УДК 517.95

З. М. Нитребич (Національний університет "Львівська політехніка")

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-СИМВОЛЬНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОРІДНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

We investigate the Cauchy problem for homogeneous normal system with respect to the highest time derivatives of partial differential equations with constant coefficients. We specify the classes of existence and uniqueness of solution of the problem. Those classes contain entire vector-functions of certain orders either in each variable or in a set of variables. In those classes by means of the differential-symbol method we construct the solution of the problem in the form of finite sums or power series, which define entire functions.

Досліджено задачу Коші для однорідної нормальної системи стосовно старших похідних за часом рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. Виділено класи існування та єдиності розв'язку задачі. До цих класів належать цілі вектор-функції деяких порядків або за кожною змінною або за сукупністю змінних. У цих класах за допомогою диференціально-символьного методу побудовано розв'язок задачі у вигляді скінченних сум або степеневих рядів, які визначають цілі функції.

Вступ. Серед крайових задач математичної фізики особливе місце займає задача Коші, яка на сьогодні є найбільш вивченою. Першими ґрунтовними працями з цієї проблематики були дослідження Ж. Адамара [1], І. Г. Петровського [2], С. Л. Соболєва [3], в яких найповніше досліджено задачу Коші для гіперболічних та параболічних рівнянь і систем рівнянь.

Загальні результати щодо розв'язності задачі Коші для рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами одержано у працях [4, 5].

Перші результати в напрямі відшукання найширших класів існування та єдиності розв'язку задачі Коші належать Е. Гольмгрену [6] і А. М. Тіхонову [7], які вказали класи єдиності розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності та близьких до нього рівнянь.

Особливе місце в теорії задачі Коші займає теорія півгруп, тобто теорія еволюційних диференціальних рівнянь у банаховому просторі. Фундаментальні результати з цієї теорії містяться в монографіях [8–11]. Задача Коші для диференціально-операторних рівнянь вивчалась багатьма вченими (див., зокрема, [12–15] та бібліографію в них).

У цій праці дослідимо задачу Коші для однорідної нормальної системи рівнянь із частинними похідними довільного скінченного порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними. Використаємо для цього диференціально-символьний метод, запропонований у працях [16, 17].

1. Формулювання задачі. Розглянемо в області змінних $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^s$ задачу Коші

$$\sum_{j=1}^{n} l_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) U_j(t, x) \equiv \left(\delta_{ij}\,\frac{\partial^m}{\partial t^m} - \sum_{p=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{pij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^{m-p}}{\partial t^{m-p}}\right) U_j = 0,\ i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^k U_i}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \varphi_{ki}(x),\quad k = \overline{0, m-1}\,,\ i = \overline{1, n}, \tag{2}$$

де $a_{pij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – довільні диференціальні вирази зі сталими коефіцієнтами, символами яких є цілі функції $a_{pij}(\nu)$, $i,j=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, $\{m,n,s\}\subset\mathbb{N}$, δ_{ij} – дельта Кронекера.

Поряд із квадратною системою рівнянь (1) запишемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} l_{ij}\left(\frac{d}{dt},\,\nu\right)T_j(t,\,\nu)=0,\quad i=\overline{1,n}, \tag{3}$$

де $\nu\in\mathbb{C}^s$, ν – векторний параметр, $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_s)$.

Нехай $L(\lambda,\,\nu)=\|\,l_{ij}(\lambda,\,\nu)\,\|_{i,j=\overline{1,n}}$, $\varphi(\lambda,\,\nu)=\det L(\lambda,\,\nu)$, $\widetilde{l}_{ij}(\lambda,\,\nu)$ – алгебричні доповнення елементів $l_{ij}(\lambda,\,\nu)$ матриці $L(\lambda,\,\nu)$.

