УДК 519.8

А. Ю. Брила, В. І. Гренджа (Ужгородський нац. ун-т)

ДОСЯЖНІСТЬ ОПТИМАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛЕКСИКОГРАФІЧНО-ПАРЕТІВСЬКИХ ЗАДАЧ ПРО МАКСИМАЛЬНИЙ ПОТІК З АЛЬТЕРНАТИВНИМИ КРИТЕРІЯМИ ТА АЛЬТЕРНАТИВНИМИ ГРУПАМИ КРИТЕРІЇВ

The methods of finding of attainable optimum solutions of lexicographic-pareto maximum flow problem and lexicographic-pareto maximum flow problem with alternative criteria by reducing them to the problem of onecriterion optimization with a scalar objective function is considered.

Розглядаються методи знаходження досяжних оптимальних розв'язків лексикографічно-паретівських задач про максимальний потік і лексикографічно-паретівських задач про максимальний потік з альтернативними критеріями та їх групами критеріїв шляхом зведення їх до відповідних однокритеріальних задач з скалярною цільовою функцією.

Вступ

При розв'язанні багатьох прикладних задач, що виникають у різних сферах людської діяльності, рішення доводиться приймати на основі багатьох критеріїв. Якщо критерії за деякою ознакою розбито на групи, в межах кожної із них критерії є рівноважливими, а групи упорядковано за важливістю у субординації строгого ранжування, то одержимо задачу лексикографічно-паретівської оптимізації.

В [1] запропоновано підхід для розв'язання задач лексикографічно-паретівської оптимізації, що ґрунтується на зведенні їх до задач лексикографічної оптимізації. В свою чергу у [2] запропоновано методи розв'язання цих задач зведенням їх до однокритеріальних задач з використанням лінійної згортки критеріїв. У даній статті результати отримані у [2, 3] застосовуються для розв'язання лексикографічно-паретівських задач про максимальний потік та лексикографічно-паретівських задач про максимальний потік з альтернативними критеріями і альтернативними групами критеріїв.

1. Досяжність оптимальних розв'язків лексикографічно-паретівської задачі про максимальний потік

Розглянемо мережу $G = (N, A)$, де $N-$ множина вузлів, A – множина дуг. Кожна з дуг мережі $(i, j) \in A$ характеризується пропускною здатністю u_{ij} та вектором оцінок $\left(c_{ij}^{11}, c_{ij}^{12}, ..., c_{ij}^{1q_1}, c_{ij}^{21}, c_{ij}^{22}, ..., c_{ij}^{2q_2}, ..., c_{ij}^{q1}, c_{ij}^{q2}, ..., c_{ij}^{qq_q}\right)$. Таким чином кожний потік x оцінюється з використанням однорідних критеріїв з критеріальними функціями

$$c_{kl}\left(x\right) = \sum_i \sum_j c_{ij}^{kl} x_{ij}, \quad (i,j) \in A, k = 1, 2, ..., q,\ l = 1, 2, ..., q_k.$$

Позначимо $c\left(x\right) = \left(c_1\left(x\right), c_2\left(x\right), ..., c_q\left(x\right)\right)$ векторну згортку критеріїв $c_k\left(x\right)$, $k = 1, 2, ..., q$ у субординації строгого ранжування $Rg\left(1, 2, ..., q\right)$, де кожний з критеріїв $c_k\left(x\right) = \left(c_{k1}\left(x\right), c_{k2}\left(x\right), ..., c_{kq_k}\left(x\right)\right)$, $k \in \{1, 2, ..., q\}$, в свою чергу, є векторною згорткою критеріїв c_{kl}, $l = 1, 2, ..., q_k$ у субординації рівної важливості Rv.

Нехай
N_α– множина джерел,
n_α– кількість джерел,
N_β– множина витоків,
n_β– кількість витоків,
N_g– множина проміжних пунктів,
n_g– кількість проміжних вузлів,
a_i– кількість продукту у i-му джерелі,
b_j– потреби у продукті в j-му вузлі витоку.

Розглянемо задачу визначення однопродуктового потоку з джерел у витоки, що протікає через проміжкові вузли і є непокращуваним за згорткою критеріїв $c(x)$. Її математична модель має вигляд

$$\max{}^{LP} c(x)\,,\ x \in X, \tag{1}$$

де множина X допустимих розв'язків (потоків) задається системою обмежень

$$\sum_j^{x_{ij}} - \sum_j^{x_{ji}} \le a_i,\ i \in N_\alpha,$$

$$\sum_j^{x_{ij}} - \sum_j^{x_{ji}} = 0,\ i \in N_g,$$

$$\sum_j^{x_{ji}} - \sum_j^{x_{ij}} \ge b_i,\ i \in N_\beta,$$

$$0 \le x_{ij} \le u_{ij},\ (i,j) \in A.$$

Задача (1) є лексикографічно-паретівською задачею про максимальний потік.

