МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАРИНЕЦЬ В.В., РЕГО В.Л.

РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

(МЕТОДИЧНА РОЗРОБКА З ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ)

ЧАСТИНА II

Рівняння параболічного типу.

Рівняння еліптичного типу.

Теорія потенціалу.

УЖГОРОД 2009

Дана методична розробка складена у відповідності до затвердженої Навчально-методичним управлінням по вищій освіті 23 січня 1985 року програми (індекс УМУ-20/190) дисципліни “Рівняння математичної фізики” для студентів державних університетів зі спеціальності 0101 – математика та 0102 – прикладна математика.

Основна мета посібника – допомогти студенту навчитися розв’язувати задачі по двох розділах вказаної дисципліни:

а) рівняння параболічного типу;

б) рівняння еліптичного типу та теорія потенціалу.

В посібнику викладені необхідні короткі теоретичні відомості з даних розділів, розв’язані типові задачі, складені завдання для аудиторної та самостійної роботи. На початку кожної теми наводиться перелік питань, які студент повинен вивчити, і дається посилання на літературу зі вказівкою параґрафів та сторінок.

ТЕМА IV
РІВНЯННЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

Вивчити*:

1. Фізичні процеси, які приводять до рівнянь параболічного типу.
2. Постановка змішаних задач для рівняння теплопровідності.
3. Поширення тепла в однорідному ізотропному скінченому стержні. Метод відокремлення змінних (метод Фур'є).
4. Змішані задачі зі стаціонарними неоднорідностями для рівняння теплопровідності.
5. Загальна схема методу відокремлення змінних для рівняння теплопровідності.
6. Єдиність розв'язку змішаної задачі для рівняння теплопровідності та його неперервна залежність від початкової та крайових умов.
7. Постановка задач Коші для рівняння теплопровідності.
8. Фундаментальний розв'язок однорідного рівняння теплопровідності. Формула Пуассона та її фізична інтерпретація.
9. Єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності.
10. Змішані задачі для напівнескінченого стержня з теплоізольованою бічною поверхнею та методи їх інтеґрування.

Розв'язати задачі: №№ 24-26, 34-36, 72-74, 85, 86 (стор. 51-62 згідно [6]), або №№ 7-11, 15б, 15в, 19, 26-29 (розділ III, тема 3 згідно [4]).

*[3], розділ III, §§1-3, стор. 184-238, або [4], розділ III, стор. 165-199.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1. Постановка змішаних задач для рівнянь параболічного типу

При дослідженні фізичних процесів різної природи часто зустрічаються ДРЧП параболічного типу. Так, наприклад, рівнянням

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + f(t,x,y,z)$$

описуються такі процеси:

а) поширення тепла в однорідному ізотропному тілі. Тоді *U(t,x,y,z)* є температура точок тіла в різні моменти часу, $a^2 = k(c\rho)^{-1}$ (k>0 – коефіцієнт внутрішньої теплопровідності тіла, c - його питома теплоємність, ρ – густина), $f(t,x,y,z) = F\rho^{-1}$, де *F(t,x,y,z)* – інтенсивність внутрішніх джерел тепла;

б) дифузія рідини або газу в однорідному середовищі. Тоді *U(t,x,y,z)* є концентрація речовини в точках середовища в різні моменти часу, $a^2 = dc^{-1}$ (d – коефіцієнт дифузії, c – коефіцієнт пористості середовища), $f(t,x,y,z) = Fc^{-1}$, де *F(t,x,y,z)* – інтенсивність внутрішніх джерел речовини.

При складанні математичних моделей фізичних процесів, які відбуваються в об'єктах скінчених або напівнескінчених розмірів, окрім рівняння та початкової умови необхідно задавати режими на краї об'єкта (крайові умови), що приводить до змішаних задач для ДРЧП.

Для прикладу розглянемо наступну задачу: дослідити процес поширення тепла в однорідному ізотропному стержні довжини l з теплоізольованою бічною поверхнею, початкова температура якого рівна $\varphi(x)$, а на кінцях

1) задані закони зміни температури $\mu_1(t)$ і $\mu_2(t)$;

2) задані теплові потоки $\nu_1(t)$ і $\nu_2(t)$;

3) відбувається теплообмін із навколишнім середовищем, температура якого рівна $\gamma(t)$, з коефіцієнтами теплопровідності h_1 і h_2 (додатні сталі).

Відповідна математична модель: в області $B = \{(t,x) \mid \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l\}$ знайти розв'язок рівняння теплопровідності

$$U_t(t,x) = a^2 U_{xx}(t,x), \tag{1}$$

який справджує початкову умову

$$U(0,x) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l$$

та відповідні крайові умови:

1) $U(t,0) = \mu_1(t), \quad U(t,l) = \mu_2(t), \quad 0 \le t < T$ (перша змішана задача);

2) $U_x(t,0) = \nu_1(t), \quad U_x(t,l) = \nu_2(t), \quad 0 \le t < T$ (друга змішана задача);

3) $\begin{array}{l} U_x(t,0) - h_1(U(t,0) - \gamma(t)) = 0, \\ U_x(t,l) + h_2(U(t,l) - \gamma(t)) = 0, \end{array} \quad 0 \le t < T$ (третя змішана задача).

Якщо $\mu_1(t)\equiv 0,\quad \mu_2(t)\equiv 0,\quad 0\le t<T,$ то кажуть, що на кінцях стержня підтримується нульова температура. Якщо ж $\nu_1(t)\equiv 0,\quad \nu_2(t)\equiv 0,\quad 0\le t<T,$ то кінці стержня є теплоізольованими.

Аналогічно ставляться змішані задачі для рівнянь параболічного типу і у випадку довільної вимірності простору.

Нехай, наприклад, потрібно визначити температуру однорідного ізотропного тіла **V** в довільний момент часу *t*>0, якщо початкова температура точок тіла задана функцією $\varphi(x,y,z)$, усередині тіла є джерела тепла інтенсивності $F(t,x,y,z)$, а на його досить гладкій поверхні **S** заданий один із наступних теплових режимів:

1) задана температура $\mu(t,x,y,z)$;

2) заданий тепловий потік $\nu(t,x,y,z)$;

3) проходить теплообмін із навколишнім середовищем, температура якого рівна $\gamma(t,x,y,z)$.

Математична модель поставленої задачі буде мати наступний вигляд: в області $B=\{(t,x,y,z)|\quad t>0,\quad (x,y,z)\in \mathrm{V}\}$ знайти розв’язок ДРЧП

$$U_t=a^2\left(U_{xx}+U_{yy}+U_{zz}\right)+f(t,x,y,z),$$

який справджує початкову умову

$$U(0,x,y,z)=\varphi(x,y,z),\quad (x,y,z)\in \mathrm{V}\cup \mathrm{S}=\overline{\mathrm{V}}$$

та одну з крайових умов:

1) $U(t,x,y,z)\big|_{(x,y,z)\in \mathrm{S}}=\mu(t,x,y,z),\quad t\ge 0,\quad (x,y,z)\in \mathrm{S};$

2) $\left.\dfrac{\partial U(t,x,y,z)}{\partial \vec{n}}\right|_{(x,y,z)\in \mathrm{S}}=\nu(t,x,y,z),\quad t\ge 0,\quad (x,y,z)\in \mathrm{S};$

3) $\left.\dfrac{\partial U(t,x,y,z)}{\partial \vec{n}}\right|_{(x,y,z)\in \mathrm{S}}+h\left[U(t,x,y,z)-\gamma(t,x,y,z)\right]\big|_{(x,y,z)\in \mathrm{S}}=0,\quad t\ge 0,$

де *h*=*const*>0 – коефіцієнт теплообміну.

Примітка. Рівняння (1) описує процес поширення температури у стержні з теплоізольованою бічною поверхнею. Якщо ж через бічну поверхню стержня проходить теплообмін із навколишнім середовищем, температура якого рівна $U_0(t,x)$, то згідно закону Ньютона кількість тепла, яка пройде через бічну поверхню стержня, пропорційна різниці температур стержня і навколишнього середовища, тому рівняння теплопровідності матиме вигляд

$$U_t(t,x)=a^2U_{xx}(t,x)-b\left[U(t,x)-U_0(t,x)\right], \tag{2}$$

де $b=k_1\sigma(c\rho\omega)^{-1}$ (k_1– коефіцієнт зовнішньої теплопровідності, σ – периметр поперечного перерізу, ω – площа поперечного перерізу стержня).

Рівняння (2) можна спростити, ввівши підстановку

$$U(t,x)=e^{-bt}\cdot V(t,x).$$

Тоді для нової невідомої функції $V(t,x)$ одержимо рівняння

$$V_t(t,x)=a^2V_{xx}(t,x)+be^{bt}\cdot U_0(t,x).$$

Проте при розв'язуванні конкретних задач дана підстановка не завжди доцільна. Зокрема, у випадку задач зі стаціонарними неоднорідностями після такої підстановки одержуємо складнішу нестаціонарну задачу.

2. Метод відокремлення змінних (метод Фур'є) побудови розв'язків змішаних задач для рівнянь параболічного типу

Схема інтеґрування змішаних задач для рівнянь параболічного типу є аналоґічною схемі розв'язування змішаних задач для рівнянь гіперболічного типу (тема III). Наведемо основні ідеї методу відокремлення змінних побудови розв'язків змішаних задач на прикладі першої змішаної задачі для рівняння поширення тепла в однорідному ізотропному стержні:

$$U_t=a^2U_{xx}+f(t,x),\quad 0<t<T,\quad 0<x<l;$$
$$U(0,x)=\varphi(x),\quad 0\le x\le l;$$
$$U(t,0)=\mu_1(t),\quad U(t,l)=\mu_2(t),\quad 0\le t<T.$$

Будемо вважати, що початкова та крайові умови є узгодженими, тобто виконуються рівності $\varphi(0)=\mu_1(0)$, $\varphi(l)=\mu_2(0)$.

Можна вирізнити чотири типи задач.

1. Задача для однорідного рівняння з однорідними крайовими умовами $\left(f(t,x)\equiv 0,\ \ \mu_1(t)=\mu_2(t)\equiv 0\right)$. Розв'язок шукається у вигляді добутку: $U(t,x)=Y(t)\cdot X(x)\neq 0$, де $X(x)$ – власні функції відповідної задачі Штурма-Ліувілля, а $Y(t)$ визначаються з однорідного рівняння та початкової умови.

2. Задача для неоднорідного рівняння з однорідними крайовими умовами $\left(f(t,x)\neq 0,\ \ \mu_1(t)=\mu_2(t)\equiv 0\right)$. Будемо вважати, що $f(t,x)$ як функція змінної x справджує крайові умови. Тоді згідно методу Фур'є розв'язок шукається у вигляді ряду

$$U(t,x)=\sum_n Y_n(t)X_n(x),$$

де $X_n(x)$ – власні функції задачі Штурма-Ліувілля для відповідної однорідної задачі, а $Y_n(t)$ визначаються підстановкою ряду для $U(t,x)$ у неоднорідне рівняння та в початкову умову.

3. Загальна змішана задача: $\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\neq 0$, тобто хоча б одна з крайових умов неоднорідна. Тоді для застосування методу відокремлення змінних необхідно спершу звести крайові умови до однорідних. Розв'язок шукаємо у вигляді суми $U(t,x)=V(t,x)+\omega(t,x)$, причому допоміжну функцію $\omega(t,x)$ підбираємо таким чином, щоб вона справджувала крайові умови. Зокрема, у випадку поставленої вище задачі слід вимагати виконання умов $\omega(t,0)=\mu_1(t)$,

$\omega(t,l)=\mu_2(t)$. Тоді для нової невідомої функції $V(t,x)$ одержимо змішану задачу типу 1 або типу 2, до якої за умови її коректної постановки можна застосувати метод Фур'є.

Зауваження. Допоміжну функцію $\omega(t,x)$ зручно шукати в стандартному лінійному вигляді $\omega(t,x)=a(t)x+b(t)$, де коефіцієнти $a(t)$ і $b(t)$ визначаються з крайових умов. Зокрема, якщо обидві крайові умови першого роду, то одержимо: $\omega(t,x)=\mu_1(t)+xl^{-1}(\mu_2(t)-\mu_1(t))$. Винятком є друга змішана задача: якщо обидві крайові умови другого роду, тобто мають вигляд $U_x(t,0)=\nu_1(t)$, $U_x(t,l)=\nu_2(t)$, то допоміжна функція як лінійна не визначається однозначно, зате її можна шукати у вигляді $\omega(t,x)=(a(t)x+b(t))x$. У цьому випадку будемо мати $\omega(t,x)=x\nu_1(t)+0{,}5x^2l^{-1}(\nu_2(t)-\nu_1(t))$. Проте такі прості прийоми не завжди є ефективними, адже слід пам'ятати, що до змішаної задачі з однорідними крайовими умовами, яку одержимо для $V(t,x)$, метод Фур'є застосовний лише тоді, коли вільний член у рівнянні справджує крайові умови (за винятком випадку задачі зі стаціонарними неоднорідностями, поданого нижче). Якщо цього домогтися не вдалося, то слід шукати інші способи побудови допоміжної функції.

4. Задача зі стаціонарними неоднорідностями: вільний член у рівнянні та крайові умови не залежать від часу, тобто $f(t,x)\equiv f(x)$, $\mu_1(t)\equiv\mu_1=const$, $\mu_2(t)\equiv\mu_2=const$. Цю задачу можна розв'язувати як загальну змішану задачу (вона є частинним випадком загальної задачі), проте в даному випадку це нераціонально. Найзручніше шукати розв'язок у вигляді

$$U(t,x)=V(t,x)+\omega(x),$$

де допоміжна функція $\omega(x)$ (стаціонарна температура) повинна справджувати не лише крайові умови, а й рівняння. Зокрема, для поставленої вище змішаної задачі $\omega(x)$ повинна бути розв'язком наступної крайової задачі:

$$a^2\omega''(x)+f(x)=0;$$
$$\omega(0)=\mu_1,\quad \omega(l)=\mu_2.$$

Тоді для функції $V(t,x)$ одержимо змішану задачу типу 1 (однорідне рівняння та однорідні крайові умови), до якої безумовно застосовний метод Фур'є.

Винятком тут знову є друга змішана задача. Крайова задача

$$a^2\omega''(x)+f(x)=0;$$
$$\omega'(0)=\nu_1,\quad \omega'(l)=\nu_2$$

має розв'язок, якщо виконується умова $\int_0^l f(\xi)d\xi=a^2(\nu_1-\nu_2)$. Якщо ж ця умова не виконується, то задану другу змішану задачу слід інтеґрувати як задачу типу 2 при $\nu_1=\nu_2=0$, або як загальну змішану задачу у випадку неоднорідних крайових умов.

ПРИКЛАД 1. Проінтеґрувати змішану задачу та дати фізичну інтерпретацію:

$$U_t = a^2 U_{xx}, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 1; \tag{3}$$

$$U(0,x) = 1 + x - 2x^2, \quad 0 \le x \le 1; \tag{4}$$

$$U_x(t,0) - U(t,0) = 0, \quad U(t,1) = 0, \quad 0 \le t < T. \tag{5}$$

Фізична інтерпретація: знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні одиничної довжини з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо початкова температура точок стержня рівна $\varphi(x) = 1 + x - 2x^2$, на правому кінці підтримується нульова температура, а на лівому відбувається теплообмін по закону Ньютона з навколишнім середовищем нульової температури.

Розв'язання. Рівняння та крайові умови однорідні (задача типу 1). Початкова та крайові умови узгоджені, отже, можемо застосувати метод відокремлення змінних. Розв'язок шукаємо у вигляді добутку:

$$U(t,x) = Y(t) \cdot X(x) \ne 0. \tag{6}$$

Підставивши (6) у рівняння (3) та крайові умови (5), одержимо:

$$Y'(t) - a^2 \lambda Y(t) = 0, \quad \lambda = const; \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &X''(x) - \lambda X(x) = 0; \\ &X'(0) - X(0) = 0, \quad X(1) = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Дослідимо задачу Штурма-Ліувілля (8).

1. Нехай $\lambda > 0$. Тоді загальний розв'язок рівняння з (8) запишеться у вигляді $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda} x}$. Підставивши цей розв'язок у крайові умови, одержимо лінійну однорідну систему відносно невідомих сталих C_1 і C_2:

$$\begin{cases} C_1\left(\sqrt{\lambda} - 1\right) + C_2\left(-\sqrt{\lambda} - 1\right) = 0; \\ C_1 e^{\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}} = 0. \end{cases}$$

Детермінант цієї системи $\Delta = 2\left(\sqrt{\lambda}\,\mathrm{ch}\sqrt{\lambda} + \mathrm{sh}\sqrt{\lambda}\right) \ne 0$, поскільки $\sqrt{\lambda} > 0$. Отже, $C_1 = C_2 = 0$, а тому $X(x) \equiv 0$ і $\lambda > 0$ не є власним значенням.

2. Нехай $\lambda = 0$. Тоді $X(x) = C_3 x + C_4$ і з крайових умов одержимо:

$$\begin{cases} C_3 - C_4 = 0; \\ C_3 + C_4 = 0, \end{cases}$$

звідки $C_3 = C_4 = 0$, а тому $X(x) \equiv 0$ і $\lambda = 0$ також не є власним значенням.

3. При $\lambda < 0$ загальний розв'язок рівняння з (8) запишеться у вигляді $X(x) = C_5 \cos\sqrt{-\lambda}x + C_6 \sin\sqrt{-\lambda}x$. Із крайових умов одержимо:

$$\begin{cases} C_6\sqrt{-\lambda} - C_5 = 0; \\ C_6 \sin\sqrt{-\lambda} + C_5 \cos\sqrt{-\lambda} = 0, \end{cases}$$

звідки $C_5 = C_6\sqrt{-\lambda}$ і $C_6\left(\sin\sqrt{-\lambda} + \sqrt{-\lambda}\cos\sqrt{-\lambda}\right) = 0$. Отже, нетривіальний розв'язок задачі (8) існує тільки для тих значень параметру λ, які є розв'язками трансцендентного рівняння $\sin\sqrt{-\lambda} + \sqrt{-\lambda}\cos\sqrt{-\lambda} = 0$ або

$$\operatorname{tg}\sqrt{-\lambda} = -\sqrt{-\lambda}. \tag{9}$$

Рівняння (9) має счисленну множину коренів λ_k, $k \in \mathrm{N}$, причому всі корені є дійсними. Введемо позначення $\sqrt{-\lambda_k} = \mu_k$, $k \in \mathrm{N}$. Тоді відповідні власні функції матимуть вигляд (беремо для визначеності C_6=1)

$$X_k(x) = \mu_k \cos\mu_k x + \sin\mu_k x, \quad k \in \mathrm{N},$$

де μ_k – додатні корені рівняння $\operatorname{tg}\mu_k = -\mu_k$.

Підставивши знайдені власні значення $\lambda_k = -\mu_k^2$ у рівняння (7) та проінтеґрувавши його, одержимо:

$$Y_k(t) = A_k e^{-(a\mu_k)^2 t}, \quad k \in \mathrm{N},$$

де A_k – довільні сталі. Тоді згідно (6) будь-який частинний розв'язок рівняння (3), який справджує крайові умови (5), запишеться у вигляді

$$U_k(t,x) = A_k e^{-(a\mu_k)^2 t}\left(\mu_k \cos\mu_k x + \sin\mu_k x\right), \quad k \in \mathrm{N}.$$

В силу лінійності й однорідності рівняння (3) сума частинних розв'язків

$$U(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-(a\mu_k)^2 t}\left(\mu_k \cos\mu_k x + \sin\mu_k x\right) \tag{10}$$

також буде розв'язком рівняння (3) і справджуватиме крайові умови (5). Сталі A_k визначаємо підстановкою ряду (10) у початкову умову (4). Маємо:

$$U(0,x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} A_k\left(\mu_k \cos\mu_k x + \sin\mu_k x\right) = 1 + x - 2x^2.$$

Домножимо на $X_k(x) = \mu_k \cos\mu_k x + \sin\mu_k x$ ліву і праву частини останньої рівності і проінтеґруємо по змінній x на проміжку [0;1]. Тоді, врахувавши властивість ортоґональності власних функцій, які відповідають різним власним значенням, одержимо:

$$A_k = \frac{\int_0^1 \left(1 + x - 2x^2\right)\left(\mu_k \cos\mu_k x + \sin\mu_k x\right)dx}{\int_0^1 \left(\mu_k \cos\mu_k x + \sin\mu_k x\right)^2 dx} = \frac{8\operatorname{tg}\frac{\mu_k}{2}\cos^2\mu_k}{\mu_k^2\left(1 + \cos^2\mu_k\right)}, \quad k \in \mathrm{N}.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд (10), одержимо розв'язок змішаної задачі (3)-(5).

ПРИКЛАД 2. Знайти закон зміни температури всередині однорідного ізотропного стержня довжини l з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо в лівому кінці стержня температура змінюється згідно закону $U_0 \sin\omega t$, де U_0, ω задані сталі, а в правому підтримується нульова температура. Всередині стержня є джерела та поглиначі тепла: їх інтенсивність (в розрахунку на одиницю маси стержня) рівна $U_0\omega(l-x)l^{-1}\cos\omega t.$ Початкова температура точок стержня задана функцією $U_0 l^{-2}x(l-x)$.

Розв'язання. Математична модель задачі:

$$U_t = a^2 U_{xx} + U_0\omega(l-x)l^{-1}\cos\omega t, \quad 0<t<T, \quad 0<x<l;$$
$$U(0,x) = U_0 l^{-2}x(l-x), \quad 0\le x\le l;$$
$$U(t,0) = U_0\sin\omega t, \quad U(t,l)=0, \quad 0\le t<T.$$

Крайові умови неоднорідні (задача типу 3), тому для застосування методу Фур'є спершу слід звести вихідну задачу до задачі з однорідними крайовими умовами. Покладемо $U(t,x)=V(t,x)+W(t,x)$, де $V(t,x)$ – нова невідома функція, а $W(t,x)$ – допоміжна функція, котра справджує неоднорідні крайові умови. Згідно викладеного вище

$$W(t,x)=\mu_1(t)+xl^{-1}(\mu_2(t)-\mu_1(t)) = \left(1-xl^{-1}\right)U_0\sin\omega t.$$

Тоді для знаходження функції $V(t,x)$ одержимо змішану задачу

$$V_t = a^2 V_{xx}, \quad 0<t<T, \quad 0<x<l;$$
$$V(0,x)=U_0 l^{-2}x(l-x), \quad 0\le x\le l;$$
$$V(t,0)=0, \quad V(t,l)=0, \quad 0\le t<T.$$

Початкова та крайові умови є узгодженими, отже, до одержаної задачі застосовний метод Фур'є. Шукаючи розв'язок аналоґічно до прикладу 1, знаходимо

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

де

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l U_0 x l^{-2}(l-x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx = \begin{cases} 0, & n=2k; \\ 8U_0(\pi n)^{-3}, & n=2k-1. \end{cases}$$

Отже,

$$U(t,x)=U_0\left(1-xl^{-1}\right)\sin\omega t + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{8U_0}{\pi^3(2k-1)^3}e^{-\left[\frac{(2k-1)a\pi}{l}\right]^2 t}\sin\frac{(2k-1)\pi}{l}x.$$

ПРИКЛАД 3. Знайти розподіл температури в однорідній ізотропній кулі радіуса R із центром у початку координат, якщо в початковий момент часу температура кулі була рівна $U_0 = const$, на поверхні кулі підтримується температура $U_0 e^{-t}$, а всередині кулі діють поглиначі тепла інтенсивності $-rR^{-1}U_0 e^{-t}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Розв'язання. Для запису математичної моделі задачі необхідно перейти до сферичних координат $\{r,\theta,\varphi\}$. Але, поскільки вихідні дані в умові задачі не залежать від кутів θ та φ, то в силу симетричності кулі будемо мати $U(t,r,\theta,\varphi)\equiv U(t,r)$, тобто для довільного фіксованого $t>0$ температура точок кулі залежатиме тільки від відстані до центра кулі (радіальний розподіл). Врахувавши це, запишемо математичну модель задачі:

$$U_t=\frac{a^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)-rR^{-1}U_0e^{-t},\quad 0<t<T,\quad 0<r<R;$$
$$U(0,r)=U_0,\quad 0\le r\le R;$$
$$U(t,R)=U_0e^{-t},\quad 0\le t<T.$$

Перейдемо до нової невідомої функції $V(t,r)=rU(t,r)$ (стандартна підстановка в задачах на радіальний розподіл температури в кулі). Одержимо наступну змішану задачу:

$$V_t=a^2V_{rr}-r^2R^{-1}U_0e^{-t},\quad 0<t<T,\quad 0<r<R;$$
$$V(0,r)=U_0r,\quad 0\le r\le R;$$
$$V(t,R)=RU_0e^{-t},\quad V(t,0)=0,\quad 0\le t<T.$$

Остання крайова умова є наслідком обмеженості температури в центрі кулі. Справді, поскільки всі вихідні дані в умові задачі є обмеженими функціями в розглядуваній області, то $V(t,0)=0\cdot U(t,0)=0$.

Крайові умови неоднорідні, отже, маємо задачу типу 3 (загальна змішана задача). Тому розв’язок шукаємо у вигляді $V(t,r)=Z(t,r)+\omega(t,r)$, причому для $Z(t,r)$ крайові умови повинні бути однорідними, отже, допоміжна функція $\omega(t,r)$ повинна справджувати умови

$$\omega(t,0)=0,\quad \omega(t,R)=RU_0e^{-t}.$$

Шукаємо допоміжну функцію у вигляді $\omega(t,r)=a(t)r+b(t)$. Із крайових умов одержуємо: $b(t)=0$, $Ra(t)+b(t)=RU_0e^{-t}$, звідки $\omega(t,r)=rU_0e^{-t}$.

Підставивши $V(t,r)=Z(t,r)+rU_0e^{-t}$ у змішану задачу для $V(t,r)$, одержимо змішану задачу для нової невідомої функції $Z(t,r)$:

$$Z_t=a^2Z_{rr}+\left(r-r^2R^{-1}\right)U_0e^{-t},\quad 0<t<T,\quad 0<r<R; \tag{11}$$
$$Z(0,r)=0,\quad 0\le r\le R; \tag{12}$$
$$Z(t,0)=0,\quad Z(t,R)=0,\quad 0\le t<T.$$

Це задача для неоднорідного рівняння з однорідними крайовими умовами (задача типу 2), до якої застосовний метод Фур’є, поскільки вільний член у рівнянні справджує крайові умови по змінній r. Розв’язування такої задачі проводиться у два етапи.

Перший етап. Для відповідної однорідної задачі

$$W_t=a^2W_{rr},\quad 0<t<T,\quad 0<r<R;$$
$$W(t,0)=0,\quad W(t,R)=0,\quad 0\le t<T$$

класичним методом відокремлення змінних $\left(W(t,r)=Q(t)X(r)\neq 0\right)$ знаходимо власні функції відповідної задачі Штурма-Ліувілля (початкову умову тут поки що не враховуємо). Одержимо:

$$X_n(r)=\sin\tfrac{\pi n}{R}r,\quad n\in\mathrm{N}.$$

Другий етап. Функцію $Z(t,r)$ шукаємо у вигляді ряду по системі знайдених власних функцій:

$$Z(t,r)=\sum_{n=1}^{\infty}Y_n(t)\sin\tfrac{\pi n}{R}r. \tag{13}$$

Для визначення функцій $Y_n(t)$ підставимо ряд (13) у рівняння (11) та в початкову умову (12). Одержимо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}Y_n'(t)\sin\tfrac{\pi n}{R}r=-a^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tfrac{\pi n}{R}\right)^2Y_n(t)\sin\tfrac{\pi n}{R}r+\left(r-r^2R^{-1}\right)U_0e^{-t};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}Y_n(0)\sin\tfrac{\pi n}{R}r=0.$$

Звідси

$$\begin{aligned}&Y_n'(t)+\left(\tfrac{a\pi n}{R}\right)^2Y_n(t)=f_ne^{-t},\quad n\in\mathrm{N};\\&Y_n(0)=0,\end{aligned} \tag{14}$$

де коефіцієнт Фур'є

$$f_n=\frac{2}{R}\int_0^R\left(r-r^2R^{-1}\right)U_0\sin\tfrac{\pi n}{R}r\,dr=\begin{cases}0, & n=2k;\\ 8RU_0(\pi n)^{-3}, & n=2k-1.\end{cases}$$

Розв'язками задач Коші (14) будуть функції

$$Y_n(t)=\frac{R^2f_n\left(e^{-t}-e^{-\left(\frac{a\pi n}{R}\right)^2t}\right)}{(a\pi n)^2-R^2},\quad n\in\mathrm{N}. \tag{15}$$

Підставивши (15) у ряд (13), одержимо функцію $Z(t,r)$. А тоді

$$U(t,r)=r^{-1}V(t,r)=r^{-1}Z(t,r)+U_0e^{-t}.$$

ПРИКЛАД 4. Знайти закон зміни температури в однорідному (a=1) ізотропному стержні довжини l, лівий кінець якого теплоізольований, а до правого підводиться сталий тепловий потік $\nu_0=const$, якщо початкова температура точок стержня задана функцією $\varphi(x)=0{,}5\nu_0l^{-1}x^2$, а через бічну поверхню стержня проходить теплообмін (із коефіцієнтом b=1) з навколишнім середовищем нульової температури.

