УДК 512.64

Ю. М. Перегуда (*Житомирський військовий ін-т імені С. П. Корольова Держ. ун-ту телекомунікацій*)

ПРО ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНІ МНОЖИНИ, ПОВНІ ВІДНОСНО 1-СТАБІЛЬНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

In this paper we prove that there exists a poset with nonnegative quadratic Tits form each element of which is 1-stable in some maximal subposet.

У цій роботі доведено існування частково впорядкованої множини з невід'ємною квадратичною формою Тітса, кожний елемент якої є 1-стабільним в деякій максимальній підмножині.

Квадратичні форми виникають при розгляді багатьох задач в різних галузях математики. В сучасній теорії зображень важливу роль відіграють квадратичні форми Тітса.

Вперше квадратична форма Тітса була введена у 1972 р. П. Габріелем [1]. Він ввів зображення скінченних сагайдаків (орієнтованих графів) і показав, що сагайдак має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли є додатною деяка квадратична форма, яку він назвав квадратичною формою Тітса. Ця робота П. Габріеля стала початком нового напрямку в теорії зображень, який пов'язаний з вивченням зв'язків між властивостями зображень та властивостями відповідних квадратичних форм.

У 1974 р. Ю. А. Дрозд [2] розглянув квадратичну форму Тітса для скінченних частково впорядкованих множин і показав, що частково впорядкована множина має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли його форма Тітса є слабо додатною (тобто додатною на векторах із невід'ємними координатами).

У 1977 р. М. М. Клейнер і А. В. Ройтер [3] ввели зображення диференціальних градуйованих категорій, а також відповідну квадратичну форму Тітса, і показали, що вільна трикутна диференціальна градуйована категорія має скінченний тип тоді і лише тоді, коли її форма Тітса є слабо додатною.

Квадратичні форми Тітса вивчали також К. Бонгартц, В. М. Бондаренко, Ш. Бреннер, Н. С. Головащук, П. Дрекслер, С. А. Овсієнко, Х. А. де ла Пенья, К. Рінгель, Д. Сімсон та багато інших математиків. При цьому розглядалися як властивості самих форм Тітса для різних об'єктів, так і зв'язки між їх властивостями та властивостями зображень.

В теорії зображень частково впорядкованих множин важливу роль відіграють не лише слабо додатні, а й додатні форми Тітса. В. М. Бондаренко і М. В. Стьопочкіна [4] показали, що у випадку, коли форма Тітса частково впорядкованої множини є додатною, її категорія ін'єктивних зображень має скінченний зображувальний тип. Всі такі частково впорядковані множини (що є аналогами графів Динкіна) описано цими ж авторами в роботі [5].

У цій роботі ми продовжуємо вивчати локальні деформації квадратичних форм Тітса скінченних частково впорядкованих множин (див. у зв'язку з цим статті [6] – [9]).

Автор висловлює щиру подяку доктору фізико-математичних наук, професору В. М. Бондаренку за корисні поради.

1. Основні поняття. Під квадратичною формою будемо розуміти довільну квадратичну форму над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$:

$$f(z) = f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i z_i^2 + \sum_{i<j} f_{ij} z_i z_j.$$

Множину всіх таких квадратичних форм позначимо через $\mathcal{R}$, а множину всіх $f(z) \in \mathcal{R}$ з одиничними коефіцієнтами $f_1, \ldots, f_n$ — через $\mathcal{R}_0$.

Нагадаємо деякі означення, введені В. М. Бондаренком.

Нехай $f(z) \in \mathcal{R}_0$ і $s \in \{1, \ldots, n\}$; s-деформацією форми $f(z)$ називається форма

$$f^{(s)}(z, a) = f^{(s)}(z_1, \ldots, z_n, a) = a z_s^2 + \sum_{i \neq s} z_i^2 + \sum_{i<j} f_{ij} z_i z_j,$$

де a — параметр.

Позначимо через $F_+^{(s)}$ множину всіх $b \in \mathbb{R}$, таких що форма $f^{(s)}(z, b)$ є додатною, і покладемо $F_-^{(s)} = \mathbb{R} \backslash F_+^{(s)}$. Іншими словами, $b \in F_-^{(s)}$ тоді і лише тоді, коли існує ненульовий вектор $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ такий, що $f^{(s)}(r_1, \ldots, r_n, b) \leq 0$. Далі, покладемо

$$m_f^{(s)} = \sup \mathrm{F}_-^{(s)} \in \mathbb{R} \cup \infty$$

(оскільки із $x \in F_-^{(s)}$ випливає, що $y \in F_-^{(s)}$ для любого $y < x$, то цей супремум є граничною точкою). Число $m_f^{(s)}$ називається s-им P-граничним числом форми $f(z)$.

Легко бачити, що має місце наступне твердження.

Твердження 1. *Нехай* $f(z_1, \ldots, z_n) \in \mathcal{R}_0$. *Тоді*

1) $m_f^{(s)} \geq 0$;

2) $m_f^{(s)} = \infty$, *якщо форма*

$$f_{-s}(z_1, \ldots, z_{s-1}, z_{s+1}, \ldots, z_n) = f(z_1, \ldots, z_{s-1}, 0, z_{s+1}, \ldots, z_n)$$

не є додатною.

