УДК 512.544

І. В. Шапочка (Ужгородський держ. ун-т)

ПРО РОЗШИРЕННЯ ДОВІЛЬНОЇ ПОВНОЇ АБЕЛЕВОЇ 2-ГРУПИ З УМОВОЮ МІНІМАЛЬНОСТІ ЗА ДОПОМОГОЮ ГРУПИ ТИПУ $(2,2)$

Let $M^{(n)}$ be the direct sum of n copies of quasicyclic 2-group. All non-equivalent extensions of 2-group $M^{(n)}$ by the group H of type (2,2) are described, using the description of matrix integral 2-adic representations of group H.

Нехай $M^{(n)}$ — зовнішня пряма сума n екземплярів квазіциклічної 2-групи. В роботі, використовуючи описані Л. О. Назаровою нееквівалентні матричні цілочислові 2-адичні зображення абелевої групи H типу (2,2), дано описання всіх нееквівалентних розширень 2-групи $M^{(n)}$ за допомогою групи H.

Група G називається p-групою Чернікова, якщо вона є розширенням прямої суми $M^{(n)}$ n ($n \in \mathbb{N}$) екземплярів квазіциклічної p-групи за допомогою скінченної p-групи H. Властивості черніковських p-груп досить добре вивчені (див. наприклад [1–6]). Основний вклад у вивчення цих груп внесли С. М. Черніков та його учні [1].

П. М. Гудивок, Ф. Г. Ващук, В. С. Дроботенко та автор [8–10] за допомогою теорії цілочислових p-адичних зображень скінченних груп описали всі неізоморфні розширення G p-групи $M^{(n)}$ за допомогою циклічної p-групи порядку p^r ($r \leq 2$) для довільного натурального n. Виявилось [9–12], що задача класифікації всіх неізоморфних розширень p-групи $M^{(n)}$ за допомогою скінченної p-групи H для довільного натурального n є дикою, якщо виконується одна з слідуючих умов: 1) H — нециклічна p-група ($p \neq 2$); 2) H — нециклічна 2-група порядку $|H| > 4$; 3) H — циклічна p-група порядку p^r ($r > 2$, $p \neq 2$); 4) H — циклічна 2-група порядку 2^r ($r > 3$). В даній роботі, використовуючи описані Л. О. Назаровою [7] нееквівалентні матричні цілочислові 2-адичні зображення абелевої групи H_0 типу $(2,2)$, буде дано описання всіх нееквівалентних розширень 2-групи $M^{(n)}$ за допомогою групи H_0.

Нехай $M^{(n)}$ — зовнішня пряма сума n екземплярів квазіциклічної p-групи C_{p^∞}, тобто

$$M^{(n)} = M_1 \dot{+} \cdots \dot{+} M_n, \tag{1}$$

де $M_i = C_{p^\infty}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Відмітимо [2], що група $\mathrm{Aut} M^{(n)}$ ізоморфна повній лінійній групі $GL(n, \mathbb{Z}_p)$, де $\mathbb{Z}_p$ — кільце цілих p-адичних чисел. Звідси та із теорії розширень груп [2] випливає, що всяке розширення G групи $M^{(n)}$ за допомогою скінченної групи H визначається матричним $\mathbb{Z}_p$-зображенням Γ степеня n групи H і деякою системою факторів $\{m_{a,b}\}$ ($a, b \in H$, $m_{a,b} \in M^{(n)}$). Нехай $\{c_r\}$ — твірні елементи групи C_{p^∞} ($r = 0, 1, 2, \ldots$), причому $pc_0 = 0$, $pc_r = c_{r-1}$ ($r = 1, 2, \ldots$). Якщо $A = \|\alpha_{ij}\| \in GL(n, \mathbb{Z}_p)$ ($\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}_p$), $m = (m_1, \ldots, m_n)$ ($m_i \in M_i$, $i = 1, \ldots, n$), $\alpha_{ij} = x_{ij}^{(0)} + x_{ij}^{(1)} p + \cdots$, $m_j = y_0^{(j)} c_0 + y_1^{(j)} c_1 + \cdots + y_{k_j}^{(j)} c_{k_j}$ ($0 \leq x_{ij}^{(r)}, y_i^{(s)} < p$), то $A(m) = (m'_1, \ldots, m'_n)$, де

$$m'_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(m_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=0}^{k_j} \sum_{s=0}^{k_j} x_{ij}^{(r)} y_s^{(j)} p^r c_s.$$

Нехай надалі $H = \langle a, b \mid 2a = 0, 2b = 0, a + b = b + a \rangle$ — абелева група типу $(2,2)$, $M^{(n)}$ — 2-група виду (1), $\Gamma : h \to \Gamma_h$ — матричне $\mathbb{Z}_2$-зображення степеня n групи H.