Розв'язання. $\nu_0=const$, отже, маємо задачу типу 4 (задача зі стаціонарними неоднорідностями):

$$U_t=U_{xx}-U,\quad 0<t<T,\quad 0<x<l;$$

$$U(0,x)=0{,}5\nu_0 l^{-1}x^2, \quad 0\le x\le l;$$
$$U_x(t,0)=0, \quad U_x(t,l)=\nu_0, \quad 0\le t<T.$$

Розв'язок будемо шукати у вигляді $U(t,x)=V(t,x)+\omega(x)$, де стаціонарна температура $\omega(x)$ визначається з крайової задачі

$$\omega''(x)-\omega(x)=0;$$
$$\omega'(0)=0, \quad \omega'(l)=\nu_0.$$

Проінтеґрувавши крайову задачу, одержимо $\omega(x)=\nu_0\,\mathrm{sh}^{-1}l\,\mathrm{ch}\,x.$ Тоді після заміни $U(t,x)=V(t,x)+\nu_0\,\mathrm{sh}^{-1}l\,\mathrm{ch}\,x$ для нової невідомої функції $V(t,x)$ одержимо змішану задачу

$$V_t=V_{xx}-V, \quad 0<t<T, \quad 0<x<l;$$
$$V(0,x)=0{,}5\nu_0 l^{-1}x^2-\nu_0\,\mathrm{sh}^{-1}l\,\mathrm{ch}\,x, \quad 0\le x\le l;$$
$$V_x(t,0)=0, \quad V_x(t,l)=0, \quad 0\le t<T.$$

Поскільки крайові умови однорідні, то для спрощення рівняння зручно ввести підстановку $V(t,x)=e^{-t}\cdot W(t,x)$. Тоді для $W(t,x)$ матимемо задачу

$$W_t=W_{xx}, \quad 0<t<T, \quad 0<x<l;$$
$$W(0,x)=0{,}5\nu_0 l^{-1}x^2-\nu_0\,\mathrm{sh}^{-1}l\,\mathrm{ch}\,x, \quad 0\le x\le l;$$
$$W_x(t,0)=0, \quad W_x(t,l)=0, \quad 0\le t<T.$$

Розв'язок одержаної однорідної змішаної задачі (типу 1) знаходимо методом відокремлення змінних аналоґічно до прикладу 1. Будемо мати

$$W(t,x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k e^{-\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 t}\cos\tfrac{\pi k}{l}x,$$

де

$$A_k=\frac{2}{l}\int_0^l\left(\frac{\nu_0 x^2}{2l}-\frac{\nu_0\,\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,l}\right)\cos\tfrac{\pi k}{l}x\,dx=\begin{cases}\nu_0 l^{-1}\left(l^2-2\right), & k=0;\\ 2l^3\nu_0(\pi k)^{-2}\left[l^2+(\pi k)^2\right]^{-1}\cdot(-1)^k, & k>0.\end{cases}$$

А тоді

$$U(t,x)=e^{-t}W(t,x)+\nu_0\,\mathrm{sh}^{-1}l\,\mathrm{ch}\,x.$$

ПРИКЛАД 5 (двовимірна змішана задача). Знайти розподіл температури в однорідній прямокутній пластинці $0\le x\le b$, $0\le y\le c$, якщо початкова її температура рівна нулеві, край $y=0$ теплоізольований, а на краях $x=0$, $x=b$ та $y=c$ задані закони зміни температури – відповідно 0, bt і tx. Інтенсивність джерел тепла, розміщених усередині пластинки, рівна $x\left(1-0{,}25(b-x)\cos\tfrac{3\pi}{2c}y\right)$.

Розв'язання. Схема інтеґрування двовимірної змішаної задачі для рівняння теплопровідності аналоґічна схемі розв'язування змішаної задачі для рівняння коливань прямокутної мембрани (див. [4], розділ II, тема 3, с.146-156).

Відповідна математична модель:

$$U_t = a^2\left(U_{xx} + U_{yy}\right) + x\left(1 - 0{,}25(b - x)\cos\tfrac{3\pi}{2c}y\right), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c;$$
$$U(0, x, y) = 0, \quad 0 \le x \le b, \quad 0 \le y \le c;$$
$$U(t, 0, y) = 0, \quad U(t, b, y) = bt, \quad 0 \le t < T, \quad 0 \le y \le c;$$
$$U_y(t, x, 0) = 0, \quad U(t, x, c) = tx, \quad 0 \le t < T, \quad 0 \le x \le b.$$

Перший етап. Крайові умови неоднорідні, тому зводимо їх до однорідних підстановкою $U(t,x,y) = V(t,x,y) + tx$ (допоміжна функція, котра повинна справджувати чотири крайові умови, визначається підбором). Тоді для $V(t,x,y)$ одержимо змішану задачу:

$$V_t = a^2\left(V_{xx} + V_{yy}\right) - 0{,}25x(b - x)\cos\tfrac{3\pi}{2c}y, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c; \quad (16)$$
$$V(0, x, y) = 0, \quad 0 \le x \le b, \quad 0 \le y \le c; \quad (17)$$
$$V(t, 0, y) = 0, \quad V(t, b, y) = 0, \quad 0 \le t < T, \quad 0 \le y \le c;$$
$$V_y(t, x, 0) = 0, \quad V(t, x, c) = 0, \quad 0 \le t < T, \quad 0 \le x \le b.$$

Поскільки вільний член у рівнянні справджує крайові умови, то для знаходження розв’язку застосовний метод Фур’є.

Другий етап. В одержаній змішаній задачі крайові умови однорідні, але рівняння неоднорідне (задача типу 2). Отже, спершу (див. приклад 2) потрібно знайти власні функції задачі Штурма-Ліувілля для відповідної однорідної задачі:

$$W_t = a^2\left(W_{xx} + W_{yy}\right), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c;$$
$$W(t, 0, y) = 0, \quad W(t, b, y) = 0, \quad 0 \le t < T, \quad 0 \le y \le c;$$
$$W_y(t, x, 0) = 0, \quad W(t, x, c) = 0, \quad 0 \le t < T, \quad 0 \le x \le b.$$

Поклавши $W(t,x,y) = Q(t)\cdot Z(x,y) \ne 0$, а потім в одержаній двовимірній задачі на власні значення $Z(x,y) = X(x)\cdot Y(y) \ne 0$ і розв’язавши дві одновимірні задачі Штурма-Ліувілля, знаходимо

$$Z_{n,k}(x,y) = \sin\tfrac{\pi n}{b}x\cos\tfrac{(2k-1)\pi}{2c}y, \quad n,k \in \mathrm{N}.$$

Третій етап. Функцію $V(t,x,y)$ шукаємо у вигляді ряду по знайденій системі власних функцій:

$$V(t,x,y) = \sum_{n,k=1}^{\infty} R_{n,k}(t)\sin\tfrac{\pi n}{b}x\cos\tfrac{(2k-1)\pi}{2c}y. \quad (18)$$

Коефіцієнти $R_{n,k}(t)$ знаходимо підстановкою ряду (18) у рівняння (16) та початкову умову (17). Поставивши відповідні задачі Коші та проінтеґрувавши їх, одержимо:

$$R_{n,k}(t) = \frac{f_{n,k}}{a^2\lambda_{n,k}}\left(1 - e^{-a^2\lambda_{n,k}t}\right), \quad n,k \in \mathrm{N}, \quad (19)$$

де

$$\lambda_{n,k}=\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2+\left(\frac{(2k-1)\pi}{2c}\right)^2,$$

$$f_{n,k}=\frac{0{,}25\int\limits_0^b\int\limits_0^c(x-b)\cos\frac{3\pi}{2c}y\sin\frac{\pi n}{b}x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2c}ydydx}{\int\limits_0^b\int\limits_0^c\sin^2\frac{\pi n}{b}x\cos^2\frac{(2k-1)\pi}{2c}ydydx}=\begin{cases}0, & k\neq 2,\quad n=2m;\\ 2b^2(\pi n)^{-3}, & k=2,\quad n=2m-1.\end{cases}$$

Підставивши (19) у ряд (18), дістанемо функцію $V(t,x,y)$. А тоді

$$U(t,x,y)=V(t,x,y)+tx.$$

3. Задачі Коші для одновимірного рівняння теплопровідності.

1) Випадок однорідного рівняння.

Постановка задачі: у фазовій площині $\Omega=\{(t,x)|\quad t>0,\quad x\in \mathrm{R}\}$ знайти обмежений розв'язок однорідного рівняння теплопровідності

$$U_t(t,x)=a^2U_{xx}(t,x), \tag{20}$$

який справджує початкову умову

$$U(0,x)=\varphi(x),\quad x\in\mathrm{R}, \tag{21}$$

де $\varphi(x)$ – відома неперервна й обмежена на всій осі функція. Якщо розв'язок задачі Коші (20), (21) існує, то він є єдиним і дається формулою Пуассона

$$U(t,x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)G(t,x,\xi)d\xi, \tag{22}$$

де

$$G(t,x,\xi)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}$$

– фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності. Інтеґрал (22) в окремих випадках вдається обчислити зведенням до відомого інтеґралу

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha=\sqrt{\pi}$$

або до так званого "інтеґралу помилок"

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z e^{-\alpha^2}d\alpha,$$

таблиці значень якого можна знайти (див. [6], стор. 680).

ПРИКЛАДИ. Знайти розподіл температури в однорідному ізотропному нескінченому стержні при вільному теплообміні (відсутні внутрішні джерела тепла), якщо початкова температура точок стержня задана функцією:

а) $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{4a^2}}$;

б) $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & |x| > l; \\ U_0 = const, & |x| \le l. \end{cases}$

Розв'язання. Маємо задачу Коші (20), (21), розв'язок якої дається формулою (22). Застосуємо її до прикладу а):

$$U(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t} - \frac{\xi^2}{4a^2} \right) d\xi.$$

Виділимо в показнику степеня під інтеґралом повний квадрат по змінній ξ. Одержимо:

$$U(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{[\xi(t+1) - x]^2}{4a^2 t(t+1)} \right) \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t+1)} \right) d\xi.$$

Введемо підстановку $\alpha = \dfrac{\xi(t+1) - x}{2a\sqrt{t(t+1)}}$, $d\xi = \dfrac{2a\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}} d\alpha$. Тоді

$$U(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi(t+1)}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t+1)}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{(t+1)}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t+1)}}.$$

Застосуємо тепер формулу (22) до прикладу б):

$$U(t,x) = \frac{U_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-l}^{l} \exp\left(-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t} \right) d\xi.$$

Підстановка $\alpha = \dfrac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}$, $d\xi = 2a\sqrt{t}\, d\alpha$ дає:

$$U(t,x) = \frac{U_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{l+x}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{l-x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{U_0}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{\frac{l-x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha - \int_0^{-\frac{l+x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha \right).$$

Виразивши інтеґрали в дужках через “інтеґрал помилок” $\Phi(z)$ і врахувавши непарність цієї функції, одержимо остаточно:

$$U(t,x) = \frac{U_0}{2} \left[\Phi\left(\frac{l - x}{2a\sqrt{t}} \right) + \Phi\left(\frac{l + x}{2a\sqrt{t}} \right) \right].$$

2) Випадок неоднорідного рівняння.

Якщо в однорідному ізотропному нескінченому стержні діють джерела тепла інтенсивності $f(t,x)$, то температура $U(t,x)$ повинна бути розв'язком неоднорідного рівняння теплопровідності

$$U_t(t,x)=a^2U_{xx}(t,x)+f(t,x). \tag{23}$$

Розв'язок задачі Коші (23), (21), якщо функції $f(t,x)$ і $\varphi(x)$ є неперервними і обмеженими відповідно в Ω та на осі $x\in\mathrm{R}$, шукається у вигляді суми $U(t,x)=V(t,x)+Z(t,x)$, де функції $V(t,x)$ і $Z(t,x)$ – розв'язки наступних задач Коші:

1) $\begin{array}{l} Z_t=a^2Z_{xx}, \quad (t,x)\in\Omega; \\ Z(0,x)=\varphi(x), \quad x\in\mathrm{R}; \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} V_t=a^2V_{xx}+f(t,x), \quad (t,x)\in\Omega; \\ V(0,x)=0, \quad x\in\mathrm{R}. \end{array}$

Розв'язок першої задачі дається формулою Пуассона (22):

$$Z(t,x)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cdot\exp\left(-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}\right)d\xi.$$

Згідно принципу Дюгамеля функцію $V(t,x)$ шукаємо у вигляді інтеґрала: $V(t,x)=\int\limits_0^t W(t-\tau,x)d\tau$, де $W(t-\tau,x)$ визначається із задачі Коші

$$\begin{array}{l} W_t(t-\tau,x)=a^2W_{xx}(t-\tau,x), \quad t>\tau, \quad x\in\mathrm{R}; \\ W(0,x)=f(\tau,x), \quad x\in\mathrm{R} \end{array}$$

і дається формулою Пуассона

$$W(t-\tau,x)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\tau,\xi)\cdot\exp\left(-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\xi.$$

Тоді розв'язок задачі Коші (23), (21) буде мати вигляд

$$U(t,x)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cdot\exp\left(-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}\right)d\xi+\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\tau,\xi)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left(-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\xi d\tau. \tag{24}$$

4. Змішані задачі для напівнескінченого стержня з теплоізольованою бічною поверхнею

При дослідженні процесів поширення тепла в напівнескінченому стержні з теплоізольованою бічною поверхнею, кінець якого розміщений у початку координат, ми приходимо до однієї з наступних змішаних задач:

в області $\Omega=\{(t,x)|\quad t>0, \quad x>0\}$ знайти розв'язок рівняння

$$U_t(t,x)=a^2U_{xx}(t,x)+f(t,x), \tag{25}$$

який справджує початкову умову

$$U(0,x)=\varphi(x),\quad x\geq 0, \tag{26}$$

та одну з крайових умов на кінці стержня:

1) $U(t,0)=\mu_1(t),\quad t\geq 0$ (задана температура); (27)

2) $U_x(t,0)=\mu_2(t),\quad t\geq 0$ (заданий тепловий потік); (28)

3) $U_x(t,0)-h(U(t,0)-\mu_3(t))=0,\quad t\geq 0$ (заданий теплообмін по закону Ньютона з навколишнім середовищем, температура якого рівна $\mu_3(t)$).

Універсальним методом інтеґрування змішаних задач такого вигляду є метод інтеґрального перетворення Фур'є (див. [6], стор. 263-265, а також 312-316). Проте в деяких частинних випадках вдається знайти розв'язок за допомогою простіших методів (при цьому функції $f(t,x)$, $\varphi(x)$ і $\mu_i(t)$, $i=\overline{1,3}$ вважаємо обмеженими і неперервними відповідно в областях Ω, $x\geq 0$ та $t\geq 0$). Зокрема, це стосується випадків, коли кінець стержня теплоізольований ($\mu_2(t)\equiv 0$) або підтримується при нульовій температурі ($\mu_1(t)\equiv 0$).

1) Метод непарного продовження. Змішана задача

$$U_t=a^2U_{xx},\quad t>0,\quad x>0;$$
$$U(0,x)=\varphi(x),\quad x\geq 0;$$
$$U(t,0)=0,\quad t\geq 0$$

(кінець стержня підтримується при нульовій температурі) при $x\geq 0$ еквівалентна задачі Коші

$$V_t=a^2V_{xx},\quad t>0,\quad x\in \mathrm{R};$$
$$V(0,x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\geq 0;\\ -\varphi(-x), & x<0\end{cases}$$

(задаємо непарне продовження початкової функції). Тоді розв'язок змішаної задачі $U(t,x)=V(t,x)\big|_{x\geq 0}$, де $V(t,x)$ знаходиться за допомогою формули Пуассона (22).

2) Метод парного продовження. Змішана задача

$$U_t=a^2U_{xx},\quad t>0,\quad x>0;$$
$$U(0,x)=\varphi(x),\quad x\geq 0;$$
$$U_x(t,0)=0,\quad t\geq 0$$

(кінець стержня теплоізольований) при $x\geq 0$ еквівалентна задачі Коші

$$V_t=a^2V_{xx},\quad t>0,\quad x\in \mathrm{R};$$
$$V(0,x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\geq 0;\\ \varphi(-x), & x<0\end{cases}$$

(задаємо парне продовження початкової функції). Тоді знову розв'язок змішаної задачі $U(t,x)=V(t,x)\big|_{x\geq 0}$, де $V(t,x)$ знаходиться за допомогою формули Пуассона (22).

Зауваження 1. Якщо у змішаній задачі (25), (26), (27) $\mu_1(t)\equiv 0$ (або у змішаній задачі (25), (26), (28) $\mu_2(t)\equiv 0$), то розв'язок можна знайти, застосувавши принцип Дюгамеля аналогічно до задач Коші. Інший спосіб – задати парне (непарне) продовження не тільки початкової функції, а й інтенсивності джерел тепла: тоді розв'язок еквівалентної задачі Коші знаходиться за допомогою формули (24).

Зауваження 2. Якщо у змішаній задачі для напівнескінченого стержня крайова умова неоднорідна, то її завжди можна звести до однорідної, підібравши деяку обмежену допоміжну функцію, котра справджує цю крайову умову. Зокрема, підстановкою $U(t,x)=V(t,x)+\mu_1(t)$ зоднорідніюється крайова умова (27), а підстановкою $U(t,x)=V(t,x)-e^{-x}\mu_2(t)$ – крайова умова (28).

ПРИКЛАД. Знайти розподіл температури в однорідному ізотропному напівнескінченому стержні з теплоізольованою бічною поверхнею, кінець якого підтримується при нульовій температурі, якщо початкова температура стержня рівна $A(1-\cos x)$, $A=const$, а всередині стержня діють джерела тепла інтенсивності $6Ae^{-t}\sin x$.

Розв'язання. Математична модель задачі:

$$
\begin{aligned}
&U_t = 0{,}25U_{xx} + 6Ae^{-t}\sin x, \quad t>0, \quad x>0;\\
&U(0,x)=A(1-\cos x), \quad x\ge 0;\\
&U(t,0)=0, \quad t\ge 0.
\end{aligned}
$$

Розв'язок шукаємо у вигляді суми $U(t,x)=V(t,x)+Z(t,x)$, де

$$
1)\ \begin{cases} V_t = 0{,}25V_{xx}, \quad t>0, \quad x>0;\\ V(0,x)=A(1-\cos x), \quad x\ge 0;\\ V(t,0)=0, \quad t\ge 0; \end{cases}
\qquad
2)\ \begin{cases} Z_t = 0{,}25Z_{xx} + 6Ae^{-t}\sin x, \quad t>0, \quad x>0;\\ Z(0,x)=0, \quad x\ge 0;\\ Z(t,0)=0, \quad t\ge 0; \end{cases}
$$

До першої змішаної задачі застосуємо метод непарного продовження: $V(t,x)=W(t,x)\big|_{x\ge 0}$, де

$$
\begin{aligned}
&W_t = 0{,}25W_{xx}, \quad t>0, \quad x\in \mathrm{R};\\
&W(0,x)=\psi(x)=\begin{cases} A(1-\cos x), & x\ge 0;\\ A(\cos x-1), & x<0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Згідно формули Пуассона (22)

$$
W(t,x)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{t}}d\xi = A\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)+\frac{A}{\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\cos\xi\left(e^{-\frac{(\xi+x)^2}{t}}-e^{-\frac{(\xi-x)^2}{t}}\right)d\xi,
$$

де $\Phi(z)$ – “інтеґрал помилок”.

Згідно принципу Дюгамеля розв'язок другої змішаної задачі будемо шукати у вигляді інтеграла $Z(t,x)=\int\limits_0^t R(t-\tau,x)d\tau,$ де

$$R_t(t-\tau,x)=0{,}25R_{xx}(t-\tau,x),\quad t>\tau,\quad x>0;$$
$$R(0,x)=6Ae^{-\tau}\sin x,\quad x\ge 0;$$
$$R(t-\tau,0)=0,\quad t\ge\tau.$$

Початкова функція є непарною, тому можна одразу застосувати формулу (22). Одержимо:

$$R(t-\tau,x)=8Ae^{-\tau}\sin x;\qquad Z(t,x)=\int\limits_0^t R(t-\tau,x)d\tau=8A\sin x\left(1-e^{-t}\right).$$

Тоді розв'язок вихідної змішаної задачі буде (для всіх $t\ge 0,\ x\ge 0$)

$$U(t,x)=8A\sin x\left(1-e^{-t}\right)+A\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)+\frac{A}{\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^{+\infty}\cos\xi\left(e^{-\frac{(\xi+x)^2}{t}}-e^{-\frac{(\xi-x)^2}{t}}\right)d\xi.$$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Які фізичні процеси приводять до змішаних задач для рівнянь параболічного типу?

2. Запишіть рівняння теплопровідності, якщо
а) бічна поверхня стержня теплоізольована, а всередині його діють джерела тепла інтенсивності $F(t,x)$;
б) через бічну поверхню стержня проходить вільний теплообмін із навколишнім середовищем, температура якого рівна $\theta(t,x)$.

3. Запишіть крайові умови, якщо
а) кінці стержня підтримуються при нульовій температурі;
б) кінці стержня теплоізольовані;
в) на лівому кінці підтримується температура $\theta(t)$, а до правого підводиться тепловий потік $\omega(t)$;
г) на кінцях стержня проходить теплообмін із навколишнім середовищем, температура якого рівна нулеві.

4. У чому полягає основна ідея методу відокремлення змінних?

5. Як будується розв'язок змішаної задачі для однорідного ізотропного стержня при наявності внутрішніх джерел тепла?

6. Наведіть метод побудови розв'язку змішаної задачі для рівняння теплопровідності у випадку
а) загальної змішаної задачі;

б) задачі зі стаціонарними неоднорідностями.

7. Як ставиться задача Коші для одновимірного рівняння теплопровідності?

8. При яких умовах формула Пуассона дає розв’язок задачі Коші для одновимірного рівняння теплопровідності?

9. Як будується розв’язок задачі Коші у випадку неоднорідного рівняння теплопровідності?

10. Наведіть методи побудови розв’язку змішаної задачі для напівнескінченого стержня, якщо

а) кінець стержня підтримується при нульовій температурі;

б) кінець стержня теплоізольований.

11. Наведіть фізичну інтерпретацію фундаментального розв’язку однорідного рівняння теплопровідності та формули Пуассона.

12. Сформулюйте принцип максимуму для розв’язків рівняння теплопровідності.

13. Сформулюйте теореми про єдиність розв’язку змішаних задач для рівняння теплопровідності та його неперервну залежність від початкової та крайових умов.

14. Сформулюйте теореми про єдиність розв’язку задачі Коші для рівняння теплопровідності та його неперервну залежність від початкової функції та інтенсивності внутрішніх джерел тепла.

15. Запишіть крайову умову, яку справджує інтеґрал Пуассона (22), якщо початкова функція є:

а) непарною;

б) парною.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ

1. Знайти розподіл температури в однорідному ізотропному стержні одиничної довжини з теплоізольованими кінцями та бічною поверхнею, якщо початкова температура точок стержня задається функцією $\varphi(x) = 2x^3 - 3x^2$.
2. Дано тонкий однорідний стержень довжини l, початкова температура якого рівна $6\cos\frac{3\pi}{2l}x$. Лівий кінець стержня теплоізольований, а правий підтримується при нульовій температурі. Через бічну поверхню стержня проходить теплообмін із навколишнім середовищем нульової температури. Знайти закон зміни температури в стержні при $t > 0$.
3. В однорідному ізотропному стержні довжини l правий кінець теплоізольований, а лівий підтримується при нульовій температурі. Початкова температура точок стержня задається функцією $\varphi(x) = 9\sin\frac{9\pi}{2l}x$. Визначити температуру стержня в довільний момент часу $t > 0$, якщо його

бічна поверхня теплоізольована, а всередині стержня діють джерела та поглиначі тепла сумарної інтенсивності $e^{-t}\left(x^2-2lx\right)$.

4. Знайти розподіл температури в однорідному ізотропному стержні довжини l з теплоізольованою бічною поверхнею, лівий кінець якого підтримується при нульовій температурі, а на правому проходить теплообмін по закону Ньютона з навколишнім середовищем нульової температури. Початкова температура стержня рівна нулеві, а всередині його діють джерела тепла, інтенсивність яких $f(t,x)=\left(lx-\frac{(hl+2)x^2}{hl+1}\right)$, де $h=const>0$ – коефіцієнт теплообміну.
5. В однорідному ізотропному $(a=1)$ стержні одиничної довжини обидва кінці теплоізольовані, а через бічну поверхню проходить теплообмін із навколишнім середовищем, температура якого рівна $U_0=const.$ Початкова температура стержня рівна $U_1=const.$ Визначити розподіл температури у стержні при $t>0.$
6. Дано тонкий $(a=1)$ однорідний стержень одиничної довжини, лівий кінець та бічна поверхня якого теплоізольовані, а до правого кінця підводиться сталий тепловий потік $\nu_0=const.$ Початкова температура стержня задається функцією $\varphi(x)=1+0{,}5\nu_0x^2$, а всередині його діють джерела тепла сталої інтенсивності $f(t,x)=-\nu_0$. Знайти розподіл температури в стержні при $t>0.$
7. Знайти радіальний розподіл температури в однорідній $(a=1)$ одиничній кулі з центром у початку координат, якщо початкова температура кулі рівна $A=const$, на поверхні проходить теплообмін (із коефіцієнтом $h=1$) з навколишнім середовищем, температура якого задана функцією $A\cos t$, а всередині кулі діють джерела тепла інтенсивності $f(t,r)=-0{,}5Ar\sin t$.
8. Дано однорідну $(a=1)$ кулю одиничного радіуса з центром у початку координат, усередині якої діють джерела тепла інтенсивності $-\sin t$, а на поверхні проходить теплообмін (із коефіцієнтом $h=2$) з навколишнім середовищем, температура якого рівна $\cos t$. Початкова температура кулі рівна $r-0{,}5$. Знайти розподіл температури в кулі при $t>0.$
9. Проінтеґрувати змішані задачі та дати фізичну інтерпретацію:

   а) $U_t=a^2\left(U_{xx}+U_{yy}\right)-4t\sin 6\pi x,\quad 0<t<T,\quad 0<x<1,\quad 0<y<2;$

   $U(0,x,y)=Ax\quad (A=const),\quad 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 2;$

   $U(t,0,y)=0,\quad U(t,1,y)=A,\quad 0\le t<T,\quad 0\le y\le 2;$

   $U_y(t,x,0)=0,\quad U_y(t,x,2)=0,\quad 0\le t<T,\quad 0\le x\le 1.$

б) $U_t = U_{xx} + U_{yy} + 2x[y + (x-1)\cos t \sin 4\pi y], \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2;$
$U(0,x,y) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2;$
$U(t,0,y) = 0, \quad U(t,1,y) = 2ty, \quad 0 \le t < T, \quad 0 \le y \le 2;$
$U(t,x,0) = 0, \quad U(t,x,2) = 4tx, \quad 0 \le t < T, \quad 0 \le x \le 1.$

в) $U_t = a^2(U_{xx} + U_{yy}) + 3\cos y + 2\cos 6x \cos 3y, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x, y < \pi;$
$U(0,x,y) = 10, \quad 0 \le x, y \le \pi;$
$U_x(t,0,y) = 0, \quad U_x(t,\pi,y) = 0, \quad 0 \le t < T, \quad 0 \le y \le \pi;$
$U_y(t,x,0) = 0, \quad U_y(t,x,\pi) = 0, \quad 0 \le t < T, \quad 0 \le x \le \pi.$

10. Знайти розподіл температури в однорідному ізотропному нескінченому стержні з теплоізольованою бічною поверхнею при вільному теплообміні, якщо в початковий момент часу температура була рівна

а) $\varphi(x) = e^{-x^2}$;

б) $\varphi(x) = \begin{cases} T, & x \ge 0; \\ -T, & x < 0 \end{cases} \quad (T = const > 0).$

11. Через бічну поверхню однорідного ізотропного нескінченого стержня проходить теплообмін по закону Ньютона з навколишнім середовищем нульової температури. Початкова температура стержня рівна $A = const.$ Знайти закон зміни температури в стержні при $t > 0$.

12. Знайти розподіл температури в однорідному $(a = 1)$ ізотропному нескінченому стержні з теплоізольованою бічною поверхнею, всередині якого діють джерела тепла інтенсивності $f(t) \cdot e^{-0,25x^2}$, а початкова температура задається функцією

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & |x| > l; \\ U_0 = const, & 0 \le x \le l; \\ -U_0, & -l \le x < 0 \end{cases} \quad (l = const > 0).$$

13. Дано однорідний ізотропний напівнескінчений стержень із теплоізольованою бічною поверхнею, кінець якого підтримується при нульовій температурі. Початкова температура стержня рівна нулеві, а всередині його діють джерела тепла інтенсивності $e^{-t} - 1$. Знайти розподіл температури в стержні при $t > 0$.

14. Початковий розподіл температури в однорідному ізотропному $(a = 0,5)$ напівнескінченому стержні заданий рівністю $U(0,x) = e^{-x}\left(1 - e^{-x^2}\right)$. Через бічну поверхню стержня проходить теплообмін (із коефіцієнтом $b = 0,25$) по закону Ньютона з навколишнім середовищем нульової температури. Кінець стержня теплоізольований. Знайти закон зміни температури в стержні при $t > 0$.

ВІДПОВІДІ

1. $U(t,x) = -0{,}5 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{96}{\pi^4 (2k-1)^4} e^{-[a\pi(2k-1)]^2 t} \cdot \cos\pi(2k-1)x.$

2. $U(t,x) = 6e^{-\left(b+\left[1{,}5a\pi l^{-1}\right]^2\right)t} \cdot \cos\frac{3\pi}{2l}x$, де b – коефіцієнт теплообміну.

3. $U(t,x) = 9e^{-\left(4{,}5a\pi l^{-1}\right)^2 t} \cdot \sin\frac{9\pi}{2l}x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{a^2\lambda_k - 1}\left(e^{-t} - e^{-a^2\lambda_k t}\right)\sin\frac{(2k-1)\pi}{2l}x$, де

$\lambda_k = \left[\frac{(2k-1)\pi}{2l}\right]^2$, $f_k = \frac{32l^2}{\pi^3(2k-1)^3}$.

4. $U(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(1+lh)(1-\cos\mu_k l)}{a^3\mu_k^6(2+lh)}\left(1 - e^{-(a\mu_k)^2 t} - a\mu_k t\right)\sin\mu_k x$, де μ_k – додатні корені рівняння $\mu_k = -h\,\mathrm{tg}\,\mu_k$.

5. $U(t,x) = (U_1 - U_0)e^{-bt} + U_0$, де b – коефіцієнт теплообміну.

6. $U(t,x) = 1 + 0{,}5\nu_0 x^2$.

7. $U(t,r) = A\cos t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Af_k}{(\lambda_k^4 + 1)r}\left(e^{-\lambda_k^2 t} + \lambda_k^2 \sin t - \cos t\right)\sin\frac{(2k-1)\pi}{2}r$, де

$\lambda_k = \frac{(2k-1)\pi}{2}$, $f_k = \frac{8}{\pi^3(2k-1)^3}$.