У роботі [6] доведена наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай* $f(z_1, \ldots, z_n) \in \mathcal{R}_0$ *і нехай* $m_f^{(s)} \neq \infty$. *Тоді*

1) $m_f^{(s)} \in F_-^{(s)}$, *а тому* $m_f^{(s)}$ *— найбільше число множини* $F_-^{(s)}$.

2) *форма* $f^{(s)}(z, m_f^{(s)})$ *є невід'ємною.*

Приведемо ще деякі означення.

Нехай S — частково впорядкована множина. Квадратичною формою Тітса множини S називається квадратична форма, яка задається наступною рівністю:

$$dr_S(z) = z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i<j, i,j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i$$

(з формальних міркувань потрібно вважати, що ні один із елементів S не позначений символом 0).

Число $m_f^{(i)}$, де $f = q_S(z)$, а i — елемент із S, будемо позначати через $m_S(i)$ або просто через $m(i)$, якщо S фіксоване. Елемент $i \in S$ називається r-стабільним відносно форми Тітса, якщо $m_S(i) \neq \infty$ і існує частково впорядкована множина $T \supset S$ порядку $|S| + r$, така що $m_S(i) = m_{S_N}(i)$ (запис $T \supset S$ означає, що S — підмножина T, повна відносно часткової впорядкованості на S_N).

Частково впорядковану множину назвемо повною відносно r-стабільних елементів, якщо кожний її елемент x є r-стабільним в деякій підмножинів S_x з додатною квадратичною формою Тітса.

Ці поняття також введено В. М. Бондаренком.

2. Основний результат. Мета цієї статті — доведення наступної теореми.

Теорема 2. *Існує частково впорядкована множина S з невід'ємною квадратичною формою Тітса, яка є повною відносно 1-стабільних елементів, і до того ж всі підмножини S_x є максимальними.*

Під максимальними підмножинами частково впорядкованої множини S ми розуміємо підмножини порядку $|S| - 1$.

Розглядаючи конкретну частково впорядковану множину S, вважатимемо, що її елементами є натуральні числа: $S = \{1, 2, \ldots, n\}$; відношення часткового порядку будемо позначати в цьому випадку через $\preceq$. При цьому вважаємо, що $i < j$ кожного разу, коли $i \prec j$. В усіх прикладах елемент n, для якого ми обчислюємо число $m(n)$, буде максимальним в S (відносно $\preceq$) і, окрім того, найбільшим серед $i \in S$ як натуральних чисел. Тому матриця квадратичної форми $q_S^{(p)}(z, a)$ — це симетрична матриця розміру $(n + 1) \times (n + 1)$ такого вигляду:

$$M_a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 \\ -1 & 2 & * & \ldots & * & * \\ -1 & * & 2 & \ldots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & * & * & \ldots & 2 & * \\ -1 & * & * & \ldots & * & 2a \end{pmatrix}.$$

Оскільки для обчислення чисел $m(i)$ ми будемо користуватися лише критерієм Сільвестра (для додатності квадратичної форми), то замість матриці M_a можна розглядати матрицю M_a°, яка отримується із M_a шляхом множення останньої на 2 та подальшого множення її першого рядка і першого стовпця на -1:

$$M_a^\circ = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & * & \ldots & * & * \\ 1 & * & 2 & \ldots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & * & * & \ldots & 2 & * \\ 1 & * & * & \ldots & * & 2a \end{pmatrix}.$$

Зауважимо ще, що коли ми розглядаємо частково впорядковану множину S з додатною формою Тітса, то всі головні мінори матриці M_1° — додатні (за критерієм Сільвестра), а значить $m_S(n)$ є розв'язком відносно a лінійного рівняння $\Delta(n,a)=0$, де

$$\Delta(n,a)=|M_a^\circ|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & * & \dots & * & * \\ 1 & * & 2 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & * & * & \dots & 2 & * \\ 1 & * & * & \dots & * & 2a \end{vmatrix}.$$

Переходимо тепер безпосередньо до доведення теореми 2.

Розглянемо частково впорядковану множину P з елементами $1,2,3$ і частковим порядком $1\prec 3, 2\prec 3$. Легко показати (див., наприклад, [10]), що квадратична форма Тітса для A_3 є додатною.

У роботі [7] показано, що $m_P(3)=1/2$. Для зручності читачів, ми коротко нагадаємо довення цієї рівності.

Помінявши місцями перший і другий рядки та перший і другий стовпці в матриці

$$\Delta(3,a)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2a \end{vmatrix}.$$

отримаємо:

$$\Delta(3,a)=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2a \end{vmatrix}.$$

Віднімемо тепер від першого рядка другий рядок і розкладемо отриманий визначник (значення якого не змінилося від цієї операції) по першому рядку:

$$\Delta(3,a)=2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2a \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2a \end{vmatrix}=2(6a-2)-2(2a)=8a-4.$$

Звідси маємо, що $m_P(3)=4/8=1/2$.

