УДК 517.9

Ю.Ю. Король (Ужгородський нац. ун-т)

СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-АЛГЕБРАЇЧНИХ СИСТЕМ З ВИРИРОДЖЕНИМИ ІМПУЛЬСАМИ В ФІКСОВАНІ МОМЕНТИ ЧАСУ

The paper deals with the differential-algebraic systems with impulse impact under the assumption that systems under the consideration can be reduced to the central canonical form. We find necessary and sufficient conditions for the stability of such systems and generalize the Floquet–Lyapunov theory for systems of this type with periodic coefficients.

Розглядається диференціально-алгебраїчна система з виродженими імпульсами в фіксовані моменти часу в припущенні, що розглядувана система може бути зведена до центральної канонічної форми. Знайдено необхідні і достатні умови стійкості розв'язків таких систем та узагальнено теорію Флоке-Ляпунова для таких систем з періодичними коефіцієнтами.

1. Вступ. Розглянемо диференціально-алгебраїчну систему рівнянь з виродженими імпульсами у фіксовані моменти часу:

$$B(t)\frac{dx}{dt}=A(t)x(t)+f(t), \quad t\neq\tau_i, \quad x,f\in\mathbb{R}^n, \quad t,\tau_i\in[a,\infty), \tag{1}$$

$$\triangle(Bx)|_{t=\tau_i}=S_iB(\tau_i)x(\tau_i)+s_i, \quad \det(E_n+S_i)\neq 0, \tag{2}$$

де $detB(t)\equiv 0$, причому $rankB(t)=n-r=const$ для будь-яких $t\in[a,\infty)$, $1\leq r\leq n-1$; вектор-функція $f(t)$ і $(n\times n)$-вимірні матриці $A(t)$, $B(t)$ є достатньо гладкими: $f(t)\in C^k([a,\infty),\mathbb{R}^n)$, $A(t),B(t)\in C^k([a,\infty),\mathbb{R}^{n\times n})$, $k\in\mathbb{N}$, $t_0\leq\tau_1<\ldots<\tau_p<\infty$, $p<\infty$.

Для диференціально-алгебраїчної імпульсної системи (1), (2), яка зводиться до центральної канонічної форми [1], отримано твердження, які є аналогічними до добре відомих фактів з загальної теорії стійкості [2, 3]. У цій статті ми розширимо результати [4] для диференціально-алгебраїчних систем з імпульсною дією.

2. Зведення до центральної канонічної форми. В [5] були показані достатні умови зведення системи (1) до центральної канонічної форми. Покажемо достатні умови зведення диференціально-алгебраїчної системи з виродженими імпульсами (1), (2) до центральної канонічної форми.

Теорема 1. *[6] Нехай виконуються наступні умови:*

1) $rankB(t)=n-r=const$ $\forall t\in[a,\infty)$, $r>0$*;*

2) *матриця* $B(t)$ $\forall t\in[a,\infty)$ *має повний жорданів набір векторів [5]* $\varphi_i^{(j)}(t)\in C^{3q-j-1}([a,\infty),\mathbb{R}^n)$, $i=\overline{1,r}$, $j=\overline{1,s_i}$ *відносно оператора* $L(t)=A(t)-B(t)\frac{d}{dt}$ *з простору* $C^1([a,\infty),\mathbb{R}^n)$*, який складається з* r *ланцюжків довжини* $s_1,\ldots,s_r$*;*

3) $A(t),B(t)\in C^{3q-2}([a,\infty),\mathbb{R}^{n\times n})$, $f(t)\in C^{q-1}([a,\infty),\mathbb{R}^n)$, $\det(E_n+S_i)\neq 0$, *де* $\max\limits_i s_i=q$.

Тоді

1) *існують неособливі при всіх* $t \in [a, \infty)$ $(n \times n)$*-вимірні матриці* $P(t), Q(t) \in C^{q-1}([a, \infty), \mathbb{R}^{n \times n})$ *такі, що множенням на матрицю* $P(t)$ *зліва та заміною*

$$x = Q(t)u, \tag{3}$$

система (1), (2) *зводиться до імпульсної диференціально-алгебраїчної системи в центральній канонічній формі*

$$\begin{bmatrix} E_{n-s} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \frac{du}{dt} = \begin{bmatrix} M(t) & 0 \\ 0 & E_s \end{bmatrix} u + g(t), \tag{4}$$

$$\triangle \left(\begin{bmatrix} E_{n-s} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} u \right)|_{t=\tau_i} = P(\tau_i) S_i P^{-1}(\tau_i) \begin{bmatrix} E_{n-s} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} u(\tau_i) + P(\tau_i) s_i. \tag{5}$$