8. $U(t,r) = \cos t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(\cos\mu_k - 1)}{\mu_k^3(1+\cos^2\mu_k)r} e^{-\mu_k^2 t}\sin\mu_k r$, де μ_k – додатні корені рівняння $\mu_k = -\mathrm{tg}\,\mu_k$.

9. а) $U(t,x,y) = Ax + \frac{4}{(6a\pi)^4}\left[1 - (6a\pi)^2 t - e^{-(6a\pi)^2 t}\right]\sin 6\pi x$;

б) $U(t,x,y) = 2txy + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{1+\lambda_k^2}\left(\sin t + \lambda_k\cos t - \lambda_k e^{-\lambda_k t}\right)\sin 4\pi y$, де

$\lambda_k = \pi^2\left([2k-1]^2 + 16\right)$, $f_k = -\frac{16}{\pi^3(2k-1)^3}$;

в) $U(t,x,y) = 10 + \frac{3}{a^2}\left(1 - e^{-a^2 t}\right)\cos y + \frac{2}{45a^2}\left(1 - e^{-45a^2 t}\right)\cos 6x\cos 3y$.

10. а) $U(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4a^2 t + 1}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t + 1}\right)$;

б) $U(t,x)=T\Phi\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$, де $\Phi(z)$ – “інтеґрал помилок”.

11. $U(t,x)=Ae^{-bt}$, де b – коефіцієнт теплообміну.

12. $U(t,x)=U_0\Phi\left(\dfrac{x}{2\sqrt{t}}\right)+0{,}5U_0\left[\Phi\left(\dfrac{l-x}{2\sqrt{t}}\right)-\Phi\left(\dfrac{l+x}{2\sqrt{t}}\right)\right]+\int\limits_0^t\dfrac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau+1}}e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau+1)}}d\tau.$

13. $U(t,x)=\int\limits_0^t\left(e^{-\tau}-1\right)\Phi\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)d\tau.$

14. $U(t,x)=\operatorname{ch}x+0{,}5\left[e^{-x}\Phi\left(\dfrac{2x-t}{2\sqrt{t}}\right)-e^{x}\Phi\left(\dfrac{2x+t}{2\sqrt{t}}\right)\right]+$

$$+\frac{e^{-\frac{x^2+0{,}25t^2}{1+t}}}{2\sqrt{1+t}}\left[e^{-\frac{x}{1+t}}\left(1+\Phi\left(\frac{2x-t}{2t\sqrt{1+t}}\right)\right)+e^{\frac{x}{1+t}}\left(1-\Phi\left(\frac{2x+t}{2t\sqrt{1+t}}\right)\right)\right].$$

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ ДО ТЕМИ IV

Варіант 1.

1. Дано тонкий однорідний стержень довжини l, початкова температура якого задана функцією $\varphi(x)=x^2-lx-1$. На обох кінцях стержня та через бічну поверхню проходить теплообмін (із однаковим коефіцієнтом, рівним довжині стержня) з навколишнім середовищем, температура якого рівна нулеві. Визначити температуру стержня в довільний момент часу $t>0$.

2. Проінтеґрувати змішані задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $U_t=a^2U_{xx},\quad 0<t<T,\quad 0<x<1;$

$U(0,x)=0{,}5U_0x^2,\quad 0\le x\le 1;$

$U_x(t,0)=0,\quad U_x(t,1)=U_0,\quad 0\le t<T\quad (U_0=const).$

б) $U_t=U_{xx}+U_{yy},\quad 0<t<T,\quad 0<x<1,\quad 0<y<4;$

$U(0,x,y)=6\sin\pi x\sin\pi y,\quad 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 4;$

$U(t,0,y)=0,\quad U(t,1,y)=0,\quad 0\le t<T,\quad 0\le y\le 4;$

$U(t,x,0)=0,\quad U(t,x,4)=0,\quad 0\le t<T,\quad 0\le x\le 1.$

в) $U_t=a^2U_{xx},\quad 0<t<T,\quad x>0;$

$U(0,x)=A,\quad x\ge 0;$

$U(t,0)=Ae^{-t},\quad 0\le t<T\quad (A=const).$

Варіант 2.

1. Дано тонкий однорідний стержень довжини l із теплоізольованою бічною поверхнею, початкова температура якого рівна нулеві. На правому кінці стержня підтримується нульова температура, а на лівому кінці температура зростає пропорційно до часу: $U(t,0)=At$, де $A=const$. Визначити температуру стержня в довільний момент часу $t>0$.

2. Проінтеґрувати змішані задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $U_t=a^2U_{xx},\quad 0<t<T,\quad 0<x<2;$

$U(0,x)=2x,\quad 0\le x\le 2;$

$U(t,0)=0,\quad U_x(t,2)+2U(t,2)=10,\quad 0\le t<T.$

б) $U_t=a^2(U_{xx}+U_{yy})+A\sin\frac{3\pi}{2b}x\cos\frac{\pi}{2c}y,\quad 0<t<T,\quad 0<x<b,\quad 0<y<c;$

$U(0,x,y)=B\sin\frac{\pi}{2b}x\cos\frac{3\pi}{2c}y,\quad 0\le x\le b,\quad 0\le y\le c;$

$U(t,0,y)=0,\quad U_x(t,b,y)=0,\quad 0\le t<T,\quad 0\le y\le c;$

$U_y(t,x,0)=0,\quad U(t,x,c)=0,\quad 0\le t<T,\quad 0\le x\le b\quad (A,B-const).$

в) $U_t=U_{xx}-U,\quad 0<t<T,\quad x>0;$

$U(0,x)=A,\quad x\ge 0;$

$U_x(t,0)=0,\quad 0\le t<T\quad (A=const).$

Варіант 3.

1. Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні довжини l при вільному теплообміні, якщо початкова температура точок стержня задана рівністю: $U(0,x)=U_0x^2l^{-2}$, де $U_0=const$; бічна поверхня стержня та його лівий кінець теплоізольовані, а на правому кінці підтримується стала температура U_0.

2. Проінтеґрувати змішані задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $U_t=a^2U_{xx}-2xt(l-x),\quad 0<t<T,\quad 0<x<l;$

$U(0,x)=3\sin\frac{7\pi}{l}x,\quad 0\le x\le l;$

$U(t,0)=0,\quad U(t,l)=0,\quad 0\le t<T.$

б) $U_t=a^2(U_{xx}+U_{yy}),\quad 0<t<T,\quad 0<x<b,\quad 0<y<c;$

$U(0,x,y)=x^2(x-b)^2,\quad 0\le x\le b,\quad 0\le y\le c;$

$U_x(t,0,y)=0,\quad U_x(t,b,y)+hU(t,b,y)=0,\quad 0\le t<T,\quad 0\le y\le c;$

$U_y(t,x,0)=0,\quad U_y(t,x,c)=0,\quad 0\le t<T,\quad 0\le x\le b\quad (h=const>0).$

в) $U_t=\frac{1}{16}U_{xx}-2U+Ae^{-2t},\quad 0<t<T,\quad x>0;$

$U(0,x)=e^{-8x^2},\quad x\ge 0;$

$U_x(t,0)=0,\quad 0\le t<T\quad (A=const).$

Варіант 4.

1. В однорідному ізотропному стержні довжини l обидва кінці та бічна поверхня теплоізольовані, а початкова температура стержня стала й рівна U_0. Теплообмін вільний. Знайти розподіл температури в стержні при $t > 0$.

2. Проінтеґрувати змішані задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = U_{xx} - U + x + tx^2, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 1;$
$U(0,x) = 0, \quad 0 \le x \le 1;$
$U(t,0) = 0, \quad U(t,1) = t, \quad 0 \le t < T.$

б) $U_t = a^2 (U_{xx} + U_{yy}), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c;$
$U(0,x,y) = y(y-c)(x^2 - b^2), \quad 0 \le x \le b, \quad 0 \le y \le c;$
$U_x(t,0,y) = 0, \quad U(t,b,y) = 0, \quad 0 \le t < T, \quad 0 \le y \le c;$
$U(t,x,0) = 0, \quad U(t,x,c) = 0, \quad 0 \le t < T, \quad 0 \le x \le b.$

в) $U_t = a^2 U_{xx}, \quad 0 < t < T, \quad x > 0;$
$U(0,x) = 0, \quad x \ge 0;$
$U_x(t,0) = A \sin t, \quad 0 \le t < T \quad (A = const).$

Варіант 5.

1. Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні довжини l при вільному теплообміні, якщо початкова температура точок стержня задана рівна $x(x-l)^2$, бічна поверхня стержня та його правий кінець теплоізольовані, а на лівому кінці підтримується нульова температура.

2. Проінтеґрувати змішані задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = U_{xx} - U + 4x^3 - 6x^2, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 1;$
$U(0,x) = 3, \quad 0 \le x \le 1;$
$U_x(t,0) = 0, \quad U_x(t,1) = 0, \quad 0 \le t < T.$

б) $U_t = a^2 (U_{xx} + U_{yy}), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c;$
$U(0,x,y) = \left(3 \sin \frac{\pi}{b} x + 2 \sin \frac{6\pi}{b} x\right) \sin \frac{2\pi}{c} y, \quad 0 \le x \le b, \quad 0 \le y \le c;$
$U(t,0,y) = 0, \quad U(t,b,y) = 0, \quad 0 \le t < T, \quad 0 \le y \le c;$
$U(t,x,0) = 0, \quad U(t,x,c) = 0, \quad 0 \le t < T, \quad 0 \le x \le b.$

в) $U_t = a^2 U_{xx}, \quad 0 < t < T, \quad x > 0;$
$U(0,x) = 0, \quad x \ge 0;$
$U(t,0) = A \sin t, \quad 0 \le t < T \quad (A = const).$

Варіант 6.

1. Дано тонкий однорідний стержень довжини l, початкова температура якого рівна $U_0 + xl^{-1}(U_1 - U_0)$, де $U_0, U_1 - const.$ На лівому кінці стержня температура змінюється згідно закону $U_0 e^{-t}$, а на правому – згідно закону $U_1 e^{-t}$. Через бічну поверхню стержня проходить теплообмін (із коефіцієнтом $b = 1$) із навколишнім середовищем нульової температури. Визначити температуру стержня в довільний момент часу $t > 0$.

2. Проінтеґрувати змішані задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = a^2 U_{xx} - 6, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 3;$

$U(0,x) = 3x^2(3-x)^2, \quad 0 \le x \le 3;$

$U_x(t,0) = 0, \quad U_x(t,3) = 0, \quad 0 \le t < T.$

б) $U_t = a^2 \Delta U + trR^{-2}, \quad 0 < t < T, \quad 0 < r < R \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2);$

$U(0,r) = 0, \quad 0 \le r \le R;$

$U(t,R) = 0{,}5t^2, \quad 0 \le t < T.$

в) $U_t = a^2 U_{xx} + f(t,x), \quad 0 < t < T, \quad x > 0;$

$U(0,x) = 0, \quad x \ge 0;$

$U_x(t,0) = 0, \quad 0 \le t < T$ (розглянути випадок $f(t,x) \equiv U_0 = const$).

Варіант 7.

1. Дано тонкий однорідний стержень довжини l із теплоізольованою бічною поверхнею, початкова температура якого рівна Axl^{-1}, де $A = const.$ На правому кінці стержня температура змінюється згідно закону Ae^{-t}, а лівий кінець підтримується при нульовій температурі. Інтенсивність внутрішніх джерел тепла всередині стержня рівна $f(t,x) = -Ae^{-t}x^2 l^{-2}$. Знайти розподіл температури уздовж стержня при $t > 0$.

2. Проінтеґрувати вказані задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = U_{xx} - U - \cos\frac{5\pi}{2l}x, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l;$

$U(0,x) = x^2 - l^2, \quad 0 \le x \le l;$

$U_x(t,0) = 0, \quad U(t,l) = 0, \quad 0 \le t < T.$

б) $U_t = a^2(U_{xx} + U_{yy}), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c;$

$U(0,x,y) = \left(5 + \cos\frac{3\pi}{c}y\right)\sin\frac{3\pi}{b}x, \quad 0 \le x \le b, \quad 0 \le y \le c;$

$U(t,0,y) = 0, \quad U(t,b,y) = 0, \quad 0 \le t < T, \quad 0 \le y \le c;$

$U_y(t,x,0) = 0, \quad U_y(t,x,c) = 0, \quad 0 \le t < T, \quad 0 \le x \le b.$

в) $U_t = a^2 U_{xx} + 2a\cos t, \quad 0 < t < T, \quad x \in \mathrm{R};$

$U(0,x) = 0, \quad x \in \mathrm{R};$

Варіант 8.

1. Дано тонкий однорідний стержень довжини l, початкова температура якого рівна $U_0(lx+1)(l^2+1)^{-1}$, де $U_0 = const.$ На правому кінці стержня температура змінюється згідно закону $U_0 e^{-lt}$, а на лівому кінці стержня та через бічну поверхню проходить теплообмін (із однаковим коефіцієнтом, рівним довжині стержня) з навколишнім середовищем, температура якого рівна нулеві. Визначити температуру стержня в довільний момент часу $t > 0$.

2. Проінтеґрувати вказані задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = a^2 U_{xx} + 0{,}5(2-x)(\omega\cos\omega t - x\sin\omega t), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 2;$

$U(0,x) = \sin\pi x, \quad 0 \le x \le 2;$

$U(t,0) = \sin\omega t, \quad U(t,2) = 0, \quad 0 \le t < T \quad (\omega = const).$

б) $U_t = a^2(U_{xx} + U_{yy}) + A\sin\frac{\pi}{b}x\sin\frac{\pi}{2c}y, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c;$

$U(0,x,y) = 0, \quad 0 \le x \le b, \quad 0 \le y \le c;$

$U(t,0,y) = 0, \quad U(t,b,y) = 0, \quad 0 \le t < T, \quad 0 \le y \le c;$

$U(t,x,0) = 0, \quad U_y(t,x,c) = 0, \quad 0 \le t < T, \quad 0 \le x \le b \quad (A = const).$

в) $U_t = a^2 U_{xx} + Q, \quad 0 < t < T, \quad x \in \mathrm{R};$

$U(0,x) = ae^{-x^2}, \quad x \in \mathrm{R} \quad (Q = const).$

Варіант 9.

1. Дано тонкий однорідний стержень довжини l із теплоізольованою бічною поверхнею, лівий кінець якого підтримується при нульовій температурі, а на правому кінці проходить теплообмін із навколишнім середовищем нульової температури. Початкова температура точок стержня описується функцією $(1+hl)x^2 - (2l + hl^2)x$, де $h = const > 0$ – коефіцієнт теплообміну. Знайти розподіл температури уздовж стержня при $t > 0$.

2. Проінтеґрувати змішані задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = 36U_{xx} + \frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{4}x, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 2;$

$U(0,x) = 0, \quad 0 \le x \le 2;$

$U_x(t,0) = 0, \quad U(t,2) = 0, \quad 0 \le t < T.$

б) $U_t = a^2(U_{xx} + U_{yy}) + ye^{-t}\left[(2-y)\sin\frac{3\pi}{2}x - 1\right], \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2;$

$U(0,x,y) = y, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2;$

$U(t,0,y) = ye^{-t}, \quad U_x(t,1,y) = 0, \quad 0 \le t < T, \quad 0 \le y \le 2;$

$U(t,x,0) = 0, \quad U(t,x,2) = 2e^{-t}, \quad 0 \le t < T, \quad 0 \le x \le 1.$

в) $U_t = a^2 U_{xx} - bU, \quad 0 < t < T, \quad x > 0;$

$U(0,x) = 0, \quad x \ge 0; \qquad U(t,0) = 2e^{-bt}(\cos t - 1), \quad 0 \le t < T \quad (b = const > 0).$

Варіант 10.

1. Знайти розподіл температури в однорідному ізотропному стержні довжини $l=0{,}5$ із теплоізольованою бічною поверхнею, початкова температура якого рівна нулеві, якщо на лівому кінці стержня підтримується нульова температура, на правому кінці температура змінюється згідно закону $A\sin 4t$; $A=const$, а інтенсивність внутрішніх джерел тепла всередині стержня рівна $16Ax^2\cos 4t$.

2. Проінтеґрувати вказані задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $U_t=U_{xx}-\alpha^2U, \quad 0<t<T, \quad 0<x<l;$

$U(0,x)=-36{,}6\cos^2\frac{\pi}{l}x, \quad 0\le x\le l;$

$U_x(t,0)=0, \quad U_x(t,l)=0, \quad 0\le t<T \quad (\alpha=const>0).$

б) $U_t=a^2\Delta U, \quad 0<t<T, \quad 0<r<R \quad (r^2=x^2+y^2+z^2);$

$U(0,r)=U_0, \quad 0\le r\le R;$

$U_r(t,R)=0, \quad 0\le t<T \quad (U_0=const).$

в) $U_t=a^2U_{xx}-2U+f(t), \quad 0<t<T, \quad x>0;$

$U(0,x)=\varphi(x), \quad x\ge 0;$

$U(t,0)=0, \quad 0\le t<T$

(розглянути випадок $f(t,x)\equiv Ae^{-2t}$, $A=const$).

Варіант 11.

1. Знайти розподіл температури в однорідному ізотропному стержні довжини $l=0{,}5$ з теплоізольованою бічною поверхнею, початкова температура якого рівна нулеві, якщо на лівому кінці стержня температура змінюється згідно закону $A\left(1-e^{-\alpha t}\right)$; $A,\alpha - const$, а на правому кінці проходить теплообмін (із коефіцієнтом $h=4$) з навколишнім середовищем нульової температури. Усередині стержня діють джерела тепла інтенсивності $Ae^{-\alpha t}\left(\alpha-2x^2\right)$.

2. Проінтеґрувати вказані задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $U_t=a^2U_{xx}-U+U_0e^{-t}, \quad 0<t<T, \quad 0<x<l;$

$U(0,x)=x(l-x), \quad 0\le x\le l;$

$U(t,0)=0, \quad U(t,l)=0, \quad 0\le t<T \quad (U_0=const).$

б) $U_t=a^2\Delta U+2t, \quad 0<t<T, \quad 0<r<R \quad (r^2=x^2+y^2+z^2);$

$U(0,r)=0, \quad 0\le r\le R;$

$U_r(t,R)=0, \quad 0\le t<T.$

в) $U_t=a^2U_{xx}, \quad 0<t<T, \quad x\in \mathrm{R};$

$$U(0,x)=\begin{cases} 0, & |x|>1; \\ U_0=const\neq 0, & |x|\le 1. \end{cases}$$

Варіант 12.

1. В однорідному ізотропному стержні довжини l обидва кінці та бічна поверхня теплоізольовані, а початкова температура стержня рівна

$$\varphi(x)=\begin{cases}2U_0x^2l^{-1}, & 0\le x\le 0{,}5l;\\ 2U_0(l-x)^2l^{-1}, & 0{,}5l\le x\le l\end{cases}\qquad (U_0=const).$$

Знайти розподіл температури в стержні при $t>0$.

2. Проінтеґрувати змішані задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $U_t=U_{xx}-\left(2x-x^2\right)\sin t,\quad 0<t<T,\quad 0<x<2;$
$U(0,x)=3\sin 3\pi x,\quad 0\le x\le 2;$
$U(t,0)=0,\quad U(t,2)=0,\quad 0\le t<T.$

б) $U_t=a^2\Delta U-\beta U,\quad 0<t<T,\quad 0<r<R\quad \left(r^2=x^2+y^2+z^2\right);$
$U(0,r)=ArR^{-1},\quad 0\le r\le R;$
$U(t,R)=Ae^{-\beta t},\quad 0\le t<T\quad (\beta>0, A-const).$

в) $U_t=U_{xx}-2U,\quad 0<t<T,\quad x>0;$
$U(0,x)=e^{-x}-1,\quad x\ge 0;$
$U(t,0)=0,\quad 0\le t<T.$

Варіант 13.

1. Знайти розподіл температури в однорідному ізотропному стержні довжини l з теплоізольованою бічною поверхнею та правим кінцем, якщо початкова температура стержня рівна нулеві, а в лівому його кінці підтримується нульова температура. Усередині стержня діють джерела та поглиначі тепла сумарної інтенсивності $xl^{-1}(x-l)^2\cos\omega t\ \ (\omega=const)$.

2. Проінтеґрувати змішані задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $U_t=a^2U_{xx}-\alpha^2U,\quad 0<t<T,\quad 0<x<5;$
$U(0,x)=0{,}4x(5-x),\quad 0\le x\le 5;$
$U(t,0)=0,\quad U(t,5)=0,\quad 0\le t<T.$

б) $U_t=a^2\Delta U,\quad 0<t<T,\quad 0<r<R\quad \left(r^2=x^2+y^2+z^2\right);$
$U(0,r)=Qr^2,\quad 0\le r\le R;$
$U_r(t,R)+R^{-1}U(t,R)=3QR,\quad 0\le t<T\quad (Q=const).$

в) $U_t=U_{xx}+Q,\quad 0<t<T,\quad x>0;$
$U(0,x)=0,\quad x\ge 0;$
$U_x(t,0)=2Q\left(e^{-t}-1\right),\quad 0\le t<T\quad (Q=const).$

Варіант 14.

1. Дано тонкий однорідний стержень довжини l із теплоізольованою бічною поверхнею, початкова температура якого рівна $cxl^{-2}(l-x)$, де $c = const$. Кінці стержня підтримуються при нульовій температурі. Визначити температуру стержня в довільний момент часу $t > 0$.

2. Проінтеґрувати змішані задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = a^2 U_{xx} + (x^2 - l^2)\sin t, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l;$

$U(0,x) = 4\cos\frac{3\pi}{2l}x, \quad 0 \le x \le l;$

$U_x(t,0) = 0, \quad U(t,l) = 0, \quad 0 \le t < T.$

б) $U_t = a^2(U_{xx} + U_{yy}), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2;$

$U(0,x,y) = 2\sin\frac{5\pi}{4}y, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2;$

$U_x(t,0,y) = 0, \quad U_x(t,1,y) = 0, \quad 0 \le t < T, \quad 0 \le y \le 2;$

$U(t,x,0) = 0, \quad U_y(t,x,2) = 0, \quad 0 \le t < T, \quad 0 \le x \le 1.$

в) $U_t = U_{xx} - bU, \quad 0 < t < T, \quad x > 0;$

$U(0,x) = 0, \quad x \ge 0;$

$U_x(t,0) = 2e^{-bt}(\cos bt - 1), \quad 0 \le t < T \quad (b = const > 0).$

Варіант 15.

1. В однорідному ізотропному стержні довжини l бічна поверхня теплоізольована, а початкова температура стержня рівна

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 0{,}5l; \\ (l-x)^2, & 0{,}5l \le x \le l. \end{cases}$$

На обох кінцях стержня проходить теплообмін із навколишнім середовищем нульової температури. Знайти розподіл температури в стержні при $t > 0$.

2. Проінтеґрувати змішані задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = U_{xx} - 4U, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 3;$

$U(0,x) = x^2, \quad 0 \le x \le 3;$

$U_x(t,0) = 0, \quad U_x(t,3) = 6, \quad 0 \le t < T.$

б) $U_t = a^2 \Delta U - QR^{-1}r^2 \sin t, \quad 0 < t < T, \quad 0 < r < R \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2);$

$U(0,r) = Q, \quad 0 \le r \le R;$

$U(t,R) = Q\cos t, \quad 0 \le t < T \quad (Q = const).$

в) $U_t = a^2 U_{xx}, \quad 0 < t < T, \quad x > 0;$

$U(0,x) = e^{-x}, \quad x \ge 0;$

$U_x(t,0) = -1, \quad 0 \le t < T.$

Варіант 16.

1. Дано тонкий однорідний стержень довжини l із теплоізольованою бічною поверхнею, початкова температура якого рівна нулеві. Правий кінець стержня теплоізольований, а до лівого підводиться потік тепла $A\sin\omega t$, де $A, \omega - const$. Усередині стержня діють джерела тепла інтенсивності $0{,}5A\omega l^{-1}\left(2lx - x^2\right)\cos\omega t$. Знайти закон зміни температури всередині стержня при $t > 0$.

2. Проінтеґрувати вказані задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = U_{xx} - 9U, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l;$

$U(0,x) = x^2 - l^2, \quad 0 \le x \le l;$

$U_x(t,0) = 0, \quad U(t,l) = 0, \quad 0 \le t < T.$

б) $U_t = a^2\left(U_{xx} + U_{yy}\right) - \left(3 - 3\cos\frac{\pi x}{b}\right)\sin\frac{4\pi}{c}y\sin t, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c;$

$U(0,x,y) = 0, \quad 0 \le x \le b, \quad 0 \le y \le c;$

$U_x(t,0,y) = 0, \quad U_x(t,b,y) = 0, \quad 0 \le t < T, \quad 0 \le y \le c;$

$U(t,x,0) = 0, \quad U(t,x,c) = 0, \quad 0 \le t < T, \quad 0 \le x \le b.$

в) $U_t = a^2U_{xx} - 0{,}5U, \quad 0 < t < T, \quad x \in \mathrm{R};$

$$U(0,x) = \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2}\right), \quad x \in \mathrm{R}.$$

Варіант 17.

1. Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні довжини l, лівий кінець якого теплоізольований, а правий підтримується при нульовій температурі, якщо початкова температура точок стержня рівна нулеві, а через бічну поверхню стержня проходить теплообмін із навколишнім середовищем сталої температури U_0.

2. Проінтеґрувати вказані задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = a^2U_{xx}, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 4;$

$U(0,x) = 0, \quad 0 \le x \le 4;$

$U_x(t,0) - U(t,0) = 5t, \quad U(t,4) = 5t, \quad 0 \le t < T.$

б) $U_t = a^2\left(U_{xx} + U_{yy}\right), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c;$

$U(0,x,y) = 0{,}5x^2 - bx, \quad 0 \le x \le b, \quad 0 \le y \le c;$

$U(t,0,y) = 0, \quad U_x(t,b,y) = 0, \quad 0 \le t < T, \quad 0 \le y \le c;$

$U_y(t,x,0) = 0, \quad U_y(t,x,c) = 0, \quad 0 \le t < T, \quad 0 \le x \le b.$

в) $U_t = U_{xx} + \exp\left(-\dfrac{x^2}{4t}\right), \quad 0 < t < T, \quad x \in \mathrm{R};$

$$U(0,x) = \begin{cases} U_0, & x < 0; \\ -U_0, & x \ge 0 \end{cases} \quad (U_0 = const).$$

Варіант 18.

1. В однорідному ізотропному стержні довжини l із теплоізольованою бічною поверхнею правий кінець підтримується при сталій температурі B, а на лівому температура змінюється за законом $A\left(e^{-\alpha t}-1\right)$, де $A,\alpha - const$. Знайти закон розподілу температури в стержні при $t>0$, якщо його початкова температура рівна Bxl^{-1}, а всередині стержня діють джерела тепла, інтенсивність яких рівна $A\alpha e^{-\alpha t}\left(x^2 l^{-2}-1\right)$.

2. Проінтеґрувати вказані задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = a^2 U_{xx}, \quad 0<t<T, \quad 0<x<l;$

$U(0,x) = q_0 x^3 \cdot \left(3l^2\right)^{-1}, \quad 0\le x\le l;$

$U_x(t,0)=0, \quad U_x(t,l)=q_0, \quad 0\le t<T \quad (q_0 = const).$

б) $U_t = 4\Delta U - Q_0, \quad 0<t<T, \quad 0<r<2 \quad \left(r^2 = x^2+y^2+z^2\right);$

$U(0,r) = \pi(r-2), \quad 0\le r\le 2;$

$U(t,2)=0, \quad 0\le t<T \quad (Q_0 = const).$

в) $U_t = a^2 U_{xx} - 4\left(U - U_0 e^{-6t}\right), \quad 0<t<T, \quad x\in \mathrm{R};$

$U(0,x)=0, \quad x\in \mathrm{R} \quad (U_0 = const).$

Варіант 19.

1. Дано тонкий однорідний стержень довжини l, початкова температура якого рівна $U_0 = const$. Обидва кінці стержня теплоізольовані, а через його бічну поверхню проходить теплообмін із навколишнім середовищем сталої температури U_1. Знайти закон зміни температури всередині стержня в довільний момент часу $t>0$.

2. Проінтеґрувати змішані задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = a^2 U_{xx} - 6\sin 3\pi x, \quad 0<t<T, \quad 0<x<8;$

$U(0,x)=0, \quad 0\le x\le 8;$

$U(t,0)=0, \quad U(t,8)=0, \quad 0\le t<T.$

б) $U_t = 4\left(U_{xx}+U_{yy}\right) - ye^{-t}\left[1 - x^2(y-2c)(x-b)^2\right], \quad 0<t<T, \quad 0<x<b, \quad 0<y<c;$

$U(0,x,y)=y, \quad 0\le x\le b, \quad 0\le y\le c;$

$U_x(t,0,y)=0, \quad U_x(t,b,y)+U(t,b,y)=ye^{-t}, \quad 0\le t<T, \quad 0\le y\le c;$

$U(t,x,0)=0, \quad U_y(t,x,c)=e^{-t}, \quad 0\le t<T, \quad 0\le x\le b.$

в) $U_t = a^2 U_{xx}, \quad 0<t<T, \quad x>0;$

$U(0,x) = e^{-x^2} - 1, \quad x\ge 0;$

$U(t,0)=0, \quad 0\le t<T.$

Варіант 20.

1. Дано тонкий однорідний стержень довжини l із теплоізольованою бічною поверхнею, початкова температура якого рівна нулеві. Правий кінець стержня підтримується при нульовій температурі, а лівий – теплоізольований. Усередині стержня є джерела та поглиначі тепла сумарної інтенсивності $\left(x^2 - l^2\right)l^{-1}\sin\alpha t$; $\alpha = const$. Визначити температуру точок стержня в довільний момент часу $t > 0$.

2. Проінтеґрувати вказані задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = lU_{xx} + \dfrac{x^2}{2l}, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l;$

$U(0,x) = 0, \quad 0 \le x \le l;$

$U_x(t,0) = 0, \quad U_x(t,l) = t, \quad 0 \le t < T.$

б) $U_t = \Delta U - 2U, \quad 0 < t < T, \quad 0 < r < R \quad \left(r^2 = x^2 + y^2 + z^2\right);$

$U(0,r) = A\sin\frac{3\pi}{R}r, \quad 0 \le r \le R;$

$U(t,R) = 0, \quad 0 \le t < T \quad (A = const).$

в) $U_t = a^2U_{xx} - bU, \quad 0 < t < T, \quad x \in \mathrm{R};$

$U(0,x) = \begin{cases} U_0, & |x| > l; \\ 0, & |x| \le l \end{cases} \quad \left(U_0, b, l - const > 0\right).$

Варіант 21.

