 \\ 1 & 0 & -0{,}25 & 0 \\ 0 & 1 & -1{,}25 & 0{,}25 \\ 0 & 1 & 1{,}25 & -0{,}25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Коефіцієнти при квадратах у виразі (31) усі відмінні від нуля, причому два з них додатні, а інші два – від'ємні. Тому згідно наведеної вище класифікації ДРЧП (30) є рівнянням ультрагіперболічного типу.

Позначимо через $\boldsymbol{A}$ матрицю перетворення (32). Тоді матриця $\boldsymbol{A}^{-1}$ задаватиме обернене перетворення (25), а шукане перетворення (21), яке зводить розглядуване ДРЧП до канонічного вигляду, буде визначатися транспонованою матрицею $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$. Отже, вводимо перетворення незалежних змінних

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 2 & 10 \\ 0{,}5 & 0 & -2 & -10 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 2 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$u_{x_1} = 0{,}5\left(U_{\xi_1} + U_{\xi_2}\right), \quad u_{x_2} = 0{,}5\left(U_{\xi_3} + U_{\xi_4}\right), \quad u_{x_2x_3} = U_{\xi_1\xi_3} + U_{\xi_1\xi_4} - U_{\xi_2\xi_3} - U_{\xi_2\xi_4},$$

$$u_{x_1x_3} = U_{\xi_1\xi_1} - U_{\xi_2\xi_2}, \quad u_{x_2x_4} = U_{\xi_3\xi_3} - U_{\xi_4\xi_4} + 5\left(U_{\xi_1\xi_3} + U_{\xi_1\xi_4} - U_{\xi_2\xi_3} - U_{\xi_2\xi_4}\right).$$

Підклавши знайдені похідні в рівняння (30), одержимо:

$$U_{\xi_1\xi_1} - U_{\xi_2\xi_2} + U_{\xi_3\xi_3} - U_{\xi_4\xi_4} - 1{,}25\left(U_{\xi_3} + U_{\xi_4}\right) = 0. \tag{33}$$

Зауваження. Для зведення квадратичної форми до канонічного вигляду можна застосувати також метод Лаґранжа (див. [9], с. 157-177).

Спростимо рівняння (33). Для цього введемо нову невідому функцію $V(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$ згідно формули

$$U(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)=V(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)e^{\frac{5}{8}(\xi_3-\xi_4)}.$$

Тоді

$$U_{\xi_3}=e^{\frac{5}{8}(\xi_3-\xi_4)}\cdot\left(V_{\xi_3}+\tfrac{5}{8}V\right),\quad U_{\xi_4}=e^{\frac{5}{8}(\xi_3-\xi_4)}\cdot\left(V_{\xi_4}-\tfrac{5}{8}V\right),\quad U_{\xi_1\xi_1}=e^{\frac{5}{8}(\xi_3-\xi_4)}\cdot V_{\xi_1\xi_1},$$

$$U_{\xi_2\xi_2}=e^{\frac{5}{8}(\xi_3-\xi_4)}\cdot V_{\xi_2\xi_2},\quad U_{\xi_3\xi_3}=e^{\frac{5}{8}(\xi_3-\xi_4)}\cdot\left(V_{\xi_3\xi_3}+\tfrac{5}{4}V_{\xi_3}+\tfrac{25}{64}V\right),$$

$$U_{\xi_4\xi_4}=e^{\frac{5}{8}(\xi_3-\xi_4)}\cdot\left(V_{\xi_4\xi_4}-\tfrac{5}{4}V_{\xi_4}+\tfrac{25}{64}V\right).$$

Після підкладання в (33) дістанемо остаточно

$$V_{\xi_1\xi_1}-V_{\xi_2\xi_2}+V_{\xi_3\xi_3}-V_{\xi_4\xi_4}=0.$$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Дайте визначення ДРЧП, його порядку та розв'язку.

2. Яка ґеометрична інтерпретація диференціального рівняння $F(x,y,u_x,u_y)=0$ та його розв'язку?

3. Які ДРЧП називаються лінійними, однорідними, квазілінійними?

4. За якою ознакою визначається тип квазілінійного диференціального рівняння другого порядку від двох незалежних змінних?

5. Яке квазілінійне ДРЧП другого порядку від двох незалежних змінних називається рівнянням гіперболічного, параболічного, еліптичного типу?

6. Яким чином слід вводити нові незалежні змінні в задане квазілінійне ДРЧП другого порядку від двох незалежних змінних, щоб звести його до канонічного вигляду?

7. Скільки загальних інтеґралів і які має характеристичне рівняння у випадку ДРЧП гіперболічного, параболічного та еліптичного типів? Як вибираються нові незалежні змінні при зведенні їх до канонічного вигляду?

8. Довести, що у випадку ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними гіперболічного (параболічного) типу $\alpha_{12}\neq 0$ ($\alpha_{22}\neq 0$).

9. Показати, що у випадку рівнянь еліптичного типу дійсна і уявна частини загального інтеґралу відповідного характеристичного рівняння є функціями незалежними в розглядуваній області.

10. Яким чином вводиться нова невідома функція для зведення лінійних ДРЧП зі сталими коефіцієнтами до найпростішої канонічної форми?

11. Як зводяться до канонічного вигляду ДРЧП другого порядку з багатьма незалежними змінними ($n\geq 3$)?

12. Дати класифікацію ДРЧП другого порядку з багатьма незалежними змінними ($n\geq 3$).

13. Чому квазілінійні ДРЧП другого порядку з багатьма незалежними змінними ($n \ge 3$) можна звестидо канонічного вигляду тільки в точці?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ

1. З'ясувати, чи є наведені нижче рівності ДРЧП та дати повне їх визначення:

а) $2\left(\sin 2u_{xy}\right)^{-1} \cdot u_{xy^2} - \frac{\partial}{\partial y}\ln\left(\operatorname{tg} u_{xy}\right) + 3xyu(x,y) - 5 = 0$;

б) $u_{x^2y^3} + 4\left(u_{x^3}\right)^{10} \cdot u(x,y) - x^3 y = 0$;

в) $u_{xy^2z} + 3u_{x^3z^2} - xyu_z + 3z = 0, \quad u = u(x,y,z)$;

г) $\operatorname{tg}^2 u_{x^3} - \left(\cos u_{x^3}\right)^{-2} + 5u(x,y) - \operatorname{tg}(xy) + 1 = 0$;

ґ) $\ln\left|u_{x^2z} \cdot u_z\right| - \ln\left|u_{x^2y}\right| + 3u_x - 5z = 0, \quad u = u(x,y,z)$.

2. Дати повне визначення, вказати тип та звести до канонічного вигляду наступні ДРЧП:

а) $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} - 2yu_y = 0, \quad u = u(x,y)$;

б) $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0, \quad u = u(x,y)$;

в) $\sin^2 x u_{xx} - 2y\sin x u_{xy} + y^2u_{yy} = 0, \quad u = u(x,y)$;

г) $y^2u_{xx} + x^2u_{yy} = 0, \quad xy \ne 0, \quad u = u(x,y)$;

ґ) $u_{xx} + \ln\left(x^2 + 2\right)u_{xy} + 3u_x + 4u(x,y) = 0$;

д) $\operatorname{tg} x u_{xx} + \operatorname{ctg} x u_{yy} + 3u_y - u(x,y) + 5x = 0$;

е) $\sin^2 y u_{xx} - 2\sin y u_{xy} + u_{yy} - 5u_y = u(x,y)$;

є) $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} - 3u_x + 2u_y - x = 0, \quad u = u(x,y)$;

ж) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 5u_y = 3u(x,y)$;

з) $u_{xx} + 6u_{xy} - u_x + 7u_y + 3y = 0, \quad u = u(x,y)$;

и) $u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} - 2u_x + 6u_y = 0, \quad u = u(x,y)$;

і) $u_{xx} + 4u_{yy} + 5u_{zz} + 4u_{xy} - 4u_{yz} + 2u_x - u_y + xye^x = 0, \quad u = u(x,y,z)$;

ї) $2u_{xx} + 2u_{yy} - 3u_{zz} - 4u_{xy} + 2u_{yz} - 2u_{xz} = 0, \quad u = u(x,y,z)$;

й) $4u_{xx} + 2u_{yy} - 6u_{zz} + 6u_{xy} + 4u_{yz} + 10u_{xz} + 2u(x,y,z) = 0$;

к) $u_{xx} + 5u_{yy} + 14u_{zz} + 4u_{xy} + 16u_{yz} + 6u_{xz} = 0, \quad u = u(x,y,z)$;

л) $u_{xx} + 4u_{yy} + u_{zz} - 4u_{xy} + 2u_{xz} - 2xyu_x + 3xu(x,y,z) = xz$.

ВІДПОВІДІ

Завдання 2.

а) Лінійне однорідне ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними гіперболічного типу в площині $E_2 = \{(x, y) | x \in (-\infty, +\infty), y \in (-\infty, +\infty)\}$:

$\xi = xy, \quad \eta = x^{-1}y, \quad xy \neq 0, \quad U_{\xi\eta} = -(2\eta)^{-1}U_{\xi}.$

б) Лінійне однорідне ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними гіперболічного типу в площині E_2:

$\xi = x + y - \cos x, \quad \eta = x - y + \cos x, \quad U_{\xi\eta} = 0.$

в) Лінійне однорідне ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними параболічного типу в площині E_2 при $y \sin x \neq 0$:

$\xi = y \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad \eta = y, \quad U_{\eta\eta} - 2\xi\left(\xi^2 + \eta^2\right)^{-1}U_{\xi} = 0.$

г) Лінійне однорідне ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними еліптичного типу в площині E_2 при $xy \neq 0$:

$\xi = x^2, \quad \eta = y^2, \quad U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + (2\xi)^{-1}U_{\xi} + (2\eta)^{-1}U_{\eta} = 0.$

е) Лінійне однорідне ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними параболічного типу в площині E_2:

$\xi = x - \cos y, \quad \eta = y, \quad U_{\eta\eta} = 5U_{\eta} + (5\sin\eta - \cos\eta)U_{\xi} + U(\xi, \eta).$

є) Лінійне неоднорідне ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними зі сталими коефіцієнтами еліптичного типу в площині E_2:

$\xi = y - 2x, \quad \eta = x, \quad U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + 8U_{\xi} - 3U_{\eta} = \eta; \quad U(\xi, \eta) = V(\xi, \eta)e^{-4\xi + 1{,}5\eta},$

$V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} - 18{,}25V = \eta e^{4\xi - 1{,}5\eta}.$

и) Лінійне однорідне ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними зі сталими коефіцієнтами гіперболічного типу в площині E_2:

$\xi = x + y, \quad \eta = 3x + y, \quad U_{\xi\eta} - U_{\xi} = 0; \quad U(\xi, \eta) = V(\xi, \eta)e^{\eta}, \quad V_{\xi\eta} = 0$ – перша,

$\alpha = \xi + \eta, \quad \beta = \xi - \eta, \quad \overline{V}_{\alpha\alpha} - \overline{V}_{\beta\beta} = 0$ – друга канонічна форма.

ї) Лінійне однорідне ДРЧП другого порядку з трьома незалежними змінними зі сталими коефіцієнтами параболічного типу у всьому просторі E_3:

$\xi = -\frac{1}{\sqrt{2}}y, \quad \eta = -\frac{1}{\sqrt{14}}y + \sqrt{\frac{2}{7}}z, \quad \zeta = x + y, \quad U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} = 0.$

й) Лінійне однорідне ДРЧП другого порядку з трьома незалежними змінними зі сталими коефіцієнтами параболічного типу у всьому просторі E_3:

$\xi = 0{,}5x, \quad \eta = -1{,}5x + 2y, \quad \zeta = 4x - 7y + z, \quad U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} + 2U(\xi, \eta, \zeta) = 0.$

к) Лінійне однорідне ДРЧП другого порядку з трьома незалежними змінними зі сталими коефіцієнтами еліптичного типу у всьому просторі E_3:

$\xi = x, \quad \eta = y - 2x, \quad \zeta = z + x - 2y, \quad U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + U_{\zeta\zeta} = 0.$

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ ДО ТЕМИ І

Варі-ант	Завдання №1 З’ясувати, чи є наведені нижче рівності ДРЧП і дати повне їх визначення:	Завдання №2 Дати повне визначення, вказати тип та звести до канонічного вигляду наступні ДРЧП:
1	1. $\cos(u_x + u_y) - \cos u_x \cos u_y + \sin u_x \sin u_y = 0;$ 2. $x^2 u_{xy^2} - u_x^5 - 5u(x, y) = 0.$	1. $y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} + u_x \cdot u(x, y) = 0, \quad xy \neq 0;$ 2. $\operatorname{tg}^2 y u_{xx} + 2 \operatorname{tg} y u_{xy} + u_{yy} + \sec^2 y u_x (x, y) = 0;$ 3. $u_{xx} - xy u_{yy} (x, y) = 6y, \quad xy > 0;$ 4. $4u_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y + 3u(x, y) = 0;$ 5. $u_{xx} + 2u_{xy} - u_{yz} + u_y - u_z (x, y, z) = 0.$
2	1. $\frac{\partial}{\partial x}\left(x u_{y^2 x} - u_y\right) + 5u_{x^2} u(x, y) = 0;$ 2. $\sin^2(u_{x^2} + u_{xy}) + \cos^2(u_{x^2} + u_{xy}) - u(x, y) = 1.$	1. $u_{xx} + y^2 u_{yy} + 0{,}5u_y (x, y) = 8x;$ 2. $\sin^2 y u_{xx} + 2 \sin y u_{xy} + u_{yy} + \cos y u_x (x, y) = 0;$ 3. $\sin^2 x u_{xx} + 2 \cos x u_{xy} - u_{yy} + u_y \cdot u(x, y) = 0;$ 4. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} - 2u_x (x, y) = 0;$ 5. $u_{yy} - u_{xy} + 2u_{xz} - u_x + u_z (x, y, z) = 0.$
3	1. $\log_2 \lvert u_x \cdot u_y \rvert - \log_2 \lvert u_x \rvert - \log_2 \lvert u_y \rvert + 6u(x, y) - 6 = 0$ 2. $xy^2 u_{x^2 y^2} - (x^2 y^2 + 1) u_{x^2}^3 - 2u(x, y) = 0.$	1. $4y^2 u_{xx} - e^{2x} u_{yy} + u^2 (x, y) = 0;$ 2. $u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} + \sin^2 x u_{yy} - \operatorname{ctg} x u_x (x, y) = 0;$ 3. $e^y u_{xx} + e^x u_{yy} - 0{,}5e^y u_x - 0{,}5e^x u_y (x, y) = 5xy;$ 4. $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 6u_y + u(x, y) = 0;$ 5. $u_{zz} + u_{xz} - u_{yz} + u_y - u_x (x, y, z) = 0.$

4	1. $\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 u_{x^2} - 5u\right) + xu_y - u_x(x, y) = 0;$ 2. $\sin\left(u_x + u_{xy}\right) - \sin u_{xy} \cdot \cos u_x -$ $- \cos u_{xy} \sin u_x + 2u(x, y) = 0.$	1. $u_{xx} + e^{2x} u_{yy}(x, y) = 0;$ 2. $u_{xx} + 2\cos xu_{xy} + \cos^2 xu_{yy} - \sin xu_y(x, y) = 3\operatorname{tg} x;$ 3. $u_{xx} - x^2 u_{yy} + \sqrt{\lvert u(x, y)\rvert} = 0;$ 4. $u_{xy} + 2u_{yy} - u_x + u_y + 2u(x, y) = 0;$ 5. $u_{xx} + 2u_{yy} - u_{xz} + u_x - u_z(x, y, z) = 0.$
5	1. $\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{tg} u - u_x \sec^2 u - 3u(x, y) - 2 = 0;$ 2. $u_x u_{xy^2} + xu_{y^3} + 2u_{xy}^3 \cdot u(x, y) -$ $- xye^y = 0.$	1. $e^{2y} u_{xx} - u_{yy} + \sqrt{\lvert u_x(x, y)\rvert} = 0;$ 2. $u_{xx} + \left(1 + x^2\right)^2 u_{yy} - 2x\left(1 + x^2\right)^{-1} u_x(x, y) = 0;$ 3. $\cos^2 xu_{xx} - 2\cos xu_{xy} + u_{yy} + \sin yu_x(x, y) = 0{,}5 \sin y;$ 4. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 4u_x + 5u_y(x, y) = 0;$ 5. $u_{zz} - 2u_{xx} + u_{yz} + u_y - u_z(x, y, z) = 0.$
6	1. $\cos^2 u_{xy} + \sin^2 u_{xy} - 2u_x^2 - 3u_y +$ $+ u(x, y) = 0;$ 2. $\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{tg} u + u_y \csc^2 u + 5u(x, y) - 1 = 0.$	1. $x^2 u_{xx} + 2xu_{xy} + u_{yy} + \ln\lvert u_x(x, y)\rvert = 0;$ 2. $u_{xx} - e^{2x} u_{yy} + 3u_y(x, y) = 0{,}2e^x;$ 3. $u_{xx} + 2\sin xu_{xy} + \left(1 + \sin^2 x\right)u_{yy}(x, y) = 0;$ 4. $5u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + 3u_x(x, y) = 0;$ 5. $u_{yy} - u_{yz} + 2u_{xz} + u_x - u_y(x, y, z) = 0.$
7	1. $\frac{\partial}{\partial x}\left(u_{y^2}^2 - u_y\right) - 2u_x + 2 -$ $- 2u_{y^2} \frac{\partial}{\partial y}\left(u_{xy} - u_x\right) = 0;$	1. $2e^x u_{xy} - u_{yy} + e^{xu} u_x(x, y) = 0;$ 2. $u_{xx} + 2yu_{xy} + \left(1 + y^2\right)u_{yy}(x, y) = 9x;$ 3. $u_{xx} + 2\cos xu_{xy} + \cos^2 xu_{yy}(x, y) = 0;$

	2. $u_x^{-1}u_{xy} - \frac{\partial}{\partial y}\ln\lvert u_x\rvert + 2u(x,y) = 5.$	4. $u_{yy} + u_{xy} + 3u_y - 4u_x(x,y) = 0;$ 5. $2u_{zz} + u_{xz} - u_{yz} - u_x + u(x,y,z) = 0.$
8	1. $\log_3\lvert u_{x^2}u_{y^2}^{-1}\rvert + \log_3\lvert u_{y^2}\rvert -$ $- \log_3\lvert u_{x^2}\rvert - u(x,y) + 5x = 0;$ 2. $2u_{x^2}u_{x^2y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(u_{x^2} - u_y\right)^2 -$ $- 2u_yu_{x^2y} + u_x(x,y) = 0.$	1. $u_{xx} + 2xu_{xy} + \left(1 + x^2\right)u_{yy} + \ln\lvert u(x,y)\rvert = 0;$ 2. $u_{xx} - \cos xu_{xy} - 0{,}25\sin^2 xu_{yy}(x,y) = 5xy;$ 3. $u_{xx} + 4e^xu_{xy} + 4e^{2x}u_{yy} + 5u_x(x,y) = 0;$ 4. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} - 5u_y + u_x(x,y) = 0;$ 5. $u_{yy} - u_{xy} + 2u_{yz} - 3u_x(x,y,z) = 0.$
9	1. $yu_ye^{yu} - \frac{\partial}{\partial y}e^{yu(x,y)} + 3 = 0;$ 2. $e^xu_{xy^2} - \frac{\partial}{\partial y}\left(xu_{x^3}\right) + 4y = 0.$	1. $u_{yy} + 2\left(1 + y^2\right)u_{xy} + 3u_x + 5u_y \cdot u(x,y) = 0;$ 2. $u_{xx} + 6\ln\lvert x\rvert u_{xy} + 9\ln^2\lvert x\rvert u_{yy}(x,y) = 0;$ 3. $u_{yy} - 2\cos yu_{xy} + \left(2 - \sin^2 y\right)u_{xx}(x,y) = \sin y;$ 4. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 4u_y + 5u_x(x,y) = 0;$ 5. $u_{yy} - 3u_{xy} + u_{yz} + u_y - u_z(x,y,z) = 0.$
10	1. $u_{xy^2} + 5u_{xy}^2 \cdot u(x,y) + 6xy = 0;$ 2. $\ln\left\lvert\frac{\partial}{\partial x}e^u\right\rvert - \ln\lvert u_x\rvert - 2u(x,y) + x = 0.$	1. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + \operatorname{tg} u(x,y) = 0;$ 2. $u_{xy} - e^xu_{yy} + 3u_y(x,y) - e^y = 0;$ 3. $u_{xx} + 2\operatorname{tg} xu_{xy} + \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)u_{yy} + u_x(x,y) = 0;$ 4. $u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - u_y + u_x(x,y) = 0;$ 5. $u_{yy} - u_{zz} - 4u_{xy} + u_{yz} + u_z(x,y,z) = 0.$
11	1. $xu_{xy^2} - 5u_{x^2}^2 + xyu(x,y) = \ln\lvert x\rvert;$	1. $u_{xx} + 4e^yu_{xy} + 4e^{2y}u_{yy} + \ln\lvert u(x,y)\rvert = 0;$

	2. $\left(1+\mathrm{tg}^2 u_x\right)u_{xy} - \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{tg}\, u_x +$ $+ u^2(x,y) - x = 0.$	2. $u_{xx} + 2xyu_{xy} + 10x^2y^2u_{yy} + u_x(x,y) = 0, \quad xy \neq 0;$ 3. $0{,}5yu_{xx} - 2u_{xy} + 5u_x - u_y(x,y) - 3xy = 0;$ 4. $u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} - 5u_y + u_x(x,y) = 0;$ 5. $u_{zz} - u_{xz} + 2u_{yz} + u_x - u_y(x,y,z) = 0.$
12	1. $u_{x^2}^2 + u_{y^2}^2 - \left(u_{x^2} - u_{y^2}\right)^2 = 0;$ 2. $\left(\mathrm{tg}\, u_{x^2} + \mathrm{ctg}\, u_{y^2}\right)\cos u_{x^2} \sin u_{y^2} -$ $- \cos\left(u_{x^2} - u_{y^2}\right) = \ln\left(u^2(x,y) + 1\right).$	1. $u_{xx} - 2e^{0{,}5x}u_{xy} - u_y + u_x \cos u(x,y) = 0;$ 2. $u_{xx} + 2\sin xu_{xy} + \left(1+\sin^2 x\right)u_{yy}(x,y) - x\ln\lvert y\rvert = 0;$ 3. $y^2u_{xx} - 4xyu_{xy} + 4x^2u_{yy} + 3u_x(x,y) = 0;$ 4. $u_{xx} + 9u_{yy} - u_y + 2u_x + 5u(x,y) = 0;$ 5. $2u_{yy} - u_{yz} + u_{xy} - 5u_z + u(x,y,z) = 0.$
13	1. $-0{,}5\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{sh}\, 2u_{xy} \cdot u^{-1}_{x^2y} + \mathrm{sh}^2 u_{xy} +$ $+ \mathrm{ch}^2 u_{xy} + \mathrm{th}\, u(x,y) = \sqrt{3}y;$ 2. $2xzu_{xy^2z} + 5u^8_{xz} +$ $+ (y-z)u(x,y,z) = 0.$	1. $u_{yy} + 2\left(1+x^2\right)u_{xy} - u_x + u(x,y) - \sin(xy) = 0;$ 2. $9u_{xx} - 6e^y u_{xy} + e^{2y}u_{yy} + u_x \ln\lvert u(x,y)\rvert = 0;$ 3. $u_{xx} + 4\cos xu_{xy} + \left(1+4\cos^2 x\right)u_{yy} + u_x - u_y(x,y) = 0;$ 4. $u_{xx} - u_{xy} - u_y + 3u_x(x,y) = 0;$ 5. $u_{zz} - 2u_{xz} + u_{xy} - 5u_x + 2u_y(x,y,z) = 0.$
14	1. $-0{,}5\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{sh}\, 2u_{xy} \cdot u^{-1}_{xy^2} + 2\,\mathrm{ch}^2 u_{xy} +$ $+ 3u(x,y) - 2 = 0;$ 2. $u_{x^2y^2} - 5u_{x^6} - 3x^8u(x,y) = 0.$	1. $e^y u_{xx} - u_{xy} + u_y - e^y u_x + \cos u(x,y) = 0;$ 2. $x^2u_{xx} - 2xu_{xy} + u_{yy} + xu_x(x,y) = e^y;$ 3. $\sin^2 xu_{xx} - 2y\sin xu_{xy} + \left(1+y^2\right)u_{yy}(x,y) = 0;$ 4. $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} - 5u_y + u_x(x,y) = 0;$ 5. $u_{yy} - 3u_{xy} + u_{xz} + u_{yz} - u_z + u(x,y,z) = 0.$

15	1. $2\sin^2(0{,}5u_{xx})+\cos u_{xx}+$ $+3yu(x,y)=0;$ 2. $u_{xyz}^2+5xu_z-6u(x,y,z)=0.$	1. $u_{yy}+4e^{2y}u_{xy}+u_y-u_x(x,y)-e^x=0;$ 2. $u_{xx}+y^2u_{yy}+2u_y+3u(x,y)=0; \quad y>0;$ 3. $\sin^2 xu_{xx}-2y\sin xu_{xy}+y^2u_{yy}+\operatorname{tg} u(x,y)=0;$ 4. $u_{xx}+6u_{xy}-5u_y+u_x-4u(x,y)=0;$ 5. $u_{yy}-3u_{zz}+2u_{xz}+u_x-u_y(x,y,z)=0.$
16	1. $e^{u_x}\cdot u_{xy}-\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{u_x}+u^2\right)+$ $+\left(2u_y+5\right)u(x,y)=4x;$ 2. $u_{x^2y^5z}-4u_{x^3y^3}\cdot u_{z^4}+$ $+9zu(x,y,z)=0.$	1. $u_{xx}-2\cos xu_{xy}+\left(3+\sin^2 x\right)u_{y^2}-yu_y(x,y)=0;$ 2. $\left(1+x^2\right)u_{xx}+\left(1+y^2\right)u_{yy}+xu_x+yu_y(x,y)=\sqrt{x^2+y^2};$ 3. $u_{xx}+2e^xu_{xy}+e^{2x}u_{yy}+u_x\ln\lvert u(x,y)\rvert=0;$ 4. $u_{xx}+2u_{xy}+5u_{yy}+3u_y+2u_x(x,y)=0;$ 5. $u_{zz}-5u_{xx}+u_{yz}-u_y+u_x(x,y,z)=0.$
17	1. $u_xu_{x^3y^2}-8u^4_{xy^2}-\ln\lvert u(x,y)\rvert=0;$ 2. $\operatorname{cth}^2 u_{xy}-\operatorname{csch}^2 u_{xy}+u^2(x,y)=2.$	1. $\operatorname{ctg}^2 xu_{xx}-2\operatorname{ctg} xu_{xy}+u_{yy}+\csc^2 xu_y=e^{u(x,y)};$ 2. $4y^2u_{xx}-e^{2x}u_{yy}-4y^2u_x(x,y)-8y^2=0;$ 3. $x^2u_{xx}+u_{yy}+xu_x(x,y)=0;$ 4. $u_{xx}+4u_{xy}+5u_{yy}+2u_y+u_x(x,y)=0;$ 5. $u_{zz}-2u_{xx}+u_{yz}-u_y-u(x,y,z)=0.$
18	1. $u_{y^4z^3}-u^3_{x^4}-5xzu(x,y,z)=0;$ 2. $\operatorname{tg}^2 u_{xy}-\sec^2 u_{xy}+4e^{u(x,y)}=5y.$	1. $xu_{xx}+2\sqrt{xy}u_{xy}+yu_{yy}-u_x\cdot u(x,y)=0, \quad xy\geq 0;$ 2. $\sin^2 yu_{xx}-e^{2x}u_{yy}+3u_x-5u(x,y)=0;$ 3. $u_{xx}-2\cos xu_{xy}+\left(9+\cos^2 x\right)u_{yy}+xu_y(x,y)=\ln(1+y^2);$

		4. $9u_{xx}-6u_{xy}+u_{yy}+2u_x-3u_y(x,y)=0;$ 5. $u_{zz}-3u_{yy}+5u_{yz}-u_{xz}(x,y,z)=0.$
19	1. $\left(1+u_y^2\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\ln\left(1+u_x^2\right)-$ $-2u_x\left(1+u_x^2\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{arctg}u_y+$ $+4yu(x,y)=0.$ 2. $u_{xy^2z}+u^5_{z^2}+zxu_y(x,y,z)=0.$	1. $\operatorname{tg}^2 xu_{xx}-2y\operatorname{tg}xu_{xy}+y^2u_{yy}+\operatorname{tg}^3 xu_x(x,y)-\ln 2=0;$ 2. $y^2u_{xx}+2xyu_{xy}+2x^2u_{yy}+yu_y(x,y)=0;$ 3. $e^{2x}u_{xx}+4e^{x+y}u_{xy}+3e^{2y}u_{yy}(x,y)=\sin u(x,y);$ 4. $u_{xy}+2u_{yy}-3u_x+4u_y(x,y)=0;$ 5. $u_{xz}-u_{zz}+2u_{yz}-u_x+u_z(x,y,z)=0.$
20	1. $u_{xz^4}-e^{u_{y^2}}+u^4_{x^2}=3xyz;$ 2. $\cos\left(u_x+u_y\right)\cos\left(u_x-u_y\right)-$ $-\cos^2 u_y+\sin^2 u_x=3\ln\lvert u(x,y)\rvert.$	1. $e^xu_{xx}+u_{yy}+xu_y+u_x-\operatorname{tg}u(x,y)=0;$ 2. $u_{xx}-2xu_{xy}+x^2u_{yy}-2u_y(x,y)+e^{x+y}=0;$ 3. $u_{xx}+2\sin xu_{xy}+\left(10-\cos^2 x\right)u_{yy}+u_y(x,y)=0;$ 4. $2u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}+4u_y+4u_x+u(x,y)=0;$ 5. $u_{yz}-3u_{zz}+u_{xx}-u_y+u_z(x,y,z)=0.$
21	1. $\operatorname{sh}2u_x\cdot\operatorname{cth}u_x-\operatorname{ch}2u_x+$ $+5xu(x,y)=0;$ 2. $u_{xy^2z}+\ln\left(u^4_{x^2}+1\right)-5xzu(x,y,z)=0.$	1. $u_{xx}-2xu_{xy}+\left(x^2-1\right)u_{yy}+yu_x(x,y)-\operatorname{tg}x^2=0;$ 2. $\sin^2 yu_{xx}+2x\sin yu_{xy}+x^2u_{yy}+u^2(x,y)=0;$ 3. $2u_{xx}-2e^yu_{xy}+e^{2y}u_{yy}+u_x-u_y(x,y)=0;$ 4. $u_{xx}+4u_{xy}+4u_{yy}-u_y+u_x+3u(x,y)=0;$ 5. $u_{zz}+u_{xy}-2u_{xz}-u_y+u(x,y,z)=0.$
22	1. $u_{y^2z^3}+3yu^5_{xz}-4zu(x,y,z)=0;$	1. $\sin xu_{yy}+2\cos xu_{xy}-u_{xx}=yu_x(x,y);$