де $g(t) = P(t)f(t)$, $g(t) = col(g^{(1)}(t), g^{(2)}(t))$, $g^{(1)}(t) \in \mathbb{R}^{n-s}$, $g^{(2)}(t) \in \mathbb{R}^s$, $s = s_1 + \cdots + s_r$, $I = diag\{I_1, ..., I_r\}$, I_j *— нільпотентні блоки Жордана порядку* s_j, $j = \overline{1, r}$, $M(t) \in C^{q-1}([a, \infty), \mathbb{R}^n)$; E_s *—* s*-вимірна одинична матриця.*

2) *загальний розв'язок системи* (1), (2) *визначається за формулою*

$$x(t) = X_{n-s}(t, a)z + \hat{x}(t), \tag{6}$$

де

$$X_{n-s}(t) = Q(t) \begin{bmatrix} \Omega_x(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_{n-s}(t, \sigma) = Q(t) \begin{bmatrix} \Omega_x(t, \sigma) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$(n \times (n-s))$*-вимірні матриці, стовпці яких є лінійно незалежними розв'язками системи*

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x(t), \quad t \neq \tau_i, \quad t, \tau_i \in [a, \infty), \tag{7}$$

$$\triangle(Bx)|_{t=\tau_i} = S_i B(\tau_i) x(\tau_i), \tag{8}$$

$\Omega_x(t)$ *– фундаментальна матриця невиродженої лінійної однорідної імпульсної системи*

$$\frac{du_1}{dt} = M(t)u_1, \ t \neq \tau_i, \ \ \Delta u_1|_{t=\tau_i} = S_{i,1}u_1(\tau_i), u_1 \in \mathbb{R}^{n-s}, \ t, \tau_i \in [a, \infty), \tag{9}$$

$\Omega_x(t, \sigma) = \Omega_x(t)\Omega_x^{-1}(\sigma)$ *– матрицант системи* (9); z *–* $(n-s)$*-вимірний довільний сталий вектор і* $\hat{x}(t)$ *– довільний розв'язок неоднорідної системи* (1), (2).

Спряжена до (7),(8) імпульсна диференціально-алгебраїчна система має вигляд

$$\frac{d}{dt}\left(B^\top(t)y(t)\right) = -A^\top(t)y(t), \ t \neq \tau_i, \ t, \tau_i \in [a, \infty), \tag{10}$$

$$\triangle y|_{t=\tau_i} = -(E_n + S_i^\top)^{-1} S_i^\top y(\tau_i), \tag{11}$$

де $A^{\top}(t)$ транспонована до $A(t)$ матриця. Позначимо через $Y_{n-s}(t)$ фундаментальну матрицю системи (10), (11). Тоді матриця $X_{n-s}(t)$ завжди може бути визначена таким чином, щоб виконувалася рівність

$$Y_{n-s}^{\top}(t)B(t)X_{n-s}(t) = E_{n-s}. \tag{12}$$

В наступній теоремі наведено необхідні і достатні умови існування розв'язку системи (1), (2) який задовольняє початкову умову

$$x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in [a, \infty). \tag{13}$$

Теорема 2. *[6] Нехай виконуються умови теореми 1, матриці S_i і вектори s_i мають вигляд*

$$S_i = P^{-1}(\tau_i) \begin{bmatrix} S_{i,1} & 0 \\ 0 & S_{i,4} \end{bmatrix} P(\tau_i), \quad det(E_n + S_i) \neq 0, \tag{14}$$

$$s_i = P^{-1}(\tau_i) \begin{bmatrix} p_i \\ S_{i,4} I Q_{22}^{-1}(\tau_i) r(\tau_i) \end{bmatrix}, \quad s_i \in \mathbb{R}^{n-s}. \tag{15}$$

Тоді для того щоб задача Коші (1), (2), (13) *мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб вектор x_0 задовольняв умову*

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{d^i}{dt^i} \langle A(t_0)x_0 + f(t_0), \psi_j^{k-i}(t_0) \rangle = 0; \; j = \overline{1, r}, \; k = \overline{1, s_j}.$$