1. Дано тонкий однорідний стержень довжини l із теплоізольованою бічною поверхнею, початкова температура якого $\varphi(x) = -q_0 e^{-x}$; $q_0 = const$. До лівого кінця стержня підводиться сталий тепловий потік q_0, а на правому проходить теплообмін (із коефіцієнтом $h = 1$) з навколишнім середовищем нульової температури. Знайти розподіл температури уздовж стержня при $t > 0$.

2. Проінтеґрувати вказані задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = 4U_{xx} - 2(U - t), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 2;$

$U(0,x) = 0, \quad 0 \le x \le 2;$

$U_x(t,0) = 0, \quad U_x(t,2) = 0, \quad 0 \le t < T.$

б) $U_t = a^2\left(U_{xx} + U_{yy}\right), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c;$

$U(0,x,y) = xy(b - x)(y - c), \quad 0 \le x \le b, \quad 0 \le y \le c;$

$U(t,0,y) = 0, \quad U(t,b,y) = 0, \quad 0 \le t < T, \quad 0 \le y \le c;$

$U(t,x,0) = 0, \quad U(t,x,c) = 0, \quad 0 \le t < T, \quad 0 \le x \le b.$

в) $U_t = 0{,}25U_{xx} - U + U_0 e^{-2t}, \quad 0 < t < T, \quad x \in \mathrm{R};$

$U(0,x) = 0{,}5e^{-2x^2}, \quad x \in \mathrm{R} \quad (U_0 = const).$

Варіант 22.

1. Знайти розподіл температури в однорідному ізотропному стержні довжини l із теплоізольованою бічною поверхнею та правим кінцем, якщо початкова температура стержня задана функцією $A_0 \sin\frac{9\pi}{2l}x$ $(A_0 = const)$, лівий кінець підтримується при нульовій температурі, а всередині стержня діють джерела тепла інтенсивності A_0.

2. Проінтеґрувати змішані задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = 9U_{xx} - \beta\left[U - t\left(2 + \dfrac{x^2}{3}\right)\right] + 2 + x, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 3;$

$U(0,x) = 0, \quad 0 \le x \le 3;$

$U(t,0) = 2t, \quad U(t,3) = 5t, \quad 0 \le t < T \quad (\beta = const > 0).$

б) $U_t = a^2 \Delta U, \quad 0 < t < T, \quad 0 < r < 4 \quad \left(r^2 = x^2 + y^2 + z^2\right);$

$U(0,r) = \begin{cases} U_0, & 0 \le r \le 2; \\ 0, & 2 < r \le 4 \end{cases} \quad (U_0 = const > 0);$

$U_r(t,4) = 0, \quad 0 \le t < T.$

в) $U_t = \frac{1}{16}U_{xx} - bU + e^{-x-3bt}, \quad 0 < t < T, \quad x > 0;$

$U(0,x) = 0, \quad x \ge 0;$

$U(t,0) = 0, \quad 0 \le t < T \quad (b = const > 0).$

Варіант 23.

1. В однорідному ізотропному стержні довжини l із теплоізольованою бічною поверхнею правий кінець підтримується при нульовій температурі, а до лівого кінця підводиться тепловий потік $q_0 t$, де $q_0 = const$. Початкова температура стержня рівна нулеві. Знайти закон зміни температури всередині стержня при $t > 0$.

2. Проінтеґрувати змішані задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = a^2 U_{xx} - \beta U, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 1;$

$U(0,x) = x - 1, \quad 0 \le x \le 1;$

$U_x(t,0) - 2U(t,0) = 3, \quad U(t,1) = 0, \quad 0 \le t < T \quad (\beta = const > 0).$

б) $U_t = 16\left(U_{xx} + U_{yy}\right) - \left(3t^2 + 2\right)\cos\frac{3\pi}{4}x, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 3;$

$U(0,x,y) = 0, \quad 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 3;$

$U_x(t,0,y) = 0, \quad U(t,2,y) = 0, \quad 0 \le t < T, \quad 0 \le y \le 3;$

$U_y(t,x,0) = 0, \quad U_y(t,x,3) = 0, \quad 0 \le t < T, \quad 0 \le x \le 2.$

в) $U_t = a^2 U_{xx} + A, \quad 0 < t < T, \quad x > 0;$

$U(0,x) = 0, \quad x \ge 0;$

$U_x(t,0) = 0, \quad 0 \le t < T \quad (A = const).$

Варіант 24.

1. Знайти розподіл температури в однорідному ізотропному стержні довжини l, якщо його початкова температура рівна нулеві, обидва кінці та бічна поверхня теплоізольовані, а всередині стержня діють джерела та поглиначі тепла сумарної інтенсивності $A_0\left(1-\cos\frac{4\pi}{l}x\right)\cos\omega t$, де $A_0, \omega - const.$

2. Проінтеґрувати вказані задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = U_{xx} - 6U, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l;$

$U(0,x) = 1 - \cos\frac{2\pi}{l}x, \quad 0 \le x \le l;$

$U(t,0) = 0, \quad U_x(t,l) + hU(t,l) = 0, \quad 0 \le t < T \quad (h = const > 0).$

б) $U_t = a^2\Delta U, \quad 0 < t < T, \quad 0 < r < R \quad \left(r^2 = x^2 + y^2 + z^2\right);$

$U(0,r) = 0, \quad 0 \le r \le R;$

$U(t,R) = At, \quad 0 \le t < T \quad (A = const).$

в) $U_t = a^2 U_{xx} - b[U - f(t)], \quad 0 < t < T, \quad x \in \mathrm{R};$

$U(0,x) = \varphi(x), \quad x \in \mathrm{R}$

(розглянути випадок $f(t) = f_0 e^{-bt}$, де $f_0 = const$).

Варіант 25.

1. Дано тонкий однорідний стержень довжини l із теплоізольованим правим кінцем, початкова температура якого рівна $x^2 - 2l(x+1)$. На лівому кінці стержня та через бічну поверхню проходить теплообмін (із однаковим коефіцієнтом $h = 1$) з навколишнім середовищем нульової температури. Знайти розподіл температури уздовж стержня при $t > 0$.

2. Проінтеґрувати вказані задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = U_{xx} + A(t + x - 4\,\mathrm{sh}\,t\cos 2\pi x), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 8;$

$U(0,x) = 0, \quad 0 \le x \le 8;$

$U_x(t,0) = At, \quad U_x(t,8) = At, \quad 0 \le t < T \quad (A = const).$

б) $U_t = a^2\left(U_{xx} + U_{yy}\right) - Ae^{-t}\left(x^2 - b^2\right)\left(y^2 - cy\right), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c;$

$U(0,x,y) = 0, \quad 0 \le x \le b, \quad 0 \le y \le c;$

$U_x(t,0,y) = 0, \quad U(t,b,y) = 0, \quad 0 \le t < T, \quad 0 \le y \le c;$

$U(t,x,0) = 0, \quad U(t,x,c) = 0, \quad 0 \le t < T, \quad 0 \le x \le b.$

в) $U_t = a^2 U_{xx} - bU + 3e^{-bt}\sin t, \quad 0 < t < T, \quad x \in \mathrm{R};$

$U(0,x) = 0, \quad x \in \mathrm{R} \quad (b = const > 0).$

Варіант 26.

1. Знайти розподіл температури в однорідному ізотропному стержні довжини l з теплоізольованою бічною поверхнею, початкова температура якого задається функцією $A\sin\frac{\pi}{l}x$, де $A = const$, якщо лівий кінець стержня підтримується при нульовій температурі, а на правому кінці температура зростає з бігом часу: $U(t,l) = Bt$, $B = const.$

2. Проінтеґрувати вказані задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = a^2U_{xx} - 4U + t(2 - \cos 7\pi x)$, $\quad 0 < t < T$, $\quad 0 < x < 6$;

$U(0,x) = 0$, $\quad 0 \le x \le 6$;

$U_x(t,0) = 0$, $\quad U_x(t,6) = 0$, $\quad 0 \le t < T$.

б) $U_t = 4\Delta U$, $\quad 0 < t < T$, $\quad 0 < r < R \quad \left(r^2 = x^2 + y^2 + z^2\right)$;

$U(0,r) = A(R - r)^2$, $\quad 0 \le r \le R$;

$U_r(t,R) = 0$, $\quad 0 \le t < T \quad (A = const)$.

в) $U_t = U_{xx} + \exp\left(-\dfrac{x^2}{4t}\right)$, $\quad 0 < t < T$, $\quad x \in \mathrm{R}$;

$U(0,x) = 0$, $\quad x \in \mathrm{R}$.

Варіант 27.

1. Дано тонкий однорідний стержень довжини l, правий кінець та бічна поверхня якого теплоізольовані. Початкова температура стержня рівна нулеві, а на його лівому кінці температура зростає згідно закону At^2, де $A = const.$ Усередині стержня діють джерела тепла інтенсивності $2At\left(x^2 - 2lx + 1\right)$. Знайти розподіл температури уздовж стержня при $t > 0$.

2. Проінтеґрувати змішані задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = a^2U_{xx} - 25U$, $\quad 0 < t < T$, $\quad 0 < x < l$;

$U(0,x) = 2A\cos Ax + \sin Ax$, $\quad 0 \le x \le l$;

$U_x(t,0) - 0{,}5U(t,0) = 0$, $\quad U(t,l) = 0$, $\quad 0 \le t < T$

(A>0 – стала, яка справджує рівність $\mathrm{tg}\, Al = -2A$).

б) $U_t = 4(U_{xx} + U_{yy}) - \cos t \sin\frac{\pi}{2}x$, $\quad 0 < t < T$, $\quad 0 < x < 6$, $\quad 0 < y < 2$;

$U(0,x,y) = 0$, $\quad 0 \le x \le 6$, $\quad 0 \le y \le 2$;

$U(t,0,y) = 0$, $\quad U(t,6,y) = 0$, $\quad 0 \le t < T$, $\quad 0 \le y \le 2$;

$U_y(t,x,0) = 0$, $\quad U_y(t,x,2) = 0$, $\quad 0 \le t < T$, $\quad 0 \le x \le 6$.

в) $U_t = a^2U_{xx} - U + 25e^{-2t}$, $\quad 0 < t < T$, $\quad x > 0$;

$U(0,x) = 0$, $\quad x \ge 0$;

$U_x(t,0) = 0$, $\quad 0 \le t < T$.

Варіант 28.

1. Дано однорідний (a=1) ізотропний стержень довжини l, правий кінець та бічна поверхня якого теплоізольовані. Початкова температура стержня рівна $A\left(1+x-0{,}5x^2l^{-1}\right)$, де $A=const$, а на його лівому кінці температура змінюється згідно закону Ae^{-t}. Усередині стержня діють джерела тепла інтенсивності $A\left(l^{-1}-e^{-t}\right)$. Знайти розподіл температури уздовж стержня при $t>0$.

2. Проінтеґрувати змішані задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $U_t=a^2U_{xx}-2U,\quad 0<t<T,\quad 0<x<9;$
$U(0,x)=8(1-\cos\pi x),\quad 0\le x\le 9;$
$U_x(t,0)=0,\quad U_x(t,9)=0,\quad 0\le t<T.$

б) $U_t=a^2\left(U_{xx}+U_{yy}\right)-ty\left(x^2-2bx\right)(y-c)^2,\quad 0<t<T,\quad 0<x<b,\quad 0<y<c;$
$U(0,x,y)=0,\quad 0\le x\le b,\quad 0\le y\le c;$
$U(t,0,y)=0,\quad U_x(t,b,y)=0,\quad 0\le t<T,\quad 0\le y\le c;$
$U(t,x,0)=0,\quad U_y(t,x,c)+U(t,x,c)=0,\quad 0\le t<T,\quad 0\le x\le b.$

в) $U_t=a^2U_{xx}+2a\exp\left(-\dfrac{x^2}{4a^2}\right),\quad 0<t<T,\quad x>0;$
$U(0,x)=0,\quad x\ge 0;$
$U(t,0)=0,\quad 0\le t<T.$

Варіант 29.

1. Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні довжини l, якщо правий кінець та бічна поверхня стержня теплоізольовані, а на його лівому кінці проходить теплообмін із навколишнім середовищем нульової температури зі сталим коефіцієнтом $h>0$. Початкова температура стержня рівна $U_0\left(hx^2-2lhx-2l\right)$, де $U_0=const$.

2. Проінтеґрувати змішані задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $U_t=a^2U_{xx}-5U+\operatorname{sh}t,\quad 0<t<T,\quad 0<x<5;$
$U(0,x)=1,\quad 0\le x\le 5;$
$U_x(t,0)=0,\quad U_x(t,5)=0,\quad 0\le t<T.$

б) $U_t=4\left(U_{xx}+U_{yy}\right)-y\left(8-x\cos\frac{\pi}{2}x\cos\frac{\pi}{4}y\cos\frac{\pi}{8}t\right),\quad 0<t<T,\quad 0<x<1,\quad 0<y<2;$
$U(0,x,y)=x^2y,\quad 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 2;$
$U(t,0,y)=0,\quad U(t,1,y)=y,\quad 0\le t<T,\quad 0\le y\le 2;$
$U(t,x,0)=0,\quad U(t,x,2)=2x^2,\quad 0\le t<T,\quad 0\le x\le 1.$

в) $U_t=a^2U_{xx}+Q,\quad 0<t<T,\quad x>0;$
$U(0,x)=\sin x,\quad x\ge 0;$
$U_x(t,0)=0,\quad 0\le t<T\quad (Q=const).$

Варіант 30.

1. Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні довжини l з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо в його лівому кінці підтримується стала температура m_1, у правому – стала температура $m_2 \neq m_1$, а початкова температура стержня рівна $\varphi(x) = m_1 + (m_2 - m_1)xl^{-1}$. Теплообмін вільний.

2. Проінтеґрувати вказані задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = a^2 U_{xx} - \alpha^2 U + t, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l;$
$U(0,x) = x^2(x - 1{,}5l), \quad 0 \le x \le l;$
$U_x(t,0) = 0, \quad U_x(t,l) = 0, \quad 0 \le t < T \quad (\alpha = const).$

б) $U_t = a^2 \Delta U + Q, \quad 0 < t < T, \quad 0 < r < R \quad \left(r^2 = x^2 + y^2 + z^2\right);$
$U(0,r) = A, \quad 0 \le r \le R;$
$U(t,R) = A, \quad 0 \le t < T \quad (A, Q - const).$

в) $U_t = a^2 U_{xx}, \quad 0 < t < T, \quad x \in \mathrm{R};$
$$U(0,x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ A\left(e^{-\alpha x} - 1\right), & x > 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0, A - const).$$

Варіант 31.

1. Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні довжини l, якщо лівий кінець та бічна поверхня стержня теплоізольовані, а на його правому кінці проходить теплообмін із навколишнім середовищем нульової температури зі сталим коефіцієнтом $h = 0{,}25\pi l^{-1}$. Початкова температура стержня рівна $A\cos\frac{\pi}{4l}x$, де $A = const.$

2. Проінтеґрувати змішані задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = a^2 U_{xx} - b\left[U - (x - l)e^{-2bt}\sin x\right], \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l;$
$U(0,x) = 0, \quad 0 \le x \le l;$
$U(t,0) = 0, \quad U(t,l) = 0, \quad 0 \le t < T \quad (b = const > 0).$

б) $U_t = 0{,}5\Delta U - 1, \quad 0 < t < T, \quad 0 < r < 1 \quad \left(r^2 = x^2 + y^2 + z^2\right);$
$U(0,r) = 1, \quad 0 \le r \le 1;$
$U_r(t,1) + U(t,1) = 1, \quad 0 \le t < T.$

в) $U_t = U_{xx} - 2e^{-t}\left(e^{-x} + 1\right), \quad 0 < t < T, \quad x > 0;$
$U(0,x) = e^{-x}, \quad x \ge 0;$
$U_x(t,0) = -e^{-t}, \quad 0 \le t < T.$

ТЕМА V
РІВНЯННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ. ТЕОРІЯ ПОТЕНЦІАЛУ

Вивчити*:

1. Фізичні процеси, які приводять до рівнянь еліптичного типу.
2. Постановка крайових задач для рівнянь еліптичного типу.
3. Властивості гармонічних функцій.
4. Єдиність розв'язку задачі Діріхле для круга та його неперервна залежність від крайової умови.
5. Метод відокремлення змінних (метод Фур'є) інтеґрування крайових задач для рівняння Лапласа у прямокутнику та в кругових областях (круг, кільце, круговий сектор, криволінійний прямокутник).
6. Крайові задачі для рівняння Пуассона. Метод Фур'є.
7. Інтеґрал Пуассона.
8. Умова стаціонарності теплового поля.
9. Теореми про розв'язок внутрішньої та зовнішньої задач Неймана.
10. Функція Ґріна оператора Лапласа.
11. Потенціал подвійного шару та його властивості.
12. Об'ємний потенціал та його властивості.
13. Потенціал простого шару та його властивості.
14. Лоґарифмічні потенціали та їх властивості.
15. Застосування потенціалів до інтеґрування крайових задач для рівняння Лапласа.

Розв'язати задачі: №№ 67, 70, 80, 84, 87, 94, 95, 102, 147, 150, 152-154, 159 (стор. 76-86 згідно [6]), або №№ 5, 6, 8-10, 14, 16, 20д, 20ж, 21-30 (розділ IV, тема 3 згідно [4]).

*[3], розділ IV, §§1-5, стор. 273-356, або [4], розділ IV, стор. 200-333.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1. Постановка крайових задач для рівнянь еліптичного типу

До рівнянь еліптичного типу приводить вивчення стаціонарних процесів різної фізичної природи (теплопровідність, дифузія, рівновага та інші). Одним із простіших рівнянь еліптичного типу є рівняння Лапласа

$$\Delta U(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} = 0.$$

Визначення. Функція $U(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається гармонічною в обмеженій області **D**, якщо вона в цій області двічі неперервно-диференційовна по всіх арґументах і справджує рівняння Лапласа.

Функція $U(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається гармонічною в нескінченій області $\mathbf{D}^*$, якщо в кожній точці цієї області, що знаходиться на скінченій віддалі від початку координат, функція двічі неперервно-диференційовна по всіх арґументах, справджує рівняння Лапласа і для досить великих $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ має місце нерівність (умова реґулярності на нескінченості)

$$|U(x_1, x_2, ..., x_n)| \le C r^{2-n}, \quad C = const.$$

У випадку двовимірного простору умова реґулярності на нескінченості набуває вигляду $|U(x, y)| \le C$, $C=const$, тобто є умовою обмеженості функції для досить великих $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Рівняння $\Delta U(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається рівнянням Пуассона.

Теорема 1 (принцип мінімакса для гармонічних функцій). Гармонічна в обмеженій області **D** і неперервна в замиканні $\overline{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \bigcup \mathbf{S}$ функція $U(x_1, x_2, ..., x_n)$ досягає свого найбільшого і найменшого значення на границі **S** області **D**.

Наведемо постановку основних крайових задач для рівняння Лапласа.

1. ***Внутрішня (зовнішня) задача Діріхле***: знайти гармонічну в **D** ($\mathbf{D}^*$) і неперервну в $\overline{\mathbf{D}}$ ($\overline{\mathbf{D}}^*$) функцію $U(x_1, x_2, ..., x_n)$, яка на границі **S** області набуває заданих значень: $U(x_1, x_2, ..., x_n)|_{\mathbf{S}} = \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n)$, де $\varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ – задана неперервна на **S** функція.

2. ***Внутрішня (зовнішня) задача Неймана***: знайти гармонічну в **D** ($\mathbf{D}^*$) і неперервну разом із частинними похідними першого порядку в $\overline{\mathbf{D}}$ ($\overline{\mathbf{D}}^*$) функцію $U(x_1, x_2, ..., x_n)$, яка на границі **S** області справджує умову

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \vec{n}}\right|_{\mathbf{S}} = \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n),$$

де $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до $\mathbf{S}$, а $\varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ – задана неперервна на $\mathbf{S}$ функція, яка для коректності постановки задачі повинна справджувати умову

$$\iint\limits_{\mathbf{S}} \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n) ds = 0.$$

(***умова стаціонарності теплового поля***).

3. ***Третя внутрішня (зовнішня) крайова задача***: знайти гармонічну в $\mathbf{D}$ ($\mathbf{D}^*$) і неперервну разом із частинними похідними першого порядку в $\overline{\mathbf{D}}$ ($\overline{\mathbf{D}}^*$) функцію $U(x_1, x_2, ..., x_n)$, яка на границі $\mathbf{S}$ області справджує умову

$$\left[\frac{\partial U}{\partial \vec{n}} + \varphi_3(x_1, x_2, ..., x_n) U\right]\Bigg|_{\mathbf{S}} = \varphi_4(x_1, x_2, ..., x_n),$$

де $\varphi_3(x_1, x_2, ..., x_n)$ і $\varphi_4(x_1, x_2, ..., x_n)$ – задані неперервні на $\mathbf{S}$ функції.

Аналогічно ставляться крайові задачі і для рівняння Пуассона.

Теорема 2. Як внутрішня, так і зовнішня задачі Діріхле для рівняння Пуассона мають не більш ніж один розв’язок у розглядуваній області (тобто: якщо розв’язок задачі Діріхле існує, то він є єдиним).

Теорема 3. У двовимірному просторі довільні два розв’язки задачі Неймана (внутрішньої чи зовнішньої), які мають неперервні аж до $\mathbf{S}$ частинні похідні першого порядку, відрізняються на сталий доданок.

Зауваження. У випадку трьох і більше незалежних змінних твердження теореми 2 справджується для внутрішньої задачі Неймана. Розв’язок зовнішньої задачі Неймана є єдиним.

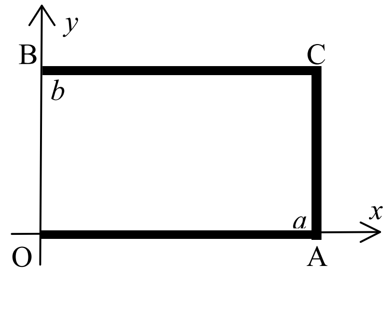
Окрім сформульованих трьох основних крайових задач для рівнянь еліптичного типу, на практиці зустрічаються складніші задачі з крайовими умовами різного роду на частинах границі $\mathbf{S}$.

2. Крайові задачі для прямокутних областей. Метод Фур’є. Метод власних функцій

а) Метод Фур’є.

Крайові задачі для рівняння Лапласа у випадку прямокутних областей розв’язуються за допомогою методу відокремлення змінних (методу Фур’є) аналогічно до змішаних задач для рівнянь гіперболічного та параболічного типів.

ПРИКЛАД 1. Знайти розподіл потенціалу $U(x, y)$ електростатичного поля всередині прямокутника *OACB* зі сторонами *OA=a*, *OB=b* (див. малюнок), якщо уздовж сторони *OB* потенціал розподілений згідно закону $U_0 y(b-y)$, де



$U_0 = const$, а три інші сторони заземлені. Електричні заряди всередині прямокутника відсутні.

Розв'язання. Складаємо математичну модель задачі:

$$\Delta U(x,y) \equiv U_{xx} + U_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$U(0,y) = U_0 y(b-y), \quad U(a,y) = 0, \quad 0 \le y \le b;$$
$$U(x,0) = 0, \quad U(x,b) = 0, \quad 0 \le x \le a.$$

Шукаючи розв'язок цієї задачі методом відокремлення змінних (крайові умови є узгодженими) у вигляді $U(x,y) = X(x) \cdot Y(y) \neq 0$, з рівняння Лапласа будемо мати

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda = const,$$

звідки одержимо диференціальне рівняння для функції *X(x)*

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0,$$

а з урахуванням однорідних крайових умов на сторонах *OA* та *BC* – задачу Штурма-Ліувілля для функції *Y(y)*:

$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0;$$
$$Y(0) = 0, \quad Y(b) = 0.$$

Розв'язавши останню задачу, одержимо:

$$\lambda_n = \left(\tfrac{n\pi}{b}\right)^2, \quad Y_n(y) = C_n \sin\tfrac{n\pi}{b} y, \quad n \in \mathbf{N}$$

(для визначеності можна покласти $C_n = 1$). Підставимо знайдені власні значення λ_n у рівняння для функції *X(x)*. Загальний розв'язок одержаного рівняння $X_n''(x) - \left(\tfrac{n\pi}{b}\right)^2 X_n(x) = 0$ запишеться у вигляді

$$X_n(x) = A_n e^{\frac{n\pi}{b}x} + B_n e^{-\frac{n\pi}{b}x}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Тоді

$$U(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{\frac{n\pi}{b}x} + B_n e^{-\frac{n\pi}{b}x} \right) \sin\tfrac{n\pi}{b} y.$$

Із крайових умов на сторонах *OB* та *AC* одержимо систему для визначення невідомих коефіцієнтів A_n і B_n:

$$\begin{cases} A_n + B_n = \psi_n; \\ A_n e^{\frac{n\pi}{b}a} + B_n e^{-\frac{n\pi}{b}a} = 0, \end{cases}$$

де

$$\psi_n = \frac{2U_0}{b} \int_0^b y(b-y) \sin\tfrac{n\pi}{b} y\,dy = \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ \dfrac{8U_0 b^2}{(\pi n)^3}, & n = 2k-1. \end{cases}$$

Отже, для парних n $A_n = B_n = 0$, а для непарних

$$A_n = -\frac{4U_0 b^2 e^{-\frac{n\pi}{b}a}}{(\pi n)^3 \operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}b}, \quad B_n = \frac{4U_0 b^2 e^{\frac{n\pi}{b}a}}{(\pi n)^3 \operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}b}.$$

Підставивши ці значення у ряд для розв'язку $U(x,y)$ і врахувавши непарність n, одержимо

$$U(x,y) = \frac{8U_0 b^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\frac{(2k-1)\pi}{b}(a-x)}{(2k-1)^3 \operatorname{sh}\frac{(2k-1)\pi}{b}a} \sin\frac{(2k-1)\pi}{b} y.$$

Зауваження 1. Загальний розв'язок рівняння $X_n''(x) - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 X_n(x) = 0$ часто зручніше записати у вигляді

$$X_n(x) = A_n sh\frac{n\pi}{b}x + B_n ch\frac{n\pi}{b}x.$$

Зауваження 2. У наведеному прикладі ми будували задачу Штурма-Ліувілля для функції $Y(y)$, поскільки крайові умови на сторонах $y=0$ та $y=b$ були однорідними. Якщо ж крайові умови неоднорідні по обох змінних, то таку задачу можна за певних умов звести до двох задач, аналоґічних до прикладу 1. Наприклад, розв'язок крайової задачі

$$U_{xx} + U_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$U(0,y) = \mu_1(y), \quad U(a,y) = \mu_2(y), \quad 0 \le y \le b;$$
$$U(x,0) = \nu_1(x), \quad U(x,b) = \nu_2(x), \quad 0 \le x \le a$$

можна шукати у вигляді $U(x,y) = V(x,y) + W(x,y)$, де $V(x,y)$ – розв'язок задачі

$$V_{xx} + V_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$V(0,y) = 0, \quad V(a,y) = 0, \quad 0 \le y \le b;$$
$$V(x,0) = \nu_1(x), \quad V(x,b) = \nu_2(x), \quad 0 \le x \le a,$$

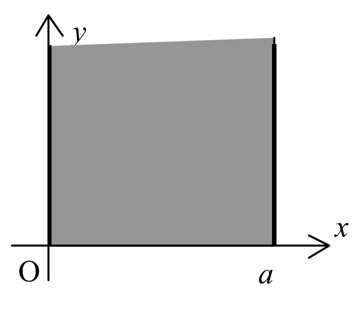
а $W(x,y)$ – розв'язок задачі

$$W_{xx} + W_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$W(0,y) = \mu_1(y), \quad W(a,y) = \mu_2(y), \quad 0 \le y \le b;$$
$$W(x,0) = 0, \quad W(x,b) = 0, \quad 0 \le x \le a.$$

Проте тут слід пам'ятати, що такий спосіб відшукання розв'язку застосовний лише у випадку узгодженості крайових умов не тільки у вихідній, але й у двох дочірніх крайових задачах.

Іноді область, у якій знаходять розв'язок, може бути нескінченою.

ПРИКЛАД 2. У півсмузі (див. малюнок) $\{(x,y) | 0 \le x \le a, \quad y \ge 0\}$ знайти розв'язок $U(x,y)$ рівняння Лапласа, який справджує наступні крайові умови:



$$U(0,y)=0,\quad U(a,y)=0,\quad y\ge 0;$$
$$U(x,0)=-\sin\tfrac{8\pi}{a}y,\quad \lim_{y\to\infty}U(x,y)=0,\quad 0\le x\le a.$$

Розв'язання. Шукаючи розв'язок задачі методом відокремлення змінних (крайові умови є узгодженими) у вигляді $U(x,y)=X(x)\cdot Y(y)\neq 0$ аналогічно до прикладу 1, одержимо:

$$Y''(y)+\lambda Y(y)=0,$$
$$X''(x)-\lambda X(x)=0;$$
$$X(0)=0,\quad X(a)=0.$$

Задачу Штурма-Ліувілля (ЗШЛ) будуємо для функції *X(x)*, поскільки цього разу однорідними є крайові умови на сторонах *x=0* та *x=a*. Розв'язавши цю ЗШЛ та при знайдених власних значеннях – рівняння для функції *Y(y)*, одержимо:

$$\lambda_n=-\left(\tfrac{n\pi}{a}\right)^2,\quad X_n(x)=\sin\tfrac{n\pi}{a}x,\quad n\in\mathbf{N};$$
$$Y_n(y)=A_ne^{\frac{n\pi}{a}y}+B_ne^{-\frac{n\pi}{a}y},\quad n\in\mathbf{N};$$
$$U_n(x,y)=\left(A_ne^{\frac{n\pi}{a}y}+B_ne^{-\frac{n\pi}{a}y}\right)\sin\tfrac{n\pi}{a}x,\quad n\in\mathbf{N}.$$

Враховуючи умову обмеженості розв'язку при $y\to\infty$, беремо $A_n=0$. Тоді

$$U(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_ne^{-\frac{n\pi}{a}y}\sin\tfrac{n\pi}{a}x.$$

Для визначення коефіцієнтів B_n використаємо крайову умову при *y=0*:

$$U(x,0)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\tfrac{n\pi}{a}x=-\sin\tfrac{8\pi}{a}x,\ \text{звідки}\ B_n=\begin{cases}-1, & n=8;\\ 0, & n\neq 8.\end{cases}$$

Отже, розв'язок крайової задачі буде $U(x,y)=-e^{-\frac{8\pi}{a}y}\sin\frac{8\pi}{a}x$.