Функція $\varphi(\lambda,\,\nu)$ є зведеним поліномом щодо λ вигляду

$$\varphi(\lambda,\,\nu)=\lambda^{mn}+\sum_{j=1}^{mn}\xi_j(\nu)\,\lambda^{mn-j}, \tag{4}$$

де коефіцієнти $\xi_1(\nu),\ldots,\xi_{mn}(\nu)$ є цілими функціями, причому справджуються співвідношення

$$\sum_{j=1}^{n} l_{ij}(\lambda,\,\nu)\widetilde{l}_{rj}(\lambda,\,\nu)=\delta_{ir}\,\varphi(\lambda,\,\nu),\quad i,r=\overline{1,n}. \tag{5}$$

Позначимо через $W(t,\,\nu)$ розв'язок (функцію Коші) такої задачі з початковими умовами:

$$\varphi\left(\frac{d}{dt},\,\nu\right)W(t,\,\nu)=0, \tag{6}$$

$$\left.\frac{d^jW}{dt^j}\right|_{t=0}=\delta_{j,\,mn-1},\quad j=\overline{0,mn-1}. \tag{7}$$

Доведемо, що для довільного фіксованого $r\in\{\,1,2,\ldots,n\,\}$ функції вигляду

$$T_{m-1,\,jr}(t,\,\nu)=\widetilde{l}_{rj}\left(\frac{d}{dt},\,\nu\right)W(t,\,\nu),\quad j=\overline{1,n}, \tag{8}$$

задовольняють систему рівнянь (3).

Справді, на підставі (5) та (6) для $\{i,r\}\subset\{\,1,2,\ldots,n\,\}$ маємо

$$\sum_{j=1}^{n} l_{ij}\left(\frac{d}{dt},\,\nu\right)\,T_{m-1,\,jr}(t,\,\nu)=\sum_{j=1}^{n} l_{ij}\left(\frac{d}{dt},\,\nu\right)\left\{\widetilde{l}_{rj}\left(\frac{d}{dt},\,\nu\right)W(t,\,\nu)\right\}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left\{\,l_{ij}\left(\frac{d}{dt},\,\nu\right)\,\widetilde{l}_{rj}\left(\frac{d}{dt},\,\nu\right)\right\}W(t,\,\nu)=\delta_{ir}\,\varphi\left(\frac{d}{dt},\,\nu\right)W(t,\,\nu)=0.$$

Аналогічно доводиться, що для фіксованого $r\in\{\,1,2,\ldots,n\,\}$ функції вигляду

$$\begin{gathered}T_{m-k-1,jr}(t,\nu)=\frac{d^kT_{m-1,jr}(t,\nu)}{dt^k}-\\-\sum_{p=1}^{k}\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{d^{k-p}T_{m-1,jl}(t,\nu)}{dt^{k-p}}a_{plr}(\nu)\right),\quad j=\overline{1,n},\ k=\overline{1,m-1},\end{gathered} \tag{9}$$

задовольняють систему рівнянь (3).

Легко бачити, що $\widetilde{l}_{jj}(\lambda,\, \nu)$, $j = \overline{1, n}$, є зведеними поліномами щодо λ степеня $mn - m$, а всі поліноми $\widetilde{l}_{rj}(\lambda,\, \nu)$ для $r \neq j$ мають степінь, нижчий за $mn - m$. Тому маємо

$$\frac{\partial^{mn-m}\, \widetilde{l}_{rj}(\lambda,\, \nu)}{\partial \lambda^{mn-m}} = \delta_{rj}\ (mn - m)!, \quad r, j = \overline{1, n}. \tag{10}$$

На підставі співвідношень (10) та (7) неважко довести, що функції (8) і (9) задовольняють умови

$$\left.\frac{d^p T_{k,jr}}{dt^p}\right|_{t=0} = \delta_{jr}\delta_{kp}, \quad p, k = \overline{0, m-1}\ , \quad j, r = \overline{1, n}. \tag{11}$$

2. Основні результати. Питання встановлення класу існування та єдиності розв'язку задачі (1), (2) пов'язане із дослідженням поведінки функції $W(t,\, \nu)$ за компонентами вектора ν – параметрами $\nu_1,\, \nu_2,\, \ldots,\, \nu_s$.

Оскільки за припущенням $a_{pij}(\nu)$, $i, j = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, є цілими функціями параметрів $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$ разом з коефіцієнтами $\xi_k(\nu)$ полінома (4), то за теоремою Пуанкаре [18, с. 59] про аналітичну залежність розв'язку задачі Коші від параметрів маємо, що функція $W(t,\, \nu)$ як розв'язок задачі Коші (6), (7) є цілою функцією параметрів $\nu_1,\, \nu_2, \ldots, \nu_s$. Очевидно, що елементи $\widetilde{l}_{rj}(\lambda,\, \nu)$, $r, j = \overline{1, n}$, будуть також цілими функціями стосовно $\nu_1,\, \nu_2, \ldots,\, \nu_s$. Отже, функції $T_{k,jr}(t,\, \nu)$, $k = \overline{0, m-1}$, $j, r = \overline{1, n}$, є цілими стосовно $\nu_1,\, \nu_2, \ldots,\, \nu_s$ функціями, а їх порядки за сукупністю параметрів $\nu_1,\, \nu_2, \ldots, \nu_s$ визначаються порядком цілої функції $W(t,\, \nu)$ [4, с. 83]:

$$\theta = \begin{cases} \max\limits_{k=\overline{1,\, mn}} \left\{\frac{\deg \xi_k(\nu)}{k}\right\}, & \text{якщо } a_{pij}(\nu),\ i, j = \overline{1, n},\ p = \overline{1, m}, \text{ – поліноми,} \\ \infty & \text{– в інших випадках.} \end{cases} \tag{12}$$

У формулі (12) $\deg \xi_k(\nu)$ позначає степінь полінома $\xi_k(\nu)$ за сукупністю змінних $\nu_1,\, \nu_2, \ldots, \nu_s$.

Уведемо до розгляду такі класи цілих функцій:

$A = \{\varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^s : \quad \varphi(z)$ – ціла функція, $z \in \mathbb{C}^s\}$ – клас цілих функцій;

$A_p = \{\, \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^s : \quad \varphi(z)$ – ціла функція порядку $\rho < p$ за сукупністю змінних, $z \in \mathbb{C}^s\}\,, \quad 1 < p < \infty$;

$A_1 = \{\varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^s\colon\ \varphi(z)$ – ціла функція експоненційного типу, $z \in \mathbb{C}^s\}\,$;

$A_{\overline{q}} = \{\varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^s : \varphi(z)$ – ціла функція за змінною z_j порядку $\rho < q_j$ для $1 < q_j < \infty$; довільного порядку для $q_j = \infty$; експоненційного типу для $q_j = 1$; $z \in \mathbb{C}^s,\ j = \overline{1, s}\,\}\,,\ \overline{q} = (q_1,\, q_2, \ldots,\, q_s)$.

Для $\theta \in \mathbb{R}_+ \bigcup \{\infty\}$ позначаємо:

$$D_\theta = \begin{cases} A_{\theta'}\,, \text{ де } \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1\,, & \text{якщо } 1 < \theta < \infty\,, \\ A, & \text{якщо } 0 \leq \theta \leq 1\,, \\ A_1\,, & \text{якщо } \theta = \infty\,. \end{cases}$$

Теорема 1. *Нехай у системі* (1) $a_{pij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $i, j = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, *– довільні диференціальні вирази зі сталими коефіцієнтами, символами яких є цілі функції* $a_{pij}(\nu)$, $i, j = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, *а* θ *визначено за формулою* (12). *Якщо для всіх* $k = \overline{0, m-1}$, $i = \overline{1, n}$ *початкові функції* $\varphi_{ki}(x)$ *належать до* D_θ, *то у* *класі цілих вектор-функцій, компоненти яких* $U_j(t,\,x)$, $j=\overline{1,n}$, *для кожного фіксованого* $t>0$ *належать до* D_θ, *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *який можна знайти за формулою*

$$U_j(t,\,x)=\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{r=1}^{n}\varphi_{kr}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\Big\{\,T_{k,\,jr}(t,\,\nu)e^{\nu\cdot x}\,\Big\}\Big|_{\nu=O},\ j=\overline{1,n}, \tag{13}$$

де $T_{k,jr}(t,\,\nu)$, $k=\overline{0,m-1}$, $j,r=\overline{1,n}$, *– функції* (8), (9), $\nu\cdot x=\nu_1x_1+\ldots+\nu_sx_s$, $O=(0,\ldots,0)$.