При цьому розв'язок задачі Коші (1), (2), (13) *єдиний і має наступний вигляд*

$$\begin{aligned} x(t) = X_{n-s}(t, t_0) z_0 + \int_{t_0}^{t} X_{n-s}(t, \sigma) g^1(\sigma) d\sigma + \\ + \sum_{t_0 \neq \tau_j < t} X_{n-s}(t, \tau_i + 0) p_i - \Phi(t) r(t), \end{aligned} \tag{16}$$

де

$$z_0 = [E_{n-s}, 0] Q^{-1}(t_0) x_0,$$

$$r(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{d^k}{dt^k} ((\Psi^{\top}(t) L(t) \Phi(t))^{-1} \Psi^{\top}(t) f(t)),$$

$$\Phi(t) = [\varphi_1^{(1)}(t), ..., \varphi_1^{(s_1)}(t), ..., \varphi_r^{(1)}(t), ..., \varphi_r^{(s_r)}(t)],$$

$$\Psi(t) = [\psi_1^{(s_1)}(t), ..., \psi_1^{(1)}(t), ..., \psi_r^{(s_r)}(t), ..., \psi_r^{(1)}(t)],$$

і вектори $\psi_1^{(j)}(t)$, $i = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, s_i}$, утворюють повний жорданів набір векторів відносно оператора $L^{\top}(t) = A^{\top}(t) + \frac{d}{dt} B^{\top}(t)$.

3. Стійкість розв'язків. Введемо поняття стійкості розв'язків диференціально-алгебраїчних систем з імпульсною дією (1), (2).

Означення 1. *Розв'язок $\tilde{x}(t, \tilde{z}_0)$ системи (1), (2) визначений на проміжку $t \in [a, \infty)$ називається стійким при $t \to \infty$, якщо $t_0 \in [a, \infty)$ і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ таке, що для будь-якого іншого розв'зку $x(t, z_0)$ системи (1), (2) який задовольняє нерівність $\|z_0 - \tilde{z}_0\| < \delta$, справджується нерівність:*

$$\|x(t, z_0) - \tilde{x}(t, \tilde{z}_0)\| < \varepsilon, \quad t_0 \le t < \infty.$$

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 1, матриці S_i і вектори s_i мають вигляд (14), (15) відповідно. Тоді розв'язок $\tilde{x}(t, \tilde{z}_0)$ системи (1), (2) стійкий, тоді і тільки тоді, коли тривіальний розв'язок відповідної однорідної системи (7), (8) стійкий.*

Доведення цього твердження випливає з означення 1, стійкості тривіального розв'язку і того факту, що різниця будь-яких двох розв'язків системи (1), (2) є розв'язком однорідної системи (7), (8).

З теореми 3 випливає, що всі розв'язки системи (1), (2) є одночасно або стійкими або нестійкими. Тому введемо наступне означення.

Означення 2. *Система (1), (2) називається стійкою, якщо всі її розв'язки стійкі.*

З теореми 3 і означення 2 отримуємо наступне твердження.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми 1, матриці S_i і вектори s_i мають вигляд (14), (15) відповідно. Тоді неоднорідна система (1), (2) стійка тоді і тільки тоді, коли відповідна однорідна система (7), (8) є стійкою.*

Теорема 5. *Нехай виконуються умови теореми 1, матриці S_i і вектори s_i мають вигляд (14), (15) відповідно. Тоді однорідна система (7), (8) стійка тоді і тільки тоді, коли всі розв'язки системи $x = x(t, z_0)$ обмежені на проміжку $[t_0, \infty)$.*

Доведення. *Достатність.* Доведемо, що обмеженість деякої фундаментальної матриці $X_{n-s}(t)$ системи (7), (8) є достатньою для стійкості цієї системи. Нехай $t_0 \in [a, \infty)$ і $\varepsilon > 0$ – довільні. Як відомо, розв'язок системи (7), (8) має вигляд

$$x(t, z_0) = X_{n-s}(t, t_0) z_0.$$

З урахуванням того, що

$$\|X_{n-s}(t)\| \le M \text{ для } t_0 \le t < \infty,$$

отримуємо, що

$$\|x(t, z_0)\| \le \|X_{n-s}(t, t_0) z_0\| \le \|Q(t)\| \|\Omega_x(t_0)\| \|z_0\| \le MN \|z_0\|,$$

де

$$N = \|\Omega_x(t_0)\|.$$

Тому, якщо

$$\|z_0\| < \delta = \frac{\varepsilon}{MN},$$

тоді

$$\|x(t, z_0)\| < \varepsilon \text{ для будь-яких } t \in [t_0, \infty).$$

Це означає, що тривіальний розв'язок системи (7), (8) стійкий, отже, стійкими будуть всі розв'язки системи (7), (8). З означення 2 отримуємо, що система (7), (8) стійка.