б) Метод власних функцій.

Розглянемо задачу: в області $\{(x,y)|0\le x\le a,\quad 0\le y\le b\}$ знайти розв'язок рівняння Пуассона

$$\Delta U(x,y)=f(x,y),\tag{1}$$

який справджує крайові умови

$$U(0,y)=0,\quad U(a,y)=0,\quad 0\le y\le b;\tag{2}$$
$$U(x,0)=0,\quad U(x,b)=0,\quad 0\le x\le a.\tag{3}$$

Розв'язок цієї задачі у випадку, коли функція $f(x,y)$ сама справджує всі чотири крайові умови, можна знайти за допомогою методу власних функцій. Для цього спочатку розв'язуємо відповідну задачу на власні значення вигляду

$$\Delta V(x,y)-\lambda V(x,y)=0;$$
$$V(0,y)=V(a,y)=0,\quad V(x,0)=V(x,b)=0.$$

Шукаючи власні функції наведеної задачі методом відокремлення змінних у вигляді $V(x,y)=X(x)\cdot Y(y)\neq 0$, одержуємо:

$$\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}=\lambda=const,$$

звідки

$$\begin{matrix} X''(x)-\alpha X(x)=0; \\ X(0)=0,\quad X(a)=0 \end{matrix}\quad\Rightarrow\quad \alpha_n=-\left(\tfrac{n\pi}{a}\right)^2,\quad X_n(x)=C_n\sin\tfrac{n\pi}{a}x,\quad n\in\mathbf{N};$$

$$\begin{matrix} Y''(y)-\beta Y(y)=0; \\ Y(0)=0,\quad Y(b)=0 \end{matrix}\quad\Rightarrow\quad \beta_m=-\left(\tfrac{m\pi}{b}\right)^2,\quad Y_m(y)=C_m\sin\tfrac{m\pi}{b}y,\quad m\in\mathbf{N};$$

$$\lambda_{n,m}=-\pi^2\left(\tfrac{n^2}{a^2}+\tfrac{m^2}{b^2}\right),\quad V_{n,m}(x,y)=C_{n,m}\sin\tfrac{n\pi}{a}x\sin\tfrac{m\pi}{b}y,\quad C_{n,m}=C_n\cdot C_m.$$

Покладемо для визначеності $C_{n,m}=1$. Тепер розв'язок задачі (1)-(3) можна шукати у вигляді ряду по системі знайдених власних функцій

$$U(x,y)=\sum_{n,m=1}^{\infty}A_{n,m}V_{n,m}(x,y). \tag{4}$$

Будемо вважати, що ряд (4) рівномірно збігається і його можна почленно диференціювати двічі по x і по y. Для визначення невідомих коефіцієнтів $A_{n,m}$ розкладемо функцію $f(x,y)$ в подвійний ряд Фур'є по системі власних функцій $V_{n,m}(x,y)$:

$$f(x,y)=\sum_{n,m=1}^{\infty}\varphi_{n,m}V_{n,m}(x,y),\quad \varphi_{n,m}=\frac{\int_0^a\int_0^b f(x,y)V_{n,m}(x,y)dydx}{\int_0^a\int_0^b V_{n,m}^2(x,y)dydx}. \tag{5}$$

Підставивши (4) і (5) у рівняння (1), одержимо:

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}A_{n,m}\Delta V_{n,m}(x,y)=\sum_{n,m=1}^{\infty}\varphi_{n,m}V_{n,m}(x,y).$$

Але

$$\Delta V_{n,m}(x,y)=\lambda_{n,m}V_{n,m}(x,y).$$

Отже,

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}\lambda_{n,m}A_{n,m}V_{n,m}(x,y)=\sum_{n,m=1}^{\infty}\varphi_{n,m}V_{n,m}(x,y).$$

Звідси $A_{n,m}=\varphi_{n,m}\lambda_{n,m}^{-1}$ і згідно (4) розв'язок задачі (1)-(3) буде

$$U(x,y)=\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{\varphi_{n,m}}{\lambda_{n,m}}V_{n,m}(x,y).$$

Зауваження. Розв’язок задачі (1)-(3) можна шукати у вигляді ряду (4), поскільки він справджує однорідні крайові умови. У випадку неоднорідних крайових умов, наприклад для задачі

$$\begin{aligned} &U_{xx}+U_{yy}=f(x,y), \quad 0<x<a, \quad 0<y<b; \\ &U(0,y)=\mu_1(y), \quad U(a,y)=\mu_2(y), \quad 0\le y\le b; \\ &U(x,0)=\nu_1(x), \quad U(x,b)=\nu_2(x), \quad 0\le x\le a \end{aligned} \tag{6}$$

розв’язок при виконанні певних умов (див. попередні приклади) можна шукати у вигляді $U(x,y)=V(x,y)+W(x,y)$, де $V(x,y)-$ розв’язок задачі

$$\begin{aligned} &V_{xx}+V_{yy}=0, \quad 0<x<a, \quad 0<y<b; \\ &V(0,y)=\mu_1(y), \quad V(a,y)=\mu_2(y), \quad 0\le y\le b; \\ &V(x,0)=\nu_1(x), \quad V(x,b)=\nu_2(x), \quad 0\le x\le a, \end{aligned} \tag{7}$$

а $W(x,y)-$ розв’язок задачі

$$\begin{aligned} &W_{xx}+W_{yy}=f(x,y), \quad 0<x<a, \quad 0<y<b; \\ &W(0,y)=0, \quad W(a,y)=0, \quad 0\le y\le b; \\ &W(x,0)=0, \quad W(x,b)=0, \quad 0\le x\le a. \end{aligned} \tag{8}$$

Метод розв’язування задачі (7) поданий у зауваженні 2 до прикладу 1. Задача (8) аналоґічна задачі (1)-(3) й інтеґрується за допомогою методу власних функцій.

Проте не завжди наведені вище методи є раціональними. У деяких частинних випадках можливе застосування більш простих засобів.

ПРИКЛАД 3. Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній прямокутній пластинці $\{(x,y)|0\le x\le a, \quad 0\le y\le b\}$, всередині якої діють джерела тепла інтенсивності $2x(a-x)$, якщо краї $x=0$ та $x=a$ пластинки підтримуються при нульовій температурі, а інші два краї теплоізольовані.

Розв’язання. Математична модель задачі:

$$\begin{aligned} &U_{xx}+U_{yy}=2x(a-x), \quad 0<x<a, \quad 0<y<b; \\ &U(0,y)=0, \quad U(a,y)=0, \quad 0\le y\le b; \\ &U_y(x,0)=0, \quad U_y(x,b)=0, \quad 0\le x\le a. \end{aligned}$$

1 спосіб (метод власних функцій). Вільний член у рівнянні справджує усі чотири крайові умови, тому для відшукання розв’язку застосовний метод власних функцій аналоґічно до задачі (1)-(3). Отже, спочатку розв’язуємо відповідну задачу на власні значення вигляду

$$\begin{aligned} &\Delta V(x,y)-\lambda V(x,y)=0; \\ &V(0,y)=V(a,y)=0, \quad V_y(x,0)=V_y(x,b)=0. \end{aligned}$$

Шукаючи власні функції наведеної задачі методом відокремлення змінних у вигляді $V(x,y)=X(x)\cdot Y(y)\neq 0$, легко знаходимо:

$$\lambda_{n,m}=-\pi^2\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right),\quad V_{n,m}(x,y)=C_{n,m}\sin\tfrac{n\pi}{a}x\cos\tfrac{m\pi}{b}y,\quad n=\overline{1,\infty},\quad m=\overline{0,\infty}.$$

Покладемо для визначеності $C_{n,m}=1$. Тепер розв'язок поставленої задачі можна шукати у вигляді ряду по системі знайдених власних функцій

$$U(x,y)=\sum_{\substack{n=1\\m=0}}^{\infty}A_{n,m}V_{n,m}(x,y).$$

Підставивши цей ряд у рівняння, одержимо:

$$\sum_{\substack{n=1\\m=0}}^{\infty}A_{n,m}\Delta V_{n,m}(x,y)=2x(a-x).$$

Розкладемо функцію $2x(a-x)$ в подвійний ряд Фур'є по системі знайдених власних функцій $V_{n,m}(x,y)$: $2x(a-x)=\sum\limits_{\substack{n=1\\m=0}}^{\infty}\varphi_{n,m}\sin\frac{n\pi}{a}x\cos\frac{m\pi}{b}y$, де

$$\varphi_{n,m}=\frac{\int\limits_0^a\int\limits_0^b 2x(a-x)\sin\frac{n\pi}{a}x\cos\frac{m\pi}{b}y\,dydx}{\int\limits_0^a\int\limits_0^b\sin^2\frac{n\pi}{a}x\cos^2\frac{m\pi}{b}y\,dydx}=\begin{cases}0, & m>0;\\ \dfrac{8a^2}{(\pi n)^3}\left[1-(-1)^n\right], & m=0.\end{cases}$$

Але

$$\Delta V_{n,m}(x,y)=\lambda_{n,m}V_{n,m}(x,y).$$

Отже,

$$\sum_{\substack{n=1\\m=0}}^{\infty}\lambda_{n,m}A_{n,m}V_{n,m}(x,y)=\sum_{\substack{n=1\\m=0}}^{\infty}\varphi_{n,m}V_{n,m}(x,y).$$

Звідси $A_{n,m}=\varphi_{n,m}\lambda_{n,m}^{-1}$ і розв'язок задачі матиме вигляд

$$U(x,y)=\sum_{\substack{n=1\\m=0}}^{\infty}\frac{\varphi_{n,m}}{\lambda_{n,m}}V_{n,m}(x,y).$$

Врахувавши, що коефіцієнти Фур'є $\varphi_{n,m}$ відмінні від нуля тільки при $m=0$ і $n=2k-1$ (непарних) і підставивши всі знайдені величини у ряд для $U(x,y)$, остаточно одержимо:

$$U(x,y)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{16a^4}{\pi^5(2k-1)^5}\sin\frac{\pi(2k-1)}{a}x.$$

Другий спосіб (зведення неоднорідного рівняння до однорідного). Поскільки вільний член у рівнянні є функцією тільки змінної *x*, а умови на краях $x=0$ та $x=a$ не залежать від змінної *y*, то наведену крайову задачу можна розглядати як аналоґ задачі зі стаціонарними неоднорідностями для рівнянь гіперболічного та параболічного типів. Отже, шукаємо розв'язок у вигляді

$$U(x,y)=V(x,y)+\omega(x),$$

де допоміжна функція $\omega(x)$ повинна справджувати неоднорідне рівняння та умови на краях $x=0$ та $x=a$, тобто повинна бути розв'язком крайової задачі

$$\omega''(x)=2x(a-x);$$
$$\omega(0)=0,\quad \omega(a)=0.$$

Проінтеґрувавши цю задачу, одержимо $\omega(x)=\frac{1}{6}\left(2ax^3-x^4-a^3x\right)$, а для нової невідомої функції $V(x,y)$ – однорідну задачу

$$V_{xx}+V_{yy}=0,\quad 0<x<a,\quad 0<y<b;$$
$$V(0,y)=0,\quad V(a,y)=0,\quad 0\le y\le b;$$
$$V_y(x,0)=0,\quad V_y(x,b)=0,\quad 0\le x\le a,$$

звідки очевидно, що $V(x,y)\equiv 0$ (поскільки рівняння і всі крайові умови є однорідними, а сама задача не є задачею Неймана). Отже, розв'язок вихідної крайової задачі буде

$$U(x,y)\equiv\omega(x)=\frac{1}{6}\left(2ax^3-x^4-a^3x\right).$$

Зауваження. Якщо в задачі для нової невідомої функції $V(x,y)$ крайові умови неоднорідні, то її розв'язок знаходиться за допомогою методу Фур'є (див. зауваження 2 до прикладу 1). При цьому за вірного підбору допоміжної функції $\omega(x)$ або $\omega(y)$ умови застосовності методу Фур'є виконуватимуться автоматично.

Завдання. Перевірити тотожність двох одержаних розв'язків крайової задачі для прикладу 3.

ПРИКЛАД 4. Проінтеґрувати задачу та дати фізичну інтерпретацію:

$$\Delta U(x,y)=6y(y-1)^2,\quad 0<x<1,\quad 0<y<1;$$
$$U_x(0,y)=0,\quad U_x(1,y)=3y-2y^2,\quad 0\le y\le 1;$$
$$U(x,0)=1,\quad U_y(x,1)+U(x,1)=4\cos\pi x,\quad 0\le x\le 1.$$

Фізична інтерпретація:

а) знайти положення рівноваги однорідної квадратної мембрани, яка піддається дії зовнішньої сили інтенсивності $6y(y-1)^2$, якщо край $y=0$ мембрани зміщений на сталу величину, край $x=0$ вільний, до краю $x=1$ прикладена сила $3y-2y^2$, а край $y=1$ пружно закріплений з коефіцієнтом жорсткості $h=1$, причому точки закріплення пружин рухаються за законом $4\cos\pi x$; – або:

б) знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній квадратній пластинці, всередині якої діють джерела тепла інтенсивності $6y(y-1)^2$, якщо край $y=0$ пластинки підтримується при сталій температурі, край $x=0$ теплоізольований, до краю $x=1$ підводиться тепловий потік $3y-2y^2$, а на краї $y=1$ проходить теплообмін з коефіцієнтом $h=1$ з навколишнім середовищем, температура якого рівна $4\cos\pi x$.

Розв'язання. Покладемо $U(x,y)=V(x,y)+W(x,y)+Z(x,y)$, де нові невідомі функції є розв'язками наступних крайових задач:

$$\begin{gathered}\Delta V(x,y)=0, \quad 0<x<1, \quad 0<y<1;\\ V_x(0,y)=0, \quad V_x(1,y)=3y-2y^2, \quad 0\le y\le 1;\\ V(x,0)=0, \quad V_y(x,1)+V(x,1)=0, \quad 0\le x\le 1;\end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered}\Delta W(x,y)=0, \quad 0<x<1, \quad 0<y<1;\\ W_x(0,y)=0, \quad W_x(1,y)=0, \quad 0\le y\le 1;\\ W(x,0)=1, \quad W_y(x,1)+W(x,1)=4\cos\pi x, \quad 0\le x\le 1;\end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered}\Delta Z(x,y)=6y(y-1)^2, \quad 0<x<1, \quad 0<y<1;\\ Z_x(0,y)=0, \quad Z_x(1,y)=0, \quad 0\le y\le 1;\\ Z(x,0)=0, \quad Z_y(x,1)+Z(x,1)=0, \quad 0\le x\le 1.\end{gathered} \tag{11}$$

Крайові умови в (9) і (10) є узгодженими, тому для відшукання розв'язків цих задач застосовний метод Фур'є.

Отже, $V(x,y)=X_1(x)\cdot Y_1(y)\neq 0$, причому ЗШЛ будуємо для функції $Y_1(y)$. Одержимо:

$$\begin{gathered}X_1''(x)+\lambda X_1(x)=0,\\ Y_1''(y)-\lambda Y_1(y)=0;\\ Y_1(0)=0, \quad Y_1'(1)+Y(1)=0.\end{gathered}$$

Звідси $\lambda_n=-\mu_n^2$, де μ_n – додатні корені рівняння $\mu_n=-\operatorname{tg}\mu_n$ (ці корені можна визначити лише наближеними методами), а $Y_{1n}(y)=\sin\mu_n y$, $n\in\mathbf{N}$. Відповідні функції $X_{1n}(x)$ запишемо для зручності через гіперболічні функції у вигляді $X_{1n}(x)=A_n\operatorname{sh}\mu_n x+B_n\operatorname{ch}\mu_n x$. Тоді

$$V(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\operatorname{sh}\mu_n x+B_n\operatorname{ch}\mu_n x\right)\sin\mu_n y. \tag{12}$$

Коефіцієнти A_n і B_n визначаємо з умов на краях $x=0$ і $x=1$:

$$V_x(0,y)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n A_n\sin\mu_n y=0;$$

$$V_x(1,y)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\left(A_n\operatorname{ch}\mu_n+B_n\operatorname{sh}\mu_n\right)\sin\mu_n y=3y-2y^2.$$

Із першої рівності маємо $A_n = 0,\ n \in \mathbf{N}$. Розклавши праву частину другої рівності в ряд Фур'є по системі власних функцій $\{\sin \mu_n y\}$, одержимо:

$$\mu_n B_n \operatorname{sh} \mu_n = \frac{\int_0^1 \left(3y - y^2\right) \sin \mu_n y dy}{\int_0^1 \sin^2 \mu_n y dy} = \frac{16 \sin^2 \frac{\mu_n}{2}}{\mu_n^3 \left(1 + \cos^2 \mu_n\right)}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти у ряд (12), одержимо розв'язок задачі (9) у вигляді

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16 \sin^2 \frac{\mu_n}{2}}{\mu_n^4 \operatorname{sh} \mu_n \left(1 + \cos^2 \mu_n\right)} \operatorname{ch} \mu_n x \sin \mu_n y, \quad \mu_n = -\operatorname{tg} \mu_n.$$

Аналогічно розв'язується й задача (10): $W(x, y) = X_2(x) \cdot Y_2(y) \neq 0$, проте цього разу ЗШЛ будуємо для функції $X_2(x)$. Одержимо:

$$Y_2''(y) + \nu Y_2(y) = 0,$$
$$X_2''(x) - \lambda X_2(x) = 0;$$
$$X_2'(0) = 0, \quad X_2'(1) = 0.$$

Звідси $\nu_m = -(\pi m)^2$, $X_{2m}(x) = \cos \pi m x$, $m = \overline{0, \infty}$ (нуль теж є власним значенням). Відповідні функції $Y_{2m}(y)$ будуть

$$Y_{2m}(y) = \begin{cases} A_0 y + B_0, & m = 0; \\ A_m \operatorname{sh} \pi m y + B_m \operatorname{ch} \pi m y, & m > 0. \end{cases}$$

Тоді

$$W(x, y) = A_0 y + B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \operatorname{sh} \pi m y + B_m \operatorname{ch} \pi m y\right) \cos \pi m x. \qquad (13)$$

Коефіцієнти A_m і B_m визначаємо з умов на краях $y = 0$ і $y = 1$:

$$W(x,0) \equiv B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos \pi m x = 1;$$

$$W_y(x,1) + W(x,1) \equiv 2A_0 + B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(A_m + \pi m B_m\right) \operatorname{sh} \pi m + \left(B_m + \pi m A_m\right) \operatorname{ch} \pi m\right] \cos \pi m x = 4 \cos \pi x.$$

У правих частинах одержаних рівностей фіґурують тільки власні функції (маємо резонансний випадок), тому можна, не використовуючи розклад у ряд Фур'є, одразу прирівняти коефіцієнти при однакових власних функціях. Тоді з першої рівності будемо мати $B_0 = 1$; $B_m = 0$, $m > 0$. З урахуванням знайдених коефіцієнтів B_m із другої рівності одержимо: $A_0 = -0{,}5$; $A_1 = \frac{4}{\pi \operatorname{ch} \pi + \operatorname{sh} \pi}$; а для всіх інших значень m $A_m = 0$.

Підставивши знайдені коефіцієнти у ряд (13), одержимо розв'язок задачі (10) у вигляді

$$W(x,y)=1-0{,}5y+\frac{4\operatorname{sh}\pi y}{\pi\operatorname{ch}\pi+\operatorname{sh}\pi}\cos\pi x.$$

Поскільки вільний член у рівнянні задачі (11) справджує всі чотири крайові умови, то розв'язок цієї задачі можна було б шукати за допомогою методу власних функцій у вигляді ряду

$$Z(x,y)=\sum_{\substack{n=1\\m=0}}^{\infty}A_{n,m}Y_{1n}(y)X_{2m}(x)=\sum_{\substack{n=1\\m=0}}^{\infty}A_{n,m}\sin\mu_n y\cos\pi mx,\quad \mu_n=-\operatorname{tg}\mu_n.$$

Проте, зваживши на простий вигляд вільного члена у рівнянні, легко побачити, що задача (11) аналоґічна до прикладу 3 і інтеґрується шляхом зведення неоднорідного рівняння до однорідного підстановкою

$$Z(x,y)=Q(x,y)+\omega(y),$$

де допоміжна функція $\omega(y)$ повинна справджувати неоднорідне рівняння та умови на краях $y=0$ та $y=1$, тобто повинна бути розв'язком крайової задачі

$$\omega''(y)=6y(y-1)^2;$$
$$\omega(0)=0,\quad \omega'(1)+\omega(1)=0.$$

Проінтеґрувавши цю задачу, одержимо $\omega(y)=\frac{1}{4}\left(y-4x^3+2y^4\right)$, а для нової невідомої функції $Q(x,y)$ – однорідну задачу

$$Q_{xx}+Q_{yy}=0,\quad 0<x<1,\quad 0<y<1;$$
$$Q_x(0,y)=0,\quad Q_x(1,y)=0,\quad 0\le y\le 1;$$
$$Q(x,0)=0,\quad Q_y(x,1)+Q(x,1)=0,\quad 0\le x\le 1,$$

звідки очевидно, що $Q(x,y)\equiv 0$ (див. приклад 3). Отже, розв'язок задачі (11) буде

$$Z(x,y)\equiv\omega(y)=\tfrac{1}{4}\left(y-4y^3+2y^4\right).$$

Додавши знайдені розв'язки задач (9), (10) і (11), одержимо шуканий розв'язок вихідної крайової задачі:

$$U(x,y)=\frac{1}{4}\left(2y^4-y-4y^3\right)+1+\frac{4\operatorname{sh}\pi y}{\pi\operatorname{ch}\pi+\operatorname{sh}\pi}\cos\pi x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16\sin^2\frac{\mu_n}{2}}{\mu_n^4\operatorname{sh}\mu_n\left(1+\cos^2\mu_n\right)}\operatorname{ch}\mu_n x\sin\mu_n y,$$

де $\mu_n=-\operatorname{tg}\mu_n$.

Іноді без застосування методу Фур'є вдається проінтеґрувати й більш складні за (11) крайові задачі.

ПРИКЛАД 5. Проінтеґрувати крайову задачу:

$$\Delta U(x,y)=6y,\quad 0<x<1,\quad 0<y<1;$$
$$U_x(0,y)=1,\quad U_x(1,y)=1,\quad 0\le y\le 1;$$
$$U(x,0)=x-1,\quad U_y(x,1)+U(x,1)=x-1,\quad 0\le x\le 1.$$

Розв'язання. На вигляд задача аналоґічна до прикладу 4, проте шукати її розв'язок вищенаведеним способом не можна, поскільки в дочірніх задачах крайові умови стануть неузгодженими. Отже, застосовуємо інший спосіб (див. приклад 3): покладемо

$$U(x,y)=V(x,y)+\omega(x,y),$$

де $\omega(x,y)$ – деякий частинний розв'язок рівняння

$$\omega_{xx}+\omega_{yy}=6y, \tag{14}$$

котрий потрібно підібрати таким чином, щоб до одержаної задачі для $V(x,y)$ був застосовний метод Фур'є. При цьому бажано, щоб одержана нова задача була максимально простою.

Спробуємо виконати ці умови для нашого прикладу. Очевидно, що довільна функція вигляду $\omega(x,y)=y^3+Ay+Bx+C$, де A, B, C – довільні сталі, є розв'язком рівняння (14). Виберемо тепер сталі A, B, C таким чином, щоб справдити хоча б деякі з чотирьох крайових умов. Маємо:

$$\omega_x(0,y)\equiv B=1,\quad \omega_x(1,y)\equiv B=1,$$
$$\omega(x,0)\equiv Bx+C=x-1,\quad \omega_y(x,1)+\omega(x,1)\equiv Bx+C+2A+4=x-1.$$

Легко бачити, що при B=1, C=-1 та A=-2 справджуються усі чотири крайові умови. Отже, беремо $\omega(x,y)=y^3-2y+x-1$. Тоді для $V(x,y)$ одержимо задачу:

$$\Delta V(x,y)=0,\quad 0<x<1,\quad 0<y<1;$$
$$V_x(0,y)=0,\quad V_x(1,y)=0,\quad 0\le y\le 1;$$
$$V(x,0)=0,\quad V_y(x,1)+V(x,1)=0,\quad 0\le x\le 1,$$

звідки $V(x,y)\equiv 0$, а тому

$$U(x,y)\equiv\omega(x,y)=y^3-2y+x-1.$$

Розглянемо задачу Неймана для рівняння Лапласа у прямокутнику $\{(x,y)|0\le x\le a,\quad 0\le y\le b\}$:

$$\Delta U(x,y)=0,\quad 0<x<a,\quad 0<y<b;$$
$$U_x(0,y)=\varphi_1(y),\quad U_x(a,y)=\varphi_2(y),\quad 0\le y\le b;$$
$$U_y(x,0)=\psi_1(x),\quad U_y(x,b)=\psi_2(x),\quad 0\le x\le a.$$

Умова стаціонарності теплового поля для такої задачі має вигляд

$$\int_0^b\varphi_1(y)dy=\int_0^b\varphi_2(y)dy,\quad \int_0^a\psi_1(y)dy=\int_0^a\psi_2(y)dy.$$

При невиконанні хоча б однієї з цих умов задача розв'язку не має. Проте у випадку задачі Неймана для рівняння Пуассона іноді вдається підібрати частинний розв'язок рівняння таким чином, щоб крайові умови стали узгодженими.

ПРИКЛАД 6. Проінтеґрувати крайову задачу

$$\Delta U(x,y)=2,\quad 0<x<1,\quad 0<y<1;$$
$$U_x(0,y)=y-1,\quad U_x(1,y)=y+1,\quad 0\le y\le 1;$$
$$U_y(x,0)=x,\quad U_y(x,1)=x,\quad 0\le x\le 1.$$

Розв'язання. Очевидно, що умова стаціонарності теплового поля тут не виконується, поскільки $\int\limits_0^1 (y-1)dy \neq \int\limits_0^1 (y+1)dy.$ Тому розв'язок потрібно шукати у вигляді $U(x,y)=V(x,y)+\omega(x,y),$ де $\omega(x,y)$ – деякий частинний розв'язок рівняння $\Delta\omega=2,$ причому для $V(x,y)$ крайові умови повинні стати узгодженими. Шляхом підбору знаходимо, наприклад, $\omega(x,y)=x^2-x;$ тоді для $V(x,y)$ одержимо задачу

$$\Delta V(x,y)=0,\quad 0<x<1,\quad 0<y<1;$$
$$V_x(0,y)=y,\quad V_x(1,y)=y,\quad 0\le y\le 1;$$
$$V_y(x,0)=x,\quad V_y(x,1)=x,\quad 0\le x\le 1.$$

Тут крайові умови є узгодженими, і задача має очевидний розв'язок

$$V(x,y)=xy+C,\quad C=const$$

(як відомо, розв'язок внутрішньої задачі Неймана завжди визначається з точністю до сталого доданка). А тоді

$$U(x,y)=V(x,y)+\omega(x,y)=xy+x^2-x+C.$$

3. Крайові задачі для кругових областей. Метод відокремлення змінних

На відміну від прямокутних областей, для запису математичних моделей стаціонарних процесів у кругових областях (внутрішність або зовнішність круга, кільце, круговий сектор, криволінійний прямокутник) використовують полярні координати. Проте методи інтеґрування крайових задач для рівнянь еліптичного типу у випадку кругових областей аналогічні методам знаходження розв'язків змішаних задач для рівнянь гіперболічного та параболічного типів (при цьому роль початкових умов грають крайові умови на криволінійних краях, тобто при $\rho=const.$ У внутрішніх задачах для круга та сектора необхідно враховувати додатково умову визначеності розв'язку в нулі: $\lim\limits_{\rho\to 0} U(\rho,\varphi)\neq\pm\infty,$ а у зовнішніх задачах – умову реґулярності на нескінченості на площині: $\lim\limits_{\rho\to\infty} U(\rho,\varphi) \neq \pm\infty$. Крім того, для круга та кільця розв'язок повинен бути періодичною функцією з періодом 2π.

ПРИКЛАД 1. Знайти стаціонарний розподіл температури всередині пластинки, яка має форму кругового сектора $\{(\rho,\varphi) | 0 \le \rho \le R, \quad 0 \le \varphi \le \alpha < 2\pi\}$, якщо прямолінійні краї пластинки теплоізольовані, а на дузі підтримується температура $A\cos\frac{\pi}{\alpha}\varphi, \quad A = const.$

Розв'язання. Маємо наступну задачу:

$$\Delta U(\rho,\varphi) \equiv U_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}U_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}U_{\varphi\varphi} = 0, \quad 0 < \rho < R, \quad 0 < \varphi < \alpha; \tag{15}$$

$$U(R,\varphi) = A\cos\tfrac{\pi}{\alpha}\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \alpha; \tag{16}$$

$$U_{\varphi}(\rho,0) = 0, \quad U_{\varphi}(\rho,\alpha) = 0, \quad 0 \le \rho \le R. \tag{17}$$

Крайові умови узгоджені, тому для знаходження розв'язку однорідного рівняння (15) застосовний метод відокремлення змінних (метод Фур'є). Отже, шукаємо $U(\rho,\varphi)$ у вигляді

$$U(\rho,\varphi) = X(\rho)\cdot\Phi(\varphi) \neq 0.$$

Відокремивши змінні у рівнянні (15) та у крайових умовах (17), одержимо:

$$\rho^2 X''(\rho) + \rho X'(\rho) + \lambda X(\rho) = 0; \tag{18}$$

$$\begin{aligned} &\Phi''(\varphi) - \lambda\Phi(\varphi) = 0; \\ &\Phi'(0) = 0, \quad \Phi'(\alpha) = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Із ЗШЛ (19) маємо:

$$\lambda_n = -\left(\tfrac{\pi n}{\alpha}\right)^2, \quad \Phi_n(\varphi) = \cos\tfrac{\pi n}{\alpha}\varphi, \quad n = \overline{0,\infty}$$

(нуль теж є власним значенням). Підставимо знайдені λ_n у (18) і визначимо $X_n(\rho)$, врахувавши умову визначеності розв'язку в нулі. Одержимо:

$$X_n(\rho) = B_n \rho^{\frac{\pi n}{\alpha}}, \quad n = \overline{0,\infty}.$$

Таким чином, розв'язок рівняння Лапласа (15) матиме вигляд

$$U(\rho,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \rho^{\frac{\pi n}{\alpha}} \cos\frac{\pi n}{\alpha}\varphi. \tag{20}$$

Сталі B_n визначаємо підстановкою ряду (20) у крайову умову (16). Маємо:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n R^{\frac{\pi n}{\alpha}} \cos\frac{\pi n}{\alpha}\varphi = A\cos\frac{\pi n}{\alpha}\varphi.$$

Звідси

$$B_n = \begin{cases} AR^{-\frac{\pi}{\alpha}}, & n = 1; \\ 0, & n \neq 1. \end{cases}$$

Отже, розв’язком задачі (15)-(17) буде функція

$$U(\rho,\varphi) = A\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos\frac{\pi}{\alpha}\varphi.$$

Зауваження. Рівняння Ейлера (18) інтеґрується зведенням до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами заміною незалежної змінної $\rho = e^t$. У випадку однорідного рівняння Ейлера можна застосовувати і простішу підстановку $X_n(\rho) = \rho^k$, де k – невідома стала.