Розглянемо тепер частково впорядковану множину $Q\supset P$, яка складається із елементів $1,2,3,4$ і при цьому $2\prec 3\prec 4$, $1\prec 3$. Число $m_Q(4)$ дорівнює $1/2$, як і число $m_P(3)$ $m_Q(4)=1/2$ [7]. Коротко нагадаємо доведення цього факту.

Помінявши місцями перший і другий рядки та перший і другий стовпці в матриці

$$\Delta(4,a)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2a \end{vmatrix}.$$

отримаємо:

$$\Delta(4,a) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2a \end{vmatrix}.$$

Віднімемо тепер від першого рядка другий рядок і розкладемо отриманий визначник по першому рядку. В результаті маємо $\Delta(4,a) = 2B(3,a) + 2C(3,a)$, де

$$B(3,a) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2a \end{vmatrix}, \quad C(3,a) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2a \end{vmatrix}.$$

Обчислимо спочатку визначник $B(3,a)$. Від першого рядка віднімаємо другий і розкладемо його по першому рядку:

$$B(3,a) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2a \end{vmatrix} = (6a-2) + (2a-1) = 8a-3.$$

Обчислимо тепер визначник $C(3,a)$. Від першого рядка віднімаємо другий і розкладемо його по першому рядку:

$$C(3,a) = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2a \end{vmatrix} = -(6a-2) + (2a-1) = -4a+1.$$

Отже, $\Delta(4,a) = 2B(3,a) + 2C(3,a) = 2(8a-3) + 2(-4a+1) = 8a-4$, звідки $m_Q(4) = 1/2$, що і треба було довести.

Оскільки $m_P(3) = 1/2$ і $m_Q(4) = 1/2$, то враховуючи очевидну рівність $m_Q(3) = m_Q(4)$, маємо, що $m_P(3) = m_Q(3)$, а тому елемент 3 є 1-стабільним в P.

Оскільки при переході до дуальної частково впорядкованої множини 1-стабільні елементи не змінюються, то, таким чином, маємо наступне твердження.

Твердження 2. *Якщо частково впорядкована множина порядку* 3 *має один максимальний* (*відповідно мінімальний*) *елемент і два мінімальні* (*відповідно максимальні*) *елементи, то її максимальний* (*відповідно мінімальний*) *елемент є* 1-*стабільним.*

Вкажемо тепер у явному вигляді частково впорядковану множину S з невід'ємною квадратичною формою Тітса, яка є повною відносно 1-стабільних елементів.

Розглянемо частково впорядковану множину S з елементами $1, 2, 3, 4$ і частковим порядком $1 \prec 3, 1 \prec 4, 2 \prec 3, 2 \prec 4$. Квадратична форма Тітса $q_S(z)$ є невід'ємною, бо S (min, max)-еквівалентна частково впорядкованій множині T із 4-х попарно непорівняльних елементів (див. [5]), а квадратична форма Тітса $q_T(z)$ збігається із квадратичною формою Тітса ручного сагайдака, що складається із 4-х стрілок, які виходять із спільної вершини. Кожна максимальна підмножина в S ізоморфна або антиізоморфна частково впорядкованій множині P і кожний елемент із S належить деякій максимальній підмножині, в якій він є максимальним або мінімальним. Для завершення доведення теореми 1 залишилося лише скористатися твердженням 2.

1. *Gabriel P.* Unzerlegbure Darstellungen, I // Manus. Math. – 1972. –**6**, N 1. – P. 71-103.
2. *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функц. анализ и его прил. – 1974. – **8**. – С. 34–42.
3. *Клейнер М. М., Ройтер А. В.* Представления дифференциальных градуированных категорий // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. - С.5-70.
4. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* Частично упорядоченные множества инъективно-конечного типа // Науковий вісник Ужгородського університету (серія: математика і інформатика). - 2005. – **9**. – С. 15-25.
5. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса // Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, N3. – С. 18-58.
6. *V. M. Bondarenko, Yu. M. Pereguda.* On P-numbers of quadratic forms // Геометрія, топологія та їх застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – **6**, N2. – С. 474-477.
7. *Ю. М. Перегуда.* Про R-стабільні елементи скінченних частково впорядкованих множин // Науковий вісник Ужгород-ського ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2009. – вип 19. –С. 81-86.
8. *В. М. Бондаренко, Ю. М. Перегуда.* Опис Р-чисел для вузлових точок частково впорядкованих множин з додатно визначеною формою Тітса // Науковий вісник Ужгородсько-го ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2010. – вип 21. – С. 35-39.
9. *В. М. Бондаренко, В. В. Бондаренко, Ю. Н. Перегуда.* Локальные деформации положительно определенных квадратичных форм // Укр. мат. журнал. – 2012. – №7. – С. 892-907.
10. *Бондаренко В. М., Стъопочкіна М. В.* Про серійні частково впорядковані множини з додатно визначеною квадратичною формою Тітса // Нелінійні коливання. – 2006. – **9**, N3. – С. 320-325.

Одержано 12.06.2014