Необхідність. Доведемо тепер, що обмеженість фундаментальної матриці системи (7), (8) необхідна для її стійкості. Припустимо, що система (7), (8) має розв'язок $u(t,v_0)$ необмежений на $[t_0,\infty)$. Тоді, можна припустити, що $v_0 \neq 0$. Розглянемо розв'язок

$$x(t,z_0) = \frac{u(t,v_0)}{\|u(t_0,v_0)\|}\frac{\delta}{2},$$

для якого

$$\|x(t_0,v_0)\| = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Так як ми припустили, що $u(t,v_0)$ необмежений, тоді при $t_1 > t_0$, отримуємо

$$\|x(t_1,v_0)\| = \frac{\|u(t_1,v_0)\|}{\|u(t_0,v_0)\|}\frac{\delta}{2} > \varepsilon.$$

Отже, тривіальний розв'язок (7), (8) нестійкий. Це означає, що система (1), (2) нестійка, а це суперечить нашому припущенню. ■

Таким чином, для вирішення питання про стійкість системи (1), (2) необхідно з'ясувати питання про обмеженість розв'язків відповідної однорідної системи. Як і у випадку невироджених систем, найбільш повну відповідь на це питання можна дати, розглядаючи системи з періодичними коефіцієнтами.

Припустимо, що матриці $A(t)$, $B(t)$ періодичні з періодом $T > 0$. Якщо $X_{n-s}(t)$ – фундаментальна матриця системи (1), (2), тоді матриця $X_{n-s}(t+T)$ також буде фундаментальною, оскільки вона задовольняє систему (1), (2):

$$B(t)\frac{dX_{n-s}(t+T)}{dt} = B(t+T)\frac{dX_{n-s}(t+T)}{d(t+T)} =$$

$$= A(t+T)X_{n-s}(t+T) = A(t)X_{n-s}(t+T),$$

і її вектори-стовпці лінійно незалежні. Оскільки

$$\Omega_x(t+T,0) = \Omega_x(t,0)\Omega_x(T,0),$$

отримуємо:

$$\begin{aligned} X_{n-s}(t+T,0) = Q(t+T)\begin{bmatrix}\Omega_x(t+T,0)\\ 0\end{bmatrix} = Q(t)\begin{bmatrix}\Omega_x(t,0)\Omega_x(T,0)\\ 0\end{bmatrix} = \\ = Q(t)\begin{bmatrix}\Omega_x(t,0)\\ 0\end{bmatrix}\Omega_x(T,0) = X_{n-s}(t,0)\Omega_x(T,0). \end{aligned} \tag{17}$$

Позначимо

$$\frac{1}{T}Ln(\Omega_x(T,0)) = \Lambda, \tag{18}$$

тоді

$$\Omega_x(T,0) = e^{\Lambda T}. \tag{19}$$

З рівності $X_{n-s}(t) = X_{n-s}(t)e^{-\Lambda T}e^{\Lambda T}$ отримуємо, що $X_{n-s}(t) = K(t)e^{\Lambda T}$, де $K(t) = X_{n-s}(t)e^{-\Lambda T}$. Покажемо, що матриця $K(t)$ є періодичною. Дійсно, з урахуванням рівнянь (17), (19), маємо

$$K(t+T) = X_{n-s}(t+T)e^{-\Lambda(t+T)} = X_{n-s}(t)\Omega_x(T,0)e^{-\Lambda T}e^{-\Lambda t} =$$

$$= X_{n-s}(t)e^{\Lambda T}e^{-\Lambda T}e^{-\Lambda t} = X_{n-s}(t)e^{-\Lambda t} = K(t).$$

В результаті, ми одержуємо теорему, аналогічну теоремі Флоке-Ляпунова [2–4].