ПРИКЛАД 2. Проінтеґрувати крайову задачу та дати фізичну інтерпретацію:

$$\Delta U(\rho,\varphi) = 18\rho, \quad 1 < \rho < 4, \quad 0 \le \varphi < 2\pi;$$
$$U_\rho(1,\varphi) - U(1,\varphi) = 1, \quad U(4,\varphi) = 0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Фізична інтерпретація:

а) знайти положення рівноваги мембрани, яка має форму кільця, обмеженого колами $\rho = 1$ та $\rho = 4$, зовнішній край якої закріплений нерухомо, а внутрішній – пружно, причому край закріплення пружини зміщений; мембрана піддається дії зовнішньої сили інтенсивності 18ρ, – або:

б) знайти стаціонарний розподіл температури всередині однорідної пластинки, яка має форму кільця, обмеженого колами $\rho = 1$ та $\rho = 4$, зовнішній край якої підтримується при нульовій температурі, якщо на внутрішньому краї проходить теплообмін із навколишнім середовищем сталої температури, а інтенсивність внутрішніх джерел тепла рівна 18ρ.

Розв’язання.

Перший спосіб (метод відокремлення змінних). Спочатку для спрощення задачі зведемо рівняння до однорідного підстановкою

$$U(\rho,\varphi) = V(\rho,\varphi) + \omega(\rho,\varphi),$$

де $V(\rho,\varphi)$ – нова невідома функція, а $\omega(\rho,\varphi)$ – деякий частинний розв’язок рівняння

$$\Delta\omega \equiv \omega_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\omega_\rho + \frac{1}{\rho^2}\omega_{\varphi\varphi} = 18\rho.$$

Будемо шукати допоміжну функцію у вигляді $\omega(\rho,\varphi) = A\rho^3$, тоді з рівняння визначаємо $A = 2$. Отже, беремо $U(\rho,\varphi) = V(\rho,\varphi) + 2\rho^3$ і для нової невідомої функції $V(\rho,\varphi)$ одержуємо наступну крайову задачу:

$$\Delta V(\rho,\varphi) = 0, \quad 1 < \rho < 4, \quad 0 \le \varphi < 2\pi;$$
$$V_\rho(1,\varphi) - V(1,\varphi) = -3, \quad V(4,\varphi) = -128, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Застосовуючи до цієї задачі класичний метод відокремлення змінних, тобто шукаючи розв'язок у вигляді $V(\rho,\varphi)=X(\rho)\cdot\Phi(\varphi)\neq 0$, одержимо загальний розв'язок рівняння Лапласа у вигляді (див. [9], стор. 67-69):

$$V(\rho,\varphi)=A_0\ln\rho+B_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n\rho^n+B_n\rho^{-n}\right)\cos n\varphi+\left(C_n\rho^n+D_n\rho^{-n}\right)\sin n\varphi\right] \qquad (21)$$

Підставивши ряд (21) у крайові умови для $V(\rho,\varphi)$, одержимо:

$$A_0-B_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n(n-1)+B_n(n-1)\right)\cos n\varphi+\left(C_n(n-1)+D_n(n-1)\right)\sin n\varphi\right]=-3;$$

$$A_0\ln 4+B_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n\cdot 4^n+B_n\cdot 4^{-n}\right)\cos n\varphi+\left(C_n\cdot 4^n+D_n\cdot 4^{-n}\right)\sin n\varphi\right]=-128.$$

Звідси:

$$A_n=B_n=C_n=D_n=0,\quad n>0;$$

$$A_0-B_0=-3,\quad A_0\ln 4+B_0=-128.$$

Із останньої системи $A_0=-131(1+\ln 4)^{-1}$, $B_0=(3\ln 4-128)(1+\ln 4)^{-1}$; отже,

$$U(\rho,\varphi)=2\rho^3+\frac{3\ln 4-128-131\ln\rho}{\ln 4+1}. \qquad (22)$$

Другий спосіб (метод спуску). Поскільки вільний член у рівнянні Пуассона і крайові умови не залежать від полярного кута, то можна покласти $U(\rho,\varphi)\equiv U(\rho)$. Тоді для визначення розв'язку матимемо крайову задачу для звичайного диференціального рівняння:

$$U''(\rho)+\frac{1}{\rho}U'(\rho)=18\rho,\quad 1<\rho<4;$$

$$U'(1)-U(1)=1,\quad U(4)=0.$$

Проінтеґрувавши рівняння за допомогою підстановки $U'(\rho)=Z(\rho)$ або шляхом виділення повної похідної, одержимо загальний розв'язок

$$U(\rho)=2\rho^3+C_1\ln\rho+C_2.$$

Визначивши сталі C_1, C_2 з крайових умов, дістанемо розв'язок крайової задачі у вигляді (22).

ПРИКЛАД 3. Побудувати розв'язок крайової задачі:

$$\Delta U(\rho,\varphi)=4\rho^{-2}\left(\sin^2 2\varphi-\cos\varphi\right),\quad 1<\rho<2,\quad 0<\varphi<\tfrac{\pi}{2};$$

$$U_\rho(1,\varphi)=0,\quad U_\rho(2,\varphi)=0,\quad 0\le\varphi\le\tfrac{\pi}{2};$$

$$U(\rho,0)=4,\quad U\left(\rho,\tfrac{\pi}{2}\right)=0,\quad 1\le\rho\le 2.$$

Розв'язання. Якщо проводити аналогію зі змішаними задачами для рівнянь параболічного типу, то можна було б сказати, що маємо задачу типу 3 (крайові умови на прямолінійних краях заданого кільцевого сектора неоднорідні). Тому й етапи знаходження розв'язку в цих задачах аналоґічні.

Перший етап. Зводимо до однорідних крайові умови на прямолінійних краях підстановкою $U(\rho,\varphi)=V(\rho,\varphi)+\omega(\rho,\varphi)$, де $V(\rho,\varphi)$ – нова невідома функція, а $\omega(\rho,\varphi)$ – допоміжна функція, котра повинна справджувати крайові умови

$$\omega(\rho,0)=4, \quad \omega\left(\rho,\tfrac{\pi}{2}\right)=0.$$

Будемо шукати допоміжну функцію $\omega(\rho,\varphi)$ в періодичному вигляді

$$\omega(\rho,\varphi)=A(\rho)\sin\beta\varphi+B(\rho)\cos\beta\varphi,$$

де невідомі функції $A(\rho)$, $B(\rho)$ та стала β визначаються з крайових умов:

$$\omega(\rho,0)\equiv A(\rho)\cdot 0+B(\rho)\cdot 1=4 \quad\Rightarrow\quad B(\rho)=4;$$

$$\omega\left(\rho,\tfrac{\pi}{2}\right)\equiv A(\rho)\sin\tfrac{\beta\pi}{2}+B(\rho)\cos\tfrac{\beta\pi}{2}=0.$$

Остання умова виконується, наприклад, при $A(\rho)\equiv 0$, $\beta=1$. Отже, беремо $\omega(\rho,\varphi)=4\cos\varphi$. Тоді $U(\rho,\varphi)=V(\rho,\varphi)+4\cos\varphi$, а для $V(\rho,\varphi)$ матимемо наступну крайову задачу:

$$\Delta V(\rho,\varphi)\equiv V_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}V_{\rho}+\frac{1}{\rho^2}V_{\varphi\varphi}=4\rho^{-2}\sin^2 2\varphi, \quad 1<\rho<2, \quad 0<\varphi<\tfrac{\pi}{2};$$

$$V_{\rho}(1,\varphi)=0, \quad V_{\rho}(2,\varphi)=0, \quad 0\le\varphi\le\tfrac{\pi}{2};$$

$$V(\rho,0)=0, \quad V\left(\rho,\tfrac{\pi}{2}\right)=0, \quad 1\le\rho\le 2.$$

Другий етап. Шукаємо власні функції задачі Штурма-Ліувілля для відповідної однорідної задачі. Поклавши $V(\rho,\varphi)=Q(\rho)\cdot\Phi(\varphi)\neq 0$ і відокремивши змінні у відповідному однорідному рівнянні та у крайових умовах на прямолінійних краях, одержимо ЗШЛ

$$\Phi''(\varphi)-\lambda\Phi(\varphi)=0;$$

$$\Phi(0)=0, \quad \Phi\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=0,$$

звідки $\Phi_n(\varphi)=\sin 2n\varphi$, $n\in\mathbf{N}$.

Третій етап. Розв'язок неоднорідної задачі шукаємо у вигляді ряду по знайдених власних функціях:

$$V(\rho,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(\rho)\cdot\Phi_n(\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(\rho)\sin 2n\varphi.$$

Невідомі коефіцієнти $X_n(\rho)$ знаходимо підстановкою цього ряду в неоднорідне рівняння та у крайові умови на дугах. Одержимо:

$$\rho^2 X_n''(\rho)+\rho X_n'(\rho)-4n^2 X_n(\rho)=f_n; \tag{23}$$

$$X_n'(1)=0, \quad X_n'(2)=0,$$

де коефіцієнт Фур'є

$$f_n = \frac{16}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi \sin 2n\varphi d\varphi = \begin{cases} 0, \quad n = 2k, \quad k \neq 1; \\ 4\pi^{-1}, \quad n = 2; \\ \dfrac{32}{\pi n(4-n^2)}, \quad n = 2k-1. \end{cases}$$

Ввівши підстановку $\rho = e^t$ у рівняння Ейлера (23) і проінтеґрувавши його, будемо мати:

$$X_n(\rho) = A_n\rho^{2n} + B_n\rho^{-2n} - 0{,}25n^{-2}f_n.$$

Із крайових умов $A_n = B_n = 0$, отже,

$$U(\rho,\varphi) \equiv U(\varphi) = 4\cos\varphi - \tfrac{1}{4\pi}\sin 4\varphi - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi(2k-1)^3\left[4-(2k-1)^2\right]}\sin(4k-2)\varphi.$$

Завдання. Розв'язати крайову задачу прикладу 3, використовуючи метод спуску (див. приклад 2).

ПРИКЛАД 4. Знайти положення рівноваги однорідної мембрани, яка має форму кільця, обмеженого колами $\rho = a$ та $\rho = b$ $(0 < a < b)$, внутрішній край якої жорстко закріплений, а зовнішній вільний, якщо мембрана піддається дії зовнішньої сили інтенсивності $12(x^2 - y^2)$. Початок координат знаходиться у центрі кільця.

Розв'язання. Математична модель задачі (у полярній системі координат):

$$\Delta U(\rho,\varphi) \equiv U_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}U_\rho + \frac{1}{\rho^2}U_{\varphi\varphi} = 12\rho^2\cos 2\varphi, \quad a < \rho < b, \quad 0 \le \varphi < 2\pi;$$

$$U(a,\varphi) = 0, \quad U_\rho(b,\varphi) = 0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Розв'язок будемо шукати у вигляді $U(\rho,\varphi) = V(\rho,\varphi) + \omega(\rho,\varphi)$, де $V(\rho,\varphi)$ – нова невідома функція, а $\omega(\rho,\varphi)$ – деякий розв'язок заданого рівняння Пуассона. Зокрема, в даному випадку $\omega(\rho,\varphi)$ можна шукати у вигляді $\omega(\rho,\varphi) = A\rho^4\cos 2\varphi$, тоді з рівняння визначаємо $A = 1$. Отже,

$$\omega(\rho,\varphi) = \rho^4\cos 2\varphi.$$

Тоді для $V(\rho,\varphi)$ одержуємо крайову задачу (задля зручності домножимо рівняння на ρ^2):

$$\rho^2 V_{\rho\rho} + \rho V_\rho + V_{\varphi\varphi} = 0, \quad a < \rho < b, \quad 0 \le \varphi < 2\pi;$$

$$V(a,\varphi) = -a^4\cos 2\varphi, \quad V_\rho(b,\varphi) = -4b^3\cos 2\varphi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Застосовуючи до цієї задачі класичний метод відокремлення змінних, тобто шукаючи розв'язок у вигляді $V(\rho,\varphi) = X(\rho)\cdot\Phi(\varphi) \neq 0$, одержимо загальний розв'язок рівняння Лапласа у вигляді (див. приклад 2):

$$V(\rho,\varphi)=A_0\ln\rho+B_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n\rho^n+B_n\rho^{-n}\right)\cos n\varphi+\left(C_n\rho^n+D_n\rho^{-n}\right)\sin n\varphi\right]$$

Коефіцієнти ряду слід визначати підстановкою ряду в крайові умови на колах, подаючи при цьому праві частини рівностей у вигляді ряду Фур'є. Проте в даному випадку функції крайових умов уже подані у вигляді розкладу в ряд Фур'є (резонансний випадок). Тому, одразу прирівнявши коефіцієнти при однакових власних функціях, одержимо: $A_0=B_0=0;\ C_n=D_n=0$ для всіх n; а $A_n=B_n=0$ для всіх n, окрім n=2. При n=2 ж матимемо систему для визначення A_2 та B_2:

$$\begin{cases}A_2a^4+B_2=-a^6;\\ A_2b^4-B_2=-2b^6\end{cases}\Rightarrow\quad A_2=-\frac{a^6+2b^6}{a^4+b^4},\quad B_2=\frac{2b^2-a^2}{a^{-4}+b^{-4}}.$$

Отже, шуканий розв'язок крайової задачі запишеться у вигляді:

$$U(\rho,\varphi)=\rho^4\cos2\varphi+\left[\left(2b^2-a^2\right)a^4b^4\rho^{-2}-\left(a^6+2b^6\right)\rho^2\right]\frac{\cos2\varphi}{a^4+b^4}.$$

Інтеґрал Пуассона. Розв'язок внутрішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа в крузі радіуса R із центром у початку координат

$$\Delta U(\rho,\varphi)=0,\quad 0<\rho<R,\quad 0\le\varphi<2\pi;$$
$$U(R,\varphi)=f(\varphi),\quad 0\le\varphi<2\pi$$

дається інтеґралом Пуассона

$$U(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\psi-\varphi)}d\psi.$$

Для відповідної зовнішньої задачі ($R\le\rho<+\infty$)

$$U(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\frac{\rho^2-R^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\psi-\varphi)}d\psi.$$

Вираз

$$K(\rho,\varphi,R,\psi)=\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\psi-\varphi)}$$

називається ядром Пуассона.

Задача Неймана. Умова стаціонарності теплового поля у випадку задачі Неймана для рівняння Лапласа в кругових областях має вигляд:

а) для внутрішності ($0\le\rho\le R$) або зовнішності ($R\le\rho<+\infty$) круга

$$\begin{matrix}\Delta U(\rho,\varphi)=0;\\ U_\rho(R,\varphi)=f(\varphi)\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad\int_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi=0.$$

Для кругового сектора ($0 \le \rho \le R$, $0 \le \varphi \le \alpha < 2\pi$), якщо крайові умови на прямолінійних краях однорідні, буде $\int\limits_0^{\alpha} f(\varphi)d\varphi = 0$.

б) для кільця ($a \le \rho \le b$, $0 \le \varphi < 2\pi$)

$$\begin{aligned} &\Delta U(\rho,\varphi) = 0; \\ &U_\rho(a,\varphi) = f_1(\varphi); \quad \Rightarrow \quad a\int\limits_0^{2\pi} f_1(\varphi)d\varphi = b\int\limits_0^{2\pi} f_2(\varphi)d\varphi. \\ &U_\rho(b,\varphi) = f_2(\varphi) \end{aligned}$$

Для криволінійного прямокутника чи кільцевого сектора ($a \le \rho \le b$, $0 \le \varphi \le \alpha < 2\pi$), якщо крайові умови на прямолінійних краях однорідні, буде

$$a\int\limits_0^{\alpha} f_1(\varphi)d\varphi = b\int\limits_0^{\alpha} f_2(\varphi)d\varphi.$$

Якщо наведені вище умови виконуються, то задача Неймана буде мати розв'язок, який визначається з точністю до сталого доданка. Якщо ж рівняння неоднорідне або ж при $0 \le \varphi \le \alpha < 2\pi$ маємо неоднорідні крайові умови на прямолінійних краях, то можна спробувати звести задачу до однорідної з урахуванням умов узгодженості аналогічно до прямокутних областей (див. приклад 6 попереднього розділу).

4. Функція Ґріна оператора Лапласа

Нехай у тривимірному просторі задана обмежена поверхнею **S** область **D**. Припустимо, що функція $U(M)$, $M=M(x,y,z)$ гармонічна в **D** і належить класу $C^1(\overline{\mathbf{D}})$.

Визначення. Функція $G(P,M)$, $M \in \mathbf{D}$ називається функцією Ґріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа, якщо для неї справджуються наступні умови:

1) $G(P,M)$ як функція точки $P(\xi,\eta,\zeta)$ є гармонічною в області **D** за винятком точки M, де вона перетворюється в нескінченість;

2) $G(P,M)$ як функція точки $P(\xi,\eta,\zeta)$ справджує крайову умову

$$G(P,M)\big|_{P\in\mathbf{S}} = 0;$$

3) в області **D** функція $G(P,M)$ допускає подання у вигляді

$$G(P,M) = \frac{1}{4\pi r_{PM}} + g(P,M), \quad r_{PM} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

де $g(P,M)$ – гармонічна всюди в області **D** функція, яка визначається з задачі Діріхле

$$\begin{aligned} &\Delta g(P,M) = 0, \quad P \in \mathbf{D}; \\ &g(P,M)\big|_{P\in\mathbf{S}} = -\frac{1}{4\pi r_{PM}}, \quad P \in \mathbf{S}, \quad M \in \mathbf{D}. \end{aligned}$$

Якщо функція $G(P,M)$ відома, то розв'язок внутрішньої задачі Діріхле

$$\Delta U(M) = 0, \quad M \in \mathbf{D};$$

$$U(P)\big|_{\mathbf{S}} = f(P), \quad P \in \mathbf{S},$$

якщо він існує, дається формулою

$$U(M) = -\iint\limits_{\mathbf{S}} f(P) \frac{\partial G(P,M)}{\partial \vec{n}} ds,$$

де $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до поверхні **S** у точці P.

Якщо маємо задачу Діріхле для рівняння Пуассона

$$\Delta U(M) = F(M), \quad M \in \mathbf{D};$$

$$U(P)\big|_{\mathbf{S}} = f(P), \quad P \in \mathbf{S},$$

причому $U(M) \in C^2(\mathbf{D}) \cap C^1(\overline{\mathbf{D}})$, то

$$U(M) = -\iint\limits_{\mathbf{S}} f(P) \frac{\partial G(P,M)}{\partial \vec{n}} ds - \iiint\limits_{\mathbf{D}} F(P) G(P,M) dP.$$

Зауваження. У випадку площини функція Ґріна має вигляд

$$G(P,M) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{PM}} + g(P,M), \quad r_{PM} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2},$$

а її реґулярна частина $g(P,M)$ визначається з задачі Діріхле (тут **D** – плоска область, а **S** – замкнута крива, яка обмежує цю область)

$$\Delta g(P,M) = 0, \quad P \in \mathbf{D};$$

$$g(P,M)\big|_{P \in \mathbf{S}} = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{PM}}, \quad P \in \mathbf{S}, \quad M \in \mathbf{D}.$$

Основні властивості функції Ґріна:

1) $G(P,M)$ невід'ємна в області **D**;
2) $G(P,M)$ є симетричною відносно точок P та M, тобто $G(P,M)=G(M,P)$.

5. Теорія потенціалу

Нехай у деякій точці $A(a,b,c)$ тривимірного простору розміщений електричний заряд q. На підставі закону Кулона можна показати (див. [4], розділ IV, тема 3), що точковий заряд величини q в довільній точці $M(x,y,z)$ простору створює потенціал

$$U(M) = \frac{q}{r_{AM}} = \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

Легко бачити, що $U(M) \to 0$ при $M \to \infty$ (чим далі від джерела, тим слабша дія заряду).

Поскільки при наявності кількох точкових зарядів створювані ними потенціали сумуються, то загальний потенціал, створений рівномірно розподіленим зарядом, знаходиться як границя суми, тобто у вигляді інтеґрала.

Розглянемо основні види потенціалів та їх властивості.

1. ***Об'ємний потенціал.*** Потенціал, створений зарядом, розподіленим по об'єму **D** тривимірного простору з об'ємною густиною $f(M)$, рівний

$$V(M)=\iiint\limits_{\mathbf{D}}\frac{f(P)}{r_{PM}}dP.$$

Тут $P(\xi,\eta,\zeta)$ – довільна (біжуча) точка об'єму **D**, $M=M(x,y,z)$ – деяка (фіксована) точка тривимірного простору.

Потенціал об'єму є гармонічною функцією зовні області **D**, тобто при $M\notin\mathbf{D}$ справджує рівняння Лапласа $\Delta V(M)=0$.

Теорема 1. Якщо об'ємна густина $f(M)$ є обмеженою й інтеґровною в області **D** функцією, то потенціал об'єму $V(M)$ і його частинні похідні першого порядку є неперервними у всьому просторі, причому ці похідні можуть бути одержані шляхом диференціювання під знаком інтеґрала.

Теорема 2. Якщо об'ємна густина $f(M)\in C^1(\mathbf{D})\cap C(\overline{\mathbf{D}})$, то потенціал об'єму $V(M)$ має неперервні похідні другого порядку в області **D** і при $M\in\mathbf{D}$ справджує рівняння Пуассона $\Delta V(M)=-4\pi f(M)$.

Наслідок. Якщо об'ємна густина $f(M)$ справджує умови теореми 2, то рівняння $\Delta V(M)=-f(M)$ має частинний розв'язок

$$V(M)=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\mathbf{D}}\frac{f(P)}{r_{PM}}dP.$$

2. ***Потенціал простого шару.*** Якщо заряд розподілений по поверхні **S** із поверхневою густиною $\psi(M)$, то потенціал, створюваний цим зарядом, рівний

$$U(M)=\iint\limits_{\mathbf{S}}\frac{\psi(P)}{r_{PM}}ds,$$

де $P(\xi,\eta,\zeta)$ – довільна (біжуча) точка на поверхні **S**, $M=M(x,y,z)$ – деяка (фіксована) точка тривимірного простору.

У всіх точках $M(x,y,z)$ простору, які не належать поверхні **S**, потенціал простого шару має похідні всіх порядків і справджує рівняння Лапласа, причому $U(M)\to 0$ при $M\to\infty$.

Теорема 3. Потенціал простого шару з неперервною густиною є неперервною функцією у всьому просторі.

Похідна по напряму $\vec{n}_0$ зовнішньої нормалі до поверхні **S** у фіксованій точці $P_0\in\mathbf{S}$ дається формулою

$$\frac{\partial U(M)}{\partial\vec{n}_0}=\iint\limits_{\mathbf{S}}\psi(P)\frac{\partial}{\partial\vec{n}_0}\left(\frac{1}{r_{PM}}\right)ds=\iint\limits_{\mathbf{S}}\psi(P)\frac{\cos\left(\overrightarrow{MP},\vec{n}_0\right)}{r_{PM}}ds, \tag{24}$$

Позначимо $\left(\frac{\partial U(M)}{\partial \vec{n}_0}\right)_i$ і $\left(\frac{\partial U(M)}{\partial \vec{n}_0}\right)_e$ границі похідної по напряму $\vec{n}_0$, коли $M \to P_0$ відповідно зсередини та ззовні поверхні **S**. Тоді мають місце формули:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial U(P_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_i &= \iint_{\mathbf{S}} \psi(P)\frac{\cos\left(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n}_0\right)}{r_{PP_0}}ds + 2\pi\psi(P_0);\\ \left(\frac{\partial U(P_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_e &= \iint_{\mathbf{S}} \psi(P)\frac{\cos\left(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n}_0\right)}{r_{PP_0}}ds - 2\pi\psi(P_0).\end{aligned} \tag{25}$$

Отже, у точках поверхні нормальна похідна потенціалу простого шару має скачок:

$$\left(\frac{\partial U(P_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_i - \left(\frac{\partial U(P_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_e = 4\pi\psi(P_0). \tag{26}$$

Зауваження. У випадку площини, якщо заряд розподілений по деякій замкнутій кривій ℓ із лінійною густиною $\psi(M)$, одержимо ***лоґарифмічний потенціал простого шару***:

$$U(M) = \int_{\ell} \psi(P)\ln\frac{1}{r_{PM}}d\ell,$$

де $P(\xi,\eta)$ – довільна (біжуча) точка на кривій ℓ, $M=M(x,y)$ – деяка (фіксована) точка площини.

Формули (24)-(26) для лоґарифмічного потенціалу простого шару матимуть вигляд:

$$\frac{\partial U(M)}{\partial \vec{n}_0} = \int_{\ell} \psi(P)\frac{\partial}{\partial \vec{n}_0}\left(\ln\frac{1}{r_{PM}}\right)d\ell = \int_{\ell} \psi(P)\frac{\cos\left(\overrightarrow{MP}, \vec{n}_0\right)}{r_{PM}}d\ell;$$

$$\left(\frac{\partial U(P_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_i = \int_{\ell} \psi(P)\frac{\cos\left(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n}_0\right)}{r_{PP_0}}d\ell + \pi\psi(P_0);$$

$$\left(\frac{\partial U(P_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_e = \int_{\ell} \psi(P)\frac{\cos\left(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n}_0\right)}{r_{PP_0}}d\ell - \pi\psi(P_0);$$

$$\left(\frac{\partial U(P_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_i - \left(\frac{\partial U(P_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_e = 2\pi\psi(P_0),$$

де P_0 – деяка фіксована точка кривої ℓ.

За допомогою потенціалів простого шару будуються розв'язки задач Неймана (друга крайова задача) для рівняння Лапласа.

3. ***Потенціал подвійного шару.*** Нехай **S** – орієнтована поверхня (тобто на ній вказані внутрішня та зовнішня сторони), по якій розподілений диполь із

густиною моментів $\mu(M)$, причому в кожній точці напрям осі диполя співпадає з напрямом внутрішньої нормалі $\vec{n}_i$ до поверхні **S** у точці *P*.

Потенціал, створюваний диполем, рівний

$$W(M) = \iint_{\mathbf{S}} \mu(P) \frac{\cos\left(\overrightarrow{PM}, \vec{n}_i\right)}{r_{PM}^2} ds. \tag{27}$$

Формулу потенціалу подвійного шару (27) можна записати в іншому вигляді:

$$W(M) = \iint_{\mathbf{S}} \mu(P) \frac{\cos\left(\overrightarrow{MP}, \vec{n}\right)}{r_{PM}^2} ds.$$

Тут $M=M(x,y,z)$ – фіксована точка простору; $\vec{n}$ – напрям зовнішньої нормалі до поверхні **S** у точці *P*.

При $M \notin \mathbf{S}$ потенціал подвійного шару має похідні усіх порядків і справджує рівняння Лапласа, причому $W(M) \to 0$ при $M \to \infty$.

Теорема 4. Потенціал подвійного шару (27) має границі при прямуванні точки *M* до фіксованої точки $P_0 \in \mathbf{S}$ ззовні або зсередини. Якщо границю значень $W(M)$ ззовні позначити через $W_e(P_0)$, а границю зсередини – через $W_i(P_0)$, то мають місце формули:

$$W_i(P_0) = \iint_{\mathbf{S}} \mu(P) \frac{\cos\left(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n}\right)}{r_{PP_0}^2} ds + 2\pi\mu(P_0) = W(P_0) + 2\pi\mu(P_0); \tag{28}$$

$$W_e(P_0) = \iint_{\mathbf{S}} \mu(P) \frac{\cos\left(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n}\right)}{r_{PP_0}^2} ds - 2\pi\mu(P_0) = W(P_0) - 2\pi\mu(P_0), \tag{29}$$

тобто величина скачка функції $W(M)$ у довільній точці $P_0 \in \mathbf{S}$ буде

$$W_i(P_0) - W_e(P_0) = 4\pi\mu(P_0). \tag{30}$$

Інтеґрал $W(P_0)$ називається прямим значенням потенціалу подвійного шару в точці $P_0 \in \mathbf{S}$.

Зауваження. У випадку площини, якщо диполь розподілений по деякій замкнутій орієнтованій кривій ℓ з густиною моментів $\mu(M)$, одержимо ***лоґарифмічний потенціал подвійного шару***:

$$W(M) = \int_{\ell} \mu(P) \frac{\cos\left(\overrightarrow{MP}, \vec{n}\right)}{r_{PM}} d\ell,$$

де $P(\xi,\eta)$ – довільна (біжуча) точка на кривій ℓ, $M=M(x,y)$ – деяка (фіксована) точка площини.