	2. $yu_y - \frac{\partial}{\partial y}\sin(yu) + 2xu(x,y) =$ $= 3\ln\left(1 + x^2\right).$	2. $u_{xx} + xu_{xy} + 0{,}25x^2u_{yy} + \sin u(x,y) = 0;$ 3. $u_{xx} + 2\sin xu_{xy} + \left(2 - \cos^2 x\right)u_{yy}(x,y) + \ln\left(x^2 + 1\right) = 0;$ 4. $u_{xy} - u_{yy} + 5u_x - 4u_y + 5u(x,y) = 0;$ 5. $5u_{xy} - u_{zz} + u_{zt} - u_y(x,y,z,t) = 0.$
23	1. $2\cos^2 u_{yy} - \cos 2u_{yy} -$ $- 4xu(x,y) = e^y;$ 2. $u_{x_1^2 x_5^4} + 2x_2x_3u_{x_4^7} +$ $+ u_{x_2x_3} \cdot u_{x_1}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0.$	1. $\left(1 + x^2\right)u_{xx} - \left(1 + y^2\right)u_{yy} + xu_x - yu_y = u(x,y);$ 2. $x^2u_{xx} - 2x\cos yu_{xy} + \cos^2 yu_{yy}(x,y) + \operatorname{tg} x = 0;$ 3. $u_{xx} + 2e^{0,5x}u_{xy} + 2e^x u_{yy} + u_x \ln\lvert u(x,y)\rvert = 0;$ 4. $u_{xx} - 2\sqrt{5}u_{xy} + 4u_{yy} + u_x - u_y(x,y) = 0;$ 5. $u_{zz} - u_{xz} + 3u_{yz} - u_x(x,y,z) = 0.$
24	1. $\left(4\cos^3 u_x - 3\cos u_x\right)u_{xy} -$ $\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y}\sin 3u_x + 4\operatorname{tg} u(x,y) = \sin x;$ 2. $u_{x_1x_2x_3x_4} - u_{x_1^5} +$ $+ 2x_3x_4u(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$	1. $2u_{xx} + 2\sqrt{2}yu_{xy} + \left(1 + y^2\right)u_{yy} + yu_y(x,y) = 0;$ 2. $u_{xx} - 2\operatorname{ctg} xu_{xy} + \operatorname{ctg}^2 xu_{yy} + u_y \cdot u(x,y) = 0;$ 3. $u_{xx} + \operatorname{ch} xu_{xy} + 3u_x - u_y(x,y) = 0;$ 4. $u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x - 4u_y(x,y) + e^{\sqrt{2}x} = 0;$ 5. $u_{xz} + u_{yz} - 2u_{zz} - u_x + u_y(x,y,z) = 0.$
25	1. $2u_{xy}\sin^{-1} 2u_x + \frac{\partial}{\partial y}\ln\lvert ctgu_x\rvert +$ $+ \sqrt{1 + u^2(x,y)} = 2xy;$ 2. $u^2_{x^3z} + 3xu_{yz} - 4zu(x,y,z) = 0.$	1. $xu_{xx} - yu_{yy} + 0{,}5\left(u_x - u_y\right) - e^{u(x,y)} = 0, \quad xy \le 0;$ 2. $x^2u_{xx} - 2x\sin yu_{xy} + \sin^2 yu_{yy} + yu_y = 2xu(x,y);$ 3. $\operatorname{sh} yu_{xy} - xu_{yy} + u_x(x,y) + \ln\left(y^2 + 1\right) = 0;$ 4. $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + u_y(x,y) = 0;$ 5. $3u_{xz} - 2u_{yy} + u_{yz} + u_x - u(x,y,z) = 0.$

26	1. $u_{x^3y^2} + u^2_{z^4} + 5xu(x,y,z) = 0;$ 2. $\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{tg} u_y - u_{xy}\sec^2 u_y +$ $+ 6yu(x,y) = e^x.$	1. $4y^2u_{xx} + 2(1-y^2)u_{xy} - u_{yy} - 2y(1+y^2)^{-1}(2u_x - u_y) =$ $= u(x,y);$ 2. $u_{xx} - 2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}u_{xy} + (2+\cos x)u_{yy}(x,y) + \operatorname{sh}\pi = 0;$ 3. $e^{2y}u_{xx} + e^{y}u_{xy} + 0{,}25u_{yy} + \operatorname{ch} u(x,y) = 0;$ 4. $u_{xx} + 4u_{xy} + 8u_{yy} + 2u_y - u_x(x,y) = 0;$ 5. $u_{yy} + 3u_{xy} - 2u_{yz} - u_z(x,y,z) = 0.$
27	1. $x^2u_xe^{xu} - \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xu}) + 5yu(x,y) = 0;$ 2. $u_{x^3z} - \ln(u^6 + 2) + 5xyu(x,y,z) =$ $= \operatorname{sh}(yz).$	1. $u_{xx} + 2\sin y u_{xy} + (1-\cos^2 y)u_{yy}(x,y) + e^{xy} = 0;$ 2. $(1+e^{2x})u_{xx} + 2e^{x}u_{xy} + u_{yy} = 2yu_x(x,y);$ 3. $yu_{xx} - 2u_{xy} + \operatorname{sh} u(x,y) = 0;$ 4. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + u_y - u_x(x,y) = 0;$ 5. $u_{xy} + u_{zt} - 2u_{xz} + u_t(x,y,z,t) = 0.$
28	1. $u^5_{x^2y^2} - 4xu_{y^2} + 3yu_{x^3}(x,y) = 0;$ 2. $u_{xy}\sin 2u_y - \frac{\partial}{\partial x}(\sin^2 u_y) +$ $+ \sqrt{1+u^2(x,y)} - xy = 0.$	1. $u_{xx} - 2e^{0,5y}u_{xy} + e^{y}u_{yy} = \operatorname{ch} u(x,y);$ 2. $u_{xy} + u_{yy} + 5xu_y - yu_x(x,y) + \operatorname{tg}(xy) = 0;$ 3. $(1+\sin^2 x)u_{xx} + 2\cos x u_{xy} - u_{yy} + u_x = 3xu_y(x,y);$ 4. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - 3u_y + 5u_x + u(x,y) = 0;$ 5. $2u_{xt} + 6u_{yz} - 2u_z + 3u_t(x,y,z,t) = 0.$
29	1. $(8\cos^4 u_x - 8\cos^2 u_x + 1)u_{xy} -$ $- 0{,}25\frac{\partial}{\partial y}(\sin 4u_x) + e^{u(x,y)} = 2xy;$	1. $u_{xx} - 2e^{y}u_{xy} + 5xu_y = \sin u(x,y);$ 2. $\sec x u_{xx} + 2u_{xy} + \cos x u_{yy}(x,y) + y + \sin x = 0;$ 3. $u_{xx} + 2xu_{xy} + (1+x^2)u_{yy} + yu_x(x,y) = 0;$

	2. $u_{xz^4} - 5u_y^6 + 2u_{xyz}(x, y, z) - 5z^7 = 0.$	4. $0{,}25u_{xx} - u_{xy} + u_{yy} + 5u_x - 6u(x, y) = 0;$ 5. $4u_{xy} - 3u_{yy} + 10u_{yz} - 4u_{xz} + 5u_z(x, y, z) = 0.$
30	1. $u^2_{y^2z^3} - 5u_{x^4} + 4xzu(x, y, z) = 0;$ 2. $\left(1 + u_x^2\right)^{-1} \cdot u_{xy} - \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{arctg} u_x +$ $+ u(x, y) + \operatorname{sh}(xy) = 0.$	1. $\csc x u_{xx} + 2u_{xy} + \sin x u_{yy} + xe^{u(x,y)} = 0;$ 2. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 5xyu(x, y) = 0;$ 3. $u_{yy} - 2\operatorname{sh} y u_{xy} + 3xu_y(x, y) + e^y = 0;$ 4. $u_{yy} + 6u_{xy} - 5u_y + u_x = u(x, y);$ 5. $u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yz} + u_x(x, y, z) = 0.$

ТЕМА II
МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК
(МЕТОД ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ)

Вивчити*:

1. Фізичні процеси, які приводять до рівнянь гіперболічного типу. Постановка задачі Коші.
2. Інтеґрування задачі Коші для рівняння вільних коливань струни. Формула Д'Аламбера.
3. Фізична інтерпретація загального інтеґралу рівняння вільних коливань струни та формули Д'Аламбера.
4. Задача Коші для рівняння вимушених коливань однорідної струни.
5. Задача Коші для хвильового рівняння в просторі. Формула Кірхгофа.
6. Задача Коші для рівняння коливань однорідної мембрани. Формула Пуассона.
7. Теореми про єдиність розв'язку задачі Коші для хвильового рівняння та про коректність її постановки.

Розв'язати задачі: №№ 12-17, 36-40 згідно [4], або №№ 263-271, 275-279, згідно [5], або розділ II, тема 2, п.1: №№ 2, 4, 6, 9, п.2: №№ 1, 2, 8, 9, 11, 13, п.3: №№ 2, 5, 6 згідно [6], с. 93-95.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

У теорії звичайних диференціальних рівнянь як основна ставиться задача про знаходження загального розв'язку відповідного рівняння. Для ДРЧП питання про визначення і побудову загальних розв'язків не ставиться. Однак знання загального розв'язку для ДРЧП в деяких випадках є корисним, поскільки це дає можливість просто розв'язувати в замкнутому вигляді задачі математичної фізики.

Поширеним методом інтеґрування деяких небагаточисленних лінійних ДРЧП другого порядку є так званий ***метод характеристик***. Суть цього методу полягає в наступному: задане ДРЧП спочатку зводять до канонічної форми і інтеґрують її; далі в одержаному загальному розв'язку канонічної форми переходять до старих незалежних змінних і таким чином знаходять загальний розв'язок вихідного рівняння.

---

*[2], розділ IV, §1, с. 54-61, розділ VIII, §§1-5, с. 98-108; [3], розділ II, §2, с. 49-62, розділ V, §1, с. 399-408; [6], розділ II, §§ 2.1-2.14, с. 26-93.

Для ілюстрації методу характеристик розглянемо лінійне ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними вигляду

$$a_{11}(x,y)u_{xx}+2a_{12}(x,y)u_{xy}+a_{22}(x,y)u_{yy}+b_1(x,y)u_x+ \\ +b_2(x,y)u_y+b_3(x,y)u(x,y)=f(x,y), \qquad (1)$$

де коефіцієнти $a_{ij}(x,y)$, $i,j=1,2,$ в розглядуваній області **D** справджують умову

$$a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0, \quad (x,y)\in \mathbf{D}.$$

Звівши рівняння (1) до канонічного вигляду, дістанемо (див. тему I):

$$2\alpha_{12}U_{\xi\eta}+B_1U_\xi+B_2U_\eta+B_3U(\xi,\eta)=F(\xi,\eta), \qquad (2)$$

де

$$\alpha_{12}(\xi,\eta)=\xi_x\eta_x a_{11}+(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)a_{12}+\xi_y\eta_y a_{22},$$
$$B_1(\xi,\eta)=\xi_{xx}a_{11}+2\xi_{xy}a_{12}+\xi_{yy}a_{22}+\xi_x b_1+\xi_y b_2,$$
$$B_2(\xi,\eta)=\eta_{xx}a_{11}+2\eta_{xy}a_{12}+\eta_{yy}a_{22}+\eta_x b_1+\eta_y b_2,$$
$$B_3(\xi,\eta)=b_3\big(\Phi(\xi,\eta),\Psi(\xi,\eta)\big), \quad F(\xi,\eta)=f\big(\Phi(\xi,\eta),\Psi(\xi,\eta)\big).$$

ДРЧП (2) можна розв'язувати наближено. В деяких випадках, коли рівняння (2) є досить простим, його вдається проінтеґрувати і знайти загальний розв'язок $U(\xi,\eta)=\omega(\xi,\eta)$. Тоді загальним розв'язком рівняння (1) є функція

$$u(x,y)=\omega\big(\varphi(x,y),\psi(x,y)\big). \qquad (3)$$

Для прикладу припустимо, що рівняння (2) можна подати у вигляді

$$\left[\alpha(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}+\beta(\xi)\right]\cdot\left[\gamma(\eta)\frac{\partial U}{\partial\eta}+\delta(\eta)U(\xi,\eta)\right]=F(\xi,\eta),$$

де $\alpha(\xi)\neq 0$, $\gamma(\eta)\neq 0$. Тоді, позначивши

$$v(\xi,\eta)=\gamma(\eta)\frac{\partial U}{\partial\eta}+\delta(\eta)U(\xi,\eta), \qquad (4)$$

маємо:

$$\alpha(\xi)v_\xi+\beta(\xi)v(\xi,\eta)=F(\xi,\eta).$$

Одержане лінійне ДРЧП можна розглядати як звичайне диференціальне рівняння відносно $v(\xi,\eta)$ і ξ. Інтеґруючи його, знайдемо

$$v(\xi,\eta)=e^{-\int\frac{\beta(\xi)}{\alpha(\xi)}d\xi}\left[f_1(\eta)+\int e^{\int\frac{\beta(\xi)}{\alpha(\xi)}d\xi}\cdot F(\xi,\eta)d\xi\right],$$

де $f_1(\eta)$ – довільна неперервно диференційовна функція незалежної змінної η.

Підклавши знайдену функцію $v(\xi,\eta)$ в рівняння (4) і проінтеґрувавши його, дістанемо загальний розв'язок рівняння (2):

$$U(\xi,\eta)=e^{-\int\frac{\delta(\eta)}{\gamma(\eta)}d\eta}\left[f_2(\xi)+\int e^{\int\frac{\delta(\eta)}{\gamma(\eta)}d\eta}\cdot v(\xi,\eta)d\eta\right]\equiv\omega(\xi,\eta),$$

де $f_2(\xi)$ – довільна неперервно диференційовна функція незалежної змінної ξ.

Беручи до уваги (3), знаходимо загальний розв'язок рівняння (1).
Проілюструємо викладену методику на прикладі.

ПРИКЛАД 1. Знайти розв'язок ДРЧП

$$x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy}(x,y) = 0, \quad xy \neq 0, \tag{5}$$

який справджує початкові умови

$$u(x,1) = \varphi_0(x), \quad u_y(x,1) = \varphi_1(x). \tag{6}$$

Розв'язання. Перший етап: знаходимо загальний розв'язок рівняння (5). Для цього зводимо його до канонічної форми. Маємо:

$$y'(x) = x^{-1}(-y \pm 2y), \text{ звідки } C_1 = yx^{-1},\ C_2 = xy^{1/3}.$$

Вводимо нові незалежні змінні $\xi = yx^{-1}$, $\eta = x\sqrt[3]{y}$. Тоді

$$u_x = -yx^{-2}U_\xi + y^{1/3}U_\eta, \quad u_y = x^{-1}U_\xi + x\left(3y^{2/3}\right)^{-1}U_\eta,$$

$$u_{xx} = y^2x^{-4}U_{\xi\xi} - 2x^{-2}y^{4/3}U_{\xi\eta} + y^{2/3}U_{\eta\eta} + 2yx^{-3}U_\xi,$$

$$u_{yy} = x^{-2}U_{\xi\xi} + 2\left(3y^{2/3}\right)^{-1}U_{\xi\eta} + x^2\left(9y^{4/3}\right)^{-1}U_{\eta\eta} - 2x\left(9y^{4/3}\right)^{-1}U_\eta,$$

$$u_{xy} = -yx^{-3}U_{\xi\xi} + 2y^{1/3}(3x)^{-1}U_{\xi\eta} + 3\left(3y^{1/3}\right)^{-1}U_{\eta\eta} - x^{-2}U_\xi + \left(3y^{2/3}\right)^{-1}U_\eta.$$

Підклавши знайдені похідні в рівняння (5), дістанемо

$$U_{\xi\eta} - \frac{3}{4\eta}U_\xi = 0. \tag{7}$$

Рівняння (7) можна подати у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(U_\eta - \frac{3}{4\eta}U\right) = 0,$$

звідки випливає, що $v(\xi,\eta) \equiv U_\eta - 3(4\eta)^{-1}U = f(\eta)$, де $f(\eta)$ – довільна неперервна функція тільки від η. Вважаючи в останньому рівнянні ξ параметром, ми можемо інтеґрувати його як звичайне диференціальне рівняння, де довільна стала інтеґрування буде функцією параметру ξ. Отже,

$$U(\xi,\eta) = e^{\int 3(4\eta)^{-1}d\eta}\left[f_1(\xi) + \int e^{-\int 3(4\eta)^{-1}d\eta}\cdot f(\eta)d\eta\right] = \eta^{3/4}\left[f_1(\xi) + f_2(\eta)\right].$$

Повертаючись в останній рівності до старих незалежних змінних, одержуємо загальний розв'язок рівняння (5)

$$u(x,y) = \sqrt[4]{x^3y}\left[f_1\left(yx^{-1}\right) + f_2\left(xy^{1/3}\right)\right] \tag{8}$$

Другий етап: знаходимо розв'язок задачі Коші (5),(6). Для цього функції f_1 та f_2 вибираємо таким чином, щоб вираз (8) справджував умови (6). Маємо:

$$\begin{cases} u(x,1) \equiv \sqrt[4]{x^3}\left[f_1\left(x^{-1}\right) + f_2(x)\right] = \varphi_0(x), \\ u_y(x,1) \equiv 0{,}25\sqrt[4]{x^3}\left[f_1\left(x^{-1}\right) + f_2(x)\right] + \sqrt[4]{x^3}\left[x^{-1}f_1'\left(x^{-1}\right) + \tfrac{1}{3}xf_2'(x)\right] = \varphi_1(x), \end{cases}$$

звідки знаходимо

$$f_2(x) = \tfrac{3}{4}x^{-3/4}\varphi_0(x) + \tfrac{3}{4}\int\limits_{x_0}^{x} z^{-7/4}\left[\varphi_1(z) - \tfrac{1}{4}\varphi_0(z)\right]dz + C,$$

$$f_1\left(x^{-1}\right) = \tfrac{1}{4}x^{-3/4}\varphi_0(x) - \tfrac{3}{4}\int\limits_{x_0}^{x} z^{-7/4}\left[\varphi_1(z) - \tfrac{1}{4}\varphi_0(z)\right]dz - C,$$

де x_0, C – довільні сталі. Покладемо в останній рівності $x^{-1} = \zeta$, тоді

$$f_1(\zeta) = \tfrac{1}{4}\zeta^{3/4}\varphi_0(x) - \tfrac{3}{4}\int\limits_{x_0}^{\zeta^{-1}} z^{-7/4}\left[\varphi_1(z) - \tfrac{1}{4}\varphi_0(z)\right]dz - C.$$

Підклавши знайдені функції в (8), одержимо розв'язок задачі Коші (5),(6):

$$u(x,y) = \frac{1}{4}\left[y\varphi_0\left(xy^{-1}\right) + 3\varphi_0\left(xy^{1/3}\right)\right] + \frac{3}{16}\sqrt[4]{x^3 y}\int\limits_{xy^{1/3}}^{xy^{-1}} z^{-7/4}\left[\varphi_0(z) - 4\varphi_1(z)\right]dz.$$

При цьому вважаємо, що $\varphi_0(x)$ неперервна разом з похідними до другого порядку включно, а $\varphi_1(x)$ – неперервна разом з першою похідною в розглядуваній області.

Застосовуючи викладений метод до задачі Коші для рівняння вільних коливань струни

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}(t,x), \quad t > 0, \quad x \in (-\infty, +\infty), \tag{9}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x), \quad x \in (-\infty, +\infty), \tag{10}$$

маємо

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)\right] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz. \tag{11}$$

Формула (11) називається ***формулою Д'Аламбера***.

Розв'язок (11) є суперпозицією прямих та зворотніх хвиль, які рухаються відповідно в напрямку осі *Ox* та в зворотному її напрямку зі швидкістю *a*. Фізичну інтерпретацію формули Д'Аламбера, поширення хвиль відхилення та імпульсу див. [6], с. 32-48.

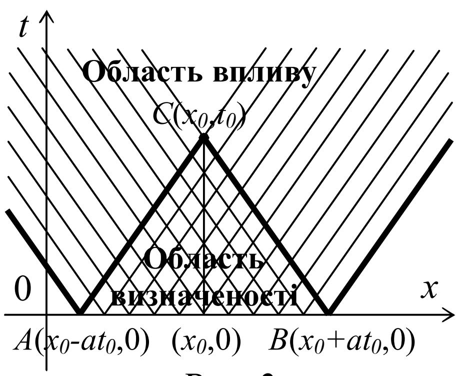


Рис. 2

Із формули Д'Аламбера (11) випливає, що для обчислення розв'язку $u(t,x)$ задачі Коші (9), (10) в точці (t_0, x_0) достатньо знати початкові відхилення $\varphi(x)$ у двох точках $x = x_0 + at_0$ і $x = x_0 - at_0$, а також початкові швидкості $\psi(x)$ на відрізку $x \in \left[x_0 - at_0, x_0 + at_0\right]$. Значення функцій $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ зовні зазначеного відрізка не впливають на розв'язок $u(t,x)$ в точці (t_0, x_0) та в усіх внутрішніх точках трикутника ACB (див. рис. 2), обмеженого характеристиками $x + at = x_0 + at_0 = const$, $x - at = x_0 - at_0 = const$, які проходять через точку $C(t_0, x_0)$. У зв'язку з цим відрізок $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ називають ***областю залежності*** розв'язку задачі Коші (9),(10) для точки $C(t_0, x_0)$. Сам же трикутник ACB називають ***характеристичним***.

Таким чином, якщо $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ задані на відрізку $x \in [x_0 - at_0, x_0 + at_0]$, то розв'язок задачі Коші (9),(10) визначений в характеристичному трикутнику з основою $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$. Тому трикутник ACB називають ***областю визначеності*** відрізка $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$. Із формули Д'Аламбера видно, що початкові умови на відрізку впливають на розв'язок не тільки в характеристичному трикутнику, але й в області, яка обмежена відрізком $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ і характеристиками $x + at = x_0 - at_0$ та $x - at = x_0 + at_0$. Внаслідок цього зазначену область називають ***областю впливу*** відрізка $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$.

На підставі наведених вище міркувань можемо сказати: струна називається нескінченою, якщо розглядувана точка x_0 знаходиться від кінців струни на віддалі, більшій за at_0, де t_0 – розглядуваний момент часу.

Зауваження 1. Якщо в (10) $\varphi(x) \notin C^2(-\infty, +\infty)$ або $\psi(x) \notin C^1(-\infty, +\infty)$, то маємо так звані ***узагальнені розв'язки*** задачі Коші (9),(10), які також даються формулою Д'Аламбера (11). У цьому випадку узагальнений розв'язок $u(t, x)$ може бути і розривною функцією. Розривні розв'язки для рівняння коливання струни і стержня позбавлені фізичного змісту. Однак, таке ж хвильове рівняння справджує тиск $p(t, x)$ ґазу в довгій вузькій трубці (наприклад, у флейті чи в орґанній трубці). Функція $p(t, x)$ може бути розривною. Розривні розв'язки хвильового рівняння в ґазовій динаміці називаються ***ударними хвилями***.

Зауваження 2. Розв'язок задачі Коші для рівняння вимушених коливань струни

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}(t, x) + f(t, x), \quad t > 0, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

з початковими умовами (10) будується з застосуванням ***принципу Дюгамеля*** (див. [6], с. 49-50) і дається формулою

$$u(t, x) = U(t, x) + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x - a(t-\tau)}^{x + a(t-\tau)} f(z, \tau) dz d\tau,$$

де $U(t, x)$ визначається формулою Д'Аламбера (11).

Зауваження 3. Наведений вище метод характеристик застосовний також для деяких лінійних ДРЧП параболічного типу, тобто коли в рівнянні (1)

$$a_{12}^2 - a_{11} a_{22} = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{D}.$$

У цьому випадку, на відміну від рівнянь гіперболічного типу, довільні функції в загальному розв'язку залежатимуть від одного й того ж арґумента.

Хвильове рівняння в тривимірному просторі має вигляд

$$u_{tt} = a^2 \Delta u(t,M), \quad t>0, \quad M = M(x,y,z) \in \mathrm{E}_3, \quad a^2>0, \tag{12}$$

де $\mathrm{E}_3 = \{(x,y,z) | -\infty < x,y,z < +\infty\}$, а $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Рівняння (12) справджує, наприклад, тиск повітря $p(t,M)$ (звукова хвиля в акустиці), потенціали $\varphi(t,M)$ і $A(t,M)$ електромаґнітного поля в електродинаміці тощо.

Будемо шукати розв'язки рівняння (12) у вигляді [8]

$$u(t,M) = f(bt + \xi x + \eta y + \zeta z) = f\left(bt + <\vec{P},\vec{M}>\right), \tag{13}$$

де $\vec{P} = (\xi,\eta,\zeta) \neq 0$, $<\vec{P},\vec{M}> = \xi x + \eta y + \zeta z.$

У зв'язку з тим, що

а) при фіксованому $t = t_0$ поверхні рівня $u(t_0,M) = const$ є площинами

$$bt + <\vec{P},\vec{M}> = C,$$

перпендикулярними векторові $\vec{P}$;

б) при різних значеннях $t = t_0, t_1$ функція $u(t_1,M)$ відрізняється від функції $u(t_0,M)$ зсувом на вектор

$$-|\vec{P}|^{-2} \cdot \vec{P} \cdot b(t - t_0),$$

тобто

$$\begin{aligned} u\left(t_0, \vec{M} + \vec{P} \cdot |\vec{P}|^{-2} b(t_1 - t_0)\right) &= f\left(bt_0 + <\vec{P}, \vec{M} + \vec{P} \cdot |\vec{P}|^{-2} b(t_1 - t_0)>\right) = \\ = f\left(bt_0 + <\vec{P},\vec{M}> + <\vec{P},\vec{P}> |\vec{P}|^{-2} b(t_1 - t_0)\right) &= f\left(bt_1 + <\vec{P},\vec{M}>\right) = u(t,M), \end{aligned} \tag{14}$$

то функція (13) називається ***плоскою хвилею***, яка рухається вздовж напрямку вектора $-\vec{P}$ зі швидкістю $v = |\vec{P}|^{-1} b.$

Вираз $bt + <\vec{P},\vec{M}>$ називається ***фазою хвилі*** (13), а f – ***формою хвилі***.

Позначивши одиничний вектор напрямку $-\vec{P}$ через $\vec{\omega} = -|\vec{P}|^{-1} \cdot \vec{P}$, функцію (13) можемо подати у вигляді

$$u(t,M) = f\left(v|\vec{P}|t - <\vec{\omega},\vec{M}> |\vec{P}|\right) = f\left((vt - <\vec{\omega},\vec{M}>)|\vec{P}|\right) = g\left(vt - <\vec{\omega},\vec{M}>\right),$$

де $g(Q) = f\left(Q|\vec{P}|\right)$, $|\vec{\omega}| = 1.$

Підклавши (13) у (12), одержимо:

$$f''\left(bt + <\vec{P},\vec{M}>\right)b^2 = a^2 f''\left(bt + <\vec{P},\vec{M}>\right)\left(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2\right).$$

Звідси, вважаючи, що $f''(Q) \neq 0$, маємо

$$b^2 = a^2 |\vec{P}|. \tag{15}$$

Розв'язки цього рівняння – вектори $\vec{N} = (P,b) \in \mathrm{E}_4$, які лежать на конусі $\mathrm{K} \subset \mathrm{E}_4$, основою якого є сфера $|\vec{P}| = ba^{-1}$.

Означення. Вектор $\vec{N} = (\xi,\eta,\zeta,b) \in \mathrm{E}_4$, $\vec{N} \neq \vec{0}$, який справджує рівняння (15), називається ***характеристичною нормаллю*** хвильового рівняння (12).

Гіперплощина $N^{\perp} = \{(t,M) \in \mathrm{E}_4 | bt + <\vec{P},\vec{M}> = const\}$, перпендикулярна до деякої характеристичної нормалі $\vec{N}$, називається ***характеристичною гіперплощиною*** хвильового рівняння (12).

Гіперповерхня в E_4 називається ***характеристичною***, якщо в кожній точці її дотична гіперплощина є характеристичною.

На підставі характеристичного рівняння (14) і рівняння (15) щвидкість поширення всіх плоских хвиль, які справджують рівняння (12), рівна a:

$$v^2 = |\vec{P}|^{-1} b^2 = a^2. \tag{16}$$

Має силу і обернене твердження: для довільного вектора $\vec{N} \in \mathrm{E}_4$, який справджує рівняння (15), плоска хвиля (13) є розв'язком рівняння (12) при довільній функції $f(Q)$. В частинному випадку $f(Q)$ може бути й розривною, або функцією, яка швидко змінюється в деякій точці, наприклад, $z = 2$. Тоді розв'язок (13) матиме той же розрив уздовж усієї гіперплощини в E_4 $(\vec{P} \neq \vec{0})$:

$$bt + \langle \vec{P}, \vec{M} \rangle = 2. \tag{17}$$

При фіксованому t цей розрив розміщений на площині в E_3 з рівнянням (17). З ростом t ця площина рухається в напрямку перпендикулярного до неї вектора $-\vec{P}$ зі швидкістю $v = a = |\vec{P}|^{-1} b$.

Звідси можна зробити висновок:

1) довільна характеристична гіперплощина може бути поверхнею розриву розв'язку рівняння (12);

2) всі плоскі хвилі і розриви цих хвиль, які справджують рівняння (12), поширюються зі швидкістю a.

Можна показати, що всі розв'язки рівняння (12) є хвилями, які поширюються зі швидкістю a. З формулою (16) пов'язане відкриття електромаґнітної природи світла і спеціальної теорії відносності.

Розглянемо задачу Коші: в просторі функцій $C^{(1,2,2,2)}\left(\mathrm{D} = (0,+\infty) \times \mathrm{E}_3\right)$ знайти розв'язок диференціального рівняння (12) при початкових умовах

$$u(0,M) = \varphi(M), \quad u_t(0,M) = \psi(M), \quad M \in \mathrm{E}_3, \tag{18}$$

де $\varphi(M) \in C^3(\mathrm{E}_3)$, $\psi(M) \in C^2(\mathrm{E}_3)$.

Як відомо, єдиний розв'язок задачі (12),(18) дається ***формулою Кірхгофа***:

$$u(t,M) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint\limits_{S_{at}(x,y,z)} \frac{\psi(\xi,\eta,\zeta)}{t} ds + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{S_{at}(x,y,z)} \frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{t} ds, \tag{19}$$

де $S_{at}(x,y,z)$ – сфера радіуса at із центром у точці $M(x,y,z)$:

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = (at)^2.$$

ПРИКЛАД 2. Знайти, де $u(t,M) \equiv 0$ при значеннях t=1, 2, 3, 4, якщо $\varphi(M) = \psi(M) \equiv 0$ при $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > 1$.

Розв'язання. Із формули (19) випливає: якщо сфера $S_{at}(x,y,z)$ не перетинається з областю $\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \le 1$, то $u(t,M) \equiv 0$. Ця умова еквівалентна тому, що $at+1>r$ (рис. 3а) або $at>r+1$ (рис. 3б).