Теорема 6. *Нехай виконуються умови теореми 1, матриці* S_i *і вектори* s_i *- мають вигляд* (14), (15) *відповідно. Тоді фундаментальна матриця виродженої однорідної імпульсної системи* (7), (8) *з* T*-періодичними коефіцієнтами має вигляд*

$$X_{n-s}(t) = K(t)e^{\Lambda t}, \tag{20}$$

де $K(t)$ *–* T*-періодична* $(n \times (n-s))$*-вимірна матриця і* Λ *–* $((n-s) \times (n-s))$*-вимірна стала матриця.*

Власні значення ρ_i матриці монодромії будемо називати мультиплікаторами системи (7), (8), а власні значення λ_j матриці Λ – характеристичними показниками цієї системи. З формули (18) отримуємо такі співвідношення між характеристичними показниками і мультиплікаторами:

$$\lambda_j = \frac{1}{T}Ln\rho_i = \frac{1}{T}[\ln|\rho_i| + i(arg(\rho_i) + 2k\pi)\ ]. \tag{21}$$

Виходячи з формули (20), з'ясуємо питання про обмеженість, а отже, і стійкість розв'язків системи (7), (8). Нехай $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ характеристичні показники системи (7), (8). Зведемо матрицю Λ до канонічної форми Жордана:

$$\Lambda = S^{-1}diag\{J_1(\lambda_1), ..., J_k(\lambda_k)\}S,$$

де S – $((n-s) \times (n-s))$-вимірна перетворююча матриця і $J_i(\lambda_i)$ – відповідні клітки Жордана. Тоді з формули (20) отримуємо

$$X_{n-s}(t) = K(t)S^{-1}diag\{e^{tJ_1(\lambda_1)}, ..., e^{tJ_k(\lambda_k)}\}S.$$

Матриця $U_{n-s}(t) = X_{n-s}(t)S^{-1}$ також є фундаментальною для системи (7), (8), тому матриця

$$U_{n-s}(t) = R(t)diag\{e^{tJ_1(\lambda_1)}, ..., e^{tJ_k(\lambda_k)}\},$$

фундаментальна матриця системи (7), (8), де $R(t) = K(t)S^{-1}$ – T-періодична $n \times (n-s)$-вимірна матриця.

Беручи до уваги, що

$$e^{tJ_i(\lambda_i)} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & \frac{t}{1!}e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{k_i-1}}{(k_i-1)!}e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{k_i-2}}{(k_i-2)!}e^{\lambda_i t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix},$$

де k_i – кратність відповідного елементарного дільника для характеристичного показника, а також обмеженість елементів матриці $R(t)$, приходимо до висновку, що фундаментальна матриця розв'язків системи (7),(8) буде обмеженою на проміжку $[t_0, \infty)$ тоді і тільки тоді, коли

$$Re\lambda_j \leq 0, \quad j = \overline{1, k},$$

причому характеристичним показникам з нульовою дійсною частиною відповідають тільки прості елементарні дільники, якщо їх розглядати як власні значення матриці Λ. Згідно із співвідношенням (21) ця умова виконується тоді і тільки тоді, коли всі мультиплікатори системи (7), (8) задовольняють умову $|\rho_j| \leq 1$, причому мультиплікаторам, для яких $|\rho_j| = 1$ відповідають прості елементарні дільники, якщо їх розглядати як власні значення матриці монодромії. Отже, ми довели наступну теорему.

Теорема 7. *Нехай виконуються умови теореми 1, матриці* S_i *і вектори* s_i *- мають вигляд* (14), (15) *відповідно. Тоді однорідна періодична система* (7), (8) *стійка тоді і тільки тоді, коли всі її мультиплікатори розміщені всередині замкнутого одиничного круга* $|\rho_j| \leq 1$ *комплексної площини, причому мультиплікаторам, які лежать на колі* $|\rho_j| = 1$ *відповідають прості елементарні дільники матриці монодромії.*

1. Campbell,S. and Petzold,L., *Canonical forms and solvable singular systems of differential equations.* SIAM J. Algebr. Discrete Methods., 1983, Volume 4, 517—521pp.
2. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* -М., Наука, 1967. - 472с.
3. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.* - К.: Вища шк., 1987. - 228 с.
4. A.M. Akymenko *Stability of solutions of a degenerative linear systems of differential equations.* Nonlinear Oscillations, 2010, Volume 5, Issue 4, 430-438pp.
5. Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями.* - К.: Вища шк., 2000. - 294 с.
6. I.I.Korol, *Investigations of the solutions of Noetherian BVP for impulsive systems with singularity [in Ukrainian].*, Physics & Mathematics, 2009, Volume 3, 71-76pp.

Одержано 28.04.2014