Доведення. Обчислимо θ за формулою (12) і припустимо, що для всіх $i=\overline{1,n}$, $k=\overline{0,m-1}$ $\varphi_{ki}\in D_\theta$. Визначимо диференціальні вирази $\varphi_{kr}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$, $r=\overline{1,n}$, $k=\overline{0,m-1}$, як диференціальні вирази нескінченного порядку, замінивши у розвиненнях в ряди Маклорена функцій $\varphi_{kr}\,(x)$ вектор-змінну x на вектор-похідну $\frac{\partial}{\partial\nu}$. Як було зазначено вище, функції у фігурних дужках формули (13) є цілими за параметрами $\nu_1,\,\nu_2,\ldots,\nu_s$, порядок яких не перевищує θ за сукупністю параметрів $\nu_1,\,\nu_2,\ldots,\nu_s$. Дії диференціальних виразів нескінченного порядку $\varphi_{kr}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$, $r=\overline{1,n}$, $k=\overline{0,m-1}$, на ці функції визначені коректно, якщо символи виразів $\varphi_{kr}(x)$, $r=\overline{1,n}$, $k=\overline{0,m-1}$, належать до D_θ (див. [19] для $s=1$ та [20] для $s>1$).

Покажемо, що результат дії $\varphi_{kr}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$ на $T_{k,jr}(t,\,\nu)e^{\nu\cdot x}$ для фіксованого $t>0$ належатиме до D_θ. Для цього запишемо очевидну рівність для цілих функцій $\varphi_{kr}(x)$:

$$\varphi_{kr}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O}=\varphi_{kr}(x).$$

Подіємо на обидві частини цієї рівності диференціальними виразами нескінченного порядку $T_{k,jr}\left(t,\,\frac{\partial}{\partial x}\right)$. Зліва, за цілістю функції $\varphi_{kr}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\nu\cdot x}\right\}$ в околі точки $\nu=O$ одержимо

$$\varphi_{kr}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{T_{k,jr}(t,\,\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O},$$

а справа отримаємо вираз $T_{k,jr}(t,\,\frac{\partial}{\partial x})\varphi_{kr}(x)$. Оскільки $\varphi_{kr}\in D_\theta$, а символами диференціальних виразів $T_{k,jr}(t,\,\frac{\partial}{\partial x})$ для фіксованого $t>0$ є цілі функції порядку не вище θ, то результат дії $T_{k,jr}(t,\,\frac{\partial}{\partial x})\varphi_{kr}(x)$ для фіксованого $t>0$ буде належати до D_θ (див. [19] та [20]).

Зауважимо також, що функції $U_j(t,\,x)$ вигляду (13) є цілими функціями і допускають скінченного порядку диференціювання за змінною t та за змінними $x_1,\,x_2,\ldots,x_s$ у випадку, коли $a_{pij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $i,j=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, – диференціальні поліноми. Якщо ж, хоча б один з диференціальних виразів $a_{pij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $i,j=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, є диференціальним виразом нескінченного порядку, то $\theta=\infty$ і функції $U_j(t,\,x)$ допускатимуть нескінченного порядку диференціювання за змінними $x_1,\,x_2,\ldots,x_s$ [20].

Дія виразів $\varphi_{kr}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$ на відповідні продиференційовані вирази буде коректно визначеною, оскільки після диференціювання функцій $U_j(t,\,x)$ вигляду (13) у фігурних дужках одержуються цілі функції параметрів $\nu_1,\,\nu_2,\ldots,\nu_s$ того ж порядку θ за сукупністю $\nu_1,\,\nu_2,\ldots,\nu_s$.

Доведемо тепер, що функції (13) задовольняють систему (1). З того, що для довільного $r=\overline{1,n}$ функції (8), (9) задовольняють систему рівнянь (3), для

$i = \overline{1, n}$ маємо

$$\sum_{j=1}^{n} l_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial x}\right) U_j(t,\,x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} l_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial x}\right) \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{r=1}^{n} \varphi_{kr}\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\Big\{\, T_{k,jr}(t,\,\nu) e^{\nu\cdot x} \Big\}\Big|_{\nu=O} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{r=1}^{n} \varphi_{kr}\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} l_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial x}\right)\Big\{\, T_{k,jr}(t,\,\nu) e^{\nu\cdot x} \Big\}\right)\Big|_{\nu=O} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{r=1}^{n} \varphi_{kr}\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{ e^{\nu\cdot x} \sum_{j=1}^{n} l_{ij}\left(\frac{d}{dt},\, \nu\right) T_{k,jr}(t,\,\nu) \right\}\Bigg|_{\nu=O} = 0.$$

Крім того, співвідношення (11) забезпечують для розв'язку (13) системи (1) виконання початкових умов (2). Отже, клас цілих вектор-функцій, компоненти яких для фіксованого $t > 0$ належать до D_θ, є класом існування розв'язку задачі (1), (2). Цей клас вектор-функцій є одночасно й класом єдиності розв'язку, оскільки він є звуженням відомого класу єдиності розв'язку задачі, виділеного в роботі [4]. Теорему доведено.