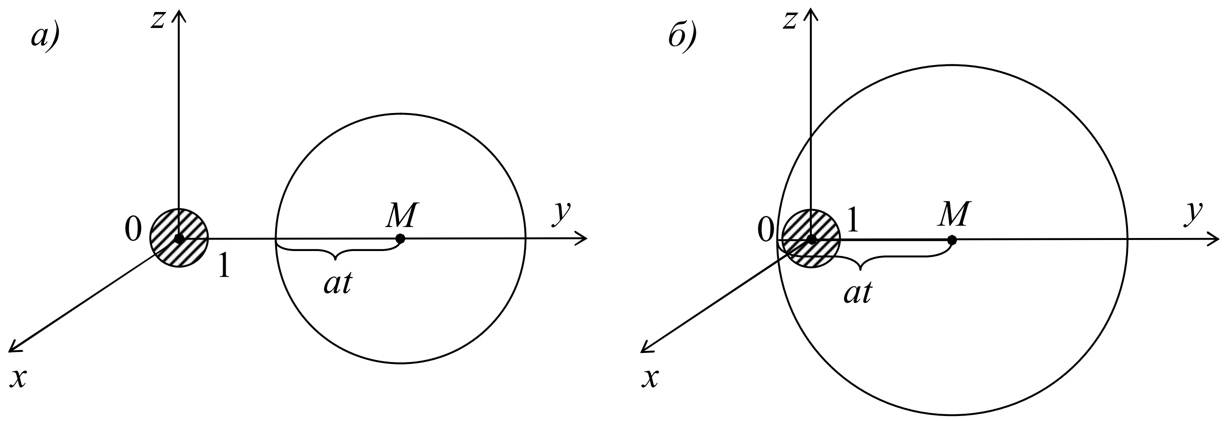


Рис. 3

Таким чином, маємо:

$t=1 \Rightarrow r>a+1,\quad t=2 \Rightarrow r>2a+1,\quad t=3 \Rightarrow r>3a+1,\quad t=4 \Rightarrow r>4a+1;$

$t=1 \Rightarrow r<a-1,\quad t=2 \Rightarrow r<2a-1,\quad t=3 \Rightarrow r<3a-1,\quad t=4 \Rightarrow r<4a-1 \quad (a \ge 1).$

З останніх нерівностей і формули Кірхгофа (19) випливає, що $u(t,M)$ має вигляд сферичної хвилі, яка зосереджена в кульовому шарі товщини 2 (рис. 4):

$$t=1 \Rightarrow a-1<r<a+1;\quad t=2 \Rightarrow 2a-1<r<2a+1;$$
$$t=3 \Rightarrow 3a-1<r<3a+1;\quad t=4 \Rightarrow 4a-1<r<4a+1. \tag{20}$$

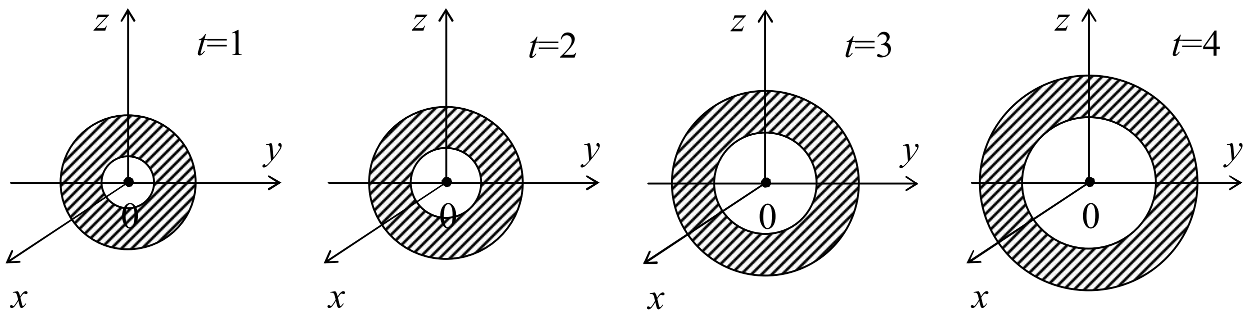


Рис. 4

Висновок:

1. Зовні кульових шарів (20) $u(t,M) \equiv 0$ (зрозуміло, що $u(t,M)$ може перетворюватися в нуль і всередині цих шарів).

2. Сферичні хвилі мають два фронти, які поширюються зі швидкістю a: передній $r=at+1$ і задній $r=at-1$.

ПРИКЛАД 3. Знайти, де $u(t,M) \equiv 0$ при значеннях t=1, 2, 3, 4, 5, якщо $\varphi(M)=\psi(M) \equiv 0$ при $r<2$ або $r>4$.

Розв'язання. В даному випадку $u(t,M)\equiv 0$ при трьох можливих положеннях сфери $S_{at}(x,y,z)$, а саме, коли $4+at<r,\ r+at<2,\ 4+r<at$ (див. на рис. 5 випадки I, II, III відповідно).

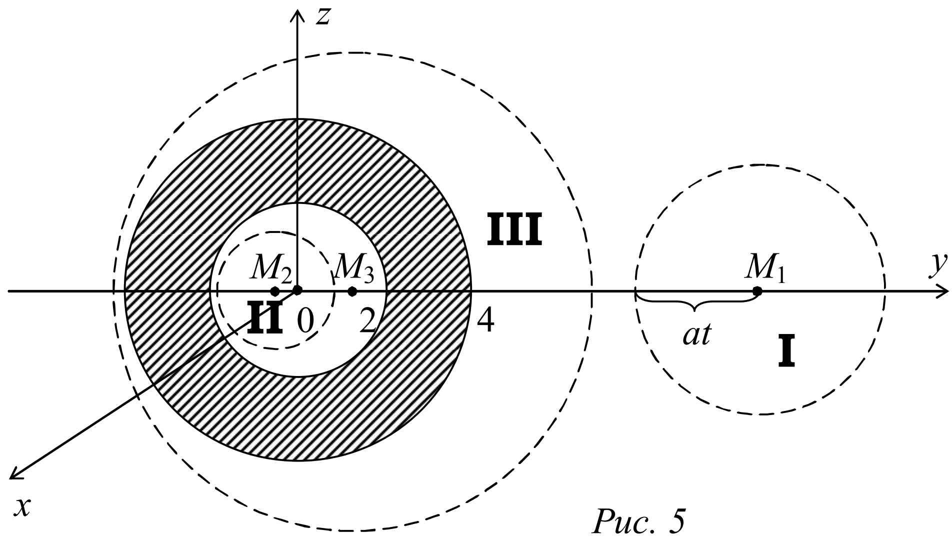


Рис. 5

При $t=1,\ a=1$ сфера $S_{at}(x,y,z)$ має радіус 1 і для неї можливі тільки випадки I і II. Внаслідок цього функція $u(1,M)$ зосереджена в кульовому шарі $1\le r\le 5$ (рис. 6а).

При $t=2$ і $a=1$ радіус сфери інтеґрування рівний 2, а отже, можливий тільки випадок I, тобто хвиля займає кулю $r\le 6$ (рис.6б). Якщо $t=3,4$ і $a=1$, то можливий також тільки випадок I, тобто хвиля займає кулі відповідно радіусів $r=7$ і $r=8$.

При $t=5$ і $a=1$ можливі випадки I і III. Таким чином, функція $u(5,M)$ зосереджена в кульовому шарі $1\le r\le 9$ (рис. 6в).

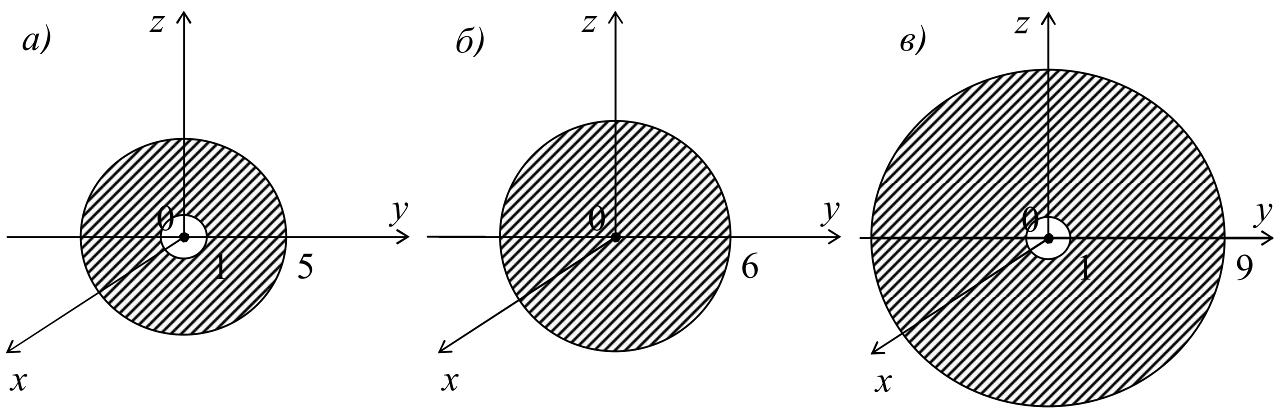


Рис. 6

Як бачимо, $u(t,M)$ при $t>4$ є сферична хвиля, яка займає кульовий шар товщини 8.

Зауважимо, що у випадку двовимірного простору, тобто коли точка $M=M(x,y)$, розв'язок задачі Коші (12),(18) дається ***формулою Пуассона***

$$u(t,M)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{K_{at}(x,y)}\frac{\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}+$$
$$+\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{K_{at}(x,y)}\frac{\psi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}, \tag{21}$$

де $K_{at}(x,y)$ – круг: $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\le(at)^2$.

Формулу Пуассона (21) можна одержати із формули Кірхгофа (19) за допомогою так званого ***метода спуску*** (використовуючи незалежність функцій $\varphi(x,y)$ і $\psi(x,y)$ від змінної z).

Застосовуючи принцип Дюгамеля, переконуємося, що розв'язок задачі Коші для неоднорідного хвильового рівняння

$$\begin{aligned}&u_{tt}=a^2\Delta u(t,M)+f(t,M),\quad t>0,\quad M=M(x,y,z)\in\mathrm{E}_3,\\&u(0,M)=0,\quad u_t(0,M)=0,\quad M\in\mathrm{E}_3,\end{aligned} \tag{22}$$

де $f(t,M)\in C^2(\mathrm{D})$(див. с. 32), подається у вигляді

$$u(t,M)=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{D_{at}(M)}\frac{f\left(t-\frac{\rho}{a},\alpha,\beta,\gamma\right)}{\rho}d\alpha d\beta d\gamma,$$

де $\rho=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}$, а $D_{at}(M)$ – куля радіуса at із центром у точці $M(x,y,z)$.

Зауважимо, що у випадку двовимірного простору, тобто коли точка $M=M(x,y)$, розв'язок задачі Коші (22) дається формулою

$$u(t,M)=\frac{1}{2\pi a}\int_0^t\iint\limits_{K_{a(t-\tau)}(M)}\frac{f(\tau,\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}d\tau,$$

де $K_{a(t-\tau)}(M)$ – круг радіуса $a(t-\tau)$ з центром у точці $M(x,y)$.

Розглянемо задачу Коші для двовимірного так званого ***телеґрафного рівняння***:

$$\begin{aligned}&u_{tt}=a^2\Delta u+k^2u(t,x,y)+f(t,x,y),\quad t>0,\quad (x,y)\in\mathrm{E}_2,\\&u(0,x,y)=\varphi(x,y),\quad u_t(0,x,y)=\psi(x,y),\quad (x,y)\in\mathrm{E}_2,\end{aligned} \tag{23}$$

де $\varphi(M)\in C^3(\mathrm{E}_2)$, $\psi(M)\in C^2(\mathrm{E}_2)$, $f(t,x,y)\in C^2((0,+\infty)\times\mathrm{E}_2)$.

Розв'язок задачі (23) будуємо методом введення нової незалежної змінної. Справді, легко бачити: якщо $u(t,x,y)$ є розв'язком задачі (23), то функція $v(t,x,y,z)=e^{ka^{-1}z}\cdot u(t,x,y)$ повинна бути розв'язком задачі Коші для тривимірного хвильового рівняння

$$\begin{aligned}&v_{tt}=a^2\Delta v(t,x,y,z)+e^{ka^{-1}z}\cdot f(t,x,y),\\&v(0,x,y,z)=e^{ka^{-1}z}\cdot\varphi(x,y),\quad v_t(0,x,y)=e^{ka^{-1}z}\cdot\psi(x,y).\end{aligned} \tag{24}$$

Але задача Коші (24) має єдиний розв'язок

$$v(t,x,y,z)=\frac{1}{4\pi a^2}\iint\limits_{S_{at}(x,y,z)}\frac{e^{ka^{-1}\zeta}\cdot\psi(\xi,\eta)}{t}ds+\frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{at}(x,y,z)}\frac{e^{ka^{-1}\zeta}\cdot\varphi(\xi,\eta)}{t}ds+$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{D_{at}(x,y,z)}\frac{e^{ka^{-1}\gamma}f\left(t-\frac{\rho}{a},\alpha,\beta\right)}{\rho}d\alpha d\beta d\gamma.$$

Поділивши останню рівність на $e^{ka^{-1}z}$, дістанемо розв'язок задачі (23). Аналогічно можна побудувати розв'язок задачі Коші і у випадку одновимірного телеґрафного рівняння.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Математичне описання яких фізичних процесів приводить до ДРЧП гіперболічного типу? Записати відповідні рівняння.
2. Що слід розуміти під загальним розв'язком ДРЧП?
3. Математичною моделлю яких фізичних процесів є задача Коші?
4. В чому полягає ідея методу характеристик?
5. Дати фізичну інтерпретацію загального розв'язку рівняння вільних коливань струни.
6. Дати фізичну інтерпретацію формули Д'Аламбера.
7. Коли задача Коші називається коректно поставленою? Сформулювати теореми про єдиність розв'язку задачі Коші для хвильового рівняння та його неперервну залежність від початкових умов.
8. Який розв'язок рівняння коливань струни називається узагальненим?
9. Як впливають на процес коливання струни початкові відхилення та початкові швидкості точок струни?
10. Зобразіть процес вільних коливань нескінченої струни на фазовій площині.
11. Хвильові процеси в тривимірному просторі. Формула Кірхгофа. В чому полягає принцип Гюйґенса?
12. Наведіть ідею методу спуску та запишіть формулу Пуассона.
13. В чому полягає принцип Дюгамеля побудови розв'язків задач Коші у випадку неоднорідних хвильових рівнянь?
14. Яким методом можна побудувати розв'язки задачі Коші для одновимірного та двовимірного телеґрафного рівняння?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ

1. Проінтеґрувати ДРЧП:

а) $u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} - 2u_x + 6u_y(x, y) = 0;$

б) $u_{xx} + 6u_{xy} + 5u_{yy}(x, y) = 0;$

в) $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y(x, y) = 0;$

г) $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2yu_y(x, y) = 0, \quad xy > 0;$

ґ) $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y(x, y) = 2;$

д) $x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + xu_x + yu_y(x, y) = 0, \quad y \neq 0;$

е) $u_{xy} - 2u_x - 3u_y + 6u(x, y) = 2e^{x+y}.$

2. Знайти розв'язки задач Коші:

а) $\begin{array}{l} u_{xx} + 2\cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y(x, y) = 0, \\ u(x, \sin x) = \varphi(x), \quad u_y(x, \sin x) = \psi(x); \end{array}$

б) $\begin{array}{l} 4y^2 u_{xx} + 2\left(1 - y^2\right)u_{xy} - u_{yy} - \dfrac{2y}{1 + y^2}\left(2u_x - u_y\right) = 0, \quad u = u(x, y), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_y(x, 0) = \psi(x); \end{array}$

в) $\begin{array}{l} x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} - 3y^2 u_{yy} = 0, \quad u = u(x, y), \\ u(x, 1) = x, \quad u_y(x, 1) = 1; \end{array}$

г) $\begin{array}{l} u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} + u_x - u_y(x, y) = 0, \\ u(x, 0) = 3x, \quad u_y(x, 0) = 0; \end{array}$

ґ) $\begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} - bu_t + cu(t, x) + f(t, x), \quad b, c = const \geq 0, \\ u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x) \end{array}$

(***вказівка:*** використати метод введення нової незалежної змінної).

3. Розв'язати задачі Коші для тривимірного хвильового рівняння

$$u_{tt} = a^2 \Delta u(t, x, y, z), \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathrm{E}_3,$$

з початковими умовами:

а) $u(0, x, y, z) = \begin{cases} u_0 = const, & r \leq r_0, \\ 0, & r > r_0, \end{cases} \quad u_t(0, x, y, z) = 0;$

б) $u(0, x, y, z) = 0, \quad u_t(0, x, y, z) == \begin{cases} u_0 = const, & r \leq r_0, \\ 0, & r > r_0, \end{cases}$

де $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $r_0 = const > 0.$

4. Із розв'язку задачі Коші

$$u_{tt} = a^2 \Delta u \pm c^2 u(t,x,y) + f(t,x,y), \quad t > 0, \quad (x,y) \in \mathrm{E}_2,$$
$$u(0,x,y) = \varphi(x,y), \quad u_t(0,x,y) = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \mathrm{E}_2,$$

методом спуску одержати розв'язок задачі

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \pm c^2 u(t,x) + f(t,x), \quad t > 0, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$
$$u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x), \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

5. Довести, що

а) для існування в рівнянні

$$u_{tt}(t,M) = a^2 \Delta u(t,M) + cu(t,M), \quad M = M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (25)$$

плоских хвиль $u(t,M) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - bt\right)$, де $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$, довільної форми, які поширюються зі швидкістю a в довільних напрямках, необхідно й досить, щоб $c = 0$;

б) при $c \neq 0$ в рівнянні (25) існують плоскі хвилі довільних напрямків поширення і довільних швидкостей, за виключенням a, однак їх форма не може бути довільною, а є розв'язком диференціального рівняння

$$\left(a^2 - b^2\right) f''(Q) + cf(Q) = 0, \quad Q = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - bt.$$

6. Шляхом суперпозиції плоских хвиль із фронтом, паралельним осі Oz, вигляду $f(at - \alpha x - \beta y)$, де α і β – напрямні косинуси нормалі до фронту хвилі, одержати циліндричні хвилі

$$\psi(t,r) = \int_{at-r}^{at+r} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\sqrt{r^2 - (at - \xi)^2}},$$

де $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Знайти явний вираз для $\psi(t,r)$ при умові, що

$$f(\xi) = \begin{cases} 0, & -\infty < \xi < -r_0, \\ u_0 = const, & -r_0 \le \xi \le r_0, \\ 0, & r_0 < \xi < +\infty. \end{cases}$$

Вказівка. Покласти $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\alpha = \cos\theta$, $\beta = \sin\theta$, і проінтеґрувати по θ в межах від 0 до π, після чого зробити заміну змінної інтеґрування.

ВІДПОВІДІ

1. а) $u(x,y)=f_1(3x+y)+f_2(x+y)e^{3x+y}$;

б) $u(x,y)=f_1(x-y)+f_2(5x-y)$;

в) $u(x,y)=f_1(y-\cos x-x)+f_2(y-\cos x+x)$;

г) $u(x,y)=\sqrt{\dfrac{x}{y}}\varphi(xy)+\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$;

ґ) $u(x,y)=x-y+f_1(x-3y)+f_2(2x+y)e^{\frac{3y-x}{7}}$;

д) $u(x,y)=f_1(xy)\ln|y|+f_2(xy)$;

е) $u(x,y)=e^{x+y}+e^{3x+2y}\left(f_1(x)+f_2(y)\right)$.

2. а) $u(x,y)=0{,}5\left[\varphi(x+\sin x-y)+\varphi(x-\sin x+y)\right]+0{,}5\displaystyle\int\limits_{x+\sin x-y}^{x-\sin x+y}\psi(z)dz$;

б) $u(x,y)=\varphi\left(x-\frac{2}{3}y^3\right)+0{,}5\displaystyle\int\limits_{x-\frac{2}{3}y^3}^{x+2y}\psi(z)dz$;

в) $u(x,y)=x+y-1$;

г) $u(x,y)=3(x+y)+15\left(e^{-0{,}2y}-1\right)$;

ґ)
$$u(t,x)=\frac{e^{-0{,}5bt}}{2\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\frac{t\rho e^{\sqrt{c+0{,}25b^2}\,t\rho\sin\theta}}{\sqrt{1-\rho^2}}\varphi(x+t\rho\cos\theta)d\theta d\rho+\right.$$
$$+\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\frac{t\rho e^{\sqrt{c+0{,}25b^2}\,t\rho\sin\theta}}{\sqrt{1-\rho^2}}\left[\psi(x+t\rho\cos\theta)-0{,}5b\varphi(x+t\rho\cos\theta)\right]d\theta d\rho+$$
$$\left.+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\frac{\rho(t-\tau)e^{\sqrt{c+0{,}25b^2}\,\rho(t-\tau)\sin\theta+0{,}5\tau}}{\sqrt{1-\rho^2}}f\left(\tau,x+\rho(t-\tau)\cos\theta\right)d\theta d\rho d\tau\right\}.$$

3. а)
$$u(t,r)=\begin{cases} u_0, & 0\le t\le\frac{r_0-r}{a},\\ u_0\dfrac{r-at}{2r}, & \frac{r_0-r}{a}<t\le\frac{r_0+r}{a},\\ 0, & \frac{r_0+r}{a}<t\le+\infty,\end{cases}\quad \text{при}\quad 0<r<r_0,$$

$$u(t,r)=\begin{cases} 0, & 0\le t\le\frac{r-r_0}{a},\\ u_0\dfrac{r-at}{2r}, & \frac{r-r_0}{a}<t\le\frac{r+r_0}{a},\\ 0, & \frac{r+r_0}{a}<t<+\infty,\end{cases}\quad \text{при}\quad r_0<r<+\infty;$$

б) $$u(t,r)=\begin{cases} u_0 t, & 0\le t\le \frac{r_0-r}{a}, \\ u_0\dfrac{r_0^2-(r-at)^2}{4ar}, & \frac{r_0-r}{a}<t\le\frac{r_0+r}{a}, \\ 0, & \frac{r_0+r}{a}<t\le+\infty, \end{cases} \quad \text{при} \quad 0<r<r_0,$$

$$u(t,r)=\begin{cases} 0, & 0\le t\le \frac{r-r_0}{a}, \\ u_0\dfrac{r_0^2-(r-at)^2}{4ar}, & \frac{r-r_0}{a}<t\le\frac{r+r_0}{a}, \\ 0, & \frac{r+r_0}{a}<t<+\infty, \end{cases} \quad \text{при} \quad r_0<r<+\infty.$$

6. $$\psi(t,r)=\begin{cases} \pi u_0, & 0\le t\le \frac{r_0-r}{a}, \\ u_0\left(0{,}5\pi+\arcsin\dfrac{r_0-at}{r}\right), & \frac{r_0-r}{a}<t\le\frac{r_0+r}{a}, \\ 0, & \frac{r_0+r}{a}<t\le+\infty, \end{cases} \quad \text{при} \quad 0<r<r_0,$$

$$\psi(t,r)=\begin{cases} 0, & 0\le t\le \frac{r-r_0}{a}, \\ u_0\left(0{,}5\pi+\arcsin\dfrac{r_0-at}{r}\right), & \frac{r-r_0}{a}<t\le\frac{r+r_0}{a}, \\ 0, & \frac{r+r_0}{a}<t<+\infty, \end{cases} \quad \text{при} \quad r_0<r<+\infty.$$

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ ДО ТЕМИ ІІ

Варі-ант	Завдання №1 Проінтеґрувати диференціальне рівняння:	Завдання №2 Знайти розв'язок *u(x, y)* задачі Коші:	Завдання №3 Знайти закон вільних коливань однорідної нескінченої струни (записати формули, які описують профіль струни при $t>0$ і закон руху точок струни з різними абсцисами) та побудувати на рисунку її профіль в різні моменти часу, якщо:
1	$u_{xy}+2u_{yy}+u_x+$ $+2u_y(x,y)=0.$	$y^2u_{yy}-x^2u_{xx}=0,$ $u(x,1)=8\sqrt{x},\quad u_y(x,1)=0.$	струна збуджена локальним початковим відхиленням, яке має форму параболи $\varphi(x)=\begin{cases}0, & \lvert x\rvert>c,\\ h\left(1-c^{-2}x^2\right), & \lvert x\rvert<c,\end{cases}$ де $c,h=const>0.$
2	$2u_{xx}-5u_{xy}+$ $+3u_{yy}(x,y)=0.$	$4y^2u_{xx}+2\left(1-y^2\right)u_{xy}-u_{yy}-$ $-2y\left(1+y^2\right)^{-1}\left(2u_x-u_y\right)=0,$ $u(x,0)=\varphi(x),\quad u_y(x,0)=\psi(x).$	початкове відхилення рівне нулеві, а початкова швидкість задається рівностями $u_t(0,x)=\begin{cases}0, & \lvert x\rvert>l,\\ 0{,}01a, & 0\le x\le l,\\ -0{,}01a, & -l\le x<0.\end{cases}$ де $l=const>0.$
3	$u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}+$ $+2u_x+6u_y(x,y)=0.$	$x^2u_{xx}-4xyu_{xy}+3y^2u_{yy}+$ $+4xu_x=0,$ $u(x,1)=x^2,\quad u_y(x,1)=1.$	початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення задається рівностями $u(0,x)=\begin{cases}0, & \lvert x\rvert>l,\\ 0{,}01(l-x), & 0\le x\le l,\\ 0{,}01(l+x), & -l\le x<0,\end{cases}$ де $l=const>0.$

4	$2u_{xx}+6u_{xy}+4u_{yy}+$ $+u_x+u_y(x,y)=0.$	$u_{xx}-2u_{xy}+4e^{y}=0,$ $u(0,y)=\varphi(y),\quad u_x(0,y)=\psi(y).$	початкове відхилення рівне нулеві, а початкова швидкість $$u_t(0,x)=\begin{cases}0, & \lvert x\rvert>1,\\ 2, & -1\le x\le 1.\end{cases}$$
5	$\left(x^2+\cos y\right)u_{xy}+2xu_y-$ $-\sin y u_x(x,y)=0.$	$u_{xx}+4u_{xy}-5u_{yy}+u_x-u_y=0,$ $u(x,0)=x,\quad u_y(x,0)=2.$	початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення точок струни задається рівністю $$u(0,x)=h^2x^{-1}\sin x,\quad h=const\neq 0.$$
6	$3u_{xx}-10u_{xy}+3u_{yy}=$ $=2u_x-4u_y-\frac{5}{16}u(x,y).$	$u_{xx}+2\cos x u_{xy}-\sin^2 x u_{yy}-$ $-\sin x u_y=0,$ $u(x,\sin x)=x+\cos x,$ $u_y(x,\sin x)=\sin x.$	початкове відхилення в усіх точках рівне нулеві, а початкова швидкість відмінна від нуля тільки на проміжку $x\in[0;l]$, $l=const>0$, де вона рівна $0{,}01a$.
7	$e^{y}u_{xy}+u_{yy}+e^{2y}u_x+$ $+\left(e^{y}-1\right)u_y(x,y)=0.$	$u_{xx}-2u_{xy}-3u_{yy}=0,$ $u(x,0)=0,\quad u_y(x,0)=2x.$	початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення відмінне від нуля тільки для значень $x\in[c;2c]$, $c=const>0$, де воно має форму ламаної з вершинами в точках (c;0), (1,5c;2), (2c;0).
8	$u_{xx}-(2x+1)u_{yy}-$ $-2xu_{xy}=(x+1)^{-1}\big(u_x+$ $+u_y(x,y)\big),\quad x\neq -1.$	$u_{xy}+u_{yy}=0,$ $u(x,0)=0,\quad u_y(x,0)=3x.$	початкове відхилення рівне нулеві, а початкова швидкість відмінна від нуля тільки на проміжку $x\in[-c;c]$, $c=const>0$, де вона рівна 4.
9	$3u_{xx}+10u_{xy}+3u_{yy}+$ $+u_x+u_y+\frac{1}{16}u(x,y)-$ $-16xe^{\frac{x+y}{16}}=0.$	$e^{x}u_{xy}+u_{yy}=0,$ $u(0,y)=0,\quad u_x(0,y)=-3.$	початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення відмінне від нуля тільки для значень $x\in[-2c;-c]\bigcup[c;2c]$, $c=const>0$, де воно має форму ламаної з вершинами в точках: (-2c;0), (-1,5c;2), (-c;0), (c;0), (1,5c;2), (2c;0).

10	$x^2u_{xx}-2xyu_{xy}+$ $+y^2u_{yy}+xu_x+$ $+yu_y(x,y)=0.$	$2u_{xy}-u_{yy}=0,$ $u(x,-x)=5x,\quad u_y(x,-x)=e^{-x}.$	початкове відхилення рівне нулеві, а початкова швидкість $u_t(0,x)=\begin{cases}0{,}5hc^{-2}x(2c-x), & c\le x\le 2c,\\ 0, & x\notin[c;2c],\end{cases}$ де $c,h=const>0.$
11	$e^yu_{xy}+u_{yy}-$ $-u_y(x,y)=0.$	$3u_{xx}-4u_{xy}+u_{yy}-3u_x+$ $+u_y=0,$ $u(x,0)=\varphi(x),\quad u_y(x,0)=\psi(x).$	початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення точок струни $u(0,x)=\begin{cases}0, & \lvert x\rvert>2,\\ 4-x^2, & -2\le x\le 2.\end{cases}$
12	$u_{yy}-2u_{xy}+2u_x-$ $-u_y(x,y)=4e^x.$	$e^yu_{xy}-u_{yy}+u_y=0,$ $u(x,0)=-0{,}5x^2,$ $u_y(x,0)=-\sin x.$	початкове відхилення рівне нулеві, а початкова швидкість задається рівностями $u_t(0,x)=\begin{cases}0, & \lvert x\rvert>4,\\ 50^{-1}a, & 0\le x\le 4,\\ -50^{-1}a, & -4\le x<0.\end{cases}$
13	$x^2u_{xx}-y^2u_{yy}-$ $-2yu_y(x,y)=0.$	$u_{xy}+u_{yy}+u_x+u_y=0,$ $u\left(x,\frac{x}{2}\right)=2-x,\quad u_y\left(x,\frac{x}{2}\right)=0.$	початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення $u(0,x)=\begin{cases}0, & \lvert x\rvert>\frac{\pi}{2},\\ 2\cos x, & -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}.\end{cases}$
14	$u_{xx}-6u_{xy}+8u_{yy}+$ $+u_x-2u_y(x,y)+$ $+4e^{5x+1{,}5y}=0.$	$u_{xx}-(3+\cos^2x)u_{yy}-$ $-2\sin xu_{xy}-\cos xu_y=0,$ $u(x,\cos x)=\sin x,$ $u_y(x,\cos x)=0{,}5e^x.$	початкове відхилення рівне нулеві, а початкова швидкість має стале значення ψ_0 на проміжку струни $x\in[x_1;x_2]$, і рівна нулеві зовні цього проміжку.