Формули (27)-(30) для лоґарифмічного потенціалу подвійного шару матимуть вигляд:

$$W_i(P_0)=\int_\ell \mu(P)\frac{\cos\left(\overrightarrow{P_0P},\vec{n}\right)}{r_{PP_0}}d\ell+\pi\mu(P_0);$$

$$W_e(P_0)=\int_\ell \mu(P)\frac{\cos\left(\overrightarrow{P_0P},\vec{n}\right)}{r_{PP_0}}d\ell-\pi\mu(P_0);$$

$$W_i(P_0)-W_e(P_0)=2\pi\mu(P_0).$$

За допомогою потенціалів подвійного шару будуються розв'язки задач Діріхле (перша крайова задача) для рівняння Лапласа.

ПРИКЛАД 1. Знайти лоґарифмічний потенціал простого шару відрізка $0\le x\le 1$ зі сталою густиною заряду $\psi(M)=q_0$.

Розв'язання. Згідно визначення лоґарифмічний потенціал простого шару дається формулою

$$U(M)=\int_\ell \psi(P)\ln\frac{1}{r_{PM}}d\ell.$$

Тут: ℓ – відрізок $0\le x\le 1$; $M(x,y)$ – фіксована точка площини; $P(\xi,0)$ – точка відрізка ℓ; $r_{PM}=|MP|=\sqrt{(\xi-x)^2+y^2}$. Отже,

$$U(x,y)=q_0\int_0^1 \ln\frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+y^2}}d\xi=-0{,}5q_0\int_0^1 \ln\left[(\xi-x)^2+y^2\right]d\xi=$$

$$=-0{,}5q_0\ln\left[(1-x)^2+y^2\right]++q_0\int_0^1\frac{\left[(\xi-x)^2+y^2\right]+x(\xi-x)-y^2}{(\xi-x)^2+y^2}d\xi=$$

$$=q_0\left\{1+(x-1)\ln\sqrt{(1-x)^2+y^2}-\ln\sqrt{x^2+y^2}-y\left(\operatorname{arctg}\frac{1-x}{y}+\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)\right\}.$$

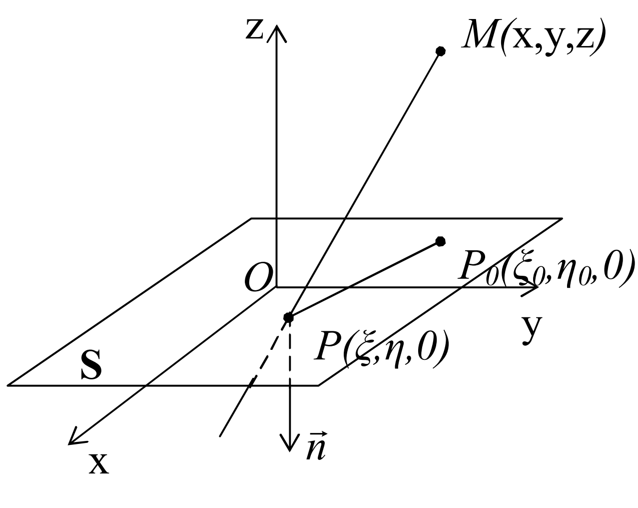
ПРИКЛАД 2. Користуючись поверхневими потенціалами, знайти розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа у півпросторі:

$U_{xx}+U_{yy}+U_{zz}=0,\quad z>0;$

$U(x,y,0)=f(x,y).$

Розв'язання. Розв'язок першої крайової задачі для рівняння Лапласа шукається у вигляді потенціалу подвійного шару:

$$U(x,y,z)\equiv W(M)=\iint_S \mu(P)\frac{\cos\left(\overrightarrow{MP},\vec{n}\right)}{r_{PM}^2}ds.$$



Для даного прикладу:

S – площина xOy; M(x,y,z) – фіксована точка простору; P($\xi,\eta,0$) – точка площини xOy; $r_{PM} = |PM| = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2}$; $\cos\left(\overrightarrow{MP}, \vec{n}\right) = \dfrac{z}{r_{PM}}$.

Зауважимо, що зовнішня нормаль $\vec{n}$ до площини xOy в точці P напрямлена протилежно до осі Oz, поскільки $z > 0$ – "внутрішня" сторона площини. Отже, будемо мати

$$U(x,y,z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi,\eta)\frac{z}{r_{PM}^3}\,d\xi d\eta. \tag{31}$$

Невідому густину моментів $\mu(\xi,\eta)$ визначаємо із властивості скачка потенціалу подвійного шару (28):

$$W_i(P_0) = \iint_{\mathbf{S}} \mu(P)\frac{\cos\left(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n}\right)}{r_{PP_0}^2}ds + 2\pi\mu(P_0), \quad P_0 \in \mathbf{S}.$$

Звідси, враховуючи, що $W_i(P_0) = f(P_0)$, а $\cos\left(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n}\right) = 0$ (нормаль $\vec{n}$ перпендикулярна до площини xOy), одержимо $f(P_0) = 2\pi\mu(P_0)$, тобто для довільної точки $P \in \mathbf{S}$ $\mu(P) = \frac{f(P)}{2\pi}$. А тоді згідно формули (31)

$$U(x,y,z) = \frac{z}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi,\eta)}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2\right]^{3/2}}\,d\xi d\eta.$$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Які фізичні процеси приводять до крайових задач для рівнянь еліптичного типу?

2. Дайте визначення гармонічної функції:
а) в обмеженій області;
б) в необмеженій області.

3. Запишіть постановку
а) задачі Діріхле для рівняння Лапласа у півкрузі $0 \le \rho \le R$, $0 \le \varphi \le \pi$;
б) задачі Неймана для рівняння Лапласа у кільці $a \le \rho \le b$, $0 \le \varphi < 2\pi$;
в) третьої крайової задачі для рівняння Пуассона у прямокутнику $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 4$.

4. Запишіть оператор Лапласа у полярних, циліндричних та сферичних координатах.

5. Сформулюйте принцип мінімакса для гармонічних функцій.

6. Сформулюйте теореми про розв'язок
а) задачі Діріхле;
б) задачі Неймана.

7. У чому суть умови стаціонарності теплового поля?

8. У чому полягає метод власних функцій знаходження розв'язків крайових задач для рівнянь еліптичного типу в прямокутнику?

9. Як будується розв'язок крайових задач для рівняння Лапласа: а) у крузі; б) в кільці; в) у круговому секторі?

10. Які з функцій:

$$U_0 = \ln\frac{\rho}{2};\quad U_1 = 1;\quad U_2 = \frac{2}{\rho}\cos\varphi;\quad U_3 = \rho\sin 3\varphi$$

можуть бути розв'язками внутрішньої (зовнішньої) задачі Діріхле для круга і чому?

11. Запишіть умову стаціонарності теплового поля:

а) для кільця $a\le\rho\le b$, $0\le\varphi<2\pi$;

б) для кругового сектора $0\le\rho\le a$, $0\le\varphi\le\alpha<2\pi$;

в) для квадрата $0\le x$, $y\le c$.

12. При яких значеннях сталої A будуть коректно поставленими задачі Неймана:

а) $U_{xx} + U_{yy} = 0,\quad 0 \le x \le a,\quad 0 \le y \le b;$

$U_x(0, y) = A,\quad U_x(a, y) = y^3 - 1{,}5by^2,\quad 0 \le y \le b;$

$U_y(x,0) = 0,\quad U_y(x,b) = 0,\quad 0 \le x \le a;$

б) $\Delta U(\rho,\varphi) = 0,\quad 0 \le \rho \le 1,\quad 0 \le \varphi < 2\pi;$

$U_\rho(1,\varphi) = A + 4\sin^2\varphi,\quad 0 \le \varphi < 2\pi.$

13. Як будуються розв'язки крайових задач для рівняння Пуассона в кругових областях?

14. Відомо, що розв'язок деякої задачі Неймана для рівняння Пуассона в півкільці $a\le\rho\le b$, $0\le\varphi\le\pi$ не залежить від полярного кута. Що ви можете сказати про

а) крайові умови у вихідній задачі;

б) вільний член у рівнянні Пуассона?

15. Запишіть інтеґрал Пуассона задачі Діріхле для рівняння Лапласа всередині та зовні круга $0\le\rho\le R$.

16. Сформулюйте основні властивості гармонічних функцій.

17. Дайте визначення функції Ґріна оператора Лапласа.

18. Запишіть інтеґрал для обчислення:

а) об'ємного потенціалу;

б) потенціалів простого та подвійного шару;

в) лоґарифмічних потенціалів простого та подвійного шару.

19. Сформулюйте основні властивості:

а) об'ємного потенціалу;

б) потенціалу простого шару;

в) потенціалу подвійного шару.

20. Які крайові задачі для рівнянь еліптичного типу можна розв'язувати за допомогою потенціалів?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ РОБОТИ

1. Знайти положення рівноваги прямокутної мембрани $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le a$, край $x=0$ якої нерухомо закріплений, на краях $x=\pi$ та $y=0$ діють сили відповідно $\nu_1(y) = 3$ та $\nu_2(y) = 6\sin 0{,}5x$, а край $y=a$ пружно закріплений ($h=1$), причому край закріплення пружини зміщується за законом $\gamma(x) = 3x$.
2. Знайти стаціонарний розподіл температури у прямокутній пластинці $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2\pi$, на краї $y=2\pi$ якої підтримується стала температура $\mu(x) = A$, краї $x=1$ та $y=0$ теплоізольовані, а на краї $x=0$ проходить теплообмін (із коефіцієнтом $h=1$) із навколишнім середовищем, температура якого рівна $\gamma(y) = A\left(1 - \cos 0{,}75y\right)$.
3. Визначити форму прогину прямокутної мембрани $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$ під дією зовнішньої сили $18xy$, якщо краї $x=0$ та $x=a$ мембрани нерухомо закріплені, а інші вільні.
4. Визначити стаціонарний розподіл температури у прямокутній пластинці $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, два краї $y=0$ та $x=a$ якої підтримуються при нульовій температурі, а інші теплоізольовані. Усередині пластинки діє джерело тепла інтенсивності $12y + 6\left(x^2 - a^2\right)\sin\frac{5\pi y}{2b}$.
5. До краю кругової пластинки одиничного радіуса підводиться тепловий потік $-40\cos 2\varphi \sin 3\varphi$. Знайти стаціонарний розподіл температури зовні пластинки.
6. Усередині нескінченого кругового циліндра радіуса R проходить рух нестискуваної рідини. Вважаючи рух сталим, потенціальним і плоскопаралельним, знайти закон цього руху, якщо проекція швидкості $\vec{V}$ на зовнішню нормаль циліндра у кожній точці задається формулою:
$$\mathbf{пр}_{\vec{n}}\vec{V} = V_0 \cos 4\varphi \quad (V_0 = const).$$

Зауваження. Якщо в області **G**, обмеженій замкнутою поверхнею **S**, проходить стаціонарний потенціальний рух нестискуваної однорідної рідини, то для визначення закону цього руху достатньо знайти потенціал $U(x,y,z)$ поля швидкостей $\vec{V}$, який є розв'язком задачі:
$$\Delta U(x,y,z) = 0; \quad \left.\frac{\partial U}{\partial \vec{n}}\right|_{\mathbf{S}} = f(x,y,z),$$
де $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до поверхні **S**, а $f(x,y,z)$ – задана на **S** функція, рівна проекції швидкості в точках цієї поверхні на зовнішню нормаль. Якщо потенціал $U(x,y,z)$ знайдений, то поле швидкостей $\vec{V} = -\mathrm{grad}\,U$.

Якщо область **G** обмежена циліндричною поверхнею з твірною, паралельною до осі Oz, а вектор швидкості не залежить від z, тоді $U(x,y,z)\equiv U(x,y)$ і є розв’язком задачі:

$$\Delta U(x,y)=0;\quad \left.\frac{\partial U}{\partial \vec{n}}\right|_{\mathbf{S}}=f(x,y).$$

Тому наведена вище задача зводиться до наступної задачі Неймана:

$$\Delta U(\rho,\varphi)=0,\quad 0\le\rho\le R,\quad 0\le\varphi<2\pi;$$
$$U_\rho(R,\varphi)=V_0\cos 4\varphi,\quad 0\le\varphi<2\pi.$$

7. Знайти форму прогину мембрани, яка має вигляд кільця $1\le\rho\le2$, $0\le\varphi<2\pi$, якщо:

   а) на внутрішній край мембрани діє сила $39\cos 3\varphi$, а на зовнішньому задане відхилення $A\sin\varphi$;

   б) на внутрішньому краї мембрани задане відхилення $A\cos 3\varphi$, а на зовнішній діє сила $\sin\varphi$ (A=*const*).
8. Усередині круглої пластинки радіуса a діють джерела тепла інтенсивності $8\cos 4\varphi$, а її край підтримується при нульовій температурі. Знайти стаціонарний розподіл температури в пластинці.
9. Визначити прогин мембрани, яка має форму кільця $1\le\rho\le2$, $0\le\varphi<2\pi$, якщо:

   а) мембрана піддається дії сили $68\cos 2\varphi$, на внутрішньому краї відхилення рівне $10\sin\varphi+1$, а зовнішній край вільний;

   б) мембрана піддається дії сили $A\sin 2\varphi$, внутрішній край нерухомо закріплений, а на зовнішньому краї задана стала сила A=*const*.
10. Проінтеґрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:

   а) $\Delta U(x,y)=18xy,\quad 0<x<a,\quad 0<y<b;$

   $U_x(0,y)=0,\quad U_x(a,y)=9a^2y+\cos\frac{2\pi}{b}y,\quad 0\le y\le b;$

   $U_y(x,0)=U_y(x,b)=1+3x^3,\quad 0\le x\le a.$

   б) $\Delta U(x,y)=6x+12y,\quad 0<x<2,\quad 0<y<\frac{1}{2};$

   $U_x(0,y)=U_x(2,y)=1+3y^2,\quad 0\le y\le\frac{1}{2};$

   $U_y(x,0)=0,\quad U_y\left(x,\frac{1}{2}\right)=3x+1{,}5+2\cos\pi x,\quad 0\le x\le 2.$

   в) $\Delta U(\rho,\varphi)=\rho,\quad 0<\rho<a,\quad 0\le\varphi<2\pi;$

   $U(a,\varphi)\equiv C=const,\quad 0\le\varphi<2\pi.$

   г) $\Delta U(\rho,\varphi)=0,\quad 1<\rho<2,\quad 0<\varphi<\pi/2;$

   $U(1,\varphi)=0,\quad U(2,\varphi)=\cos 2\varphi+1,\quad 0\le\varphi\le\pi/2;$

   $U_\varphi(\rho,0)=U(\rho,\pi/2)=0,\quad 1\le\rho\le 2.$

   ґ) $\Delta U(\rho,\varphi)=-\frac{15}{4}\sin\frac{3\varphi}{2},\quad 0<\rho<1,\quad 0<\varphi<\pi;$

$U(1,\varphi)=\sin\frac{\varphi}{2},\quad 0\le\varphi\le\pi;$

$U(\rho,0)=0,\quad U(\rho,\pi)=\rho^2,\quad 0\le\rho\le 1.$

д) $\Delta U(\rho,\varphi)=A\varphi\cos 2\varphi,\quad 0<\rho<1,\quad 0<\varphi<\pi/4;$

$U(1,\varphi)=0,\quad 0\le\varphi\le\pi/4;$

$U(\rho,0)=U(\rho,\pi/4)=0,\quad 0\le\rho\le 1\quad (A=const).$

е) $\Delta U(\rho,\varphi)=2,\quad a<\rho<b,\quad 0<\varphi<\pi/2;$

$U_\rho(a,\varphi)=a,\quad U_\rho(b,\varphi)=2\cos 2\varphi+b,\quad 0\le\varphi\le\pi/2;$

$U_\varphi(\rho,0)=U_\varphi(\rho,\pi/2)=0,\quad a\le\rho\le b.$

є) $\Delta U(\rho,\varphi)=-5C\cos 3\varphi,\quad 1<\rho<2,\quad 0<\varphi<\pi/6;$

$U(1,\varphi)=C(\cos 3\varphi+2\cos 6\varphi),\quad U_\rho(2,\varphi)=4C\cos 3\varphi,\quad 0\le\varphi\le\pi/6;$

$U_\varphi(\rho,0)=0,\quad U_\varphi(\rho,\pi/6)=-3C\rho^2,\quad a\le\rho\le b\quad (C=const).$

11. Побудувати функцію Ґріна задачі Діріхле:
    а) в крузі $0\le\rho\le R$, $0\le\varphi<2\pi$;
    б) у круговому секторі $0\le\rho\le R$, $0\le\varphi\le\pi/n$; $n\in\mathbf{N}$.
12. Знайти об’ємний потенціал $V(M)$ кулі радіуса R з центром у початку координат при сталій густині заряду $f(M)\equiv 1$:
    а) поставивши крайову задачу для $V(M)$ і розв’язавши її;
    б) шляхом прямого обчислення об’ємного інтеґралу.
13. Знайти потенціал простого шару, розподілений зі сталою густиною $\psi(M)\equiv\psi_0$ на сфері одиничного радіуса з центром у початку координат.
14. Знайти лоґарифмічний потенціал подвійного шару відрізка $0\le x\le a$ зі сталою густиною моментів $\mu(M)\equiv\mu_0$.
15. За допомогою потенціалу подвійного шару розв’язати задачу Діріхле для півплощини:

$$\Delta U(x,y)=0,\quad y>0;$$
$$U(x,0)=f(x).$$

    Розглянути випадок $f(x)\equiv C=const$.
16. Користуючись потенціалом простого шару, знайти розв’язок задачі Неймана для круга одиничного радіуса з центром у початку координат:

$$\Delta U(\rho,\varphi)=0,\quad 0<\rho<1,\quad 0\le\varphi<2\pi;$$
$$U_\rho(1,\varphi)\equiv C=const,\quad 0\le\varphi<2\pi.$$

ВІДПОВІДІ

1. $U(x,y)=3x+\dfrac{24\,\mathrm{sh}\,\frac{y-a}{2}-12\,\mathrm{ch}\,\frac{y-a}{2}}{2\,\mathrm{ch}\,\frac{a}{2}+\mathrm{sh}\,\frac{a}{2}}\sin\dfrac{x}{2}.$

2. $U(x,y)=\left(A-\dfrac{2A\,\mathrm{ch}\,\frac{3(x-1)}{4}}{2\,\mathrm{ch}\,\frac{3}{4}+3\,\mathrm{sh}\,\frac{3}{4}}\right)\cos\dfrac{3y}{4}.$

3. $U(x,y)=3xy\left(x^2-a^2\right)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{24a^4\cdot(-1)^n}{(\pi n)^4\,\mathrm{ch}\,\frac{\pi nb}{2a}}\mathrm{sh}\,\frac{\pi n(2y-b)}{2a}\sin\frac{\pi n}{a}x.$

4. $U(x,y)=2y^3-6b^2y-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1152b^3\cdot(-1)^n\,\mathrm{ch}\,\frac{(2n-1)\pi}{2b}x}{(2n-1)^4\pi^4\,\mathrm{ch}\,\frac{(2n-1)\pi}{2b}a}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2b}y-$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{768a^4b^2\cdot(-1)^n}{(2n-1)^3\pi^5\left[(2n-1)^2b^2+25a^2\right]}\cos\tfrac{(2n-1)\pi}{2a}x\sin\tfrac{5\pi}{2b}y.$$

5. $U(\rho,\varphi)=20\rho^{-1}\sin\varphi+4\rho^{-5}\sin5\varphi+const.$

6. $U(\rho,\varphi)=\dfrac{V_0\rho^4}{4R^3}\cos4\varphi+const.$

7. а) $U(\rho,\varphi)=0{,}4A\left(\rho+\rho^{-1}\right)\sin\varphi-\frac{13}{63}\left(\rho^3-64\rho^{-3}\right)\cos3\varphi;$

   б) $U(\rho,\varphi)=0{,}8\left(\rho-\rho^{-1}\right)\sin\varphi+\frac{A}{65}\left(\rho^3+64\rho^{-3}\right)\cos3\varphi.$

8. $U(\rho,\varphi)=\dfrac{2}{3}\left[\left(\dfrac{\rho}{a}\right)^2-1\right]\rho^2\cos4\varphi.$

9. а) $U(\rho,\varphi)=1+\left(2\rho+8\rho^{-1}\right)\sin\varphi+\left[16\ln2e\left(\rho^{-2}-\rho^2\right)+17\rho^2\ln\rho\right]\cos2\varphi;$

   б) $U(\rho,\varphi)=2A\ln\rho-\frac{2}{17}(1+2\ln2)\left(\rho^2-\rho^{-2}\right)\sin2\varphi.$

10. а) $U(x,y)=y\left(1+3x^3\right)+\dfrac{b\,\mathrm{ch}\,\frac{2\pi}{b}x}{2\pi\,\mathrm{sh}\,\frac{2\pi a}{b}}\cos\frac{2\pi}{b}y+const;$

   б) $U(x,y)=x\left(1+3y^2\right)+2y^3+\dfrac{2\,\mathrm{ch}\,\pi y}{\pi\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{2}}\cos\pi x+const;$

   в) $U(\rho,\varphi)=\frac{1}{9}\left(\rho^3-a^3\right)+C;$

   г) $U(\rho,\varphi)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{16\cdot(-1)^n\left(\rho^{2n-1}-\rho^{1-2n}\right)}{\pi\left(4n^2-1\right)\left(2n-3\right)\left(2^{2n-1}-2^{1-2n}\right)}\cos(2n-1)\varphi;$

   г) $U(\rho,\varphi)=\rho^2\sin\frac{\varphi}{2}-\dfrac{16\left(\rho^2-\rho\right)}{3\pi}\sin\varphi-\dfrac{8\rho^2}{7\pi}\ln\rho\sin2\varphi+$

$$+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{240n\cdot(-1)^n}{\pi\left(4n^2-1\right)\left(4n^2-9\right)\left(4-n^2\right)}\left(\rho^n-\rho^2\right)\sin n\varphi;$$

д) $U(\rho,\varphi)=\dfrac{8A}{27\pi}\left(\rho^2-\rho\right)\sin 4\varphi+\dfrac{4A}{225\pi}\rho^2\ln\rho\sin 8\varphi-$

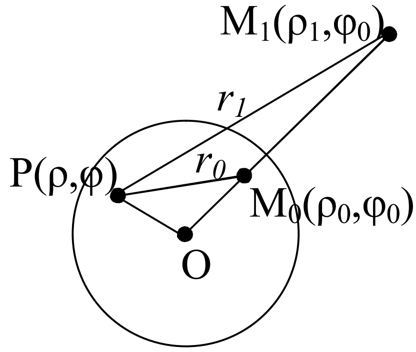
$$-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{8An\cdot(-1)^n}{\pi\left(4n^2-1\right)^2\left(4-n^2\right)}\left(\rho^n-\rho^2\right)\sin 4n\varphi;$$

е) $U(\rho,\varphi)=\dfrac{\rho^2}{2}+\dfrac{b^3\left(\rho^4+a^4\right)}{\rho^2\left(b^4-a^4\right)}\cos 2\varphi+const;$

є) $U(\rho,\varphi)=C\rho^2\cos 3\varphi+\dfrac{2C}{1+2^{12}}\left(\rho^6+\dfrac{2^{12}}{\rho^6}\right)\cos 6\varphi.$

11. а) $G(\rho,\varphi;\rho_0,\varphi_0)=\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{\rho_0 r_1}{R r_0},$

причому (див. малюнок) $\rho_0\rho_1=R^2$.



б) $G(\rho,\varphi;\rho_0,\varphi_0)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left[G_1(\rho,\varphi;\rho_0,2k\alpha+\varphi_0)-G_1(\rho,\varphi;\rho_0,2k\alpha-\varphi_0)\right],$ де G_1 – розв’язок попередньої задачі, $\alpha=\pi/n$.

12. $V(r)=\begin{cases}\dfrac{2\pi}{3}\left(3R^2-r^2\right), & r<R;\\ \dfrac{4\pi R^3}{3r}, & r>R.\end{cases}$

13. $U(r)=\begin{cases}4\pi\psi_0, & r<1;\\ \dfrac{4\pi\psi_0}{r}, & r>1.\end{cases}$

14. $W(x,y)=\mu_0\left(\operatorname{arctg}\frac{a-x}{y}+\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right).$

15. $U(x,y)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yf(\xi)d\xi}{(\xi-x)^2+y^2}$; при $f(x,y)\equiv C$ $U(x,y)=C$.

16. $U(\rho,\varphi)=\dfrac{C}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\ln\left[1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-\psi)\right]d\psi+const.$

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ ДО ТЕМИ V

Варіант 1.

1. Знайти форму рівноваги прямокутної мембрани зі сторонами $2a$ та $2c$ (початок координат вибраний у центрі мембрани), яка знаходиться під дією рівномірно розподіленого навантаження $P = const$, якщо краї мембрани нерухомо закріплені. Обчислити прогин центру мембрани, вважаючи відношення $c{:}a=2$.

2. Проінтеґрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(\rho,\varphi)=0, \quad 2<\rho<4, \quad 0\le\varphi<2\pi;$

$U(2,\varphi)=A\cos^2\dfrac{\varphi}{2}, \quad U_\rho(4,\varphi)=0, \quad 0\le\varphi<2\pi \quad (A=const);$

б) $\Delta U(x,y)=xe^y, \quad 0<x<2, \quad 0<y<1;$

$U_x(0,y)=e^y-\cos\pi y, \quad U_x(2,y)=e^y, \quad 0\le y\le 1;$

$U_y(x,0)=x, \quad U_y(x,1)=ex, \quad 0\le x\le 2.$

3. Знайти об’ємний потенціал мас, розподілених зі сталою густиною ρ_0 у сферичному шарі $a\le r\le b$, де $0<a<b$.

Варіант 2.

1. Знайти закон стаціонарного розподілу температури всередині нескінченого кругового циліндра радіуса R, якщо на його поверхні підтримується температура $U_0\sin\varphi$ $(U_0=const)$. Розв’язок знайти у формі ряду та у формі інтеґралу Пуассона.

2. Проінтеґрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(x,y)=2x, \quad 0<x<a, \quad 0<y<b;$

$U(0,y)=0, \quad U(a,y)=0, \quad 0\le y\le b;$

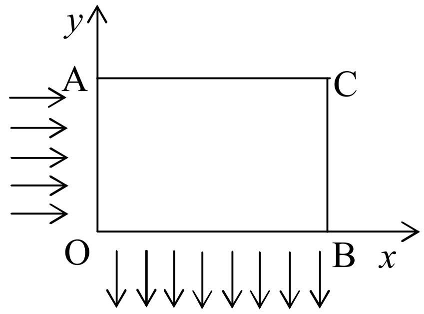
$U(x,0)=0, \quad U_y(x,b)=0, \quad 0\le x\le a.$

б) $\Delta U(\rho,\varphi)=9, \quad 1<\rho<3, \quad 0\le\varphi<2\pi;$

$U_\rho(1,\varphi)=2\cos 2\varphi, \quad U(3,\varphi)=\cos 4\varphi, \quad 0\le\varphi<2\pi.$

3. Знайти лоґарифмічний потенціал подвійного шару відрізка $0\le x\le l$ з густиною моментів $\mu(M)=Ax+B,$ де A, B – задані сталі.

Варіант 3.



1. Дано прямокутну мембрану OACB (див. малюнок) зі сторонами OA=a, OB=b. Через сторону OA підводиться потік тепла $q = const > 0$, через OB тепловий потік такої ж величини відводиться, а на сторонах AC та BC температура змінюється за законом відповідно $q(x-b)$ та $q(a-y)$. Знайти стаціонарну температуру внутрішніх точок мембрани.

2. Проінтеґрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(\rho,\varphi) = \sin 8\varphi, \quad 0 < \rho < 2, \quad 0 < \varphi < \pi/4;$

$U(2,\varphi) = A\sin 4\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi/4 \quad (A = const);$

$U(\rho,0) = 0, \quad U(\rho,\pi/4) = 0, \quad 0 \le \rho \le 2.$

б) $\Delta U(x,y) = 5\cos 6\pi y - \cos \pi x, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2;$

$U_x(0,y) = 2, \quad U_x(1,y) = 2, \quad 0 \le y \le 2;$

$U_y(x,0) = 0, \quad U_y(x,2) = 0, \quad 0 \le x \le 1.$

3. За допомогою потенціалу подвійного шару розв’язати зовнішню задачу Діріхле:

$$\Delta U(\rho,\varphi) = 0, \quad 1 < \rho < \infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi;$$
$$U(1,\varphi) = f(\varphi), \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Варіант 4.

1. Знайти положення рівноваги мембрани, яка має форму півкруга радіуса a і знаходиться під дією навантаження, розподіленого згідно закону $q\varphi(\varphi - \pi)$, де $q = const.$ Краї мембрани нерухомо закріплені.

2. Проінтеґрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(x,y) = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$

$U_x(0,y) = 0, \quad U_x(a,y) = 0, \quad 0 \le y \le b;$

$U(x,0) = A, \quad U(x,b) = A, \quad 0 \le x \le a \quad (A = const).$

б) $\Delta U(\rho,\varphi) = 0, \quad R < \rho < \infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi;$

$U_\rho(R,\varphi) - hU(R,\varphi) = \sin 3\varphi + \cos 4\varphi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi \quad (h = const > 0).$

3. За допомогою потенціалу простого шару розв’язати задачу Неймана для півплощини:

$$\Delta U(x,y) = 0, \quad y > 0;$$
$$U_y(x,0) = \Phi(x).$$

Варіант 5.

1. Дано прямокутну пластинку OACB (див. малюнок до варіанту 3) зі сторонами OA=a, OB=b. Сторони AC та BC покриті тепловою ізоляцією, а на двох інших підтримується нульова температура. Знайти стаціонарний розподіл температури при умові, що в пластинці виділяється тепло зі сталою інтенсивністю $Q = const$.

2. Проінтеґрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(\rho,\varphi) = 0, \quad 0 < \rho < a, \quad 0 < \varphi < \pi;$

$U(a,\varphi) = 5\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi;$

$U(\rho,0) = 0, \quad U(\rho,\pi) = 0, \quad 0 \le \rho \le a.$

б) $\Delta U(x,y) = 20x^3, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$

$U_x(0,y) = 4\cos\frac{\pi}{b}y, \quad U_x(a,y) = 5a^4, \quad 0 \le y \le b;$

$U_y(x,0) = 0, \quad U_y(x,b) = \cos\frac{\pi}{a}x, \quad 0 \le x \le a.$

3. Знайти лоґарифмічний потенціал простого шару кола радіуса a зі сталою густиною заряду $\psi_0 = const$.