Зауваження 1. *Задачу* (1), (2) *зручно записувати у матричному вигляді*

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) U(t,x) \equiv \frac{\partial^m U}{\partial t^m} - \sum_{p=1}^{m} A_p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^{m-p} U}{\partial t^{m-p}} = \boldsymbol{0}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial^k U}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = \Phi_k(x), \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{15}$$

де $U(t,x) = \Big(U_1(t,x), \ldots, U_n(t,x)\Big)^\tau$, $\Phi_k(x) = \Big(\varphi_{k1}(x), \ldots, \varphi_{kn}(x)\Big)^\tau$, $k = \overline{0, m-1}$, $A_p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left\|\, a_{pij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \right\|_{i,j=\overline{1,n}}$, $p = \overline{1, m}$, $\boldsymbol{0} = (0, \ldots, 0)^\tau$, τ *– символ транспонування.*

На підставі формули (13) *розв'язок задачі* (14), (15) *можна записати у вигляді*

$$U(t,x) = \left[\sum_{k=0}^{m-1} \Phi_k^\tau\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\Big\{\, T_k^\tau(t,\,\nu) e^{\nu\cdot x} \Big\}\Big|_{\nu=O}\right]^\tau, \tag{16}$$

де

$$T_{m-1}(t,\,\nu) = \widetilde{L}\left(\frac{d}{dt},\, \nu\right)\Big(\, E_n W(t,\,\nu) \Big), \tag{17}$$

$$T_{m-k-1}(t,\,\nu) = \frac{d^k T_{m-1}(t,\nu)}{dt^k} - \sum_{p=1}^{k} \frac{d^{k-p} T_{m-1}(t,\nu)}{dt^{k-p}} A_p(\nu), \quad k = \overline{1, m-1}, \tag{18}$$

E_n *– одинична матриця порядку* n.

Враховуючи порядки цілої функції $W(t,\,\nu)$ за кожним параметром ν_j зокрема, де $j = \overline{1, s}$, можна виділити ширший (анізотропний) клас існування та єдиності розв'язку задачі (1), (2), відмінний від поданого в теоремі 1.

Теорема 2. *Нехай у системі* (1) $a_{pij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $i,j=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *– довільні диференціальні вирази зі сталими коефіцієнтами, символами яких є цілі функції* $a_{pij}(\nu)$, $i,j=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *а* θ_l, $l=\overline{1,s}$, *визначаються рівностями*

$$\theta_l=\begin{cases}\max\limits_{k=\overline{1,mn}}\left\{\frac{\deg\xi_k(\nu)}{k}\right\}, & \text{якщо } a_{pij}(\nu),\ i,j=\overline{1,n},\ p=\overline{1,m}, -\text{поліноми},\\ \infty - \text{в інших випадках,}\end{cases}\tag{19}$$

де $\deg\xi_k(\nu)$ *– степінь полінома* $\xi_k(\nu)$ *за змінною* ν_l, $l=\overline{1,s}$. *Якщо для всіх* $k=\overline{0,m-1}$, $i=\overline{1,n}$ *функції* $\varphi_{ki}(x)$ *належать до* $D_{\overline{\theta}}$, *де* $\overline{\theta}=(\theta_1,\,\theta_2,\,\ldots,\,\theta_s)$, *то у класі цілих вектор-функцій, компоненти яких* $U_j(t,\,x)$, $j=\overline{1,n}$, *для кожного фіксованого* $t>0$ *належать до* $D_{\overline{\theta}}$, *існує единий розв'язок задачі* (1), (2). *Цей розв'язок можна подати у вигляді* (13), *де* $T_{k,jr}(t,\,\nu)$, $k=\overline{0,m-1}$, $j,r=\overline{1,n}$, *– функції* (8).