15	$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 u_x\right)=x^2 u_{yy}(x,y).$	$4y^2u_{xx}+2\left(1-y^2\right)u_{xy}-u_{yy}-$ $-2y\left(1+y^2\right)^{-1}\left(2u_x-u_y\right)=0,$ $u(x,0)=4x^3,\quad u_y(x,0)=0.$	початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення відмінне від нуля тільки на проміжку $x\in[0;\pi]$, де воно рівне $2\sin x$.
16	$u_{xx}-e^{2(x-y)}u_{yy}-u_x+$ $+e^{2(x-y)}u_y(x,y)+$ $+8e^{2x+y}=0.$	$3u_{xx}-2u_{xy}-5u_{yy}=0,$ $u(0,y)=0,\quad u_x(0,y)=1.$	початкове відхилення в усіх точках рівне нулеві, а початкова швидкість $u_t(0,x)=\begin{cases}0{,}01a, & 0\le x\le l,\\ 0, & x\notin[0;l],\end{cases}$ де $l=const>0$.
17	$u_{xx}-\left(3+\sin^2 x\right)u_{yy}-$ $-2\cos x u_{xy}+u_x+$ $+(\sin x-\cos x-2)\times$ $\times u_y(x,y)=0.$	$u_{xy}+u_{yy}=0,$ $u(0,y)=0,\quad u_x(0,y)=2.$	початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення задається рівностями $u(0,x)=\begin{cases}2h\frac{x_1-x}{x_1+x_2}, & x_1\le x\le\frac{x_1-x_2}{2},\\ 2h\frac{x_2-x}{3x_2-x_1}, & \frac{x_1-x_2}{2}<x\le x_2<0,\\ 0, & x\notin[x_1;x_2],\end{cases}$ де $h=const>0$.
18	$(x-y)u_{xy}-u_x+$ $+u_y(x,y)=0.$	$\left(1+x^2\right)u_{xx}-\left(1+y^2\right)u_{yy}+$ $+xu_x-yu_y=0,$ $u(x,0)=2x^2,\quad u_y(x,0)=x.$	початкове відхилення в усіх точках рівне нулеві, а початкова швидкість $u_t(0,x)=\begin{cases}v_0=const, & -l\le x\le 0,\\ 0, & x\notin[-l;0],\end{cases}$ де $l=const>0$.
19	$e^y u_{xy}+\cos x u_{yy}-$ $-\cos x u_y(x,y)=0.$	$u_{xx}-2u_{xy}-3u_{yy}=0,$ $u(0,y)=0,\quad u_x(0,y)=-3.$	початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення точок струни задається рівністю $u(0,x)=4x^{-1}\sin x.$

20	$u_{xy} + yu_y + u(x, y) = 0.$	$u_{xx} + 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} +$ $+ u_x + (\sin x + \cos x + 1)u_y = 0,$ $u(x, -\cos x) = 1 + 2\sin x,$ $u_y(x, -\cos x) = \sin x.$	початкове відхилення рівне нулеві, а початкова швидкість задається рівностями $u_t(0,x) = \begin{cases} 0, & \lvert x \rvert > h, \\ 0{,}02, & 0 \le x \le h, \\ -0{,}02, & -h \le x < 0, \end{cases}$ де $h = const > 0.$
21	$u_{xy} + yu_x + xu_y +$ $+ xyu(x, y) = 0.$	$yu_{xx} - (x + y)u_{xy} + xu_{yy} +$ $+ \frac{x+y}{y-x}\left(u_x - u_y\right) = 0, \quad x \ne y,$ $u(x,0) = x^3, \quad u_y(x,0) = 0.$	початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення задається рівностями $u(0,x) = \begin{cases} 0, & \lvert x \rvert > 1, \\ 0{,}01(1-x), & 0 \le x \le 1, \\ 0{,}01(1+x), & -1 \le x < 0. \end{cases}$
22	$u_{xx} - e^{-2x}u_{yy} +$ $+ u_x(x, y) = 0.$	$u_{xx} + 2\cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} -$ $- \sin x u_y = 0,$ $u(x, \sin x) = \varphi_0(x),$ $u_y(x, \sin x) = \varphi_1(x).$	початкове відхилення рівна нулеві, а початкова швидкість точок струни $u_t(0,x) = \begin{cases} 0, & \lvert x \rvert > 2, \\ 4, & -2 \le x \le 2. \end{cases}$
23	$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} +$ $+ 2u_x + 6u_y(x, y) = 0.$	$u_{xx} - \left(3 + \cos^2 x\right)u_{yy} -$ $- 2\sin x u_{xy} + u_x +$ $+ (2 - \sin x - \cos x)u_y = 0.$ $u(x, \cos x) = 0,$ $u_y(x, \cos x) = e^{-0{,}5x} \cos x.$	початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення задається рівностями $u(0,x) = \begin{cases} 0, & \lvert x \rvert > l, \\ 2h\left(1 - l^{-2}x^2\right), & -l \le x \le l, \end{cases}$ де $l, h = const > 0.$
24	$u_{xy} + u_{yy} + u_x +$ $+ u_y(x, y) = 0.$	$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0,$ $u(x,1) = 3x, \quad u_y(x,1) = 6x^2.$	початкове відхилення в усіх точках рівне нулеві, а початкова швидкість відмінна від нуля тільки на проміжку $x \in [0;2]$, де вона рівна 50^{-1}.

25	$u_{xx} - 2xu_{xy} + x^2 u_{yy} -$ $- u_y(x, y) = 0, \quad x \neq 0.$	$u_{xy} + u_y = 0,$ $u(x, x) = \sin x, \quad u_y(x, x) = e^x.$	початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення відмінне від нуля тільки на проміжку $x \in [1;2]$, де воно має форму ламаної з вершинами в точках (1;0), (1,5;4), (2;0).
26	$u_{xy} + xu_x + u(x, y) +$ $+ \cos y = 0.$	$2u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yy} = 0,$ $u(0, y) = 0, \quad u_x(0, y) = 3y.$	початкове відхилення рівне нулеві, а початкова швидкість відмінна від нуля тільки на проміжку $x \in [-2;2]$, де вона рівна 3.
27	$\operatorname{ch} x u_{xy} + (y \operatorname{ch} x +$ $+ \operatorname{sh} x) u_y =$ $= -\operatorname{ch} x u(x, y).$	$3u_{xx} - 2u_{xy} - 5u_{yy} = 0,$ $u(x,0) = 0, \quad u_y(x,0) = 2.$	початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення відмінне від нуля тільки для значень $x \in [-2;-1] \bigcup [1;2]$, де воно має форму ламаної з вершинами в точках: (-2;0), (-1,5;1), (-1;0), (1;0), (1,5;1), (2;0).
28	$u_{xy} + u_y + xu_x +$ $+ xu(x, y) + x^2 y = 0.$	$u_{xx} - yu_{yy} - 0{,}5u_y = 0, \quad y > 0,$ $u(x,1) = \cos x, \quad u_y(x,1) = 0.$	початкове відхилення в усіх точках рівне нулеві, а початкова швидкість $u_t(0, x) = \begin{cases} xc^{-2}(2c - x), & c \leq x \leq 2c, \\ 0, & x \notin [c;2c], \end{cases}$ де $c = const > 0.$
29	$u_{xx} + xyu_{yy} + 0{,}5xu_y -$ $- (2x)^{-1} u_x(x, y) = 0,$ $x < 0, \quad y > 0.$	$u_{xy} + u_x = 0,$ $u(x, x) = e^{-x}, \quad u_y(x, x) = 0.$	початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення $u(0, x) = \begin{cases} 0, & \lvert x \rvert > 2, \\ 4 - x^2, & -2 \leq x \leq 2. \end{cases}$
30	$(e^x + e^y) u_{xy} + e^x u_y +$ $+ e^y u_x(x, y) = 0.$	$u_{xy} + u_{yy} + u_y = 0,$ $u(x,2x) = x, \quad u_y(x,2x) = e^{-x}.$	початкове відхилення рівне нулеві, а початкова швидкість задається рівностями $u_t(0, x) = \begin{cases} 0, & \lvert x \rvert > 1, \\ 25^{-1}, & 0 \leq x \leq 1, \\ -25^{-1}, & -1 \leq x < 0. \end{cases}$

ТЕМА III
ЗМІШАНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ. МЕТОДИ ХАРАКТЕРИСТИК ТА ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ

Вивчити*:

1. Фізичні процеси, які приводять до змішаних задач для рівнянь гіперболічного типу. Постановка змішаних задач.
2. Вільні коливання скінченої струни. Метод відокремлення змінних (метод Фур'є).
3. Обґрунтування методу Фур'є.
4. Фізична інтерпретація розв'язку змішаної задачі у випадку вільних коливань скінченої струни.
5. Вимушені коливання скінченої струни. Метод Фур'є.
6. Змішані задачі зі стаціонарними неоднорідностями.
7. Загальна схема методу відокремлення змінних.
8. Обґрунтування загальної схеми методу Фур'є для рівнянь гіперболічного типу.
9. Вільні коливання прямокутної мембрани. Метод відокремлення змінних та його обґрунтування. Фізична інтерпретація розв'язку.
10. Єдиність розв'язку змішаної задачі.
11. Неперервна залежність розв'язку змішаної задачі від початкових умов.

Розв'язати задачі: №№ 72-74, 77, 86, 93-96, 102, 106, 108, 109, 122 згідно [4], або розділ II, тема 3, №№ 2, 3, 5, 7, 10, 11, 13, 15_1, 15_5, 15_7 згідно [6], с. 162-164.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1. Постановка змішаних задач для рівнянь гіперболічного типу

При дослідженні фізичних процесів різної природи, які відбуваються в об'єктах скінчених або напівнескінчених розмірів, необхідно враховувати відповідні режими на краї заданих об'єктів, оскільки вони суттєво впливають на розглядуваний процес.

Отже, при складанні математичних моделей, наприклад, хвильових процесів, які проходять в таких об'єктах, окрім хвильового рівняння та початкових умов, слід задати також умови на краї об'єкта (крайові умови), що приводить до змішаних задач для ДРЧП.

---

*[3], розділ II, §1, стор. 38-47, §3, стор. 82-118, розділ V, §3, стор. 416-431, або [6], розділ II, §§2.15-2.23, стор. 96-161.

Для прикладу розглянемо наступну задачу: вивчити процес вільних коливань однорідної скінченої мембрани **D** з краєм **S**, якщо початкові відхилення точок мембрани рівні $\varphi(x,y)$, початкова їх швидкість рівна $\psi(x,y)$, а

1) край мембрани **S** рухається згідно заданого закону $\mu(t,x,y)$;

2) на край мембрани діє сила $\nu(t,x,y)$;

3) край мембрани пружньо закріплений.

Зауважимо, що у випадку $\mu(t,x,y)\equiv 0$ кажуть, що край мембрани ***нерухомо (жорстко) закріплений***; якщо ж $\nu(t,x,y)\equiv 0$, то край називають ***вільним***.

Відповідна математична модель: в області $\mathbf{B}=\{(t,x,y) \mid t>0, \quad (x,y)\in\mathbf{D}\}$ знайти розв'язок хвильового рівняння

$$U_{tt}(t,x,y)=a^2\left(U_{xx}+U_{yy}\right), \tag{1}$$

який справджує початкові умови

$$U(0,x,y)=\varphi(x,y), \quad U_t(0,x,y)=\psi(x,y), \quad (x,y)\in\mathbf{D}\cup\mathbf{S}, \tag{2}$$

та одну з відповідних крайових умов:

$$1)\ U\big|_{\mathbf{S}}=\mu(t,x,y), \quad t>0, \quad (x,y)\in\mathbf{S}, \tag{3}$$

$$2)\ \left.\frac{\partial U}{\partial\vec{n}}\right|_{\mathbf{S}}=k\nu(t,x,y), \quad t>0, \quad (x,y)\in\mathbf{S}, \tag{4}$$

де $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до **S**, k – коефіцієнт пропорційності,

$$3)\ \left[\frac{\partial U}{\partial\vec{n}}-hU\right]_{\mathbf{S}}=\gamma(t,x,y), \quad t>0, \quad (x,y)\in\mathbf{S}, \tag{5}$$

де $h=const>0$ – коефіцієнт жорсткості, $\gamma(t,x,y)$ – закон руху межі пружнього закріплення.

Якщо початкові та крайові умови не протирічні, тобто, наприклад, у випадку першої крайової умови (3)

$$\mu(0,x,y)=\varphi(x,y)\big|_{(x,y)\in\mathbf{S}}, \quad \mu_t(0,x,y)=\psi(x,y)\big|_{(x,y)\in\mathbf{S}},$$

то кажуть, що початкові та крайові умови є ***узгодженими***.

Задачі (1),(2),(3); (1),(2),(4); (1),(2),(5) називаються відповідно першою, другою та третьою основними змішаними задачами для рівняння (1).

Аналогічно ставляться змішані задачі для рівнянь гіперболічного типу і у випадку довільної вимірності простору.

2. Метод характеристик побудови розв'язку змішаних задач для напівнескінченої струни

Означення. Струна називається ***напівнескінченою***, якщо один з її кінців розміщений в початку координат $x=0$, а інший знаходиться на такій відстані від початку координат, яка значно перевищує величину at (t – час, a – стала, яка фіґурує в рівнянні коливань струни).

Розглянемо спочатку наступну задачу: вивчити процес вільних коливань однорідної напівнескінченої струни, якщо початкове відхилення точок струни та їх початкова швидкість відповідно рівні $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, а лівий кінець нерухомо закріплений.

Відповідна математична модель: в області $\mathbf{B}=\{(t,x)|\quad 0<t\le T,\quad x>0\}$, де $T=const>0$, знайти розв'язок ДРЧП

$$U_{tt}(t,x)=a^2U_{xx}, \tag{6}$$

який справджує початкові умови

$$U(0,x)=\varphi(x),\quad U_t(0,x)=\psi(x),\quad x\ge 0, \tag{7}$$

та крайову умову в точці $x=0$:

$$U(t,0)=0,\quad 0\le t\le T. \tag{8}$$

Для побудови розв'язку змішаної задачі (6),(7),(8) застосуємо метод характеристик. Як було показано в темі II, загальний розв'язок рівняння (6) подається у вигляді

$$U(t,x)=f_1(x-at)+f_2(x+at), \tag{9}$$

де $f_1(z)$ і $f_2(z)$, $z=x\pm at$ – довільні функції, визначені при $z\in(-\infty,+\infty)$. Оскільки в нашому випадку функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ визначені тільки при $x\ge 0$, то згідно початкових умов (7) при $x-at>0$ маємо:

$$f_1(x-at)=\frac{1}{2}\varphi(x-at)+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{0}\psi(z)dz-C, \tag{10}$$

$$f_2(x+at)=\frac{1}{2}\varphi(x+at)+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{x+at}\psi(z)dz+C, \tag{11}$$

тобто

$$U(t,x)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz,\quad x-at>0. \tag{12}$$

Визначимо розв'язок змішаної задачі (6),(7),(8) при $x-at<0$. При цьому зауважимо, що функція $f_2(x+at)$ визначена формулою (11) для всіх $x\ge 0$, $t\ge 0$. Знайдемо функцію $f_1(x-at)$ при $x-at<0$. Для цього використаємо крайову умову (8). Підклавши (9) у (8), дістанемо

$$f_1(-at)+f_2(at)=0,\quad t>0. \tag{13}$$

Покладемо $-at=z$. Тоді на підставі (13)

$$f_1(z)=-f_2(-z),\quad z<0.$$

Застосувавши формулу (11), визначаємо $f_1(x-at)$ при $x-at<0$:

$$f_1(x-at)=-f_2(at-x)=-\frac{1}{2}\varphi(at-x)-\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{at-x}\psi(z)dz-C. \tag{14}$$

Підклавши (14) і (11) у (9), знаходимо розв'язок задачі (6),(7),(8) для значень $x-at<0$:

$$U(t,x)=\frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(z)dz,\quad x-at<0. \qquad (15)$$

Таким чином, розв’язок змішаної задачі (6),(7),(8) дається формулою Д’Аламбера (12) при $x-at>0$ і формулою (15) при $x-at<0$.

<u>Ґеометрична інтерпретація побудови розв’язку задачі (6),(7),(8)</u>. Шлях побудови розв’язку змішаної задачі складається із двох етапів.

1. Загальний розв’язок (9) ДРЧП (6) підкладаємо в початкові умови (7) і знаходимо функції $f_1(x-at)$ та $f_2(x+at)$ в точках осі Ox.

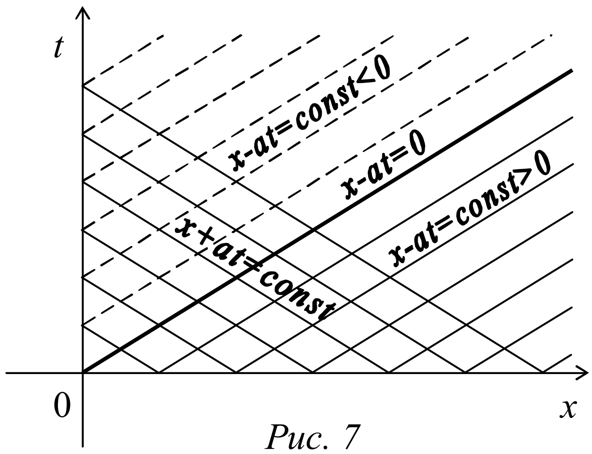


Рис. 7

Тепер функція $f_1(x-at)$ відома на всіх характеристиках $x-at=const>0$, оскільки $f_1(x-at)$ стала вздовж таких характеристик (рис. 7). Ці характеристики заповнюють усю область $x-at>0$.

З іншого боку, хвиля $f_2(x+at)$ відома для всіх $x>0$, $t>0$. Дійсно, вона є сталою на характеристиках $x-at=const$, а такі характеристики, випущені з точок осі Ox, покривають усю область $x>0$, $t>0$.

Отже, початкові умови дають можливість визначити розв’язок змішаної задачі (6),(7),(8) в тій частині області $x>0$, $t>0$, де на рис. 7 проходять характеристики $x-at=const>0$ і $x+at=const$, тобто під головною характеристикою $x-at=0$. Із рисунку бачимо, що над головною характеристикою $x-at=0$ пряма хвиля $f_1(x-at)$ не відома, але відома зворотня хвиля $f_2(x+at)$.

2. Підкладаємо загальний розв’язок (9) у крайову умову (8), яка задана в точках осі Ot. Хвиля $f_2(x+at)$ в цих точках визначена з початкових умов. Таким чином, крайова умова (8) дає можливість встановити співвідношення між прямою та зворотньою хвилями в точках осі Ot, звідки визначаємо $f_1(x-at)$ в цих точках. Але тоді пряма хвиля $f_1(x-at)$ визначається і на характеристиках $x-at=const<0$ (пунктирні лінії над головною характеристикою), тобто розв’язок змішаної задачі $U(t,x)$ побудований у всій області $x<at$.

Означення. В області $0<x<at$ функція $f_2(x+at)$ називається хвилею, ***падаючою*** на лівий кінець струни $x=0$, а $f_1(x-at)$ – ***відображеною (відбитою)*** хвилею від цього кінця.

У зв’язку з цим визначенням розглянутий метод побудови розв’язків змішаних задач називають також методом падаючої та відбитої хвиль.

Умова неперервності розв'язку змішаної задачі (6),(7),(8) уздовж головної характеристики. Із викладеного вище випливає, що розв'язок змішаної задачі (6).(7),(8) дається формулою Д'Аламбера (12) при $x-at>0$ і формулою (15) при $x-at<0$. У зв'язку з цим уздовж головної характеристики цей розв'язок може бути розривним.

Знайдемо умову неперервності розв'язку змішаної задачі (6),(7),(8) уздовж лінії $x-at=0$. Для цього відзначимо, що розрив довільного розв'язку рівняння (6) уздовж головної характеристики є величина стала. Дійсно, хвиля $f_2(x+at)$ неперервна при переході через головну характеристику, оскільки її лінії рівня $x+at=const$ перетинають пряму $x=at$, а хвиля $f_1(x-at)$ під і над головною характеристикою $x-at=0$ має границі, рівні відповідно $f_1(0+)$ та $f_1(0-)$. Таким чином,

$$U\big|_{x-at=0+}-U\big|_{x-at=0-}=f_1(0+)-f_1(0-),$$

а отже, умова неперервності розв'язку змішаної задачі (6),(7),(8) на головній характеристиці має вигляд

$$f_1(0+)=f_1(0-),$$

або, беручи до уваги (10), (14), одержуємо:

$$f_1(0+)=0{,}5\varphi(0)-C,\quad f_2(0-)=-0{,}5\varphi(0)+C,$$

тобто $0{,}5\varphi(0)=-0{,}5\varphi(0)$, звідки

$$\varphi(0)=0. \tag{16}$$

Умова (16) є умовою узгодженості початкових (7) та крайової (8) умов (умова неперервності граничних значень розв'язку $U(t,x)$ в початку координат $x=0$, $t=0$.

Висновок. Умова (16) узгодженості початкових та крайової умов змішаної задачі (6),(7),(8) є необхідною і достатньою умовою неперервності розв'язку на всій головній характеристиці $x-at=0$.

Напівнескінчена струна з вільним кінцем. Аналоґічно будуються розв'язки змішаних задач для напівнескінченої струни і у випадку інших крайових умов. Наприклад, якщо кінець струни $x=0$ вільний, то крайова умова запишеться у вигляді

$$U_x(t,0)=0. \tag{17}$$

Розв'яжемо змішану задачу (6),(7),(17).

Якщо $x>at$, то має силу формула Д'Аламбера (12). Визначимо $f_1(x-at)$ у випадку, коли $x-at<0$. Для цього підкладаємо загальний розв'язок (9) у крайову умову (17). Маємо:

$$f_1'(-at)+f_2'(at)=0,\quad t>0,$$

звідки, ввівши позначення $z=-at$, дістанемо

$$f_1'(z)+f_2'(-z)=0,\quad z<0.$$

Інтеґруючи останню рівність по z, маємо:

$$f_1(z)-f_2(-z)=C_1=const. \tag{18}$$

Беручи до уваги (11), із (18) одержуємо:

$$f_1(x-at)=f_2(at-x)+C_1=-\frac{1}{2}\varphi(at-x)+\frac{1}{2a}\int_0^{at-x}\psi(z)dz+C_1+C,$$

тобто при $x-at<0$

$$U(t,x)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\left[\int_0^{x+at}\psi(z)dz+\int_0^{at-x}\psi(z)dz\right]+C_1+2C,\quad x-at<0.$$

Із умови неперервності розв'язку змішаної задачі на головній характеристиці $x-at=0$ маємо:

$$f_1(0+)=0{,}5\varphi(0)-C,\quad f_2(0-)=0{,}5\varphi(0)+C_1+C,$$

тоді $0{,}5\varphi(0)-C=0{,}5\varphi(0)+C_1+C$, звідки $C_1+C=0$. Отже,

$$U(t,x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz, & x-at>0,\\[2ex] \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\left[\displaystyle\int_0^{x+at}\psi(z)dz+\int_0^{at-x}\psi(z)dz\right], & x-at<0.\end{cases}$$

Зауваження. Для розглянутих задач ми будували тільки неперервні розв'язки, оскільки розривні розв'язки для змішаних задач у випадку коливань струни або стержня не мають фізичного змісту (розрив розв'язку означає розрив струни або стержня). Однак у теорії акустики чи ґазовій динаміці розривні розв'язки мають фізичний зміст і називаються ударними хвилями.

3. Ґеометричне зображення процесу вільних коливань напівнескінченої струни

Для ґеометричного зображення процесу вільних коливань напівнескінченої струни, окрім викладеного вище загального методу характеристик, іноді зручно застосувати також методи парного та непарного продовження. Проілюструємо дані методи на прикладах.

Метод непарного продовження. Нехай потрібно ґеометрично зобразити розв'язок змішаної задачі (6),(7),(8) для значень $t=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,$ якщо $a=1$, а в початкових умовах (7)

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\in[0;3)\bigcup[5;+\infty),\\ x-3, & 3\le x<4,\\ 5-x, & 4\le x<5,\end{cases}\qquad \psi(x)\equiv 0. \tag{7a}$$

Розглянемо розв'язок $Z(t,x)$ задачі Коші

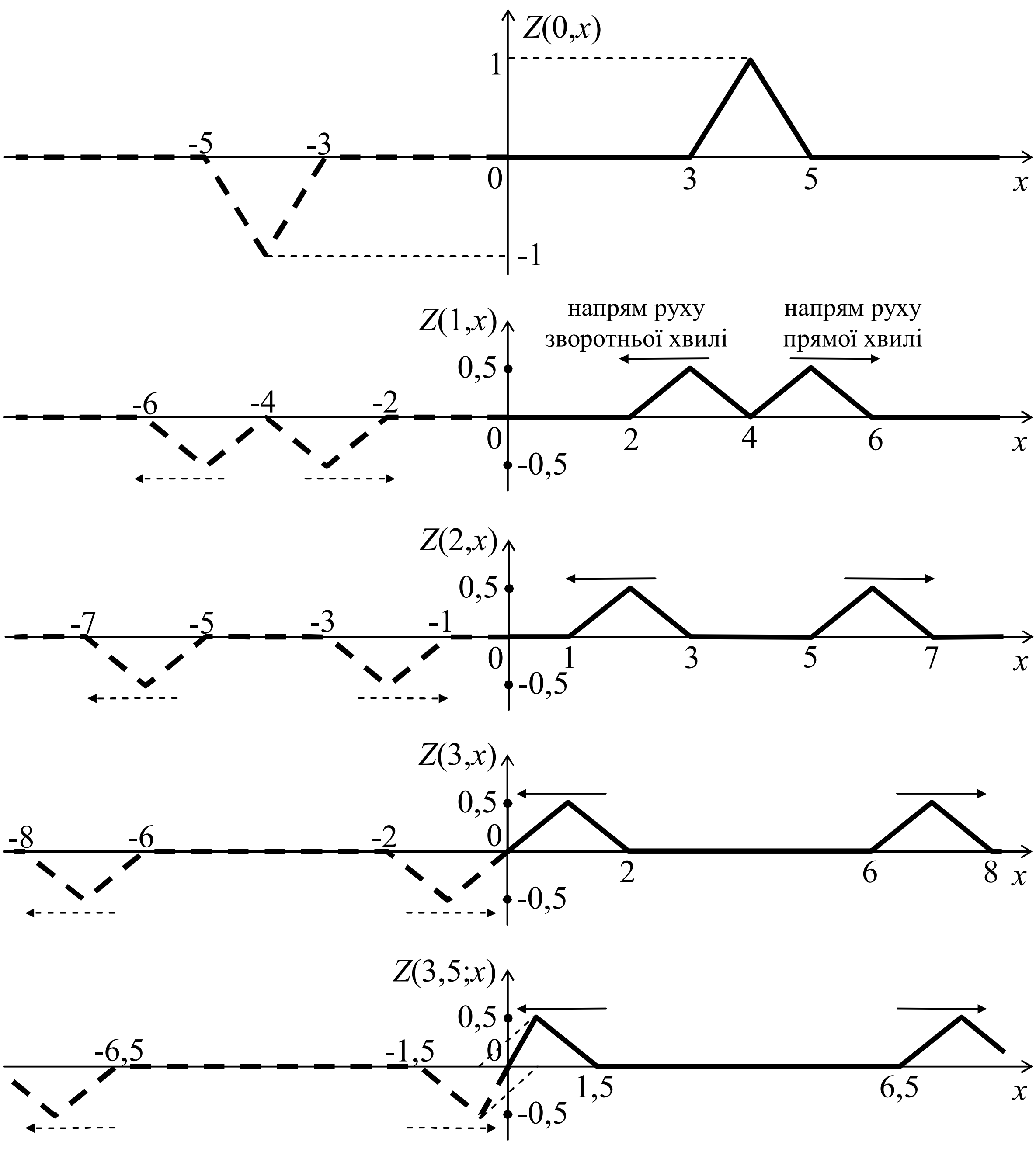
$$
\begin{aligned}
&Z_{tt} = Z_{xx}(t,x), \quad t>0, \quad x\in(-\infty,+\infty),\\
&Z(0,x) = \varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x\ge 0,\\ -\varphi(-x), & x<0, \end{cases} \quad Z_t(0,x)=0.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Покладемо

$$U(t,x) = Z(t,x)\big|_{x\ge 0}.$$

Тоді очевидно, що функція $U(t,x)$ справджуватиме рівняння (6) і початкові умови (7). Далі покажемо, що в силу непарності функції $Z(t,x)$ по змінній x $U(t,x)$ справджує і крайову умову (8).

Зобразимо ґрафічно розв’язок задачі Коші (19) для $t=0$, 1, 2, 3, 4, 5 (див. попередню тему).



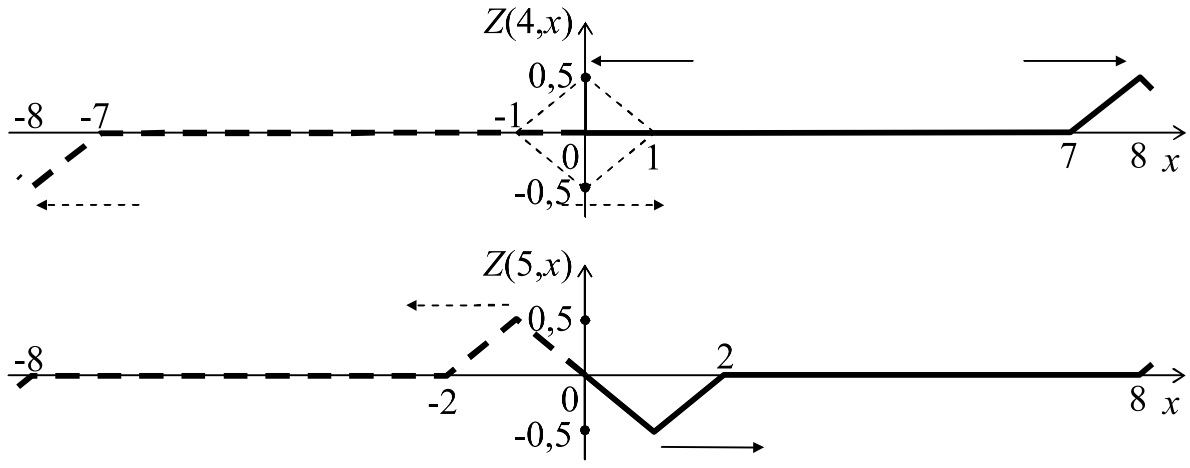


Рис. 8

Як бачимо з ґрафіків на рис. 8, крайова умова (8) виконується для всіх $t \geq 0$, оскільки функція $Z(t,x)$ є непарною по змінній *x*. Суцільною лінією зображено функцію $U(t,x)$; область $x<0$ будемо називати ***фіктивною***.

Аналоґічно можна ґрафічно зобразити процес вільних коливань напівнескінченої струни, які здійснюються тільки за рахунок початкової швидкості, тобто в змішаній задачі (6),(7),(8) $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \neq 0$.

Для прикладу розглянемо коливання напівнескінченої однорідної струни із закріпленим кінцем, які здійснюються внаслідок удару по ній молоточком (коливання струни рояля). Такий процес приводить до відшукання розв'язку змішаної задачі (6),(7),(8), де $\varphi(x) \equiv 0$, а початкова швидкість має вигляд, зображений на рис. 9а.