Будемо вважати, що величини a_i, b_j, u_{ij} цілочислові, а величини c_{ij}^{kl} є невід'ємними раціональними числами.

Якщо розв'язок багатокритеріальної задачі оптимізації може бути отриманий як розв'язок відповідної однокритеріальної задачі, з цільовою функцією, яка є лінійною згорткою критеріїв цієї багатокритеріальної задачі оптимізації, то вважається, що даний розв'язок є досяжним за зваженою сумою різноважливих критеріїв.

Нехай

$$f_k(x) = \sum_{l=1}^{q_k} \bar{\alpha}_{kl} c_{kl}(x), \tag{2}$$

де $\bar{\alpha}_{kl} > 0, l = 1, 2, ..., q_k, k = 1, 2, ..., q,\ \sum\limits_{l=1}^{q_k} \bar{\alpha}_{kl} = 1, k = 1, 2, ..., q.$

У [1] розглядається метод зведення задачі (1) до задачі лексикографічної оптимізації

$$\max{}^{L} f(x)\,, x \in X, \tag{3}$$

де $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_q(x))$. Вибравши додатні коефіцієнти $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, ..., \bar{\beta}_q$ згідно [3, 5], задачу (3) можна звести до відомої задачі про максимальний потік

$$\max\ \bar{B}(x) = \sum_{k=1}^{q} \bar{\beta}_k f_k(x), \quad x \in X. \tag{4}$$

2. Досяжність оптимальних розв'язків лексикографічно-паретівської задачі про максимальний потік з альтернативними критеріями

Розглянемо модифікацію задачі (1), у якій оптимальний розв'язок необхідно знайти враховуючи тільки один критерій якнайвищого рангу з групи критеріїв якнайвищого рангу, для якого виконується умова

$$c_{kl}(x) \geq m_{kl},\ m_{kl} \in R,\ k \in \{1, 2, ..., q\}, l \in \{1, 2, ..., q_k\}.$$

Такий критерій вважаємо допустимим. Дана задача є лексикографічно-паретівською задачею про максимальний потік з альтернативними критеріями. Розв'язання поставленої задачі може бути зведено до задачі знаходження максимуму функціоналу

$$B(x) = \sum_{k=1}^{q} \bar{\beta}_k \sum_{l=1}^{q_k} \alpha_{kl} c_{kl}(x) \tag{5}$$

на множині, яка задається умовами

$$\sum_{j}^{x_{ij}} - \sum_{j}^{x_{ji}} \leq a_i,\ i \in N_\alpha, \tag{6}$$

$$\sum_{j}^{x_{ij}} - \sum_{j}^{x_{ji}} = 0,\ i \in N_g, \tag{7}$$

$$\sum_{j}^{x_{ji}} - \sum_{j}^{x_{ij}} \geq b_i,\ i \in N_\beta, \tag{8}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij},\ (i, j) \in A. \tag{9}$$

$$c_{kl}(x) \geq m_{kl} y_{kl},\ k = 1, 2, ..., q, l = 1, 2, ..., q_k, \tag{10}$$

$$\alpha_{kl} = \bar{\alpha}_{kl} y_{kl},\ k = 1, 2, ..., q, l = 1, 2, ..., q_k, \tag{11}$$

$$\sum_{k=1}^{q} \sum_{l=1}^{q_k} y_{kl} = 1, \tag{12}$$

$$y_{kl} \in \{0, 1\},\ k = 1, 2, ..., q, l = 1, 2, ..., q_k. \tag{13}$$

Теорема 1. $(\widehat{x}, \widehat{y})$ *є оптимальним розв'язком задачі (1)-(13), тоді* $\widehat{x}$ *є оптимальним розв'язком лексикографічно-паретівської задачі про максимальний потік з альтернативими критеріями.*

Доведення теореми легко отримати, враховуючи вибір коефіцієнтів $\bar{\beta}_k$ і $\bar{\alpha}_{kl}$.