Доведення. Якщо $a_{pij}(\nu)$, $i,j=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, – поліноми, то обчислимо θ_l за формулою (19), де $\deg\xi_k(\nu)$ – степінь полінома $\xi_k(\nu)$ за змінною ν_l, $l=\overline{1,s}$. Якщо ж хоча б один з виразів $a_{pij}(\nu)$, $i,j=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, не є поліномом за змінною ν_l, $l=\overline{1,s}$, то покладаємо $\nu_l=\infty$. Утворюємо вектор $\overline{\theta}=(\theta_1,\,\theta_2,\,\ldots,$ $\theta_s)$ і припускаємо, що для всіх $k=\overline{0,m-1}$, $i=\overline{1,n}$ функції $\varphi_{ki}(x)$ належать до $D_{\overline{\theta}}$. Далі доведення теореми є аналогічним до доведення теореми 1.

3. Приклад розв'язування задачі Коші. Знайти розв'язок задачі Коші для однорідної системи диференціально-функціональних рівнянь

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}U_1(t,x_1,x_2)&=2U_1(t,x_1+2,x_2)+2U_2(t,x_1+3,x_2)-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}U_2(t,x_1+1,x_2),\\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}U_2(t,x_1,x_2)&=2U_1(t,x_1+1,x_2)+2U_2(t,x_1+2,x_2)+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}U_2(t,x_1,x_2),\end{aligned}\tag{20}$$

$$\left.\frac{\partial^k U_i}{\partial t^k}\right|_{t=0}=\varphi_{ki}(x_1,\,x_2),\quad k=0,1,\quad i=1,2.\tag{21}$$

▼ Для даної задачі маємо $n=2$, $s=2$, $m=2$,

$$A_1(\nu)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad A_2(\nu)=\begin{pmatrix}2e^{2\nu_1}&2e^{3\nu_1}-\nu_2^2e^{\nu_1}\\ 2e^{\nu_1}&2e^{2\nu_1}+\nu_2^2\end{pmatrix},\quad \nu=(\nu_1,\,\nu_2),$$

$$L(\lambda,\,\nu)=\begin{pmatrix}\lambda^2-2e^{2\nu_1}&-2e^{3\nu_1}+\nu_2^2e^{\nu_1}\\ -2e^{\nu_1}&\lambda^2-2e^{2\nu_1}-\nu_2^2\end{pmatrix},\quad \varphi(\lambda,\,\nu)=\left(\lambda^2-4e^{2\nu_1}\right)\left(\lambda^2-\nu_2^2\right),$$

$$\widetilde{L}(\lambda,\,\nu)=\begin{pmatrix}\lambda^2-2e^{2\nu_1}-\nu_2^2&2e^{3\nu_1}-\nu_2^2e^{\nu_1}\\ 2e^{\nu_1}&\lambda^2-2e^{2\nu_1}\end{pmatrix}.$$

Задача Коші (6), (7) набуває вигляду

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d^2}{dt^2}-4e^{2\nu_1}\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}-\nu_2^2\right)W(t,\,\nu)=0,\\ &\left.\frac{d^kW}{dt^k}\right|_{t=0}=\delta_{3k},\quad k=0,1,2,3.\end{aligned}\tag{22}$$

Розв'язком задачі (22) є функція вигляду

$$W(t,\,\nu)=\frac{\nu_2\,\mathrm{sh}[2e^{\nu_1}t]-2e^{\nu_1}\,\mathrm{sh}[\nu_2 t]}{2\nu_2e^{\nu_1}[4e^{2\nu_1}-\nu_2^2]},$$

яка є цілою стосовно ν_1 та ν_2, причому має порядок $\theta=\infty$ за сукупністю змінних і, крім того, нескінченний порядок за ν_1 та перший порядок за ν_2.

Формули (17), (18) набувають вигляду

$$T_1(t,\,\nu)=\widetilde{L}\left(\frac{d}{dt},\,\nu\right)\Big(E_2W(t,\,\nu)\Big), \tag{23}$$

$$T_0(t,\,\nu)=\frac{dT_1(t,\,\nu)}{dt}. \tag{24}$$

За формулою (23) знаходимо елементи матриці $T_1(t,\nu)$:

$$T_{1,11}(t,\,\nu)=\widetilde{l}_{11}\left(\frac{d}{dt},\,\nu\right)W(t,\,\nu)=\left(\frac{d^2}{dt^2}-2e^{2\nu_1}-\nu_2^2\right)W(t,\nu)=$$

$$=\frac{\nu_2(2e^{2\nu_1}-\nu_2^2)\,\mathrm{sh}[2e^{\nu_1}t]+4e^{3\nu_1}\,\mathrm{sh}[\nu_2t]}{2\nu_2e^{\nu_1}[4e^{2\nu_1}-\nu_2^2]},$$