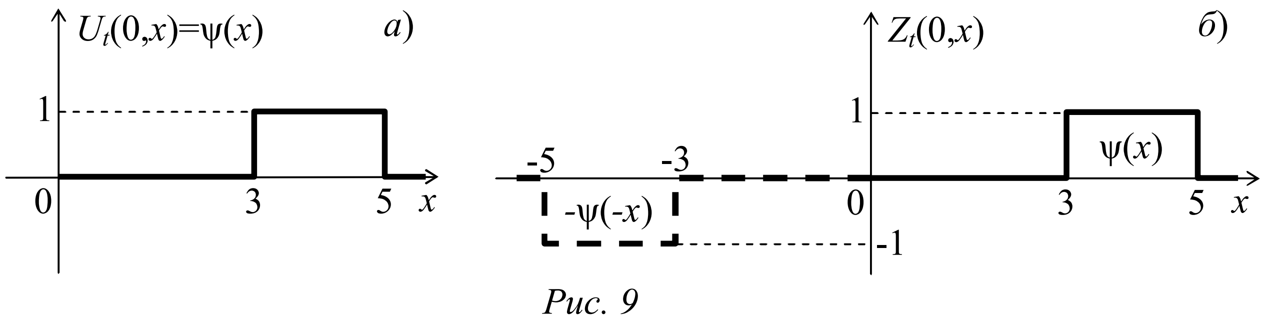


Рис. 9

Зобразимо профіль струни при $t = 1$, 2, 3, 4, 5, 6. Для цього в задачі Коші (19) покладемо

$$Z(0,x)=0, \quad Z_t(0,x)=\begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ -\psi(-x), & x<0 \end{cases}$$

(рис. 9б). У нашому випадку (див. тему II) $Z(t,x)=\Psi(x+t)-\Psi(x-t)$, де

$$\Psi(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} Z_t(0,\xi)d\xi.$$

Маємо:

$$\Psi(x) = \begin{cases} -0{,}5(x+5), & -5 \le x < -3, \\ -1, & -3 \le x < 3, \\ 0{,}5(x-5), & 3 \le x < 5, \\ 0, & |x| > 5 \end{cases}$$

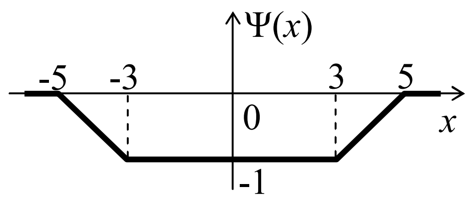
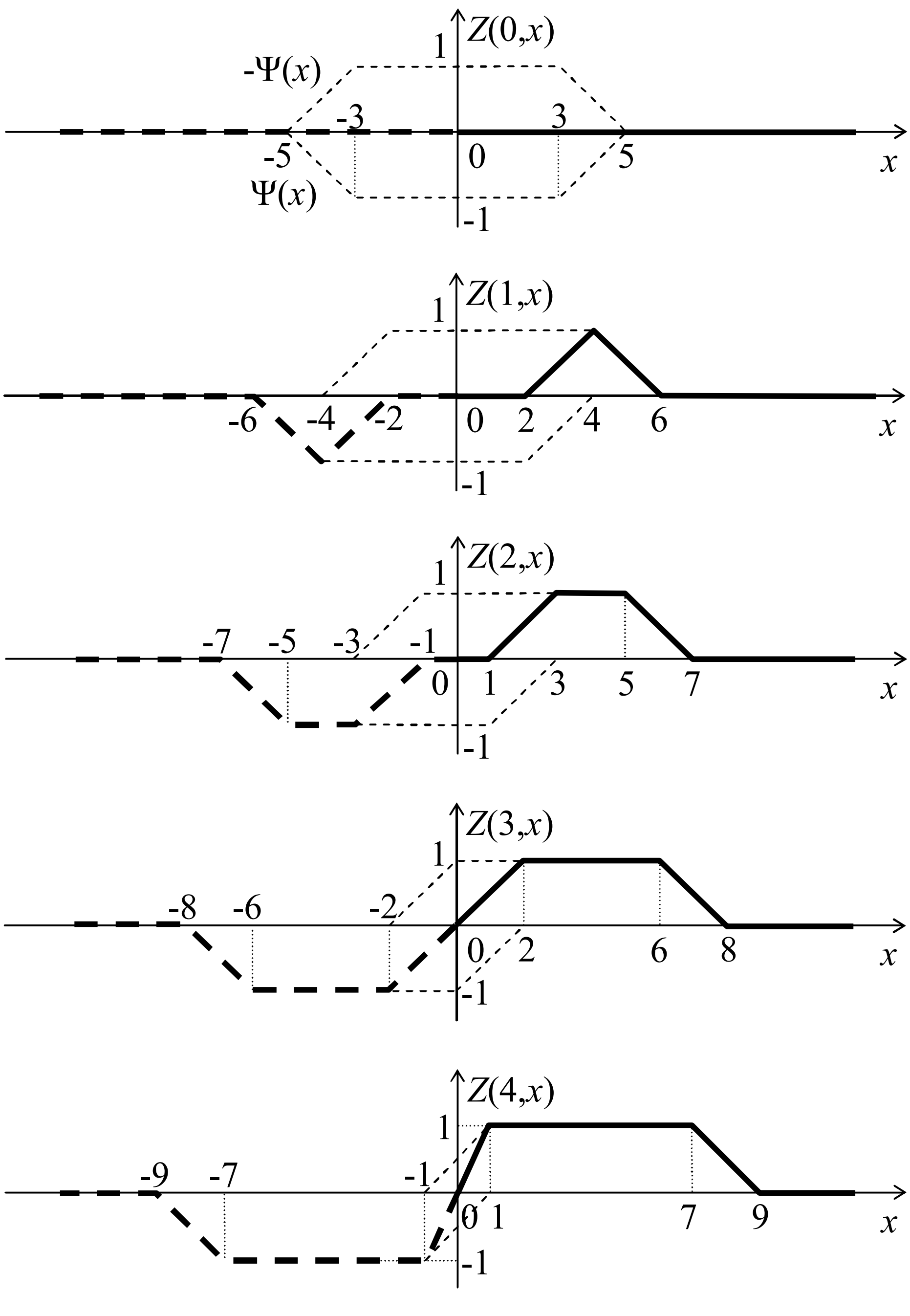


Рис. 10

(рис. 10). Покажемо, що і в цьому випадку

$$U(t,x) = Z(t,x)\big|_{x \ge 0}.$$

Дійсно, функція $U(t,x)$ справджує рівняння (6) і початкові умови (7). Зобразимо ґрафічно профіль струни в різні моменти часу (рис. 11) і переконаємося, що крайова умова (8) також виконується.



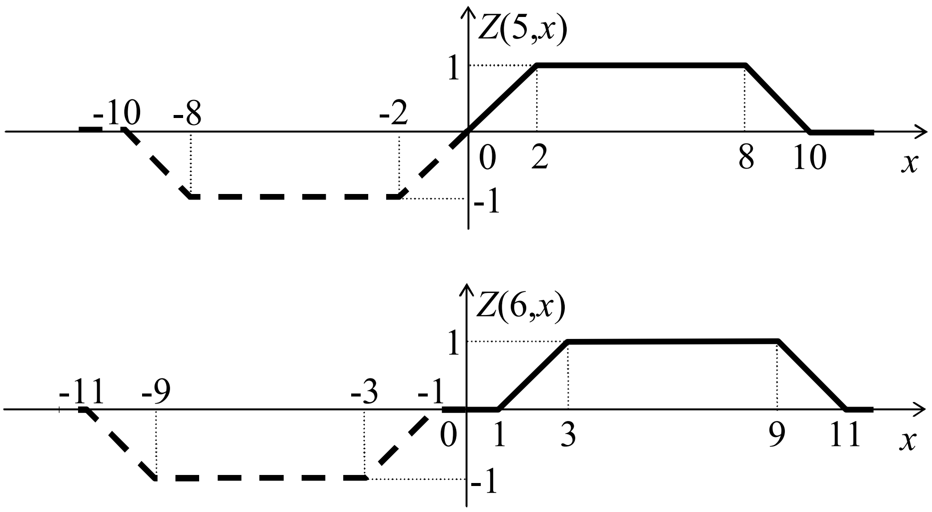


Рис. 11

Далі з ростом часу t трапеція рухатиметься в напрямку осі Ox, а у фіктивній області – в зворотньому напрямку. Крайова умова (8), очевидно, виконується для довільного t.

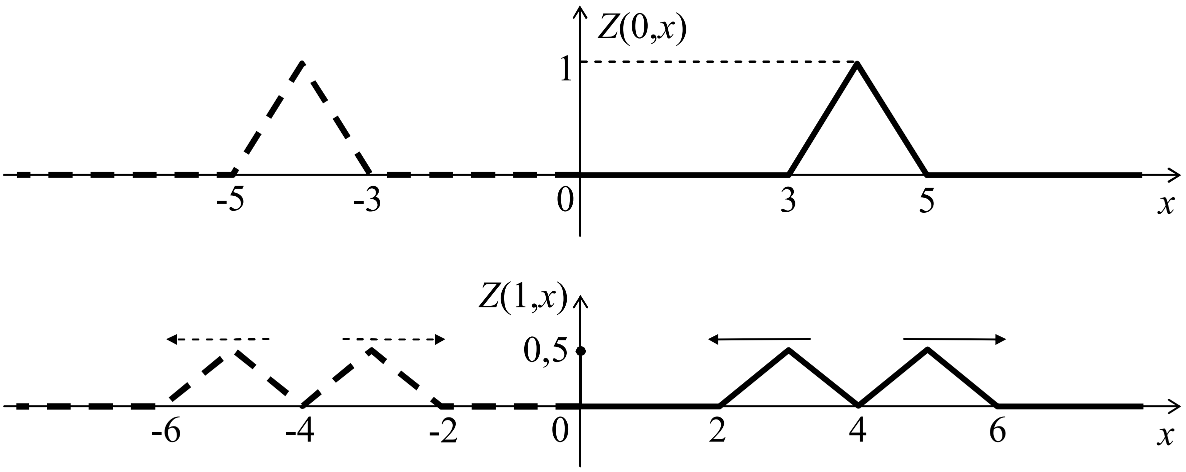
<u>Метод парного продовження.</u> Для ілюстрації методу парного продовження зобразимо ґрафічно розв'язок задачі (6),(7),(17) при $t=1,\ 2,\ 3,\ 3\frac{1}{2},\ 4,\ 4\frac{1}{2},$ 5, якщо $a=1$, а початкові функції в (7) визначаються згідно формул (7а).

Розглядаємо задачу Коші

$$Z_{tt}=Z_{xx}(t,x),\quad t>0,\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

$$Z(0,x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\ge 0,\\ \varphi(-x), & x<0,\end{cases}\quad Z_t(0,x)=0. \tag{19a}$$

Маємо:



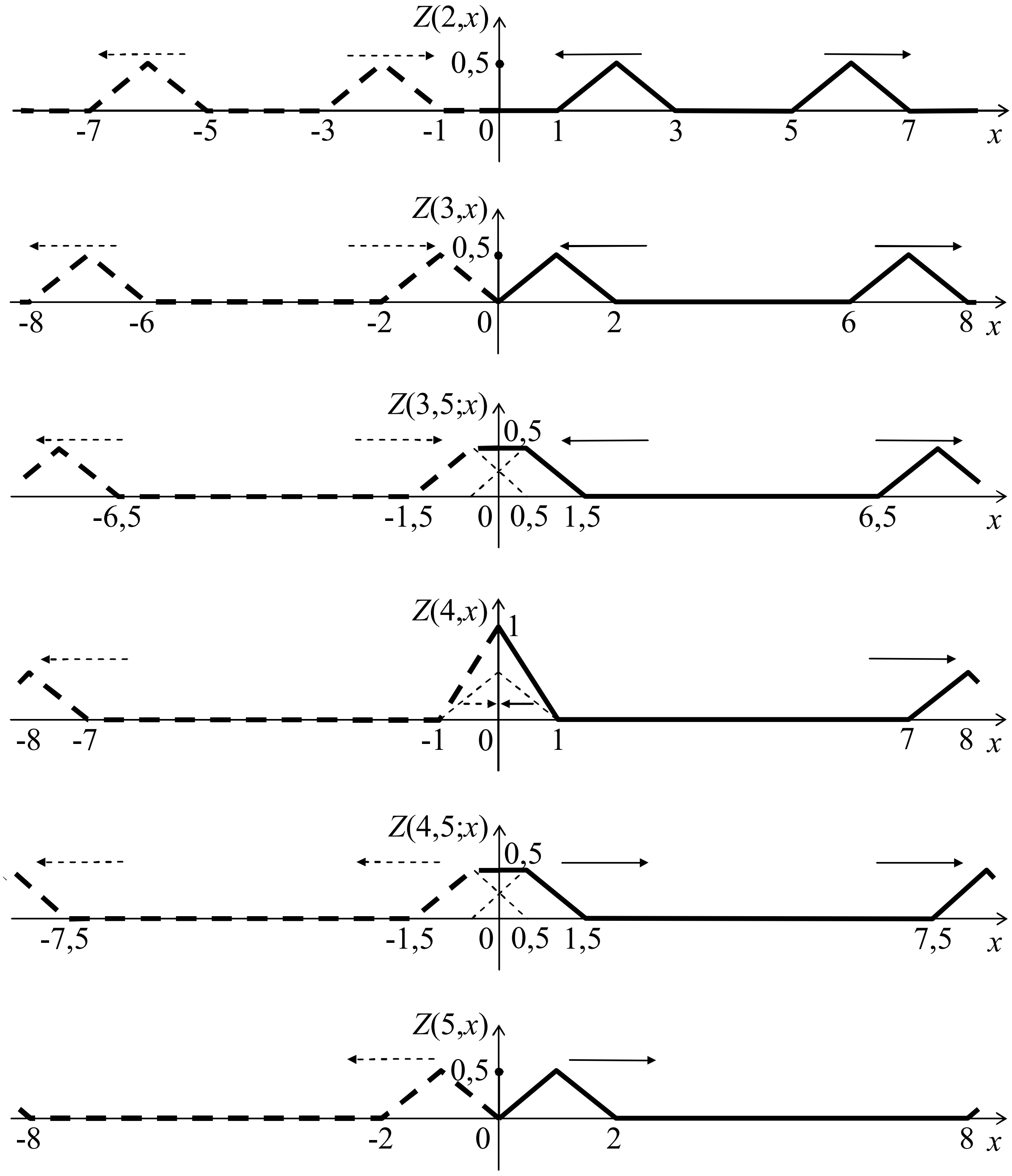


Рис. 12

Із наведених вище ґрафіків (рис. 12) бачимо, що функція $U(t,x)=Z(t,x)\big|_{x\geq 0}$ (на ґрафіках зображена суцільною лінією) є розв'язком поставленої змішаної задачі (6),(7),(17), де $a=1$, а початкові функції визначаються формулами (7а). Стрілками показано напрям руху хвиль.

Зауважимо, що кінець струни вільний, тобто, на відміну від розглянутих раніше випадків (рис. 8, 11), він рухається уздовж осі ординат.

4. Метод характеристик побудови розв'язку змішаних задач для скінченої струни

Процес вільних коливань однорідної струни довжини l з нерухомо закріпленими кінцями, який здійснюється за рахунок початкового відхилення $\varphi(x)$ та початкової швидкості $\psi(x)$, зводиться до змішаної задачі:

в області $\mathbf{B}=\{(t,x)|\quad t>0,\quad x\in(0;l)\}$ знайти розв'язок диференціального рівняння (6), який справджує початкові умови (7) при $x\in[0;l]$, а також крайові умови

$$U(t,0)=0,\quad U(t,l)=0,\quad t\geq 0. \tag{8a}$$

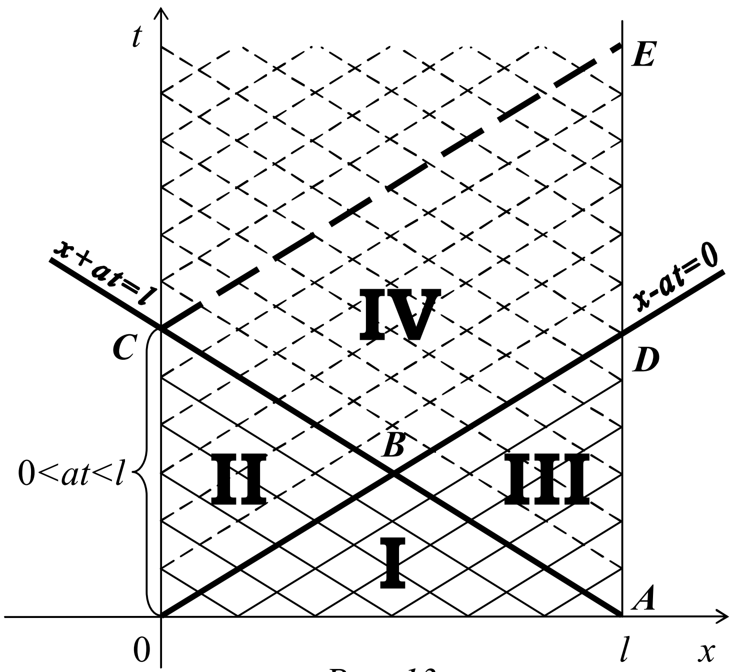


Рис. 13

Для побудови розв'язку змішаної задачі (6),(7),(8а) застосуємо метод характеристик (див. рис. 13).

Загальний розв'язок диференціального рівняння (6) подається у вигляді (9). Оскільки початкові умови в нашому випадку задані в точках $t=0$, $x\in[0;l]$, то на підставі (7) розв'язок змішаної задачі (6),(7), (8а) при $0\leq x\pm at\leq l$ дається формулою Д'Аламбера (на рисунку область **I**).

Підкладаючи загальний розв'язок (9) у крайову умову $U(t,0)=0$, знаходимо відображену хвилю $f_1(x-at)$ за відомою падаючою хвилею $f_2(x+at)$ в точках відрізка *OC*. Це дає можливість побудувати розв'язок розглядуваної змішаної задачі в області **II** (трикутник *OBC*).

Використовуючи другу крайову умову $U(t,l)=0$, знаходимо відображену хвилю $f_2(x+at)$ за відомою падаючою хвилею $f_1(x-at)$ в точках відрізка *AE*. Це дає можливість знайти шуканий розв'язок в областях **III** і **IV** (трикутник *ACE*). Повторюючи наведені вище міркування, можна побудувати розв'язок змішаної задачі (6),(7),(8а) у всій області **B**.

Таким же чином будуються розв'язки змішаних задач для рівняння вільних коливань струни у випадку крайових умов більш складного вигляду за (8а).

Геометричне зображення процесу вільних коливань скінченої струни. Розглянемо задачу: зобразити ґрафічно профіль однорідної (a=1) струни довжини l=6 з нерухомо закріпленими кінцями при $t=\overline{1{,}12}$, якщо коливання струни здійснюються тільки за рахунок початкового відхилення

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0, & x\in[0;3]\bigcup[5;6],\\ x-3, & 3<x\le 4,\\ 5-x, & 4<x<5.\end{cases}$$

Визначити період T коливань струни.

Розв'язання. Згідно умови задачі в області $\mathbf{B}=\{(t,x)\mid\ t>0,\ \ x\in(0;6)\}$ потрібно знайти розв'язок рівняння вільних коливань струни

$$U_{tt}(t,x)=U_{xx}, \tag{20}$$

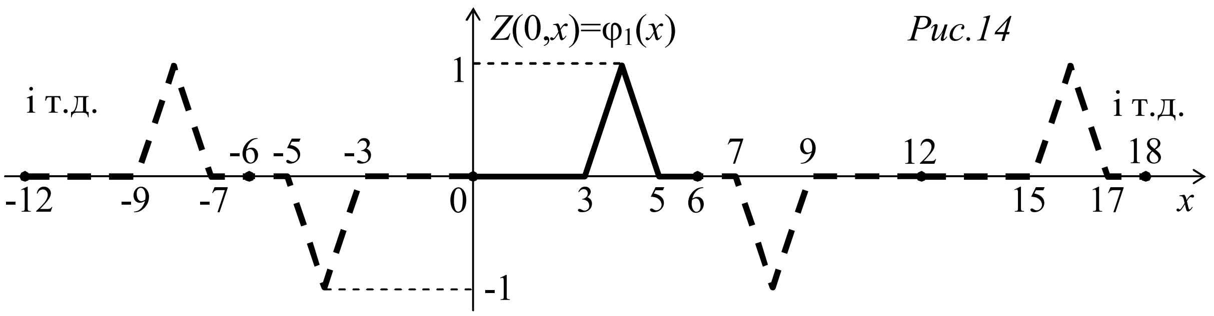
який справджує початкові

$$U(0,x)=\varphi(x),\quad U_t(0,x)=0,\quad x\in[0;6], \tag{21}$$

та крайові умови

$$U(t,0)=0,\quad U(t,6)=0,\quad t\ge 0. \tag{22}$$

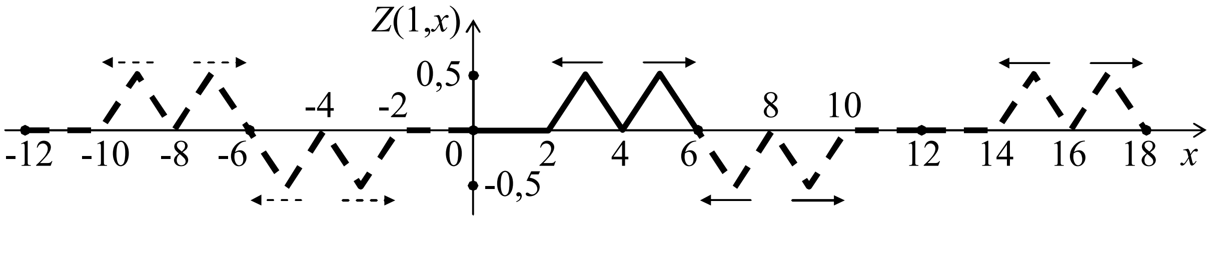
Для зображення розв'язку змішаної задачі (20)-(22) розглянемо задачу Коші (19), де $\varphi_1(x)=\varphi(x)$ при $x\in[0;6]$, а на проміжках $(-\infty;0)$ і $(6;+\infty)$ будуємо її наступним чином. Продовжуємо функцію $\varphi(x)$ на відрізок [6;12] непарним чином відносно прямої $x=6$, а тоді одержаний на відрізку [6;12] ґрафік продовжуємо непарним чином відносно прямої $x=12$ на відрізок [12;18] і т.д. Аналогічно будується функція $\varphi_1(x)$ і на проміжку $(-\infty;0)$ (рис. 14).

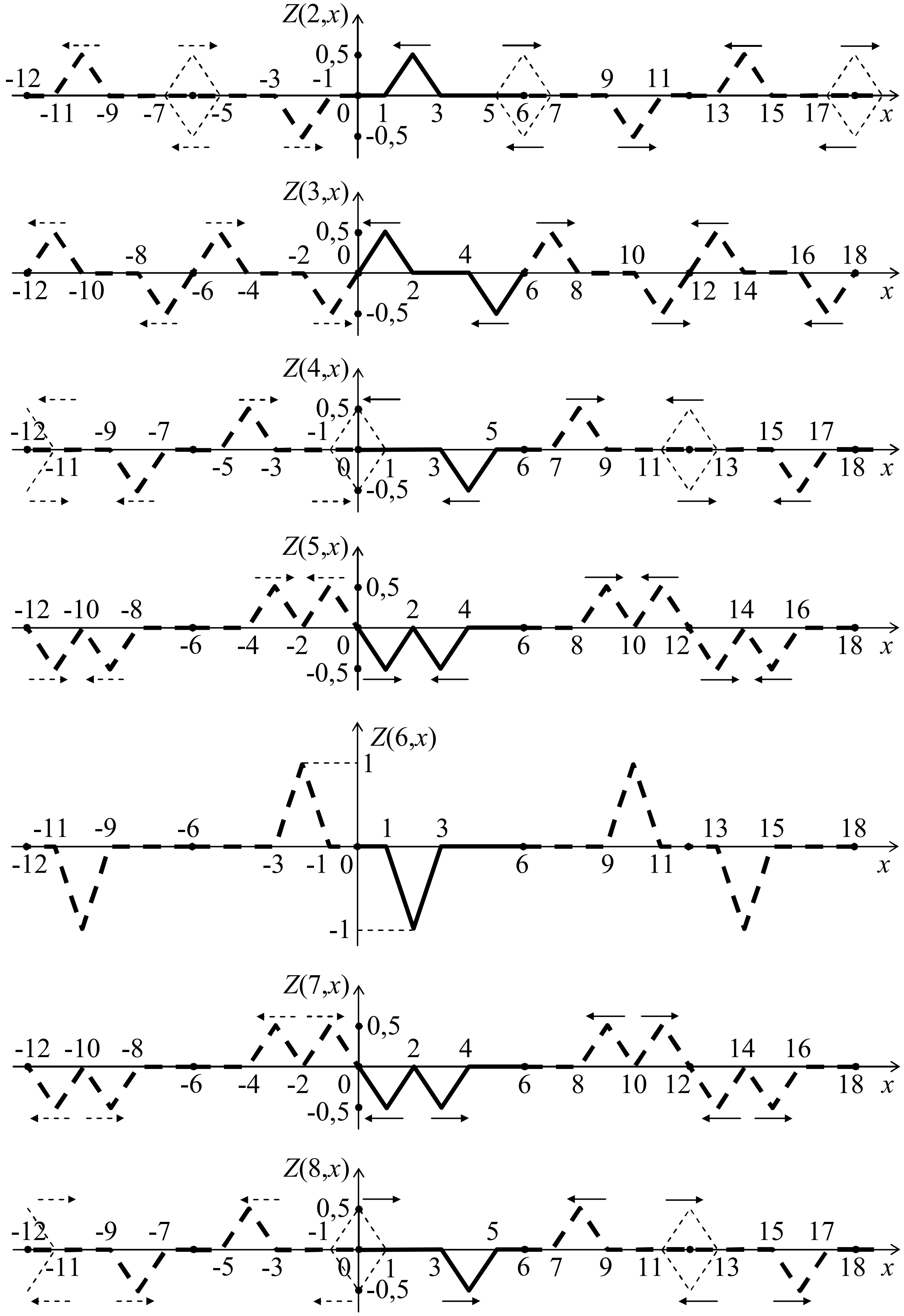


Покажемо, що функція

$$U(t,x)=Z(t,x)\big|_{x\in[0;6]} \tag{23}$$

є розв'язком змішаної задачі (20)-(22). Дійсно, функція $U(t,x)$, визначена згідно (23), справджує рівняння (20) і початкові умови (21). При $t=\overline{1,12}$ маємо:




Z(2,x)
Z(3,x)
Z(4,x)
Z(5,x)
Z(6,x)
Z(7,x)
Z(8,x)

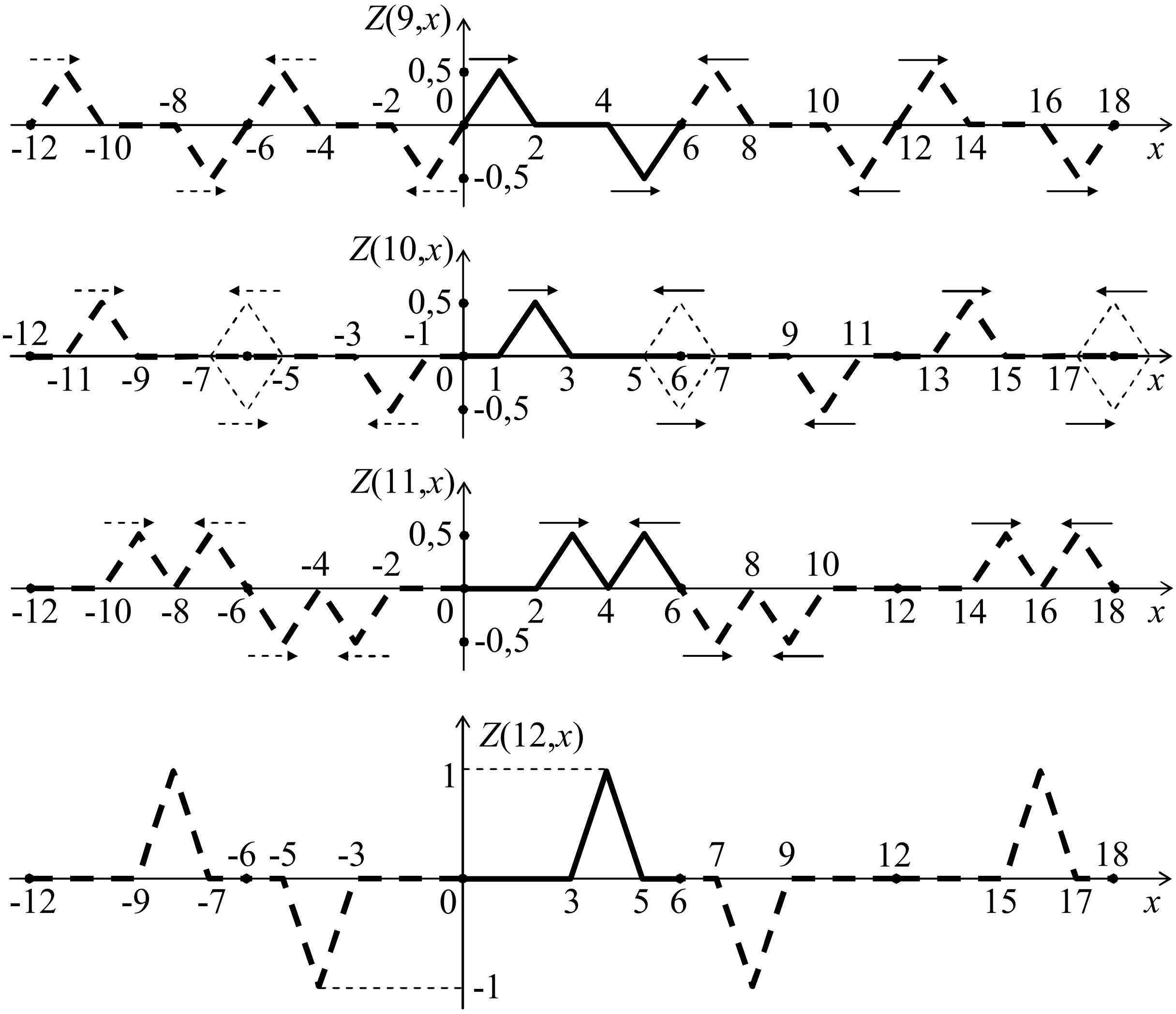


Рис.15

Таким чином, за час $t=12$ цикл замкнувся, отже, період коливань струни $T=12=2la^{-1}$. Із ґрафіків на рис. 15 видно, що функція $U(t,x)$, визначена згідно формули (23), справджує і крайові умови (22), тобто вона є розв'язком змішаної задачі (20)-(22).

Розглянутий метод побудови профілю струни називається методом непарних відображень. У випадку, коли кінці струни вільні, тобто крайові умови мають вигляд $U_x(t,0)=U_x(t,l)=0$, для побудови профілю струни в довільний момент часу застосовують метод парних відображень (продовження ґрафіків здійснюють парним чином). Якщо ж один із кінців струни вільний, а інший – нерухомо закріплений, то для ґрафічного зображення доводиться комбінувати методи парного та непарного відображень. Зокрема, якщо крайові умови мають вигляд $U_x(t,0)=U(t,l)=0$, то початкові функції продовжують парним чином відносно прямої $x=0$ і непарним – відносно прямої $x=l$.

5. Метод відокремлення змінних

Одним з найбільш поширених методів інтеґрування змішаних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними є ***метод відокремлення змінних***, або ***метод Фур'є***. На жаль, цей метод не є універсальним. Його можна застосовувати тільки до лінійних рівнянь деякого спеціального вигляду.