Варіант 6.

1. Визначити стаціонарний розподіл температури в мембрані, яка має форму криволінійного прямокутника, дві сторони якого утворені дугами концентричних кіл $\rho = a$ та $\rho = b$, а дві інші – відрізками радіусів $\varphi = 0$ та $\varphi = \pi/2$. На краї $\rho = b$ температура змінюється за законом $T_0\cos^2(2\varphi + \pi/2)$ $(T_0 = const)$, а інші три краї підтримуються при нульовій температурі.

2. Проінтеґрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(x,y) = Ay, \quad 0 < x < 4, \quad 0 < y < 2;$

$U(0,y) = 0, \quad U_x(4,y) = 0, \quad 0 \le y \le 2;$

$U(x,0) = 0, \quad U_y(x,2) = 0, \quad 0 \le x \le 4 \quad (A = const);$

б) $\Delta U(\rho,\varphi) = 0, \quad a < \rho < b, \quad 0 \le \varphi < 2\pi;$

$U(a,\varphi) = T + B\cos\varphi, \quad U_\rho(b,\varphi) + hU(b,\varphi) = 0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi \quad (h > 0, T, B - const).$

3. За допомогою потенціалу подвійного шару розв'язати задачу Діріхле для півплощини:

$$\Delta U(x,y) = 0, \quad x > 0;$$
$$U(0,y) = y.$$

Варіант 7.

1. Тонка плівка натягнута на дротяний каркас, який проектується на площину $x\mathrm{O}y$ в прямокутник зі сторонами x=0, x=l , y=0, y=m; відхилення точок контура від площини $x\mathrm{O}y$ задається рівностями: $U(0,y)=U(l,y)=U(x,0)=0$, $U(x,m)=A\sin\frac{\pi}{l}x$, де $A=const.$ Визначити форму поверхні, по якій розміститься плівка.

2. Проінтеґрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(\rho,\varphi)=-4, \quad 0<\rho<a, \quad 0\le\varphi<2\pi;$

$U(a,\varphi)=0, \quad 0\le\varphi<2\pi.$

б) $\Delta U(x,y)=12xy, \quad 0<x<1, \quad 0<y<1;$

$U_x(0,y)=y^3+5\cos 6\pi y, \quad U_x(1,y)=3y+y^3, \quad 0\le y\le 1;$

$U_y(x,0)=x^3, \quad U_y(x,1)=3x+x^3+\cos\pi x, \quad 0\le x\le 1.$

3. Знайти розв’язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа зовні кулі одиничного радіуса з центром у початку координат по крайовій умові:

$$U(x,y,z)=x^2+y^2-1, \quad x^2+y^2+z^2=1$$

(використати потенціал подвійного шару).

Варіант 8.

1. Знайти стаціонарний розподіл температури всередині нескінченого кругового циліндра радіуса R, якщо на поверхні циліндра підтримується стала температура:

$$f(\varphi)=\begin{cases}0, & \alpha<\varphi<2\pi;\\ 2\pi U_0\alpha^{-1}, & 0\le\varphi\le\alpha,\end{cases}$$

де U_0, α – задані сталі. Розглянути випадок, коли α досить мале.

2. Проінтеґрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(x,y)=\sin x\cdot\sin y, \quad 0<x<\pi, \quad 0<y<\pi;$

$U(0,y)=0, \quad U(\pi,y)=0, \quad 0\le y\le\pi;$

$U(x,0)=\sin x, \quad U(x,\pi)=\sin x, \quad 0\le x\le\pi.$

б) $\Delta U(\rho,\varphi)=0, \quad 0<\rho<R, \quad 0<\varphi<\alpha<\pi;$

$U_\rho(R,\varphi)+\gamma U(R,\varphi)=Q\sin^2\frac{\pi}{\alpha}\varphi, \quad 0\le\varphi\le\alpha;$

$U(\rho,0)=0, \quad U_\varphi(\rho,\alpha)+hU(\rho,\alpha)=0, \quad 0\le\rho\le R \quad (\gamma,Q,h-const>0).$

3. Знайти лоґарифмічний потенціал простого шару відрізка $-a\le x\le a$ з густиною заряду $\psi(M)=Ax+B,$ де A, B – задані сталі.

Варіант 9.

1. Знайти стаціонарний розподіл температури всередині прямокутної пластинки, два протилежні краї якої $(x = \pm a)$ випромінюють тепло по закону Ньютона в навколишнє середовище нульової температури (коефіцієнт теплообміну h=1), якщо край y=0 підтримується при нульовій температурі, на краї y=b температура змінюється згідно закону $T_0\left(x^2 - 2a - a^2\right)$, де $T_0 = const.$

2. Проінтеґрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(\rho,\varphi) = 12\rho^2, \quad a < \rho < b, \quad 0 \le \varphi < 2\pi;$

$U(a,\varphi) = 0, \quad U_\rho(b,\varphi) = 0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$

б) $\Delta U(x,y) = ye^x, \quad 0 < x < \ln 2, \quad 0 < y < 1;$

$U_x(0,y) = y, \quad U_x(\ln 2, y) = 2y - \sin^2 \frac{3\pi}{2} y, \quad 0 \le y \le 1;$

$U(x,0) = 0, \quad U_y(x,1) = e^x, \quad 0 \le x \le \ln 2.$

3. Знайти потенціал подвійного шару мас, розподілених по колу одиничного радіуса з центром у початку координат із густиною моментів $\mu(x,y) = x.$

Варіант 10.

1. Тонка плівка натягнута на дротяний каркас, який проектується на площину xOy в круговий сектор $0 \le \rho \le R$, $0 \le \varphi \le \alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$. На плівку діє навантаження, розподілене згідно закону $q\varphi(\varphi - \alpha)^2$, де $q = const.$ Краї ρ=R та φ=0 нерухомо закріплені, а край φ=α вільний. Визначити форму поверхні, по якій розміститься плівка.

2. Проінтеґрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(x,y) = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < b;$

$U(0,y) = A\left(y^2 - 2b - b^2\right), \quad U(\infty, y) = 0, \quad 0 \le y \le b;$

$U_y(x,0) = 0, \quad U_y(x,b) + U(x,b) = 0, \quad 0 \le x < \infty \quad (A = const).$

б) $\Delta U(\rho,\varphi) = 2\cos\varphi - 8\sin\varphi, \quad 1 < \rho < 2, \quad 0 \le \varphi < 2\pi;$

$U_\rho(1,\varphi) = 4, \quad U_\rho(2,\varphi) + 4U(2,\varphi) = 0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$

3. Користуючись поверхневими потенціалами, розв’язати задачу Діріхле для півпростору:

$$\Delta U(x,y,z) = 0, \quad x > 0;$$
$$U(0,y,z) = yz.$$

Варіант 11.

1. Визначити форму прогину однорідної прямокутної мембрани зі сторонами a та b, якщо три сторони $x=a$, $y=0$, $y=b$ вільні, а на четвертій задане відхилення $U(0,y)=y^2(y-b)^2$.

2. Проінтеґрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(\rho,\varphi)=2\sin^2\frac{\varphi}{2}, \quad a<\rho<b, \quad 0\le\varphi<2\pi;$

$U(a,\varphi)=0, \quad U_\rho(b,\varphi)=0, \quad 0\le\varphi<2\pi.$

б) $\Delta U(x,y)=8\pi^2\sin\pi y, \quad 0<x<a, \quad 0<y<1;$

$U_x(0,y)=0, \quad U_x(a,y)=1, \quad 0\le y\le 1;$

$U_y(x,0)=0, \quad U_y(x,1)=2\cos^2\frac{\pi}{a}x, \quad 0\le x\le a.$

Вказівка. Визначити значення сталої a, при якому дана задача Неймана буде коректно поставленою.

3. Побудувати функцію Ґріна для задачі Діріхле в круговому секторі $0\le\rho\le R$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

Варіант 12.

1. Напівкругла мембрана радіуса а нерухомо закріплена на півколі й вільна на прямолінійному краї. Знайти форму прогину мембрани під дією рівномірно розподіленого навантаження $p=const$.

2. Проінтеґрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(x,y)=0, \quad 0<x<\infty, \quad 0<y<l;$

$U(0,y)=\cos\frac{\pi}{l}y, \quad U(\infty,y)=0, \quad 0\le y\le l;$

$U_y(x,0)=0, \quad U_y(x,l)=0, \quad 0\le x<\infty.$

б) $\Delta U(\rho,\varphi)=9\cos 3\varphi, \quad 1<\rho<4, \quad 0\le\varphi<2\pi;$

$U_\rho(1,\varphi)-h_1U(1,\varphi)=1, \quad U_\rho(4,\varphi)+h_2U(4,\varphi)=2, \quad 0\le\varphi<2\pi \quad (h_1,h_2=const>0).$

3. Побудувати функцію Ґріна для задачі Діріхле в шарі $0\le z\le l$, $l=const>0$ (частина простору, обмежена площинами $z=0$ і $z=l$).

Варіант 13.

1. Усередині нескінченого кругового циліндра радіуса l проходить рух нестискуваної рідини. Вважаючи цей рух сталим, потенціальним і плоскопаралельним, знайти закон руху, якщо проекція швидкості $\vec{v}$ на зовнішню нормаль циліндра в кожній точці задається формулою:

$$\text{пр}_{\vec{n}}\,\vec{v} = v_0 \sin 2\varphi, \quad v_0 = const.$$

2. Проінтеґрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(x,y) = -2, \quad 0 < x < a, \quad -\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2};$

$U(0,y) = 0, \quad U(a,y) = 0, \quad -\frac{b}{2} \le y \le \frac{b}{2};$

$U\left(x,-\frac{b}{2}\right) = 0, \quad U\left(x,\frac{b}{2}\right) = 0, \quad 0 \le x \le a.$

б) $\Delta U(\rho,\varphi) = -12, \quad 1 < \rho < 2, \quad 0 \le \varphi < 2\pi;$

$U_\rho(1,\varphi) - U(1,\varphi) = 2\cos^2\varphi, \quad U_\rho(2,\varphi) + 2U(2,\varphi) = 0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$

3. За допомогою потенціалу подвійного шару розв'язати задачу Діріхле для півплощини:

$$\Delta U(x,y) = 0, \quad x > 0;$$
$$U(0,y) = Q = const.$$

Варіант 14.

1. Усередині нескінченого кругового циліндра радіуса l проходить рух нестискуваної рідини. Вважаючи цей рух сталим, потенціальним і плоскопаралельним, знайти закон руху, якщо проекція швидкості $\vec{v}$ на зовнішню нормаль циліндра в кожній точці задається формулою:

$$\text{пр}_{\vec{n}}\,\vec{v} = \begin{cases} -v_0, & 0 < \varphi \le \pi, \\ v_0, & -\pi \le \varphi \le 0 \end{cases} \quad (v_0 = const).$$

2. Проінтеґрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(x,y) = 6y, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$

$U(0,y) = 0, \quad U(a,y) = 0, \quad 0 \le y \le b;$

$U_y(x,0) = 0, \quad U(x,b) = 0, \quad 0 \le x \le a.$

б) $\Delta U(\rho,\varphi) = 0, \quad a < \rho < b, \quad 0 \le \varphi < 2\pi;$

$U_\rho(a,\varphi) - U(a,\varphi) = 1 + 2\cos\varphi, \quad U_\rho(b,\varphi) + U(b,\varphi) = 3\sin 2\varphi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$

3. За допомогою потенціалу простого шару розв'язати задачу Неймана для півплощини:

$$\Delta U(x,y) = 0, \quad x > 0;$$
$$U_x(0,y) = Q = const.$$

Варіант 15.

1. Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній прямокутній пластинці $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b$, яка підігрівається джерелом тепла, яке виділяє на одиницю площі кількість теплоти $Q = const$, якщо через сторони пластинки тепловіддача в навколишнє середовище нульової температури проходить згідно закону Ньютона.

2. Проінтеґрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(\rho,\varphi) = 0, \quad a < \rho < b, \quad 0 \le \varphi < 2\pi;$

$U_\rho(a,\varphi) = A\cos\varphi, \quad U(b,\varphi) = B\sin 2\varphi + Q, \quad 0 \le \varphi < 2\pi \quad (A, B, Q - const).$

б) $\Delta U(\rho,\varphi) = -5\rho\sin 2\varphi, \quad 0 < \rho < 2, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{4};$

$U(2,\varphi) = 4 + 4\cos\varphi - 8\sin 2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4};$

$U_\varphi(\rho,0) = -2\rho^3, \quad U_\varphi\left(\rho,\frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad 0 \le \rho \le R.$

3. Знайти об'ємний потенціал мас, розподілених зі сталою густиною ρ_0 в кубі зі стороною a.

Варіант 16.

1. Знайти розподіл потенціалу електростатичного поля всередині прямокутника OACB (див. малюнок до варіанту 3) зі сторонами OA=a, OB=b, якщо всі сторони прямокутника заземлені, а густина електричних зарядів, розподілених по прямокутнику, рівна $4x$-y.

2. Проінтеґрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(\rho,\varphi) = 0, \quad R < \rho < \infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi;$

$U(R,\varphi) = T_0 \sin 10\varphi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi \quad (T_0 = const).$

б) $\Delta U(x,y) = 9\cos \pi x \cos 3\pi y, \quad 0 < x < \frac{1}{2}, \quad 0 < y < 1;$

$U_x(0,y) = 1, \quad U_x\left(\frac{1}{2}, y\right) = 1 + \cos 4\pi y, \quad 0 \le y \le 1;$

$U_y(x,0) = 0, \quad U_y(x,1) = 0, \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}.$

3. Знайти розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа в області $x^2 + y^2 + z^2 > 1$ по крайовій умові

$$U(x,y,z) = z, \ x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

(використати потенціал подвійного шару).

Варіант 17.

1. Знайти закон стаціонарного розподілу температури всередині однорідного нескінченого кругового циліндра радіуса R=4, якщо на його поверхні підтримується температура

$$U(4,\varphi)=\begin{cases}4\sin^2\varphi, & 0\le\varphi<\pi,\\ 0, & \pi\le\varphi<2\pi.\end{cases}$$

Розв'язок знайти у формі ряду та у формі інтеґрала Пуассона.

2. Проінтеґрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(x,y)=8,\quad 0<x<a,\quad 0<y<b;$

$U(0,y)=0,\quad U_x(a,y)=0,\quad 0\le y\le b;$

$U_y(x,0)=0,\quad U(x,b)=0,\quad 0\le x\le a.$

б) $\Delta U(\rho,\varphi)=1,\quad 2<\rho<4,\quad 0\le\varphi<2\pi;$

$U(2,\varphi)=1,\quad U_\rho(4,\varphi)=2\cos\varphi,\quad 0\le\varphi<2\pi.$

3. Знайти лоґарифмічний потенціал подвійного шару мас, розподілених зі сталою густиною по сторонах прямокутника OACB (OA=a, OB=b; див. малюнок до варіанту 3).

Варіант 18.

1. Дано прямокутну пластинку OACB (OA=a, OB=b). На стороні AC (x=a) підтримується температура Ty, на стороні BC (y=b) – температура $\frac{b}{a}Tx$ $(T=const)$, а на двох інших сторонах – нульова температура. Знайти стаціонарну температуру внутрішніх точок пластинки.

2. Проінтеґрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(\rho,\varphi)=0,\quad R<\rho<\infty,\quad 0\le\varphi<2\pi;$

$U_\rho(R,\varphi)=0{,}5\sin\varphi\cos 2\varphi,\quad 0\le\varphi<2\pi.$

б) $\Delta U(x,y)=12xy^2,\quad 0<x<12,\quad 0<y<1;$

$U(0,y)=0,\quad U(12,y)=12y^4+2y^3-3y^2,\quad 0\le y\le 1;$

$U_y(x,0)=8\sin 24\pi x,\quad U_y(x,1)=4x,\quad 0\le x\le 12.$

3. Знайти розв'язок задачі Неймана для рівняння Лапласа в крузі радіуса R, користуючись потенціалом простого шару.

Варіант 19.

1. Знайти положення рівноваги мембрани, яка має форму кругового сектора $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, якщо вона знаходиться під навантаженням, розподіленим згідно закону $Q\varphi^2\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$, де $Q = const$. Краї $\rho = 1$ та $\varphi = \frac{\pi}{2}$ нерухомо закріплені, край $\varphi = 0$ вільний.

2. Проінтеґрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(x, y) = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$

$U(0, y) = q_1\left(y^2 - b^2\right), \quad U_x(a, y) = 0, \quad 0 \le y \le b;$

$U_y(x,0) = q_2 \sin\frac{5\pi}{2b}x, \quad U_y(x,b) = 0, \quad 0 \le x \le a \quad (q_1, q_2 - const).$

б) $\Delta U(\rho,\varphi) = -6\sin\varphi, \quad a < \rho < b, \quad 0 \le \varphi < 2\pi;$

$U_\rho(a,\varphi) = 4a\cos 4\varphi, \quad U_\rho(b,\varphi) = 2b\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$

3. Знайти лоґарифмічний потенціал подвійного шару відрізка $0 \le x \le l$ із густиною моментів $\mu(M) = x$.

Варіант 20.

1. Знайти форму рівноваги однорідної прямокутної мембрани OACB (див. малюнок до варіанту 3) зі сторонами OA=*a*, OB=*b*, закріпленої по краях, якщо до мембрани прикладений нормальний тиск $P = const$ на одиницю площі.

2. Проінтеґрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(\rho,\varphi) = 0, \quad 0 < \rho < R, \quad 0 < \varphi < \alpha < \pi;$

$U(R,\varphi) = A\cos\frac{\pi\varphi}{2\alpha}\cos\frac{3\pi\varphi}{2\alpha}, \quad 0 \le \varphi \le \alpha;$

$U_\varphi(\rho,0) = 0, \quad U_\varphi(\rho,\alpha) = 0, \quad 0 \le \rho \le R \quad (A, \alpha - const).$

б) $\Delta U(x, y) = 6y^2, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$

$U_x(0, y) = 0, \quad U_x(a, y) = 8\cos\frac{3\pi}{b}y, \quad 0 \le y \le b;$

$U_y(x,0) = 0, \quad U_y(x,b) = 2b^3 + \cos\frac{\pi}{a}x, \quad 0 \le x \le a.$

3. Знайти потенціал простого шару мас, розподілених по сфері $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ із густиною заряду $\psi(M) \equiv 1$.

Варіант 21.

1. Визначити стаціонарний розподіл температури в однорідній пластинці, яка має форму криволінійного прямокутника – півкільця, дві сторони якого утворені дугами концентричних кіл радіусів $\rho = a$ та $\rho = b$, а дві інші – відрізками радіусів $\varphi = 0$ та $\varphi = \pi$. Уздовж ґрані $\rho = a$ температура змінюється згідно закону $A\sin 9\varphi$, де $A = const$, ґрань $\rho = b$ теплоізольована, а інші підтримуться при нульовій температурі.

2. Проінтеґрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(x, y) = B\cos x, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < 1;$

$U(0, y) = 0, \quad U_x(\pi, y) + hU(\pi, y) = 0, \quad 0 \le y \le 1;$

$U_y(x, 0) = 0, \quad U(x, 1) = 0, \quad 0 \le x \le \pi \quad (B, h - const > 0).$

б) $\Delta U(\rho, \varphi) = 0, \quad R < \rho < \infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi;$

$U(R, \varphi) = U_0 \cos\varphi \cos 2\varphi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi \quad (U_0 = const).$

3. Користуючись поверхневими потенціалами, розв’язати другу крайову задачу для рівняння Лапласа в півпросторі:

$$\Delta U(x, y, z) = 0, \quad y > 0;$$
$$U_y(x, 0, z) = U_0 = const.$$

Варіант 22.

1. Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній прямокутній пластинці $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 4,$ сторони x=0 та x=1 якої теплоізольовані, якщо на інших сторонах температура задається рівностями: $U(x, 0) = A,$ $U(x, 4) = B(2x^3 - 3x^2),$ де A, B – задані сталі.

2. Проінтеґрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U = -xy, \quad 0 < \rho < R, \quad 0 \le \varphi < 2\pi;$

$U(R, \varphi) = 0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$

б) $\Delta U(x, y) = 12(x + y), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 4;$

$U_x(0, y) = \cos \pi y, \quad U_x(1, y) = 6, \quad 0 \le y \le 4;$

$U_y(x, 0) = 2\cos \pi x, \quad U_y(x, 4) = 2\cos^2 \pi x + 95, \quad 0 \le x \le 1.$

3. Знайти сумарний об’ємний потенціал мас, розподілених усередині кулі радіуса a з центром у початку координат зі сталою густиною ρ_1 та у сферичному шарі $a < b \le r \le c$ $\left(a, b, c - const,\ r^2 = x^2 + y^2 + z^2\right)$ зі сталою густиною ρ_2.

Варіант 23.

1. Визначити форму прогину однорідної круглої мембрани радіуса R, якщо відхилення точок краю мембрани задане функцією $f(\varphi) = A\sin\varphi\sin 3\varphi$ $(A = const)$.

2. Проінтеґрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(x,y) = 4\left(y^2 - 4\pi^2\right)\sin 2y, \quad 0 < x < 2\pi, \quad 0 < y < \frac{\pi}{2};$

$U_x(0,y) = 0, \quad U(2\pi, y) = 0, \quad 0 \le y \le \frac{\pi}{2};$

$U(x,0) = 0, \quad U\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad 0 \le x \le 2\pi.$

б) $\Delta U(\rho,\varphi) = 0, \quad 0 < \rho < R, \quad 0 < \varphi < \alpha < \pi;$

$U_\rho(R,\varphi) = B\cos\frac{2\pi}{\alpha}\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \alpha.$

$U_\varphi(\rho,0) = 0, \quad U_\varphi(\rho,\alpha) = 0, \quad 0 \le \rho \le R \quad (B, \alpha - const).$

3. Знайти лоґарифмічний потенціал простого шару мас, розподілених зі сталою густиною ρ_0 по сторонах квадрата з вершинами в точках (0;0), (0;1), (1;1), (1;0).

Варіант 24.

1. Знайти форму рівноваги однорідної прямокутної мембрани $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, край x=a якої вільний, якщо на інших краях відхилення задане рівностями: $U(x,0) = A\sin\frac{5\pi}{2a}x$, $U(x,b) = Bx(a-x)^2$, $U(0,y) = 0$, де A, B – задані сталі.

2. Проінтеґрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U = 12\left(x^2 - y^2\right), \quad a < \rho < b, \quad 0 \le \varphi < 2\pi;$

$U(a,\varphi) = 0, \quad U_\rho(b,\varphi) = 0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$

б) $\Delta U(x,y) = 8\pi^2\cos\pi x, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2;$

$U(0,y) = 2, \quad U_x(1,y) = 0, \quad 0 \le y \le 2;$

$U_y(x,0) = \sin\frac{3\pi}{2}x, \quad U_y(x,2) = 0, \quad 0 \le x \le 1.$

3. Знайти лоґарифмічний потенціал подвійного шару кола радіуса R із центром у початку координат зі сталою густиною моментів μ_0.

Варіант 25.

1. Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній пластинці, яка має форму кругового сектора $0 \le \rho \le 4$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$, якщо прямолінійні сторони пластинки підтримуються при нульовій температурі, на дузі проходить теплообмін по закону Ньютона з навколишнім середовищем нульової температури, а всередині пластинки діють джерела тепла інтенсивності $Q\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)$, де $Q = const$.

2. Проінтеґрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(x, y) = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < l;$

$U(0, y) = \text{ch}(l - x) - \text{ch}\, l, \quad U(\infty, y) = 0, \quad 0 \le y \le l;$

$U(x, 0) = 0, \quad U_y(x, l) = 0, \quad 0 \le x < \infty.$

б) $\Delta U(\rho, \varphi) = 6\cos 3\varphi \sin 3\varphi, \quad 1 < \rho < 2, \quad 0 \le \varphi < 2\pi;$

$U_\rho(1, \varphi) = 2 + \sin 6\varphi, \quad U_\rho(2, \varphi) = 1 + \cos\varphi - 4\sin 6\varphi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$

3. Знайти об'ємний потенціал мас, розподілених у кубі з ребром довжини l=2 з густиною $f(x, y, z) = xyz$.

Варіант 26.

1. Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній прямокутній пластинці $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, сторона x=0 якої теплоізольована, якщо сторони x=a та y=0 підтримуються при нульовій температурі, а до сторони y=b підводиться тепловий потік $B\left(x^2 - a^2\right)$, де B – задана стала.

2. Проінтеґрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U = x^2 + y^2, \quad a < \rho < b, \quad 0 \le \varphi < 2\pi;$

$U(a, \varphi) = U_\rho(b, \varphi) = 0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$

б) $\Delta U(x, y) = 6(x + 1), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < b;$

$U(0, y) = 3, \quad U_x(1, y) = 0, \quad 0 \le y \le b;$

$U_y(x, 0) = 0, \quad U_y(x, b) = 0, \quad 0 \le x \le 1.$

3. Функція $U(x, y) = -\frac{y}{2r^2}$, $r^2 = x^2 + y^2$, є зовнішнім потенціалом простого шару мас, розподілених по колу $r^2 = 1$. Знайти значення цього потенціалу в крузі $r^2 \le 1$.

Варіант 27.

1. У напівкруглій пластинці одиничного радіуса прямолінійний край теплоізольований, а на півколі температура задається функцією $A\cos^2 2\varphi$, де $A = const.$ Знайти стаціонарний розподіл температури, якщо в пластинці виділяється тепло з інтенсивністю $q = const.$

2. Проінтеґрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(x, y) = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < 4;$

$U(0, y) = y^2(4 - y), \quad U(\infty, y) = 0, \quad 0 \le y \le 4;$

$U_y(x,0) - hU(x,0) = 0, \quad U(x,4) = 0, \quad 0 \le x < \infty \quad (h = const > 0).$

б) $\Delta U(\rho, \varphi) = -4\sin 2\varphi, \quad a < \rho < b, \quad 0 \le \varphi < 2\pi;$

$U_\rho(a, \varphi) = -2, \quad U(b, \varphi) = b\cos 4\varphi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$

3. Знайти об'ємний потенціал мас, розподілених зі сталою густиною ρ_0 в прямокутному паралелепіпеді $0 \le x, y \le 1, \ 0 \le z \le 4.$

Варіант 28.

1. Знайти стаціонарний розподіл температури в круглій пластинці радіуса R, якщо на краї пластинки проходить теплообмін по закону Ньютона із зовнішнім середовищем, температура якого задана функцією $h^{-1}(A + B\sin\varphi + C\cos 2\varphi)$, де $h > 0$ - коефіцієнт теплообміну, а A, B, C – задані сталі.

2. Проінтеґрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(x, y) = 16e^{-2x}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1;$

$U_x(0, y) = 0, \quad U(1, y) = 0, \quad 0 \le y \le 1;$

$U_y(x,0) = 0, \quad U(x,1) = 0, \quad 0 \le x \le 1.$

б) $\Delta U(\rho, \varphi) = \cos\varphi, \quad 0 < \rho < R, \quad 0 < \varphi < \pi;$

$U_\rho(R, \varphi) + U(R, \varphi) = 2 + \cos\varphi(3 + 2\cos\varphi), \quad 0 \le \varphi \le \pi;$

$U_\varphi(\rho, 0) = U_\varphi(\rho, \pi) = 0, \quad 0 \le \rho \le R.$

3. Потенціал простого шару мас, розподілених по колу $x^2 + y^2 = 1$, зовні замкнутого круга $x^2 + y^2 \le 1$ дається формулою: $U(x, y) = \frac{x}{r^2}\left(1 + \frac{2y}{r^2}\right)$, $r^2 = x^2 + y^2$. Знайти густину мас $\mu(x, y)$.

Варіант 29.

1. Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній пластинці, яка має форму кругового сектора $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, якщо прямолінійні сторони пластинки підтримуються при нульовій температурі, на дузі проходить тепловіддача в навколишнє середовище, температура якого описується функцією $T_0 \sin 2\varphi \cos\varphi$, де $T_0 = const$, по закону Ньютона.

2. Проінтеґрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(x, y) = \sin x + \sin 2x, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < l;$

$U(0, y) = 0, \quad U(\pi, y) = 0, \quad 0 \le y \le l;$

$U(x, 0) = 0, \quad U_y(x, l) = 0, \quad 0 \le x \le \pi.$

б) $\Delta U(\rho, \varphi) = 0, \quad R < \rho < \infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi;$

$U_\rho(R, \varphi) + U(R, \varphi) = 4\sin^2 \frac{3\varphi}{2}, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$

3. Функція $U(x, y) = \frac{x}{r^2}$, $r^2 = x^2 + y^2$, є внутрішнім потенціалом простого шару мас, розподілених по колу $r^2 = 4$. Знайти значення цього потенціалу в крузі $r^2 \le 4$.

Варіант 30.

1. Визначити форму прогину однорідної прямокутної мембрани $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, до якої прикладений нормальний тиск $P = const$ на одиницю площі, якщо сторони мембрани x=0 та x=a вільні, а сторони y=0 та y=b пружно закріплені.

2. Проінтеґрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(\rho, \varphi) = 0, \quad R < \rho < \infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi;$

$U_\rho(R, \varphi) + hU(R, \varphi) = 4\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi \quad (h = const > 0).$

б) $\Delta U(\rho, \varphi) = 6\sin\varphi + 2\cos 2\varphi, \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 < \varphi < \pi;$

$U_\rho(1, \varphi) = \cos\varphi + 4\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi;$

$U_\varphi(\rho, 0) = 2\rho^2, \quad U_\varphi(\rho, \pi) = -2\rho^2, \quad 0 \le \rho \le 1.$

3. Побудувати функцію Ґріна для задачі Діріхле в кільці $a \le \rho \le b$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.
2. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.
3. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
4. *Перестюк М.О., Маринець В.В.* Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2001. – 334 с.
5. *Бицадзе А.В., Калиниченко Б.Ф.* Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1977. – 224 с.
6. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1980. – 668 с.
7. *Комеч А.И.* Практическое решение уравнений математической физики. – М.: Изд-во МГУ, 1986. – 160 с.
8. *Смирнов М.М.* Задачи по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1968. – 112 с.

ЗМІСТ