$$T_{1,12}(t,\,\nu)=\widetilde{l}_{21}\left(\frac{d}{dt},\,\nu\right)W(t,\,\nu)=(2e^{2\nu_1}-\nu_2^2)\frac{\nu_2\,\mathrm{sh}[2e^{\nu_1}t]-2e^{\nu_1}\,\mathrm{sh}[\nu_2t]}{2\nu_2[4e^{2\nu_1}-\nu_2^2]},$$

$$T_{1,21}(t,\,\nu)=\widetilde{l}_{12}\left(\frac{d}{dt},\,\nu\right)W(t,\,\nu)=\frac{\nu_2\,\mathrm{sh}[2e^{\nu_1}t]-2e^{\nu_1}\,\mathrm{sh}[\nu_2t]}{\nu_2[4e^{2\nu_1}-\nu_2^2]},$$

$$T_{1,22}(t,\,\nu)=\widetilde{l}_{22}\left(\frac{d}{dt},\,\nu\right)W(t,\,\nu)=\left(\frac{d^2}{dt^2}-2e^{2\nu_1}\right)W(t,\,\nu)=$$

$$=\frac{\nu_2e^{\nu_1}\,\mathrm{sh}[2e^{\nu_1}t]+[2e^{2\nu_1}-\nu_2^2]\,\mathrm{sh}[\nu_2t]}{\nu_2[4e^{2\nu_1}-\nu_2^2]}.$$

Аналогічно знаходимо елементи матриці $T_0(t,\nu)$ за формулою (24).

Шуканий розв'язок задачі (20), (21) знаходимо за формулою (16):

$$U(t,x_1,x_2)=\left[\Phi_0^\tau\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_0^\tau(t,\nu)e^{\nu_1x_1+\nu_2x_2}\Big\}\Big|_{\nu=O}+\Phi_1^\tau\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_1^\tau(t,\nu)e^{\nu_1x_1+\nu_2x_2}\Big\}\Big|_{\nu=O}\right]^\tau. \tag{25}$$

Оскільки за формулою (12) $\theta=\infty$, то згідно з теоремою 1 розв'язок (25) задачі (20), (21) існує і єдиний у відповідному класі функцій, якщо $\varphi_{ki}(x_1,x_2)$, $k=0,1$, $i=1,2$, належать до A_1.

Крім того, $W(t,\,\nu)$ як ціла стосовно ν_1 і ν_2 функція має нескінченний порядок стосовно ν_1 та перший порядок стосовно ν_2, тому за теоремою 2, якщо $\varphi_{ki}(x_1,\,x_2)$, де $k=0,1$, $i=1,2$, є довільними цілими функціями за змінною x_2 і належать до A_1 як функції змінної x_1, то існує єдиний розв'язок задачі (20) у відповідному класі цілих вектор-функцій і цей розв'язок задачі можна знайти за формулою (25).

Якщо в задачі (20), (21) початкові функції є конкретними, зокрема, є цілими функціями зі вказаного класу розв'язності

$$\varphi_{11}(x_1,x_2)=1,\ \varphi_{12}(x_1,x_2)=e^{x_1+3x_2},\ \varphi_{01}(x_1,x_2)=\varphi_{02}(x_1,x_2)=0,$$

то розв'язок такої задачі набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} U_1(t,x_1,x_2) \\ U_2(t,x_1,x_2) \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & e^{\frac{\partial}{\partial \nu_1}+3\frac{\partial}{\partial \nu_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{1,11}(t,\nu) & T_{1,21}(t,\nu) \\ T_{1,12}(t,\nu) & T_{1,22}(t,\nu) \end{pmatrix} e^{\nu_1 x_1+\nu_2 x_2} \right]^{\tau} \Bigg|_{\nu_1=\nu_2=0},$$