а) <u>Лінійні однорідні рівняння з однорідними крайовими умовами.</u> Викладемо схему методу Фур'є для змішаної задачі:

в області $\mathbf{D} = \{(t,x) \mid \ t \in (0;T), \quad x \in (0;l)\}$ знайти розв'язок $U(t,x)$ рівняння

$$a(t)U_{tt} + b(t)U_t + c(t)U = \frac{1}{r(x)}\left[\frac{\partial}{\partial x}\big(p(x)U_x\big) - q(x)U\right], \tag{24}$$

де $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $r(x)$, $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ – неперервні функції при $t \in [0;T]$, $x \in [0;l]$, причому $a(t) \ge a_0 > 0$, $r(x) \ge r_0 > 0$, $p(x) \ge p_0 > 0$, $q(x) \ge 0$, який справджує початкові умови

$$U(0,x) = \varphi(x), \quad U_t(0,x) = \psi(x), \quad x \in [0;l], \tag{25}$$

а також крайові умови

$$\alpha_0 U(t,0) + \alpha_1 U_x(t,0) = 0, \quad \beta_0 U(t,l) + \beta_1 U_x(t,l) = 0, \quad t \in [0;T], \tag{26}$$

де сталі α_0, α_1, β_0, β_1 такі, що $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \ne 0$, $\beta_0^2 + \beta_1^2 \ne 0$.

Перший етап. Спочатку шукаємо нетривіальний розв'язок рівняння (24), який справджує крайові умови (26), у вигляді

$$U(t,x) = Y(t) \cdot X(x) \ne 0. \tag{27}$$

Підкладаючи (27) у рівняння (24) і відокремлюючи змінні, одержимо:

$$\frac{a(t)Y''(t) + b(t)Y'(t) + c(t)Y(t)}{Y(t)} = \frac{\frac{d}{dx}\big[p(x)X'(x)\big] - q(x)X(x)}{r(x)X(x)}. \tag{28}$$

Оскільки ліва частина рівності (28) є функцією тільки арґументу t, а права – тільки арґументу x, то рівність (28) можлива тоді й тільки тоді, коли ліва і права її частини рівні одній і тій же сталій. Позначимо цю сталу через $-\lambda$. Тоді маємо

$$a(t)Y''(t) + b(t)Y'(t) + [c(t) + \lambda]Y(t) = 0, \tag{29}$$

$$\tfrac{d}{dx}\big[p(x)X'(x)\big] + [\lambda r(x) - q(x)]X(x) = 0. \tag{30}$$

Підклавши (27) у крайові умови (26), після скорочення на $Y(t) \ne 0$ маємо

$$\alpha_0 X(0) + \alpha_1 X'(0) = 0, \quad \beta_0 X(l) + \beta_1 X'(l) = 0. \tag{31}$$

Таким чином, для визначення функції $X(x)$ ми прийшли до наступної ***задачі Штурма-Ліувілля***: знайти ті значення параметра λ (***власні значення***), при яких існують нетривіальні розв'язки (***власні функції***) крайової задачі (30),(31), а також знайти ці розв'язки.

Мають силу наступні твердження:

1. Задача Штурма-Ліувілля (30),(31) має перераховну множину власних значень $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k, ...$, причому всі вони є дійсними. Якщо в крайових умовах (31) $\alpha_0 = \beta_0 = 1$, а $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, то всі $\lambda_k > 0$; якщо ж $\alpha_0 = \beta_0 = 1$, $\alpha_1 \le 0$, $\beta_1 \ge 0$, то всі $\lambda_k \ge 0$.
2. Кожному власному значенню λ_k відповідає єдина (з точністю до сталого множника) власна функція $X_k(x)$. Вся сукупність власних функцій утворює послідовність $X_1(x), X_2(x), ..., X_k(x), ...$
3. Послідовність власних функцій $\{X_k(x)\}$ є ортогональною системою з вагою $r(x)$ на відрізку $x \in [0; l]$, тобто для всіх $i, j \in \mathbf{N}$
$$\int_0^l r(x) X_i(x) X_j(x) dx = 0 \quad \text{при} \quad i \ne j. \tag{32}$$
4. ***Теорема Стеклова.*** Всяка функція $f(x) \in C^2_{[0;l]}$, яка справджує крайові умови (31), розкладається в ряд Фур'є за системою $\{X_k(x)\}$ власних функцій задачі Штурма-Ліувілля (30),(31):
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k X_k(x), \quad \text{де} \quad f_k = \frac{\int_0^l r(x) X_k(x) f(x) dx}{\int_0^l r(x) X_k^2(x) dx}, \tag{33}$$
який збігається абсолютно і рівномірно.

Нехай задача Штурма-Ліувілля (30),(31) розв'язана, тобто знайдені власні значення λ_k і відповідні власні функції $X_k(x)$, $k \in \mathbf{N}$.

Розглянемо рівняння (29) при $\lambda = \lambda_k$. Через те, що $a(t), b(t), c(t) \in C_{[0;T]}$ і $a(t) \ge a_0 > 0$, то завжди існує фундаментальна система $Y_{k,1}(t)$, $Y_{k,2}(t)$ частинних розв'язків рівняння (29). Тоді загальний розв'язок рівняння (29) є
$$Y(t) = A_k Y_{k,1}(t) + B_k Y_{k,2}(t), \tag{34}$$
де A_k і B_k – довільні сталі.

Підкладаємо знайдені власні функції $X_k(x)$ і (34) в (27). Маємо:
$$U_k(t,x) = \left[A_k Y_{k,1}(t) + B_k Y_{k,2}(t)\right] X_k(x), \quad k \in \mathbf{N}. \tag{35}$$
Складемо ряд із розв'язків (35):
$$U(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k Y_{k,1}(t) + B_k Y_{k,2}(t)\right] X_k(x). \tag{36}$$
Якщо ряд (36) і ряди, що одержуються з нього двократним почленним диференціюванням по x і t, збігаються рівномірно, то сума цього ряду справджуватиме рівняння (24) і крайові умови (26).

Другий етап. Вибираємо довільні сталі A_k і B_k таким чином, щоб ряд (36) справджував і початкові умови (25). Для цього підкладаємо (36) в (25), після чого дістанемо рівності вигляду

$$U(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x) = \varphi(x), \tag{37}$$

$$U_t(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k X_k(x) = \psi(x), \tag{38}$$

де

$$\varphi_k = A_k Y_{k,1}(0) + B_k Y_{k,2}(0), \quad \psi_k = A_k Y'_{k,1}(0) + B_k Y'_{k,2}(0). \tag{39}$$

Вважаємо, що для функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ виконані умови теореми Стеклова. Тоді ці функції можна подати у вигляді (37), (38), якщо покласти

$$\varphi_k = \frac{\int_0^l r(x) X_k(x) \varphi(x) dx}{\int_0^l r(x) X_k^2(x) dx}, \quad \psi_k = \frac{\int_0^l r(x) X_k(x) \psi(x) dx}{\int_0^l r(x) X_k^2(x) dx}. \tag{40}$$

Підклавши знайдені згідно формул (40) значення φ_k і ψ_k в (39), визначаємо A_k і B_k (ці сталі визначаються однозначно, тому що визначник системи (39) відмінний від нуля). Визначивши A_k і B_k із (39) і підклавши знайдені значення в ряд (36), одержимо розв'язок поставленої змішаної задачі (24),(25),(26) (обґрунтування методу Фур'є див. в [6]).

б) **<u>Інтеґрування змішаної задачі у випадку неоднорідного рівняння.</u>** Розглянемо змішану задачу: в області $\mathbf{D}$ знайти розв'язок $U(t,x)$ рівняння

$$a(t)U_{tt} + b(t)U_t + c(t)U = \frac{1}{r(x)}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)U_x\right) - q(x)U\right] + f(t,x), \tag{24а}$$

який справджує умови (25), (26).

Розв'язок задачі (24а),(25),(26) шукаємо у вигляді

$$U(t,x) = Z(t,x) + V(t,x), \tag{41}$$

де $Z(t,x)$ є розв'язком змішаної задачі (24),(25),(26), а $V(t,x)$ – розв'язок рівняння (24а), який справджує крайові умови (26) і однорідні початкові умови

$$V(0,x) = 0, \quad V_t(0,x) = 0, \quad x \in [0;l]. \tag{25а}$$

Згідно викладеного вище $Z(t,x)$ визначається за формулою (36). Функцію $V(t,x)$ шукаємо у вигляді

$$V(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(t) X_k(x), \tag{42}$$

де $X_k(x)$ – власні функції задачі Штурма-Ліувілля (30),(31). Очевидно, що $V(t,x)$ справджує крайові умови (26). Функції $Y_k(t)$ визначаємо таким чином, щоб ряд (42) задовольнив рівняння (24а) і початкові умови (25а). Надалі вважатимемо, що для $f(t,x)$, як функції змінної x, виконані умови теореми Стеклова. Отже,

$$f(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)X_k(x), \quad \text{де} \quad f_k(t)=\frac{\int_0^l r(x)X_k(x)f(t,x)dx}{\int_0^l r(x)X_k^2(x)dx}.$$

Підкладаючи (42) в рівняння (24а) і початкові умови (25а), дістанемо

$$a(t)Y_k''(t)+b(t)Y_k'(t)+[c(t)+\lambda_k]Y_k(t)=f_k(t), \tag{43}$$

$$Y_k(0)=0, \quad Y_k'(0)=0, \quad k\in\mathbf{N}. \tag{44}$$

Таким чином, функції $Y_k(t)$ повинні бути розв'язками задач Коші (43), (44). На підставі умов, накладених на коефіцієнти рівняння (24), для довільного фіксованого $k\in\mathbf{N}$ задача (43),(44) завжди має єдиний розв'язок $Y_k(t)$. Підкладаючи знайдені $Y_k(t)$ в (42), а (42) в (41), одержимо шуканий розв'язок

$$U(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_kY_{k,1}(t)+B_kY_{k,2}(t)\right]X_k(x)+\sum_{k=1}^{\infty}Y_k(t)X_k(x).$$

в) <u>**Загальна змішана задача.**</u> Розглянемо змішану задачу: в області $\mathbf{D}$ знайти розв'язок $U(t,x)$ рівняння (24а), який справджує початкові умови (25) і крайові умови

$$\alpha_0U(t,0)+\alpha_1U_x(t,0)=\omega_1(t), \quad \beta_0U(t,l)+\beta_1U_x(t,l)=\omega_2(t), \quad t\in[0;T]. \tag{26а}$$

Розв'язок задачі (24а),(25),(26а) шукаємо у вигляді

$$U(t,x)=W(t,x)+\omega(t,x), \tag{45}$$

де $\omega(t,x)$ – довільна двічі неперервно диференційовна функція, яка справджує крайові умови (26а). Наприклад, якщо $\alpha_0=\beta_0=1$, $\alpha_1=\beta_1=0$, то за $\omega(t,x)$ можна взяти функцію

$$\omega(t,x)=\omega_1(t)+xl^{-1}\left[\omega_2(t)-\omega_1(t)\right].$$

Підклавши (45) у (24а), (25) і (26а), приходимо до задачі визначення функції $W(t,x)$:

$$a(t)W_{tt}+b(t)W_t+c(t)W=\frac{1}{r(x)}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)W_x\right)-q(x)W\right]+f_1(t,x), \tag{24б}$$

$$W(0,x)=\varphi_1(x), \quad W_t(0,x)=\psi_1(x), \quad x\in[0;l], \tag{25б}$$

$$\alpha_0W(t,0)+\alpha_1W_x(t,0)=0, \quad \beta_0W(t,l)+\beta_1W_x(t,l)=0, \quad t\in[0;T], \tag{26б}$$

де

$$f_1(t,x)=f(t,x)+\frac{1}{r(x)}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\omega_x\right)-q(x)\omega\right]-a(t)\omega_{tt}-b(t)\omega_t-c(t)\omega(t,x),$$

$$\varphi_1(x)=\varphi(x)-\omega(0,x), \quad \psi_1(x)=\psi(x)-\omega_t(0,x).$$

Задача (24б),(25б),(26б) інтеґрується аналоґічно до змішаної задачі (24а), (25),(26) (див. вище "Інтеґрування змішаної задачі у випадку неоднорідного рівняння").

г) Змішані задачі зі стаціонарними неоднорідностями. Змішана задача вигляду

$$a(t)U_{tt} + b(t)U_t + cU = \frac{1}{r(x)}\left[\frac{\partial}{\partial x}\big(p(x)U_x\big) - q(x)U\right] + f(x), \tag{24в}$$

$$U(0,x) = \varphi(x), \quad U_t(0,x) = \psi(x), \quad x \in [0;l], \tag{25в}$$

$$\alpha_0 U(t,0) + \alpha_1 U_x(t,0) = \gamma_1, \quad \beta_0 U(t,l) + \beta_1 U_x(t,l) = \gamma_2, \quad t \in [0;T], \tag{26}$$

де c, γ_1, γ_2 – задані сталі, називається ***змішаною задачею зі стаціонарними неоднорідностями***; вона є частинним випадком загальної змішаної задачі. Розв’язок задачі (24в),(25в),(26в) шукаємо у вигляді

$$U(t,x) = W(t,x) + \omega(x), \tag{46}$$

де функція $\omega(x)$ є розв’язком крайової задачі

$$c\omega(x) = \frac{1}{r(x)}\left[\frac{d}{dx}\big(p(x)\omega'(x)\big) - q(x)\omega(x)\right] + f(x), \tag{47}$$

$$\alpha_0\omega(0) + \alpha_1\omega'(0) = \gamma_1, \quad \beta_0\omega(l) + \beta_1\omega'(l) = \gamma_2. \tag{48}$$

Тоді функція $W(t,x)$ повинна визначатися з наступної задачі:

$$a(t)W_{tt} + b(t)W_t + cW = \frac{1}{r(x)}\left[\frac{\partial}{\partial x}\big(p(x)W_x\big) - q(x)W\right],$$

$$W(0,x) = \varphi(x) - \omega(x), \quad W_t(0,x) = \psi(x), \quad x \in [0;l],$$

$$\alpha_0 W(t,0) + \alpha_1 W_x(t,0) = 0, \quad \beta_0 W(t,l) + \beta_1 W_x(t,l) = 0, \quad t \in [0;T],$$

а така задача аналоґічна до змішаної задачі (24),(25),(26) (див. "Лінійні однорідні рівняння з однорідними крайовими умовами").

ПРИКЛАД 1. Вивчити вільні коливання однорідної струни, закріпленої на кінцях $x = 0$ і $x = l$, якщо в початковий момент часу вона мала форму $U(0,x) = \varphi(x)$, а початкова швидкість точок струни рівна $\psi(x)$. Дати фізичну інтерпретацію одержаного розв’язку.

Розв’язання. Описаний процес коливань однорідної струни приводить до наступної змішаної задачі: в області $\mathbf{D} = \{(t,x) \mid t \in (0;T), \ x \in (0;l)\}$ знайти розв’язок $U(t,x)$ рівняння

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, \tag{49}$$

який справджує початкові і крайові умови

$$U(0,x) = \varphi(x), \quad U_t(0,x) = \psi(x), \quad x \in [0;l], \tag{50}$$

$$U(t,0) = 0, \quad U(t,l) = 0, \quad t \in [0;T], \tag{51}$$

Рівняння і крайові умови однорідні. Отже, маємо випадок **а)**.

Перший етап. Шукаємо нетривіальний розв'язок рівняння (49), який справджує крайові умови (51), у вигляді

$$U(t,x) = Y(t) \cdot X(x) \neq 0. \tag{52}$$

Підставимо (52) у рівняння (49) та крайові умови (51). Одержимо:

$$Y''(t) + a^2 \lambda Y(t) = 0, \quad \lambda = const; \tag{53}$$

$$\left. \begin{aligned} &X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ &X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \end{aligned} \right\} \tag{54}$$

Дослідимо задачу Штурма-Ліувілля (54).

1. При $\lambda < 0$ загальний розв'язок рівняння з (54) запишеться у вигляді $X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Після підстановки його в крайові умови одержимо лінійну однорідну систему відносно невідомих сталих C_1 і C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0. \end{cases}$$

Оскільки при $\lambda < 0$ визначник цієї системи $\Delta = -2\,\mathrm{sh}\sqrt{-\lambda} \neq 0,$ тому $C_1 = C_2 = 0,$ а отже, $X(x) \equiv 0$ і $\lambda < 0$ не є власним значенням.

2. Нехай $\lambda = 0.$ Тоді $X(x) = C_3 x + C_4$ і з крайових умов одержимо:

$$\begin{cases} C_3 = 0, \\ C_3 l + C_4 = 0, \end{cases}$$

звідки $C_3 = C_4 = 0,$ а тому $X(x) \equiv 0$ і $\lambda = 0$ також не є власним значенням.

3. При $\lambda > 0$ загальний розв'язок рівняння з (54) можна подати у вигляді $X(x) = C_5 \cos\sqrt{\lambda}x + C_6 \sin\sqrt{\lambda}x.$ Крайові умови дають:

$$\begin{cases} C_5 = 0, \\ C_6 \sin\sqrt{\lambda}l + C_5 \cos\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases}$$

Отже, щоб одержати нетривіальний розв'язок задачі (54), слід знайти ті значення параметру λ, при яких $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$, тобто

$$\lambda = \lambda_n = \left(\tfrac{\pi n}{l}\right)^2,$$

де n – довільне натуральне (адже $\sqrt{\lambda}l > 0$) число. Цим власним значенням відповідають власні функції

$$X_n(x) = C_6 \sin\tfrac{\pi n}{l}x, \quad n \in \mathrm{N}.$$

Підклавши знайдені значення λ_n у рівняння (53) і проінтеґрувавши його, одержимо:

$$Y_n(t) = A\cos\tfrac{\pi n a}{l}t + B\sin\tfrac{\pi n a}{l}t, \quad n \in \mathrm{N},$$

де A, B – довільні сталі. Підкладаємо знайдені функції $X_n(x)$ і $Y_n(t)$ в (52):

$$U_n(t,x) = \left(A_n \cos\tfrac{\pi n a}{l}t + B_n \sin\tfrac{\pi n a}{l}t\right)\sin\tfrac{\pi n}{l}x, \quad A_n = AC_6, \quad B_n = BC_6, \quad n \in \mathrm{N}.$$

В силу лінійності й однорідності рівняння (49) сума частинних розв'язків

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\tfrac{\pi na}{l}t+B_n\sin\tfrac{\pi na}{l}t\right)\sin\tfrac{\pi n}{l}x \tag{55}$$

також буде розв’язком рівняння (49) і справджуватиме крайові умови (51).

Другий етап. Визначаємо сталі A_n і B_n так, щоб ряд (55) справджував і початкові умови (50). При цьому вважаємо, що $\varphi(x)$ неперервна разом з похідними до третього порядку включно і $\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=0$, а $\psi(x)$ – неперервна разом з похідними до другого порядку включно і $\psi(0)=\psi(l)=0$. Маємо

$$U(0,x)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\tfrac{\pi n}{l}x=\varphi(x),\quad U_t(0,x)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{\pi na}{l}B_n\sin\tfrac{\pi n}{l}x=\psi(x).$$

З останніх рівностей випливає, що (див. с. 64)

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\tfrac{\pi n}{l}\xi d\xi,\quad B_n=\frac{2}{\pi na}\int_0^l\psi(\xi)\sin\tfrac{\pi n}{l}\xi d\xi.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд (55), одержимо шуканий розв’язок змішаної задачі (49)-(51).

Фізична інтерпретація розв’язку. Покладемо $\alpha_n=\sqrt{A_n^2+B_n^2}$, $\operatorname{tg}\theta_n=\frac{A_n}{B_n}$. Тоді

$$U_n(t,x)=\alpha_n\sin\tfrac{\pi n}{l}x\sin\left(\tfrac{\pi na}{l}t+\theta_n\right). \tag{56}$$

Із формули (56) видно, що всі точки струни здійснюють гармонічні коливання з однією й тією ж частотою $\omega_n=\pi nal^{-1}$ і фазою θ_n. Амплітуда коливань залежить від абсциси x точки струни й рівна $\alpha_n\sin\frac{\pi n}{l}x$. При такому коливанні всі точки струни одночасно досягають максимального відхилення в той чи інший бік і одночасно проходять положення рівноваги. Такі коливання струни називаються ***стоячими хвилями***.

Стояча хвиля $U_n(t,x)$ матиме стільки нерухомих на протязі всього процесу точок, скільки коренів має рівняння $\sin\frac{\pi n}{l}x=0$ на проміжку $x\in[0;l]$. Таких точок буде $n+1$: $x=\frac{ml}{n}$, $m=\overline{0,n}$. Нерухомі точки називаються ***вузлами*** стоячої хвилі. Посередині між вузлами розташовуються точки, в яких відхилення досягають максимуму; такі точки називаються ***пучностями***.

Кожна струна може мати власні коливання лише строго визначених частот $\omega_n=\pi nal^{-1}$. Ці частоти називаються ***власними частотами*** струни.

Висота тону звучання струни залежить від частоти коливань. Частота $\omega_1=\pi l^{-1}\sqrt{\mathrm{T}\rho^{-1}}$ (T – сила натягу, ρ – густина, $\mathrm{T}\rho^{-1}=a^2$) називається частотою основного тону. Інші тони, які відповідають частотам, кратним ω_1, називаються ***обертонами***.

Розв'язок (55) є суперпозицією стоячих хвиль. При цьому характер звучання струни (тон, сила звуку, тембр) залежатиме від співвідношення між амплітудами окремих обертонів. (Фізичну інтерпретацію див. в [6]).

Зауваження. При розв'язуванні задач типу **а)**-**г)** слід звертати особливу увагу на коректність постановки (узгодженість початкових і крайових умов), а в задачах типу **а)** та **б)** враховувати виконання умов теореми Стеклова для початкових функцій та вільного члена в рівнянні. Адже невиконання зазначених умов означає, що для заданої змішаної задачі метод Фур'є незастосовний (див. [6] теореми обґрунтування методу Фур'є для рівнянь гіперболічного типу).

ПРИКЛАД 2. За допомогою методу Фур'є розв'язати змішану задачу:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} - \tfrac{\pi a}{l} U_t + 2t\left(x^2 - lx + 1 - l^{-1}x\right), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \tag{57}$$

$$U(0,x) = 0, \quad U_t(0,x) = x(x-l), \quad 0 \le x \le l, \tag{58}$$

$$U(t,0) = \mu(t), \quad U(t,l) = 0, \quad t \ge 0. \tag{59}$$

Розв'язання. Рівняння (57) і крайові умови (59) неоднорідні, отже, маємо загальну змішану задачу. Шукаємо розв'язок у вигляді

$$U(t,x) = W(t,x) + \omega(t,x), \tag{60}$$

де (див. с. 65)

$$\omega(t,x) = \mu(t) + xl^{-1}[0 - \mu(t)] = \left(1 - xl^{-1}\right)\mu(t). \tag{61}$$

Підклавши (60) у (57), (58) і (59), з урахуванням (61) дістанемо

$$W_{tt} = a^2 W_{xx} - \tfrac{\pi a}{l} W_t + 2tx(x-l) - \left(1 - xl^{-1}\right)\left(\mu''(t) + \tfrac{\pi a}{l}\mu'(t) - 2t\right), \tag{57а}$$

$$W(0,x) = \left(xl^{-1} - 1\right)\mu(0), \quad W_t(0,x) = \left(xl^{-1} - 1\right)\mu'(0) + x(x-l), \tag{58а}$$

$$W(t,0) = 0, \quad W(t,l) = 0. \tag{59а}$$

Крайові умови (59а) і початкові умови (58а) будуть узгодженими тільки при $\mu(0) = \mu'(0) = 0$. Вільний член рівняння (57а) задовільнятиме умови теореми Стеклова, якщо $\mu''(t) + \tfrac{\pi a}{l}\mu'(t) - 2t = 0$. Отже, до задачі (57а)-(59а) метод Фур'є застосовний лише в тому випадку, коли $\mu(t)$ є розв'язком задачі Коші

$$\mu''(t) + \tfrac{\pi a}{l}\mu'(t) - 2t = 0, \quad \mu(0) = \mu'(0) = 0,$$

звідки

$$\mu(t) = \frac{2l^3}{(\pi a)^3}\left(e^{-\frac{\pi a}{l}t} - 1\right) - \frac{lt^2}{\pi a} + \frac{2l^2 t}{(\pi a)^2}. \tag{62}$$

Тоді задача для $W(t,x)$ набуде вигляду

$$W_{tt} = a^2 W_{xx} - \tfrac{\pi a}{l} W_t + 2tx(x-l), \tag{57б}$$

$$W(0,x) = 0, \quad W_t(0,x) = x(x-l), \tag{58б}$$

$$W(t,0) = 0, \quad W(t,l) = 0. \tag{59б}$$

Рівняння (57б) неоднорідне, а крайові умови (59б) однорідні, отже, маємо випадок **б)**. Розв'язок задачі (57б)-(59б) шукаємо згідно формули

$$U(t,x) = Z(t,x) + V(t,x), \tag{63}$$

де

$$Z(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n Y_{n,1}(t) + B_n Y_{n,2}(t)\right]X_n(x), \tag{64}$$

а $X_n(x)$ – власні функції задачі Штурма-Ліувілля (54).

Функції $Y_{n,1}(t)$ і $Y_{n,2}(t)$ визначаємо з рівняння

$$Y_n''(t) + \tfrac{\pi a}{l} Y_n'(t) + \left(\tfrac{\pi n a}{l}\right)^2 Y_n(t) = 0.$$

Його характеристичне рівняння

$$r^2 + \tfrac{\pi a}{l} r + \left(\tfrac{\pi n a}{l}\right)^2 = 0$$

має корені $r_{1,2} = -\frac{\pi a}{2l} \pm \sqrt{\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2\left(\frac{1}{4} - n^2\right)} = -\frac{\pi a}{2l} \pm i q_n$, де $q_n = \frac{\pi a}{l}\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}$. Тому $Y_{n,1}(t) = e^{-\frac{\pi a}{2l}t}\cos q_n t,\ Y_{n,2}(t) = e^{-\frac{\pi a}{2l}t}\sin q_n t$, а

$$Z(t,x) = e^{-\frac{\pi a}{2l}t}\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos q_n t + B_n \sin q_n t\right]\sin\tfrac{\pi n}{l}x. \tag{65}$$

Шукаємо коефіцієнти A_n і B_n так, щоб ряд (65) справджував і початкові умови (58б). При $t = 0$ маємо

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\tfrac{\pi n}{l}x, \quad x(x-l) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\tfrac{\pi a}{2l}A_n + q_n B_n\right]\sin\tfrac{\pi n}{l}x,$$

а отже, $A_n = 0,\ n = \overline{1,\infty};\ q_n B_n = \dfrac{2}{l}\int\limits_0^l \xi(\xi - l)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi = \dfrac{4l^2}{(\pi n)^3}\left[(-1)^n - 1\right]$, або

$$B_n = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\dfrac{8l^2}{(\pi n)^3 q_n}, & n = 2k-1, \end{cases} \qquad k = \overline{1,\infty}.$$

Отже,

$$Z(t,x) = -e^{-\frac{\pi a}{2l}t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8l^2}{\left[\pi(2k-1)\right]^3 q_{2k-1}}\sin q_{2k-1}t \sin\frac{\pi(2k-1)}{l}x. \tag{66}$$

Функцію $V(t,x)$ шукаємо у вигляді

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(t)\sin\tfrac{\pi n}{l}x, \tag{67}$$

де $Y_n(t)$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{aligned} &Y_n''(t) + \tfrac{\pi a}{l}Y_n'(t) + \left(\tfrac{\pi n a}{l}\right)^2 Y_n(t) = f_n(t), \\ &Y_n(0) = 0, \quad Y_n'(0) = 0, \end{aligned} \tag{68}$$

причому

$$f_n(t)=\frac{4t}{l}\int_0^l\left(\xi^2-l\xi\right)\sin\tfrac{\pi n}{l}\xi d\xi=\begin{cases}0, & n=2k,\\ -\dfrac{16tl^2}{(\pi n)^3}, & n=2k-1,\end{cases}\qquad k=\overline{1,\infty}.$$

Проінтеґрувавши задачу Коші (68) і підклавши знайдені функції $Y_n(t)$ в (67), а потім (61), (67) і (66) в формулу (60), одержимо розв'язок вихідної змішаної задачі (57)-(59)

$$U(t,x)=\left(1-xl^{-1}\right)\mu(t)-e^{-\frac{\pi a}{2l}t}\sum_{\substack{k=1\\ n=2k-1}}^{\infty}\frac{8l^2}{[\pi n]^3 q_n}\sin q_n t\sin\tfrac{\pi n}{l}x+\sum_{n=1}^{\infty}Y_n(t)\sin\tfrac{\pi n}{l}x,$$

де $\mu(t)$ визначається формулою (62).

ПРИКЛАД 3. Знайти розв'язок змішаної задачі

$$U_{tt}=a^2U_{xx}+2x+3,\quad t>0,\quad 0<x<l, \tag{69}$$

$$U(0,x)=0,\quad U_t(0,x)=0,\quad 0\le x\le l, \tag{70}$$

$$U_x(t,0)=0,\quad U(t,l)=0,\quad t\ge 0. \tag{71}$$

Розв'язання. Рівняння (69) неоднорідне, однак вільний член $f(x)=2x+3$ не залежить від часу. Отже, змішана задача (69)-(71) є задачею зі стаціонарними неоднорідностями – маємо випадок **г)**. Шукаємо розв'язок $U(t,x)$ у вигляді

$$U(t,x)=W(t,x)+\omega(x), \tag{72}$$

де $\omega(x)$ є розв'язком крайової задачі

$$a^2\omega''(x)+2x+3=0,\quad 0<x<l, \tag{73}$$

$$\omega'(0)=0,\quad \omega(l)=0, \tag{74}$$

а для визначення $W(t,x)$ одержуємо змішану задачу

$$W_{tt}=a^2W_{xx},\quad t>0,\quad 0<x<l, \tag{69a}$$

$$W(0,x)=-\omega(x),\quad W_t(0,x)=0,\quad 0\le x\le l, \tag{70a}$$

$$W_x(t,0)=0,\quad W(t,l)=0,\quad t\ge 0. \tag{71a}$$

Знаходимо розв'язок крайової задачі (73),(74). Маємо:

$$\omega(x)=-\frac{x^2}{6a^2}(2x+9)+C_1x+C_2.$$

Підклавши знайдений загальний розв'язок рівняння (73) в крайові умови (74) і визначивши сталі C_1 і C_2, одержимо

$$\omega(x)=-\frac{x^2}{6a^2}(2x+9)+\frac{l^2}{6a^2}(2l+9). \tag{75}$$

Розв'язок змішаної задачі (69а)-(71а) шукаємо за допомогою методу Фур'є:

$$U(t,x)=Y(t)\cdot X(x)\neq 0. \tag{76}$$

Підклавши (76) у рівняння (69а) та крайові умови (71а) та відокремивши змінні, одержимо:

$$Y''(t)+a^2\lambda Y(t)=0, \quad \lambda = const; \tag{77}$$

$$\left.\begin{aligned} &X''(x)+\lambda X(x)=0, \\ &X'(0)=0, \quad X(l)=0. \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Дослідивши задачу Штурма-Ліувілля (78), дістанемо власні значення ті власні функції у вигляді

$$\lambda_n = \left[\frac{2n-1}{2l}\pi\right]^2, \quad X_n(x)=C\cos\tfrac{2n-1}{2l}\pi x, \quad C=const, \quad n\in\mathbf{N}. \tag{79}$$

Підклавши знайдені власні значення у рівняння (77) і проінтеґрувавши його, дістанемо

$$Y_n(t)=A\cos\tfrac{2n-1}{2l}\pi at + B\sin\tfrac{2n-1}{2l}\pi at, \quad n\in\mathrm{N}, \tag{80}$$

де A, B – довільні сталі. Підкладаємо (79) та (80) в (76) і сумуємо, тоді

$$W(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\tfrac{2n-1}{2l}\pi at + B_n\sin\tfrac{2n-1}{2l}\pi at\right)\cos\tfrac{2n-1}{2l}\pi x, \tag{81}$$

де $A_n = AC,\ B_n = BC.$

Коефіцієнти A_n і B_n визначаємо з початкових умов (70а):

$$W(0,x)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\tfrac{2n-1}{2l}\pi x = \frac{x^2}{6a^2}(2x+9)-\frac{l^2}{6a^2}(2l+9),$$

$$W_t(0,x)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{2n-1}{2l}\pi a B_n\cos\tfrac{2n-1}{2l}\pi x = 0,$$

звідки $B_n = 0,$ а

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l\left[\tfrac{\xi^2}{6a^2}(2\xi+9)-\tfrac{l^2}{6a^2}(2l+9)\right]\cos\tfrac{2n-1}{2l}\pi\xi d\xi = \frac{16l^2\left[4l+(-1)^n(3+2l)(2n-1)\pi\right]}{[(2n-1)\pi]^4a^2}.$$

Підклавши знайдені коефіцієнти в (81), а потім (81) і (75) – у формулу (72), одержуємо розв’язок поставленої змішаної задачі (69)-(71):

$$U(t,x)=\frac{l^2}{6a^2}(2l+9)-\frac{x^2}{6a^2}(2x+9)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16l^2\left[4l+(-1)^n(3+2l)(2n-1)\pi\right]}{[(2n-1)\pi]^4a^2}\cos\tfrac{2n-1}{2l}\pi at\cos\tfrac{2n-1}{2l}\pi x.$$

Зауваження. Метод відокремлення змінних в окремих випадках може бути використаний і при побудові розв’язків змішаних задач для хвильових рівнянь у багатовимірному просторі (коливання мембрани тощо).