Якщо в лексикографічно-паретівській задачі про максимальний потік з альтернативними критеріями оптимальний розв'язок необхідно знайти в залежності від вибору d, $d \geq 1$ допустимих критеріїв, то обмеження (12) необхідно замінити обмеженням

$$\sum_{k=1}^{q} \sum_{l=1}^{q_k} y_{kl} = d.$$

3. Досяжність оптимальних розв'язків лексикографічно-паретівської задачі про максимальний потік з альтернативними групами критеріїв

Розглянемо модифікацію задачі (1), у якій оптимальний розв'язок необхідно знайти, враховуючи тільки одну групу критеріїв якнайвищого рангу, тобто тільки один векторний критерій $c_k(x)$, $k \in \{1, 2, ..., q\}$, який є векторною згорткою критеріїв c_{kl}, $l = 1, 2, ..., q_k$ у субординації рівної важливості Rv і

$$c_{kl}(x) \geq m_{kl}, \; l = 1, 2, ..., q_k.$$

Такий векторний критерій вважаємо допустимим. Дана задача є лексикографічно-паретівською задачею про максимальний потік з альтернативними групами критеріїв. Розв'язання поставленої задачі може бути зведено до задачі знаходження максимуму функціоналу

$$B(x) = \sum_{k=1}^{q} \beta_k \sum_{l=1}^{q_k} \bar{\alpha}_{kl} c_{kl}(x) \tag{14}$$

на допустимій множині, що задається обмеженнями

$$\sum_{j}^{x_{ij}} - \sum_{j}^{x_{ji}} \leq a_i, \; i \in N_\alpha, \tag{15}$$

$$\sum_{j}^{x_{ij}} - \sum_{j}^{x_{ji}} = 0, \; i \in N_g, \tag{16}$$

$$\sum_{j}^{x_{ji}} - \sum_{j}^{x_{ij}} \geq b_i, \; i \in N_\beta, \tag{17}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \; (i,j) \in A. \tag{18}$$

$$c_{kl}(x) \geq m_{kl} y_k, \; k = 1, 2, ..., q, l = 1, 2, ..., q_k, \tag{19}$$

$$\beta_k = \bar{\beta}_k y_k, \; k = 1, 2, ..., q, \tag{20}$$

$$\sum_{k=1}^{q} y_k = 1, \tag{21}$$

$$y_k \in \{0, 1\}, \; k = 1, 2, ..., q. \tag{22}$$

Теорема 2. $\left(\widehat{x}', \widehat{y}'\right) \in R^{n+q}$ *є оптимальним розв'язком задачі (14)-(22), тоді розв'язок* $\widehat{x}'$ *є розв'язком лексикографічно-паретівської задачі про максимальний потік з альтернативними групами критеріїв.*

Теорема доводиться на основі правил вибору коефіцієнтів $\bar{\beta}_k$ і $\bar{\alpha}_{kl}$.

Якщо в лексикографічно-паретівській задачі про максимальний потік з альтернативними групами критеріїв необхідно знайти оптимальний розв'язок, враховуючи d, $d \geq 1$ груп критеріїв якнайвищого рангу, то обмеження (21) необхідно замінити обмеженням

$$\sum_{k=1}^{q} y_k = d.$$

Висновки

Розглянуті підходи до розв'язання багатокритеріальних задач про максимальний потік дають можливість перейти від задачі багатокритеріальної оптимізації до задачі однокритеріальної оптимізації, для розв'язання якої можна застосувати відомі методи.

1. Червак Ю.Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір / Ю.Ю. Червак — Ужгород: Ужгород. нац. унт, 2002. — 312 с.
2. Брила А.Ю. Досяжність оптимальних розв'язків лексикографічно-паретівської та парето-лексикографічних задач оптимізації за зваженою сумою різноважливих критеріїв/ А.Ю. Брила // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. — 2007. — Вип. 14–15. — С. 13–17.
3. Брила А.Ю., Гренджа В.І. Досяжність оптимальних розв'язків лексикографічної задачі про максимальний потік / А.Ю. Брила, Гренджа В.І.// Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. — 2013. — Вип. 24 №2. — С.21–25.
4. Подиновский В.В. Оптимизация по последовательно применяемым критериям/ В.В. Подиновский, В.М. Гаврилов. — М.: Сов. Радио, 1975. — 115 с.
5. Брила А.Ю. Достижимость оптимальных решений линейной задачи многокритериальной оптимизации с альтернативными критериями в транзитивной субординации/ А.Ю. Брила// Международный научно-технический журнал "Проблемы управления и информатики". — 2011. — №4. — С. 68-72.

Одержано 30.05.2014