звідки отримуємо

$$U_1(t,x_1,x_2) = T_{1,11}(t,0,0) + T_{1,12}(t,1,3)e^{x_1+3x_2},$$

$$U_2(t,x_1,x_2) = T_{1,21}(t,0,0) + T_{1,22}(t,1,3)e^{x_1+3x_2}.$$

За допомогою граничних переходів визначаємо

$$T_{1,11}(t,0,0) = \frac{1}{4}\operatorname{sh}[2t] + \frac{1}{2}t, \quad T_{1,12}(t,1,3) = (2e^2-9)\frac{3\operatorname{sh}[2et] - 2e\operatorname{sh}[3t]}{6(4e^2-9)},$$

$$T_{1,21}(t,0,0) = \frac{1}{4}\operatorname{sh}[2t] - \frac{1}{2}t, \quad T_{1,22}(t,1,3) = \frac{3e\operatorname{sh}[2et] + (2e^2-9)\operatorname{sh}[3t]}{3(4e^2-9)}.$$

Отже, шуканий розв'язок задачі Коші (20), (21) є таким:

$$U_1(t,x_1,x_2) = \frac{1}{4}\operatorname{sh}[2t] + \frac{1}{2}t + (2e^2-9)\frac{3\operatorname{sh}[2et] - 2e\operatorname{sh}[3t]}{6(4e^2-9)}e^{x_1+3x_2},$$

$$U_2(t,x_1,x_2) = \frac{1}{4}\operatorname{sh}[2t] - \frac{1}{2}t + \frac{3e\operatorname{sh}[2et] + (2e^2-9)\operatorname{sh}[3t]}{3(4e^2-9)}e^{x_1+3x_2}.$$

Знайдений розв'язок задачі є єдиним (теорема 1) у класі цілих вектор-функцій, які для кожного фіксованого $t > 0$ є цілими функціями експоненціального типу. ▲

Висновки. У цій праці вивчено задачу Коші для однорідної системи рівнянь із частинними похідними, розв'язної стосовно старших похідних за часом зі сталими коефіцієнтами. Виділено класи цілих вектор-функцій деяких порядків або за кожною змінною або за сукупністю змінних як класи існування та єдиності розв'язку задачі. У цих класах за допомогою диференціально-символьного методу побудовано розв'язок задачі у вигляді дії диференціальних виразів, символами яких є початкові функції, на деякі цілі функції параметрів. Подано приклад застосування методу для однорідної системи диференціально-функціональних рівнянь.

У подальших дослідженнях цікавим є вивчення задачі Коші для неоднорідної системи рівнянь із частинними похідними загалом нескінченного порядку за просторовими змінними.

1. *Hadamard J.* Le probleme de Cauchy et les equations aux dérivées partielles lineaires hyperboliques. – Paris: Hermann, 1932. – 542 p.
2. *Петровский И. Г.* О задаче Коши для уравнений в частных производных // Мат. сб. – 1937. – Т. 2(44), № 5. – С. 815–870.
3. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 333 с.
4. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. Выпуск 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.
5. *Шилов Г. Е.* Математический анализ (второй специальный курс). – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 207 с.

6. *Holmgren E.* Sur les solutions quasianalytiques de l'équations de la chaleur // Arkiv. för Mat. – 1924. – V. 18. – S. 32–53.
7. *Тихонов А. Н.* Теоремы единственности для уравнения теплопроводности // Мат. сб. – 1953. – Т. 42, № 2. – С. 199–215.
8. *Лионс Ж. Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
9. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
10. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: ИЛ, 1962. – 829 с.
11. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
12. *Chazarain J.* Problemes de Cauchy abstraites et applications á quelques problemes mixtes // J. Funct. Anal. – 1971. – V. 7, № 3. – P. 386–446.
13. *Hersh R.* Explicit solution of a class of higher order abstract Cauchy problems // J. Diff. Equat. – 1970. – V. 8, № 3. – P. 570–573.
14. *Дубинский Ю. А.* Алгебра псевдодифференциальных операторов с аналитическими символами и ее приложения к математической физике // Успехи мат. наук. – 1982. – Т. 37, № 5. – С. 97–159.
15. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наук. думка, 1984. – 284 с.
16. *Каленюк П. И., Баранецкий Я. Е., Нитребич З. Н.* Обобщенный метод разделения переменных. – К.: Наук. думка, 1983. – 232 с.
17. *Каленюк П. І., Нитребич З. М.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во НУ „Львівська політехніка", 2002. – 292 с.
18. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1980. – 232 с.
19. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983. – 176 с.
20. *Каленюк П. І., Нитребич З. М.* Про дію диференціального виразу нескінченного порядку у класах цілих функцій багатьох комплексних змінних // Доп. НАН України. – 2007. – № 6. – С. 11–16.

Одержано 24.03.2014