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Які фізичні процеси приводять до змішаних задач для рівнянь гіперболічного типу?
2. Запишіть крайові умови, якщо
   а) кінці струни нерухомо закріплені;
   б) кінці струни вільні;
   в) лівий кінець струни рухається за законом $\omega(t)$, а на правий діє сила $\nu(t)$;
   г) кінці струни пружньо закріплені.
3. Як побудувати розв'язок змішаної задачі за допомогою методу характеристик?
4. В чому полягає основна ідея методу відокремлення змінних?
5. При яких умовах ряд, складений із частинних розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння, також буде розв'язком цього рівняння?
6. В чому полягає задача Штурма-Ліувілля?
7. Чому власні значення задачі Штурма-Ліувілля у випадку вільних коливань струни є дійсними числами?
8. Які умови повинні справджувати початкові відхилення та швидкість у випадку вільних коливань скінченої струни, щоб ряд, який одержується внаслідок застосування методу Фур'є до відповідної змішаної задачі, був її розв'язком?
9. Дайте фізичну інтерпретацію функцій
$$U_n(t,x)=\left(A_n\cos\tfrac{\pi na}{l}t+B_n\sin\tfrac{\pi na}{l}t\right)\sin\tfrac{\pi n}{l}x\,.$$
10. Як будується розв'язок змішаної задачі у випадку вимушених коливань скінченої струни?
11. Яка змішана задача називається задачею зі стаціонарними неоднорідностями?
12. Наведіть метод побудови розв'язку змішаної задачі зі стаціонарними неоднорідностями.
13. Для якого класу лінійних ДРЧП другого порядку гіперболічного типу можна застосувати метод відокремлення змінних?
14. У випадку загальної схеми методу Фур'є якими властивостями володіють власні значення та власні функції відповідної задачі Штурма-Ліувілля?
15. Дайте визначення функції Ґріна задачі Штурма-Ліувілля.
16. Як звести задачу Штурма-Ліувілля до еквівалентного їй інтеґрального рівняння?
17. При яких умовах функція $\omega(x)$ може бути розкладена в рівномірно й абсолютно збіжний ряд по системі власних функцій задачі Штурма-Ліувілля?
18. Які умови повинні справджувати функції, які входять у початкові умови, щоб ряд, який одержується в загальній схемі методу Фур'є, був розв'язком розглядуваної змішаної задачі?
19. Що ви можете сказати про власні значення та власні функції задачі

$$V_{xx} + V_{yy} + \lambda V(x,y) = 0, \quad \lambda = const,$$
$$V(0,y) = V(b,y) = V(x,0) = V(x,l) = 0\,?$$

20. Дайте обґрунтування методу Фур'є у випадку вільних коливань прямокутної мембрани.

21. Наведіть фізичну інтерпретацію розв'язку змішаної задачі у випадку вільних коливань прямокутної мембрани.

22. Сформулюйте теорему про єдиність розв'язку змішаної задачі.

23. Сформулюйте теорему про неперервну залежність розв'язку змішаної задачі від початкових умов.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ

Метод характеристик

1. Нарисувати профіль однорідної ($a = 1$) напівнескінченої струни з вільним кінцем при $t = 1,\ 2,\ 3,\ 4$, якщо коливання здійснюються тільки за рахунок початкового відхилення точок струни, яке рівне
$$U(0,x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;3) \bigcup [5;+\infty), \\ x-3, & 3 \le x < 4, \\ 5-x, & 4 \le x < 5. \end{cases}$$
Вказівка. Застосувати парне продовження початкового відхилення на проміжок $x \in (-\infty;0)$.

2. Зобразити ґрафічно профіль однорідної ($a = 1$) напівнескінченої струни з вільним кінцем при $t = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$, якщо струна коливається тільки за рахунок початкової швидкості її точок, яка зображена на рис. 16.

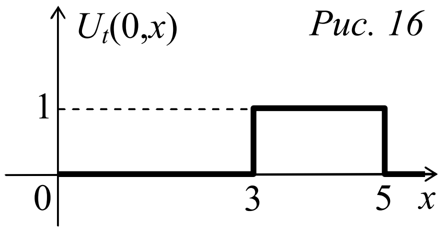


Рис. 16

3. Знайти неперервний розв'язок $U(t,x)$ змішаної задачі
$$U_{tt} = 9U_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0,$$
$$U(0,x) = e^{-x}, \quad U_t(0,x) = \cos 5x, \quad x \ge 0,$$
$$U_x(t,0) + U(t,0) = t, \quad t \ge 0.$$

4. По пружньому напівнескінченому стержню при $t < 0$ поширюється хвиля деформації, яка рухається вліво:
$$U(t,x) = \begin{cases} \sin(x+3t), & x > -3t, \\ 0, & x \in (0;-3t), \end{cases} \qquad t < 0.$$
Лівий кінець стержня $x = 0$ пружньо закріплений, причому точка закріплення пружини рухається згідно закону $\gamma(t) = 3 - 6t$. Знайти закон поздовжніх

коливань стержня.

Вказівка. Із умови задачі випливає, що

$$U_{tt}=9U_{xx},\quad t>0,\quad x>0,$$
$$U(0,x)=\sin x,\quad U_t(0,x)=3\cos x,\quad x\ge 0,$$
$$3U_x(t,0)-2U(t,0)=3-6t,\quad t\ge 0.$$

5. Зобразити ґрафічно розв’язок $U(t,x)$ змішаної задачі

$$U_{tt}=U_{xx},\quad t>0,\quad x\in(0;6),$$
$$U(0,x)=\begin{cases}0, & x\in[0;3)\bigcup[5;6],\\ x-3, & 3\le x<4,\\ 5-x, & 4\le x<5.\end{cases}\qquad U_t(0,x)=0,$$
$$U_x(t,0)=0,\quad U_x(t,6)=0$$

при $t=1$, 2, 3, … Дати фізичну інтерпретацію поставленої змішаної задачі.

6. Методом характеристик знайти розв’язки змішаних задач:

а) $U_{tt}=a^2U_{xx}+f(t,x),\quad t>0,\quad x>0,$
$U(0,x)=\varphi(x),\quad U_t(0,x)=\psi(x),\quad x\ge 0,$
$U(t,0)=0,\quad t\ge 0;$

б) $U_{tt}=a^2U_{xx}+f(t,x),\quad t>0,\quad x>0,$
$U(0,x)=\varphi(x),\quad U_t(0,x)=\psi(x),\quad x\ge 0,$
$U_x(t,0)=\nu(t),\quad t\ge 0.$

Метод відокремлення змінних

7. Вивчити процес вільних коливань однорідної струни довжини $l=2$, лівий кінець $x=0$ якої вільний, а правий $x=2$ нерухомо закріплений, якщо в початковий момент часу струна займала прямолінійне положення, а початкова швидкість її точок була рівна $\psi(x)=4-x^2$. Дати фізичну інтерпретацію одержаного розв’язку.
8. Вивчити процес вільних коливань однорідної струни довжини l, у якої лівий кінець вільний, а правий пружньо закріплений $(h=1)$, якщо в початковий момент часу відхилення точок струни задане функцією
$$\varphi(x)=x^3(2-l)-x^2(3l-l^2),$$
а їх швидкість рівна нулеві.
9. Дослідити процес коливань однорідної струни довжини l з вільними кінцями, якщо на струну діє рівномірно розподілена зовнішня сила інтенсивності $A\sin t$, де $A=const.$ Початкові відхилення та швидкості відсутні.
10. Дати фізичну інтерпретацію та знайти розв’язки наступних змішаних задач:

а) $U_{tt}=a^2U_{xx}+Ae^{-t}\cos\frac{\pi}{2l}x,\quad t>0,\quad x\in(0;l),\quad A=const,$
$U(0,x)=0,\quad U_t(0,x)=0,\quad x\in[0;l],$
$U_x(t,0)=0,\quad U_x(t,l)=0,\quad t\ge 0;$

б) $U_{tt}=a^2U_{xx}+\sin 2t,\quad t>0,\quad x\in(0;l),$
$U(0,x)=0,\quad U_t(0,x)=-2\cos\frac{2}{a}x,\quad x\in[0;l],$
$U_x(t,0)=0,\quad U_x(t,l)=\frac{2}{a}\sin\frac{2l}{a}\sin 2t,\quad t\ge 0;$

в) $U_{tt}=a^2U_{xx}+f(x),\quad t>0,\quad x\in(0;l),$
$U(0,x)=\varphi(x),\quad U_t(0,x)=\psi(x),\quad x\in[0;l],$
$U_x(t,0)-hU(t,0)=\alpha,\quad U(t,l)=\beta,\quad t\ge 0,\quad h,\alpha,\beta-const;$

г) $U_{tt}=16U_{xx}+\sin\frac{7\pi}{10}x,\quad t>0,\quad x\in(0;5),$
$U(0,x)=0,\quad U_t(0,x)=0,\quad x\in[0;5],$
$U(t,0)=0,\quad U_x(t,5)=0,\quad t\ge 0.$

11. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, визначити поперечні коливання прямокутної мембрани $x\in[0;b],\ \ y\in[0;c]$ з нерухомо закріпленим краєм, якщо
а) мембрана коливається тільки за рахунок початкового відхилення її точок, яке рівне $\sin\frac{\pi}{b}x\cdot\sin\frac{\pi}{c}y$;
б) коливання викликані неперервно розподіленою по мембрані поперечною силою з густиною $f(t,x)=e^{-t}x(x-b)\sin\frac{2\pi}{c}y$.

12. Проінтеґрувати змішану задачу та дати її фізичну інтерпретацію:
$U_{tt}=U_{xx}+U_{yy}+f(t,x,y),\quad t>0,\quad x\in(0;b),\quad y\in(0;c),$
$U(0,x,y)=0,\quad U_t(0,x,y)=0,\quad x\in[0;b],\quad y\in[0;c],$
$U(t,0,y)=U(t,b,y)=U(t,x,0)=0,\quad U_y(t,x,c)=0,\quad t\ge 0,$
де $f(t,x,y)=-2xy(x-b)\cos\frac{\pi}{c}y\cos t-ty\left(x^2-bx+2\right)\sin t.$

13. Вивчити радіальні коливання пружнього ґазу в сферичному резонаторі, стінки якого є ідеально відображаючими (тобто $\left.\frac{\partial U}{\partial\vec{n}}\right|_{S}=0$), якщо задані початкові значення потенціалу швидкостей і його похідної по часу:
$$U(0,\rho)=\varphi(\rho),\quad U_t(0,\rho)=0,\quad \rho\in(0;R).$$

14. Кругла однорідна мембрана радіуса R, закріплена на краї, знаходиться в стані рівноваги при натязі T. В момент часу $t=0$ до мембрани прикладений нормальний тиск P на одиницю площі. Знайти закон коливань мембрани.

15. Вивчити власні коливання однорідної кругової мембрани радіуса R, яка нерухомо закріплена на краї, якщо в початковий момент часу вона має форму параболоїда обертання $U(0,r)=A\left(1-r^2R^{-2}\right)$, де $A=const,$ а початкові

швидкості її точок рівні нулеві.

Вказівка. Метод Фур'є для задач типу №№13-15 див. у [3], розділ V, §3.

ВІДПОВІДІ

3. При $x \geq 0$

$$U(t,x) = \begin{cases} e^{-x}\operatorname{ch}3t + \frac{1}{30}[\sin 5(x+3t) - \sin 5(x-3t)], \quad x > 3t, \\ \frac{1}{78}\left(14e^{-(x-3t)} - \cos 5(x-3t)\right) - \frac{1}{3}(x - 3t - 1) - \frac{2}{65}\sin 5(x-3t) + \\ \qquad + \frac{1}{30}\sin 5(x+3t) + 0{,}5e^{-(x+3t)}, \quad x < 3t. \end{cases}$$

4. При $x \geq 0$

$$U(t,x) = \begin{cases} \sin(x+3t), \quad x > 3t, \\ -\frac{51}{13}e^{\frac{2}{3}(x-3t)} + 3(x - 3t + 1) - \frac{5}{13}\sin(x-3t) + \frac{12}{13}\cos(x-3t) + \\ \qquad + \sin(x+3t), \quad x < 3t. \end{cases}$$

6. а) При $x \geq 0,\ x - at > 0$

$$U(t,x) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,z)dzd\tau,$$

а при $x \geq 0,\ x - at < 0$

$$U(t,x) = \frac{\varphi(x+at) - \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x}\psi(z)dz + \frac{1}{2a}\int_0^{t-\frac{x}{a}} \int_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,z)dzd\tau +$$

$$+ \frac{1}{2a}\int_{t-\frac{x}{a}}^{t} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,z)dzd\tau.$$

б) При $x \geq 0,\ x - at > 0$

$$U(t,x) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,z)dzd\tau,$$

а при $x \geq 0,\ x - at < 0$

$$U(t,x) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a}\left[\int_0^{x+at}\psi(z)dz + \int_0^{at-x}\psi(z)dz\right] - a\int_0^{t-\frac{x}{a}}\nu(z)dz +$$

$$+ \frac{1}{2a}\int_0^{t-\frac{x}{a}}\left[\int_0^{a(t-\tau)-x} f(\tau,z)dz + \int_0^{x+a(t-\tau)} f(\tau,z)dz\right]d\tau + \frac{1}{2a}\int_{t-\frac{x}{a}}^{t}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,z)dzd\tau.$$

7. $U(t,x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{512\cdot(-1)^k}{\left[(2k-1)\pi\right]^4 a}\sin\frac{2k-1}{4}\pi at\cos\frac{2k-1}{4}\pi x.$

8. $U(t,x)=4\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\left(4l^2-6\right)\cos\lambda_k l+3l+6}{\lambda_k^4\left(l-\sin^2\lambda_k l\right)}\cos a\lambda_k t\cos\lambda_k x,$ де λ_k – додатні корені рівняння $\lambda\,\mathrm{tg}(\lambda l)=-1.$

9. $U(t,x)=A(t-\sin t).$

10. а) $U(t,x)=\frac{4al^2}{4l^2+(a\pi)^2}\left(e^{-t}-\cos\frac{a\pi}{2l}t+\frac{2l}{a\pi}\sin\frac{a\pi}{2l}t\right)\cos\frac{\pi}{2l}x.$

б) $U(t,x)=0{,}5t-\left(0{,}25+\cos\frac{2}{a}x\right)\sin 2t.$

в) $U(t,x)=W(x)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos a\lambda_n t+B_n\sin a\lambda_n t\right)\left(\lambda_n\cos\lambda_n x+h\sin\lambda_n\right),$ де

$$W(x)=\alpha x-\frac{1}{a^2}\int\limits_0^x\int\limits_0^y f(\xi)d\xi dy+\left\{\beta-\alpha l+\frac{1}{a^2}\int\limits_0^l\int\limits_0^y f(\xi)d\xi dy\right\}\cdot\frac{1+hx}{1+hl},$$

$$A_n=\frac{2}{h+l\left(h^2+\lambda_n^2\right)}\int\limits_0^l\left[\varphi(\xi)-W(\xi)\right]\left(\lambda_n\cos\lambda_n\xi+h\sin\lambda_n\xi\right)d\xi,$$

$$B_n=\frac{2}{a\lambda_n\left[h+l\left(h^2+\lambda_n^2\right)\right]}\int\limits_0^l\psi(\xi)\left(\lambda_n\cos\lambda_n\xi+h\sin\lambda_n\xi\right)d\xi,$$ а

λ_n – додатні корені рівняння: $h\,\mathrm{tg}(\lambda l)=-\lambda.$

г) $U(t,x)=\frac{100}{49(a\pi)^2}\left(1-\cos\frac{7\pi a}{10}t\right)\sin\frac{7\pi}{10}x.$

11. а) $U(t,x,y)=\cos a\pi\sqrt{b^{-2}+c^{-2}}\,t\cdot\sin\frac{\pi}{b}x\sin\frac{\pi}{c}y.$

б) Позначаємо через ρ поверхневу густину маси мембрани, тоді

$$U(t,x,y)=\sin\frac{2\pi}{c}y\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8b^2}{\rho\pi^3\left(1+[a\pi\omega_n]^2\right)(2n-1)^3}\left(e^{-t}-\cos a\pi\omega_n t+\left[a\pi\omega_n\right]^{-1}\sin a\pi\omega_n t\right)\times$$
$$\times\sin\frac{(2n-1)\pi}{b}x,\ \text{де}\ \omega_n=\sqrt{b^{-2}(2n-1)^2+4c^{-2}}.$$

12. $$U(t,x,y)=txy(x-b)\sin t-\sum_{n,k=1}^{\infty}\frac{256b^2c}{\pi^5(2k-1)^3\left(\omega_{n,k}^2-1\right)^2}\cdot\frac{(2n-1)^4-2(2n-1)^2+8}{(2n-1)^2\left[(2n-1)^2-4\right]^2}\times$$
$$\times\left\{\cos\omega_{n,k}t-\cos t+0{,}5t\left(\omega_{n,k}^2-1\right)\sin t\right\}\sin\frac{(2k-1)\pi}{b}x\sin\frac{(2n-1)\pi}{2c}y,$$

де $\omega_{n,k}=\sqrt{\left[\frac{(2k-1)\pi}{b}\right]^2+\left[\frac{(2n-1)\pi}{2c}\right]^2}.$

13. $U(t,\rho)=\dfrac{3}{R^2}\int\limits_0^R r^2\varphi(r)dr+\dfrac{2}{R}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{\gamma_n}{R}\rho}{\rho}\cdot\dfrac{\cos\frac{\gamma_n a}{R}t}{\sin^2\gamma_n}\cdot\int\limits_0^R r\varphi(r)\sin\frac{\gamma_n}{R}rdr,$ де

γ_n – додатні корені рівняння $\mathrm{tg}\,\gamma=\gamma,$ R – радіус сфери, a – швидкість поширення коливань у ґазі.

14. $U(t,r)=\dfrac{P}{T}\left[\dfrac{1}{4}\left(R^2-r^2\right)-2R^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{J_0\left(\mu_n R^{-1}r\right)}{\mu_n^3 J_1\left(\mu_n\right)}\cos\frac{a\mu_n}{R}t\right],$ де

μ_n – додатні корені рівняння $J_0(\mu)=0;$ $J_0(x),$ $J_1(x)$ – функції Бесселя (див. [3], стор. 622-628).

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ ДО ТЕМИ III

Варіант 1.

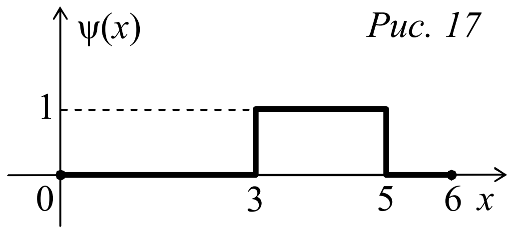
1. Зобразити ґрафічно розв’язок $U(t,x)$ змішаної задачі

$U_{tt}=U_{xx},\quad t>0,\quad x\in(0;6),$

$U(0,x)=0,\quad U_t(0,x)=\psi(x),\quad x\in[0;6],$

$U_x(t,0)=0,\quad U_x(t,6)=0\quad t\geq 0$

при $t=1,$ 2, 3, …, якщо функція $\psi(x)$ має вигляд, зображений на рис. 17. Дати фізичну інтерпретацію поставленої змішаної задачі.



2. Однорідна струна, кінці якої нерухомо закріплені в точках $x=0$ і $x=l,$ відтягнута в початковий момент часу в точці $x=c,$ $0<c<l,$ на величину h і відпущена без початкової швидкості. Визначити зміщення $U(t,x)$ довільної точки струни та дати фізичну інтерпретацію одержаного результату.

3. Дати фізичну інтерпретацію поставленої змішаної задачі та знайти її розв’язок:

$U_{tt}=a^2\Delta U(t,x,y)+f(t,x,y),\quad t>0,\quad x\in(0;1),\quad y\in(0;1),$

$U(0,x,y)=0,\quad U_t(0,x,y)=0,\quad x\in[0;1],\quad y\in[0;1],$

$U(t,0,y)=t^2y(y-1),\quad U(t,1,y)=0,\quad t\geq 0,\quad y\in[0;1],$

$U(t,x,0)=t^2x(x-1),\quad U(t,x,1)=0,\quad t\geq 0,\quad x\in[0;1],$

де $f(t,x,y)=2t^2(x+y-2)+2(xy+x+y)(1-x)(y-1).$

Варіант 2.

1. Зобразити ґрафічно профіль однорідної $(a=1)$ напівнескінченої струни з нерухомо закріпленим кінцем при $t=3{,}25$ та $t=4{,}25$, якщо струна коливається тільки за рахунок початкового відхилення її точок, яке рівне

$$U(0,x)=\begin{cases}0, & x\in[0;3)\bigcup[5;+\infty),\\ x-3, & 3\le x<4,\\ 5-x, & 4\le x<5.\end{cases}$$

2. Дати фізичну інтерпретацію поставленої змішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt}=U_{xx}-\tfrac{\pi}{3}U_t(t,x),\quad t>0,\quad x\in(0;3),$$
$$U(0,x)=0,\quad U_t(0,x)=2,\quad x\in[0;3],$$
$$U_x(t,0)=0,\quad U(t,3)=2t,\quad t\ge 0.$$

3. В прямокутній мембрані $x\in[0;b]$, $y\in[0;c]$ краї $x=b$ і $y=c$ вільні, а інші – нерухомо закріплені. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, знайти поперечні коливання мембрани, викликані початковим відхиленням $\varphi(x,y)=Ax^2(x-b)\sin\frac{9\pi}{2c}y$, $A=const.$

Варіант 3.

1. Нарисувати профіль однорідної $(a=1)$ напівнескінченої струни з нерухомо закріпленим кінцем при $t=3{,}5$ і $t=4{,}5$, якщо струна коливається тільки за рахунок початкової швидкості її точок, яка зображена на рис. 18.

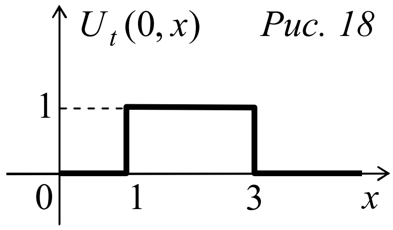


Рис. 18

2. Дати фізичну інтерпретацію поставленої змішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt}=0{,}25U_{xx}-U(t,x)+\sin x,\quad t>0,\quad x\in(0;1),$$
$$U(0,x)=0,\quad U_t(0,x)=0,\quad x\in[0;1],$$
$$U_x(t,0)=0,\quad U_x(t,1)=0,\quad t\ge 0.$$

3. Знайти закон коливань однорідної $(a=b)$ прямокутної мембрани $x\in[0;b]$, $y\in[0;c]$, якщо краї $x=0$ і $x=b$ нерухомо закріплені, а на двох інших краях $U(t,x,0)=U(t,x,c)=h\sin\frac{\pi}{b}x$, $h=const.$ В початковий момент часу мембрана мала форму $U(0,x,y)=h\sin\frac{\pi}{b}x$, а швидкість усіх її точок була рівна $v_0\sin\frac{\pi}{b}x\sin\frac{\pi}{c}y$, $v_0=const.$ Інтенсивність зовнішніх сил

$$f(t,x,y)=\left(y^2-cy+\pi^2h\right)\sin\tfrac{\pi}{b}x.$$

Варіант 4.

1. Нарисувати профіль однорідної $(a=1)$ напівнескінченої струни з вільним кінцем при $t=3{,}5$ та $t=4{,}5$, якщо коливання здійснюються тільки за рахунок початкового відхилення її точок, яке рівне

$$U(0,x)=\begin{cases} 0, & x\in[0;3)\bigcup[5;+\infty), \\ x-3, & 3\le x<4, \\ 5-x, & 4\le x<5. \end{cases}$$

2. Вивчити вільні коливання однорідної струни, закріпленої на кінцях $x=0$ і $x=l$, якщо в початковий момент часу струна знаходилася в спокої, а її точкам на проміжку $(\alpha;\beta)\subset(0;l)$ надана стала початкова швидкість v_0. Дати фізичну інтерпретацію одержаного результату.

3. Дати фізичну інтерпретацію поставленої змішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt}=U_{xx}+U_{yy}+2t\,\mathrm{sh}\,y\,\mathrm{sh}(y-1),\quad t>0,\quad x\in(0;1),\quad y\in(0;1),$$
$$U(0,x,y)=0,\quad U_t(0,x,y)=0,\quad x\in[0;1],\quad y\in[0;1],$$
$$U_x(t,0,y)=0,\quad U_x(t,1,y)=0,\quad t\ge 0,\quad y\in[0;1],$$
$$U(t,x,0)=0,\quad U(t,x,1)=0,\quad t\ge 0,\quad x\in[0;1].$$

Варіант 5.

1. Нарисувати профіль однорідної $(a=1)$ напівнескінченої струни з вільним кінцем при $t=3{,}5$ і $t=4{,}5$, якщо струна коливається тільки за рахунок початкової швидкості її точок, яка зображена на рис. 19.

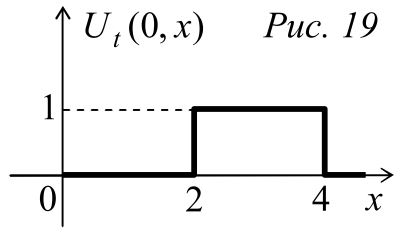


Рис. 19

2. Знайти розв'язок змішаної задачі:

$$U_{tt}=U_{xx}+4(x+1)^{-1}U_x+2(x+1)^{-2}U(t,x),\quad t>0,\quad x\in(0;2),$$
$$U(0,x)=x(2-x),\quad U_t(0,x)=0,\quad x\in[0;2],$$
$$U(t,0)=0,\quad U(t,2)=0,\quad t\ge 0.$$

Вказівка. Ввести заміну: $U(t,x)=(x+1)^{-2}Z(t,x)$.

3. Вивчити поперечні коливання прямокутної мембрани $x\in[0;b]$, $y\in[0;c]$ із нерухомо закріпленим краєм, які викликані неперервно розподіленою по мембрані і перпендикулярною до її поверхні зовнішньою силою з густиною $f(t,x,y)=\rho\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}(x-b)\sin\frac{2\pi}{c}y\sin\omega t$, $t>0$, $\omega=const$, де ρ – поверхнева густина маси мембрани, вважаючи, що реакцією навколишнього середовища можна нехтувати.

Варіант 6.

1. Напівнескінчена однорідна $(a=1)$ струна коливається тільки внаслідок дії на кінець $x=0$ сили, рівної $\sin^2 \pi t$. Визначити положення точок струни в довільний момент часу t. Нарисувати профіль струни при $t=1$, 2, 3, 4.

2. Дати фізичну інтерпретацію поставленої змішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt} = U_{xx} - U(t,x) + 2tx(x-l)^2, \quad t>0, \quad x \in (0;l),$$
$$U(0,x)=0, \quad U_t(0,x)=0, \quad x \in [0;l],$$
$$U(t,0)=0, \quad U_x(t,l)=0, \quad t \geq 0.$$

3. Однорідна квадратна мембрана, яка в початковий момент часу $t=0$ має форму $Axy(b-x)(b-y)$, де $A=const$, b – довжина сторони мембрани, почала коливатися без початкової швидкості. Дослідити вільні коливання мембрани, закріпленої по контуру.

Варіант 7.

1. Вивчити процес вільних коливань однорідної $(a=1)$ скінченої струни довжини $l=6$ з нерухомо закріпленими кінцями (нарисувати профіль струни при $t=1$, 2, 3, … і знайти період коливань), якщо в початковий момент часу вона займала прямолінійне положення, а початкова швидкість точок струни має вигляд, зображений на рис. 20.

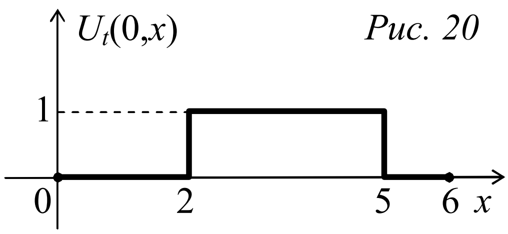


Рис. 20

2. Вивчити вимушені поперечні коливання однорідної струни, яка закріплена на кінці $x=0$, а на кінці $x=l$ піддається дії збурюючої гармонічної сили, що викликає зміщення, рівне $A\sin\omega t$, $A,\omega - const$. Початкове відхилення та початкова швидкість точок струни рівні нулеві, а сумарна інтенсивність зовнішніх сил рівна $x^2\omega^2 l^{-2}\cos 2\omega t$. Дати фізичну інтерпретацію одержаного розв'язку.

3. Дати фізичну інтерпретацію поставленої змішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt} = 0{,}25\left(U_{xx} + U_{yy}\right), \quad t>0, \quad x \in (0;1), \quad y \in (0;2),$$
$$U(0,x,y)=0, \quad U_t(0,x,y) = x(2-x)\cos\tfrac{9\pi}{4} y, \quad x \in [0;1], \quad y \in [0;2],$$
$$U(t,0,y)=0, \quad U_x(t,1,y)=0, \quad t \geq 0, \quad y \in [0;2],$$
$$U_y(t,x,0)=0, \quad U(t,x,2)=0, \quad t \geq 0, \quad x \in [0;1].$$

Варіант 8.

1. Напівнескінчена однорідна $(a=1)$ струна коливається тільки внаслідок дії сили на кінець $x=0$, яка викликає його зміщення, рівне $\sin^2 \pi t$. Визначити положення точок струни в довільний момент часу t. Нарисувати профіль струни при $t=1$, 2, 3, 4.

2. Дати фізичну інтерпретацію поставленої змішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}(t,x) - 6, \quad t>0, \quad x \in (0;l),$$
$$U(0,x)=0, \quad U_t(0,x)=0, \quad x \in [0;l],$$
$$U_x(t,0) - 0{,}5U(t,0) = 0, \quad U(t,l)=0, \quad t \ge 0.$$

3. Знайти поперечні коливання однорідної прямокутної мембрани $x \in [0;b]$, $y \in [0;c]$, закріпленої нерухомо по контуру, які викликані початковою швидкістю $U_t(0,x,y) = Axy(b-x)(c-y)$, де $A = const$. Опором навколишнього середовища нехтувати.

Варіант 9.

1. Зобразити ґрафічно профіль однорідної $(a=1)$ напівнескінченої струни з нерухомо закріпленим кінцем при $t=1$, 2, 3, 4, 5, якщо струна коливається тільки за рахунок початкового відхилення її точок, яке рівне

$$U(0,x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;2) \cup (4;+\infty), \\ 2-2(x-3)^2, & x \in [2;4]. \end{cases}$$

2. Знайти розв'язок $U(t,x)$ змішаної задачі:

$$U_{tt} = U_{xx} + \pi n \,\mathrm{th}\tfrac{\pi n}{2} x U_x + ch^{-1}\tfrac{\pi n}{2} x, \quad t>0, \quad x \in (0;2),$$
$$U(0,x)=0, \quad U_t(0,x)=0, \quad x \in [0;2],$$
$$U_x(t,0)=0, \quad U(t,l)=0, \quad t \ge 0.$$

Вказівка. Ввести заміну: $Z(t,x) = ch\tfrac{\pi n}{2} x \cdot U(t,x)$.

3. Знайти поперечні коливання однорідної прямокутної мембрани $x \in [0;b]$, $y \in [0;c]$ із закріпленим краєм, які викликані неперервно розподіленою по мембрані й перпендикулярною до її поверхні силою з густиною

$$f(t,x,y) = \rho xy(x-b)(y-c)\cos\omega t, \ t>0, \ \omega = const,$$

де ρ – поверхнева густина маси мембрани, вважаючи, що реакцією навколишнього середовища можна нехтувати.

Варіант 10.

1. Напівнескінчена однорідна струна з нерухомо закріпленим кінцем коливається тільки за рахунок початкового відхилення, яке рівне

$$U(0,x)=\begin{cases} 0, & x\in[0;c)\bigcup[3c;+\infty), \\ hc^{-1}(x-c), & c\le x<2c, \\ hc^{-1}(3c-x), & 2c\le x<3c, \end{cases}$$

де $h,c=const>0$. Зобразити профіль струни в моменти часу: $t=\frac{c}{a}$, $t=\frac{3c}{2a}$, $t=\frac{2c}{a}$, $t=\frac{7c}{2a}$.

2. Дати фізичну інтерпретацію поставленої змішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt}=U_{xx}(t,x)+\left(x^2-l^2\right)t^2,\quad t>0,\quad x\in(0;l),$$
$$U(0,x)=0,\quad U_t(0,x)=0,\quad x\in[0;l],$$
$$U_x(t,0)=0,\quad U(t,l)=0,\quad t\ge 0.$$

3. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, визначити поперечні коливання однорідної прямокутної мембрани $x\in[0;1]$, $y\in[0;\pi]$, краї $x=0$ і $x=1$ якої вільні, а інші – нерухомо закріплені, під дією неперервно розподіленої по мембрані зовнішньої сили інтенсивності $P_0=const$, якщо початкові відхилення точок мембрани відсутні, а їх початкова швидкість рівна $y^2-\pi y$.

Варіант 11.

1. Напівнескінчена однорідна струна з нерухомо закріпленим кінцем $x=0$ знаходиться в прямолінійному положенні рівноваги. В момент часу $t=0$ вона ударяється молоточком, який має ширину h, на відстані $c=const$ від точки закріплення. Головка молоточка сконструйована таким чином, що початкова швидкість, надана струні, буде максимальною біля центру головки і рівна нулеві біля її країв; крива початкової швидкості цієї частини струни має вигляд: $U_t(0,x)=v_0\cos\frac{\pi}{h}(x-c)$ при $|x-c|\le\frac{h}{2}$, де $v_0=const$, $h=const<2c$. Визначити форму струни при $t>0$.

2. Дати фізичну інтерпретацію поставленої змішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt}=U_{xx}(t,x)+lx(x-l),\quad t>0,\quad x\in(0;l),$$
$$U(0,x)=0,\quad U_t(0,x)=0,\quad x\in[0;l],$$
$$U(t,0)=0,\quad U_x(t,l)=0,\quad t\ge 0.$$

3. Вивчити процес вільних коливань однорідної прямокутної мембрани $x\in[0;1]$, $y\in[0;2]$, краї $x=0$ і $y=0$ якої вільні, а інші – нерухомо закріплені, якщо коливання відбуваються тільки внаслідок початкового відхилення її точок, яке рівне $U(0,x,y)=x^2y^2(1-x)(2-y)$.

Варіант 12.

1. По пружньому напівнескінченому стержню при $t<0$ поширюється хвиля деформації, яка рухається вліво:

$$U(t,x)=\begin{cases}\sin(x+3t), & x>-3t,\\ 0, & x\in(0;-3t),\end{cases}\qquad t<0.$$

Кінець стержня $x=0$ пружньо закріплений: $U_x(t,0)-\frac{2}{3}U(t,0)=e^{-2t},\quad t\ge 0.$

Вивчити процес поздовжніх коливань даного стержня при $t>0.$

Вказівка. Із умови задачі випливає, що при $t>0$ потрібно знайти розв'язок змішаної задачі:

$$U_{tt}=9U_{xx}(t,x)+\left(x^2-l^2\right)t^2,\quad t>0,\quad x>0,$$
$$U(0,x)=\sin x,\quad U_t(0,x)=3\cos x,\quad x\ge 0,$$
$$U_x(t,0)-\tfrac{2}{3}U(t,0)=e^{-2t},\quad t\ge 0.$$

2. Вивчити вимушені коливання однорідної струни, закріпленої на кінцях $x=0$ і $x=l,$ без початкових зміщень і швидкостей, якщо на струну діє рівномірно розподілена сила з густиною $A=const$. Дати фізичну інтерпретацію одержаного результату.

3. Дати фізичну інтерпретацію змішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt}=U_{xx}+U_{yy}+x(x-1)^2\sin\tfrac{3\pi}{2}y\sin\omega t,\quad t>0,\quad x,y\in(0;1),\quad \omega=const,$$
$$U(0,x,y)=0,\quad U_t(0,x,y)=0,\quad x\in[0;1],\quad y\in[0;1],$$
$$U|_{x=0}=U_x|_{x=1}=U|_{y=0}=U_y|_{y=1}=0,\quad t\ge 0.$$

Варіант 13.

1. Дати фізичну інтерпретацію поставленої змішаної задачі:

$$U_{tt}=U_{xx}(t,x),\quad t>0,\quad x>0,$$
$$U(0,x)=\begin{cases}2\sin\frac{\pi}{2}(x-1), & x\in[1;3],\\ 0, & x\in[0;1]\cup(3;+\infty),\end{cases}\qquad U_t(0,x)=0,\quad x\ge 0,$$
$$U_x(t,0)=0,\quad t\ge 0,$$

і зобразити графічно її розв'язок в моменти часу $t=1,\,2,\,3,\,4,\,5.$

2. Вивчити вимушені коливання однорідної струни, закріпленої на кінці $x=l$ і вільної на кінці $x=0,$ на яку в момент часу $t=0$ починає діяти стала сила $\rho g,$ ρ – лінійна густина струни. Початкові відхилення та швидкість точок струни рівні нулеві. Дати фізичну інтерпретацію одержаного результату.

3. Дати фізичну інтерпретацію змішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt}=a^2\left(U_{xx}+U_{yy}\right)+\tfrac{4}{3}x^2,\quad t>0,\quad x\in(0;1),\quad y\in(0;1),$$
$$U(0,x,y)=0,\quad U_t(0,x,y)=0,\quad x\in[0;1],\quad y\in[0;1],$$
$$U|_{x=0}=U_y|_{y=0}=U_y|_{y=1}=0,\quad \left(U_x+U\right)|_{x=1}=2t^2,\quad t\ge 0.$$

Варіант 14.

1. Дати фізичну інтерпретацію поставленої змішаної задачі:

$$U_{tt} = U_{xx}(t,x), \quad t>0, \quad x>0,$$

$$U(0,x) = \begin{cases} -2\cos\frac{\pi}{2}(x-2), & x\in[1;3], \\ 0, & x\in[0;1]\bigcup(3;+\infty), \end{cases} \quad U_t(0,x)=0, \quad x\geq 0,$$

$$U(t,0)=0, \quad t\geq 0,$$

і зобразити ґрафічно її розв'язок в моменти часу $t=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$.

2. Вивчити процес коливань однорідної струни довжини l, правий кінець $x=l$ якої вільний, а лівий $x=0$ закріплений, якщо вона коливається тільки внаслідок дії рівномірно розподіленої вздовж струни зовнішньої сили $f(t,x)=\rho t\sin\frac{7\pi}{2l}x$, ρ – лінійна густина струни.

3. Дати фізичну інтерпретацію поставленої змішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt} = a^2\left(U_{xx}+U_{yy}-2t^2x\right)+0{,}5x^2y(y-2), \quad t>0, \quad x\in(0;2), \quad y\in(0;2),$$

$$U(0,x,y)=0, \quad U_t(0,x,y)=0, \quad x\in[0;2], \quad y\in[0;2],$$

$$U(t,0,y)=0, \quad U_x(t,2,y)=t^2y(y-2), \quad t\geq 0, \quad y\in[0;2],$$

$$U(t,x,0)=0, \quad U(t,x,2)=0, \quad t\geq 0, \quad x\in[0;2].$$

Варіант 15.

1. Однорідна напівнескінчена струна з вільним кінцем $x=0$ знаходиться в прямолінійному положенні рівноваги. В початковий момент часу по струні в точці $x=c$ ударяє молоточок, який надає точкам струни початкову швидкість

$$U_t(0,x) = \begin{cases} v_0 = const, & |x-c|\leq\frac{\pi}{2h}, \\ 0, & |x-c|>\frac{\pi}{2h}, \end{cases} \quad \text{де } h=const,\ \frac{\pi}{h} \text{ – ширина молоточка.}$$

Зобразити ґрафічно профіль струни в моменти часу $t=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$.

2. Знайти закон вільних коливань однорідної струни довжини l, правий кінець $x=l$ якої вільний, а лівий $x=0$ закріплений, якщо в початковий момент часу струні було надано форму кривої $\varphi(x)=0{,}01l\sin\frac{\pi}{2l}x$, після чого струна була відпущена без початкової швидкості.

3. Дати фізичну інтерпретацію поставленої змішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt} = a^2\left(U_{xx}+U_{yy}\right)+x^2y(2x-3)(y-1)^2, \quad t>0, \quad x\in(0;1), \quad y\in(0;1),$$

$$U(0,x,y)=0, \quad U_t(0,x,y)=0, \quad x\in[0;1], \quad y\in[0;1],$$

$$U_x(t,0,y)=0, \quad U_x(t,1,y)=0, \quad t\geq 0, \quad y\in[0;1],$$

$$U(t,x,0)=0, \quad U_y(t,x,1)=0, \quad t\geq 0, \quad x\in[0;1].$$

Варіант 16.

1. Методом характеристик знайти розв'язок $U(t,x)$ змішаної задачі

$$U_{tt} = 4U_{xx}, \quad t>0, \quad x>0,$$
$$U(0,x) = \operatorname{ch} x, \quad U_t(0,x) = \cos 2x, \quad x \ge 0,$$
$$U_x(t,0) - U(t,0) = -t-1, \quad t \ge 0,$$

та дати її фізичну інтерпретацію.

2. Знайти закон коливань однорідної струни, закріпленої на кінцях $x=-l$, $x=l$, якщо в початковий момент часу струна мала форму параболи, симетричної відносно центра струни, причому максимальне початкове зміщення струни рівне h, а початкова швидкість її точок рівна нулеві. Дати фізичну інтерпретацію одержаного розв'язку.

3. Вивчити процес вільних коливань однорідної прямокутної мембрани $x \in [0;2]$, $y \in [0;1]$, два краї якої $x=0$ і $x=2$ вільні, а інші два – нерухомо закріплені, якщо коливання мембрани здійснюються тільки за рахунок початкового відхилення її точок $U(0,x,y) = \cos\frac{\pi}{2}x \sin \pi y.$

Варіант 17.

1. Вивчити процес коливань однорідної напівнескінченої струни з нерухомо закріпленим кінцем, якщо рівномірно розподілена вздовж струни зовнішня сила рівна $f(t,x) = \rho\left(2e^{-x}+t\right)$, де ρ – лінійна густина струни, а початкові відхилення та швидкість точок струни рівні нулеві.

2. Дати фізичну інтерпретацію поставленої змішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}(t,x), \quad t>0, \quad x \in (0;l),$$
$$U(0,x) = \varphi(x), \quad U_t(0,x) = 0, \quad x \in [0;l],$$
$$U_x(t,0) - 0{,}25U(t,0) = 0, \quad U_x(t,l) = 0, \quad t \ge 0.$$

3. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, визначити поперечні коливання однорідної прямокутної мембрани $x \in [0;b]$, $y \in [0;c]$, два краї $x=0$ і $y=0$ якої вільні, а інші два – нерухомо закріплені, якщо коливання викликані тільки за рахунок неперервно розподіленої по мембрані поперечної сили густини $f(t,x,y) = e^{-t}\left(x^2-b^2\right)\cos\frac{\pi}{2c}y.$

Варіант 18.

1. Вивчити процес коливань однорідної напівнескінченої струни з вільним кінцем, якщо коливання здійснюються тільки за рахунок дії рівномірно розподіленої вздовж струни поперечної сили інтенсивності $f(t,x)=3t\cos x$.
2. Дослідити вільні коливання однорідної струни, закріпленої на кінцях $x=0$, $x=2$, якщо початкова форма струни задається функцією $\varphi(x)=A\sin\frac{\pi m}{2}x$, де $A=const$, $m\in\mathbf{N}$, а початкова швидкість її точок рівна нулеві. Дати фізичну інтерпретацію одержаного розв'язку.
3. Дати фізичну інтерпретацію поставленої змішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt}=U_{xx}+U_{yy}-3x(x-1),\quad t>0,\quad x\in(0;1),\quad y\in(0;2),$$
$$U(0,x,y)=0,\quad U_t(0,x,y)=0,\quad x\in[0;1],\quad y\in[0;2],$$
$$U(t,0,y)=0,\quad U(t,1,y)=0,\quad t\geq 0,\quad y\in[0;2],$$
$$U_y(t,x,0)=0,\quad U_y(t,x,2)=0,\quad t\geq 0,\quad x\in[0;1].$$

Варіант 19.

1. Поширюючи збурення кінця за допомогою прямої хвилі, розв'язати змішану задачу:

$$U_{tt}=a^2U_{xx}(t,x),\quad t>0,\quad x>0,$$
$$U(0,x)=0,\quad U_t(0,x)=0,\quad x\geq 0,$$
$$U(t,0)=0{,}5t^2,\quad t\geq 0.$$

2. Вивчити вільні коливання однорідної струни, закріпленої на кінцях $x=0$, $x=l$, якщо в початковий момент часу точки струни знаходилися у стані спокою, а надана їм швидкість була рівна

$$\psi(x)=\begin{cases}0, & 0\leq x<x_0-\delta,\\ v_0\cos\frac{\pi(x-x_0)}{2\delta}, & x\in[x_0-\delta,x_0+\delta],\\ 0, & x_0-\delta<x\leq l,\end{cases}$$

де $v_0,x_0,\delta-const$, причому $\delta<x_0<l-\delta$. Дати фізичну інтерпретацію одержаного розв'язку.

3. Дослідити коливання однорідної квадратної мембрани з нерухомо закріпленим краєм, якщо коливання здійснюються тільки за рахунок рівномірно розподіленої по поверхні мембрани поперечної сили густини

$$f(t,x,y)=3ty(y-b)\sin\frac{6\pi}{b}x,$$

де b – довжина сторони мембрани.

Варіант 20.

1. Поширюючи збурення кінця за допомогою прямої хвилі, розв’язати змішану задачу:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}(t,x), \quad t > 0, \quad x > 0,$$
$$U(0,x) = 0, \quad U_t(0,x) = 0, \quad x \ge 0,$$
$$U_x(t,0) = \sin t - t, \quad t \ge 0.$$

2. Вивчити процес вільних коливань однорідної струни довжини l, лівий кінець $x = 0$ якої вільний, а правий $x = l$ пружньо закріплений, якщо коливання здійснюються тільки за рахунок початкової швидкості точок струни, яка рівна $2x^2(x-l)^2$.
3. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, визначити поперечні коливання однорідної квадратної мембрани зі стороною b, якщо коливання викликані тільки внаслідок дії неперервно розподіленої по мембрані поперечної сили густини $f(t,x,y) = e^{-t}\cos\frac{2\pi}{b}y\sin\frac{\pi}{b}x$. Краї $x = 0$ і $x = b$ нерухомо закріплені, а інші – вільні.

Варіант 21.

1. Дослідити процес вільних коливань однорідної напівнескінченої струни з пружньо закріпленим кінцем, причому точка закріплення зміщується згідно закону $\gamma(t) = 3t^2$, якщо початкові відхилення та швидкість точок струни відсутні.
2. Проінтеґрувати змішану задачу:

$$xU_{xx} + 2U_x - xa^{-2}U_{tt} = -q, \quad t > 0, \quad x \in (1;3), \quad q = const,$$
$$U(0,x) = 0, \quad U_t(0,x) = 0, \quad x \in [1;3],$$
$$U(t,1) = 0, \quad U(t,3) = 0, \quad t \ge 0.$$

   Вказівка. Ввести заміну: $Z(t,x) = xU(t,x)$.

3. Вивчити процес вільних коливань однорідної прямокутної мембрани $x \in [0;2]$, $y \in [0;1]$, два краї $y = 0$ і $y = 1$ якої вільні, а інші два – нерухомо закріплені, якщо в початковий момент часу мембрана мала форму $U(0,x,y) = A\cos\pi y\sin\frac{\pi}{2}x$, $A = const$, і почала коливатися без початкової швидкості. Реакцією навколишнього середовища нехтувати.

Варіант 22.

1. Дати фізичну інтерпретацію поставленої змішаної задачі та проінтеґрувати її:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}(t,x) + e^{-(t+x)}, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad a^2 \neq 1,$$
$$U(0,x) = \cos x, \quad U_t(0,x) = 0, \quad x \geq 0,$$
$$U_x(t,0) = 0, \quad t \geq 0.$$

2. Однорідна струна довжини l, закріплена на обох кінцях, знаходиться в прямолінійному положенні рівноваги. Знайти відхилення $U(t,x)$ струни для довільного моменту часу, якщо вона збуджується початковою швидкістю

$$\psi(x) = \begin{cases} v_0 = const, & |x - c| \leq \frac{\pi}{2h}, \\ 0, & |x - c| > \frac{\pi}{2h}, \end{cases} \quad \text{де} \quad \left[c - \frac{\pi}{2h}; c + \frac{\pi}{2h}\right] \subset [0;l].$$

Дати фізичну інтерпретацію одержаного результату.

3. Однорідна квадратна мембрана зі стороною b, край $y = b$ якої вільний, а три інші краї нерухомо закріплені, коливається внаслідок дії рівномірно розподіленої по всій її поверхні поперечної сили густини

$$f(t,x,y) = t^2 x(x - b)\sin\frac{5\pi}{2b} y.$$

Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, визначити положення точок мембрани в довільний момент часу t.

Варіант 23.

1. Однорідна напівнескінчена струна з нерухомо закріпленим кінцем коливається тільки внаслідок дії рівномірно розподіленої вздовж струни поперечної сили $f(t,x) = te^{-x}$. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, визначити положення точок струни в довільний момент часу t.

2. В області $\mathbf{B} = \{(t,x) | t > 0, \quad 0 < x < l\}$ знайти розв'язок змішаної задачі:

$$U_{xx} - a^2 U_{tt} - 2hU_t - b^2 U(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \mathbf{B},$$
$$U(0,x) = A, \quad U_t(0,x) = 0, \quad x \in [0;l],$$
$$U(t,0) = A, \quad U_x(t,l) = 0, \quad t \geq 0,$$

де $a, h, b, A - const$.

3. Вивчити процес вільних коливань однорідної прямокутної мембрани $x \in [0;b]$, $y \in [0;c]$, два краї $x = 0$ і $y = 0$ якої нерухомо закріплені, а інші два вільні, якщо в початковий момент часу точки мембрани знаходилися у спокої, а їх швидкість була рівна $U_t(0,x) = y(y - c)^2 \sin\frac{3\pi}{2b} x$.

Варіант 24.

1. Однорідна напівнескінчена струна з вільним кінцем коливається тільки внаслідок початкової швидкості її точок $U_t(0,x)=0{,}5x^2+3$. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, визначити положення точок струни в довільний момент часу *t*.

2. В області $\mathbf{B}=\{(t,x)|t>0,\quad 1<x<l\}$ знайти розв'язок змішаної задачі:

$$xU_{xx}+2U_x-xa^{-2}U_{tt}=-PT^{-1},\quad (t,x)\in\mathbf{B},\quad PT^{-1}=const,$$
$$U(0,x)=0,\quad U_t(0,x)=0,\quad x\in[1;l],$$
$$U(t,1)=0,\quad U(t,l)=0,\quad t\geq 0.$$

Вказівка. Ввести заміну: $Z(t,x)=xU(t,x)$.

3. Однорідна квадратна мембрана зі стороною $b=2$ з нерухомо закріпленим краєм піддається дії рівномірно розподіленої по її поверхні поперечної сили $f(t,x,y)=e^{-t}y(y-2)(2-x)\operatorname{sh}x$. В початковий момент часу відхилення і швидкість точок мембрани були відсутні. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, визначити положення точок мембрани в довільний момент часу *t*.

Варіант 25.

1. Дати фізичну інтерпретацію поставленої змішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt}=a^2U_{xx}(t,x)+e^{-x},\quad t>0,\quad x>0,\quad a^2\neq 1,$$
$$U(0,x)=0,\quad U_t(0,x)=0,\quad x\geq 0,$$
$$U_x(t,0)=t^2,\quad t\geq 0.$$

2. Знайти закон вільних коливань однорідної струни, лівий кінець $x=0$ якої вільний, а правий $x=l$ закріплений, якщо початкове відхилення точок струни $U(0,x)=-0{,}01x^2(x-l)$, а їх початкова швидкість рівна нулеві. Дати фізичну інтерпретацію одержаного результату.

3. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, визначити поперечні коливання однорідної прямокутної мембрани $x\in[0;s]$, $y\in[0;p]$, краї $x=0$ і $y=p$ якої нерухомо закріплені, а інші вільні, якщо коливання викликані неперервно розподіленою по мембрані поперечною сили густини

$$f(t,x,y)=e^{-t}x(x-s)^2\cos\tfrac{\pi}{2p}y.$$

Варіант 26.

1. Однорідна напівнескінчена струна, кінець якої підданий дії сили $\nu(t) = -e^{-t}$, в початковий момент часу займала прямолінійне положення, а початкова швидкість її точок була рівна $U_t(0,x) = e^{-x}$. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, визначити положення точок струни в довільний момент часу *t*.
2. Вивчити вільні коливання однорідної струни довжини *l*, закріпленої на кінцях $x = 0$ та $x = l$, якщо в початковий момент часу струні була надана форма кривої $U(0,x) = (8l)^{-1}(l - x)x$, а потім вона була відпущена без початкової швидкості. Дати фізичну інтерпретацію одержаного результату.
3. Дати фізичну інтерпретацію поставленої змішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt} = a^2\left(U_{xx} + U_{yy}\right), \quad t > 0, \quad x \in (0;b), \quad y \in (0;c),$$
$$U(0,x,y) = \varphi(x,y), \quad U_t(0,x,y) = \psi(x,y), \quad x \in [0;b], \quad y \in [0;c],$$
$$U(t,0,y) = \mu_1(y), \quad U(t,b,y) = \mu_2(y), \quad t \ge 0, \quad y \in [0;c],$$
$$U(t,x,0) = \nu_1(x), \quad U(t,x,c) = \nu_2(x), \quad t \ge 0, \quad x \in [0;b].$$

Вказівка. Вважати, що для функцій $\mu_i(y)$, $\nu_i(x)$, $i = 1,2$, виконуються умови узгодженості: $\mu_i(0) = \mu_i(c) = \nu_i(0) = \nu_i(b) = 0$, $i = 1,2$.

Варіант 27.

1. Вивчити процес коливань однорідної напівнескінченої струни з вільним кінцем, якщо коливання здійснюються лише за рахунок рівномірно розподіленої по струні сили інтенсивності $x^2 e^{-t}$.
2. Проінтеґрувати змішану задачу та дати її фізичну інтерпретацію:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in (0;3),$$
$$U(0,x) = x^2 - 3{,}75x, \quad U_t(0,x) = 4 - x, \quad x \in [0;3],$$
$$U(t,0) = 4t, \quad U_x(t,3) + U(t,3) = 0, \quad t \ge 0.$$

3. Дослідити коливання однорідної прямокутної мембрани $x \in [0;b]$, $y \in [0;c]$ з вільними краями під дією рівномірно розподіленої по мембрані поперечної сили $f(t,x,y) = \rho\left(1 + \cos\frac{\pi}{c}y\right)$, де ρ – густина, якщо початкове відхилення точок мембрани задане функцією $\cos\frac{\pi}{b}x$, а їх початкова швидкість рівна нулеві.

Варіант 28.

1. Проінтеґрувати змішану задачу та дати її фізичну інтерпретацію:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}(t,x), \quad t > 0, \quad x > 0,$$
$$U(0,x) = -4, \quad U_t(0,x) = 0, \quad x \ge 0,$$
$$U_x(t,0) - hU(t,0) = 4h, \quad t \ge 0, \quad h = const > 0.$$

2. Однорідна струна довжини $l = \frac{1}{4}$, до лівий кінець якої закріплений пружньо $\left(h = \frac{3\pi}{4l}\right)$, а правий – жорстко, коливається під дією рівномірно розподіленої по струні поперечної сили інтенсивності $x^2(x-1)e^{-t}$. Визначити положення точок струни в довільний момент часу $t > 0$, якщо в початковий момент часу струна займала прямолінійне положення, а швидкість її точок була рівна $\psi(x) = v_0\left(\sin\frac{3\pi}{4l}x + \cos\frac{3\pi}{4l}x\right)$, де $v_0 = const$.

3. Дослідити коливання однорідної прямокутної мембрани $x \in [0;b]$, $y \in [0;c]$, якщо початкове відхилення її точок задане функцією $8y(y-c)\sin\frac{\pi}{b}x$, а їх початкова швидкість рівна xy. На краях $x = b$ та $y = c$ відхилення задається функціями відповідно bty та ctx, а інші два краї нерухомо закріплені.

Варіант 29.

1. Проінтеґрувати змішану задачу та дати її фізичну інтерпретацію:

$$U_{tt} = 9U_{xx}(t,x) - 12, \quad t > 0, \quad x > 0,$$
$$U(0,x) = x, \quad U_t(0,x) = 0, \quad x \ge 0,$$
$$U(t,0) = \sin^2 t, \quad t \ge 0.$$

2. Дослідити коливання однорідної $(a = 1)$ струни довжини l, до обох кінців якої прикладені однакові сили $\sin t$, якщо в початковий момент часу струна займала прямолінійне положення, початкова швидкість її точок була рівна $\psi(x) = x$, а інтенсивність зовнішніх сил $f(t,x) = \left(2x^3 - 3x^2 l - x\right)\sin t$.

3. Вивчити вільні коливання однорідної квадратної мембрани зі стороною $b = 4$, край $y = 4$ якої закріплений пружньо, а інші три краї – нерухомо, якщо початкові відхилення точок мембрани відсутні, а їх початкова швидкість рівна $v_0 y(y-4)^2 \sin\pi x$, де $v_0 = const$.

Варіант 30.

1. Однорідна напівнескінчена струна із пружньо закріпленим $(h=1)$ кінцем коливається тільки за рахунок початкової швидкості її точок, яка рівна $v_0 = const$, і зміщення точки закріплення пружини $\gamma(t) = -v_0 t$. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, визначити положення точок струни в довільний момент часу t.

2. Дати фізичну інтерпретацію поставленої змішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}(t,x) + 2x, \quad t>0, \quad x \in (0;2),$$
$$U(0,x) = x^2, \quad U_t(0,x) = 0, \quad x \in [0;2],$$
$$U_x(t,0) = t^2, \quad U_x(t,2) = t^2 + 4, \quad t \ge 0.$$

3. Вивчити процес вільних коливань однорідної прямокутної мембрани $x \in [0;0,5]$, $y \in [0;1]$ з закріпленим краєм, якщо в початковий момент часу відхилення точок мембрани задавалося функцією $\sin 6\pi x \sin 6\pi y$, а їх швидкість була рівна $y(y-1)\operatorname{sh} x \operatorname{sh}\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

Варіант 31.

1. Вивчити процес вільних коливань однорідної $(a=1)$ скінченої струни довжини $l=6$, лівий кінець $x=0$ якої нерухомо закріплений, а правий $x=6$ вільний (нарисувати профіль струни при $t=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ і знайти період коливань), якщо початковий момент часу швидкість точок струни рівна нулеві, а їх відхилення задане функцією

$$U(0,x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < 2, \\ 8-2x, & 2 \le x < 4, \\ 0, & 4 \le x \le 6. \end{cases}$$

2. Знайти закон вимушених коливань однорідної струни, вільної на кінці $x=0$ і пружньо закріпленої $(h=1)$ на кінці $x=1$, без початкових зміщень і швидкостей, якщо на струну діє рівномірно розподілена сила з густиною $24e^{-t}\left(3-x^2\right)$.

3. Дати фізичну інтерпретацію поставленої змішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt} = a^2\left(U_{xx} + U_{yy}\right) + \cos 2x \sin \pi y, \quad t>0, \quad x \in (0;\pi), \quad y \in (0;1),$$
$$U(0,x,y) = A\left(y^2+1\right), \quad U_t(0,x,y) = 0, \quad x \in [0;\pi], \quad y \in [0;1],$$
$$U_x(t,0,y) = 0, \quad U_x(t,\pi,y) = 0, \quad t \ge 0, \quad y \in [0;1],$$
$$U(t,x,0) = A, \quad U(t,x,1) = 2A, \quad t \ge 0, \quad x \in [0;\pi], \quad A = const.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.
2. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.
3. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
4. *Смирнов М.М.* Задачи по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1968. – 112 с.
5. *Бицадзе А.В., Калиниченко Б.Ф.* Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1977. – 224 с.
6. *Перестюк М.О., Маринець В.В.* Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2001. – 334 с.
7. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1980. – 668 с.
8. *Комеч А.И.* Практическое решение уравнений математической физики. – М.: Изд-во МГУ, 1986. – 160 с.
9. *Окунєв Л.Я.* Вища алгебра. – К.: Радянська школа, 1950.

ЗМІСТ