Лема 1 ([11]). *Довільній трійці α, β, γ елементів групи $M^{(n)}$ та $\mathbb{Z}_2$-зображенню Γ групи H відповідає, якщо виконуються умови*

$$\Gamma_a(\alpha) = \alpha,\ \Gamma_b(\alpha) = \alpha - (\Gamma_0 + \Gamma_a)(\gamma),\ \Gamma_b(\beta) = \beta,\ \Gamma_a(\beta) = \beta + (\Gamma_0 + \Gamma_b)(\gamma), \tag{2}$$

деяке розширення групи $M^{(n)}$ за допомогою групи H. Навпаки, довільне розширення групи $M^{(n)}$ за допомогою групи H може бути задано трійкою елементів із $M^{(n)}$ та $\mathbb{Z}_2$-зображенням степеня n групи H.

Надалі через $G(\Gamma, \alpha, \beta, \gamma)$ позначатимемо розширення G групи $M^{(n)}$ за домогою групи H, що виначається елементами α, β, γ групи $M^{(n)}$ та $\mathbb{Z}_2$-зображенням Γ степеня n групи H.

Для довільного $\mathbb{Z}_2$-зображення $\Gamma : h \to \Gamma_h$ степеня n групи H розглянемо підгрупи $A(\Gamma)$, $B(\Gamma)$ групи $M^{(3n)}$ виду

$$A(\Gamma) = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in M^{(3n)} \mid \Gamma_a(\alpha) = \alpha,\ \Gamma_b(\alpha) = \alpha - (\Gamma_0 + \Gamma_a)(\gamma),\ \Gamma_b(\beta) = \beta,$$
$$\Gamma_a(\beta) = \beta + (\Gamma_0 + \Gamma_b)(\gamma)\},$$
$$B(\Gamma) = \{((\Gamma_0 + \Gamma_a)(m_1), (\Gamma_0 + \Gamma_b)(m_2), (\Gamma_0 - \Gamma_b)(m_1) + (\Gamma_a - \Gamma_0)(m_2)) \mid m_1, m_2 \in M^{(n)}\}.$$

Очевидно $B(\Gamma)$ — підгрупа групи $A(\Gamma)$ і розширення $G(\Gamma, \alpha, \beta, \gamma)$ розщеплюване тоді і тільки тоді, коли $(\alpha, \beta, \gamma) \in B(\Gamma)$. Фактор група $A(\Gamma)/B(\Gamma)$ називається групою розширень групи $M^{(n)}$ за допомогою групи H, що відповідає $\mathbb{Z}_2$-зображенню Γ степеня n групи H. Із теорії розширень абелевих груп [13] випливає, що якщо $\mathbb{Z}_2$-зображення Γ розкладне, тобто $\Gamma = \Gamma_1 + \cdots + \Gamma_r$ (Γ_i — деяке $\mathbb{Z}_2$-зображення групи H; $i = 1, \ldots, r$), то

$$A(\Gamma)/B(\Gamma) \cong A(\Gamma_1)/B(\Gamma_1) \dot{+} \cdots \dot{+} A(\Gamma_r)/B(\Gamma_r).$$

Отже, описання групи $A(\Gamma)/B(\Gamma)$ зводиться до випадку, коли Γ — нерозкладне $\mathbb{Z}_2$-зображення групи H.

Введемо надалі слідуючі позначення: E_n — одинична матриця порядку n; R_n, T_n — $n \times (n+1)$-матриці виду $R_n = \begin{pmatrix} 0 & E_n \end{pmatrix}$, $T_n = \begin{pmatrix} E_n & 0 \end{pmatrix}$; U_n, V_n — матриці транспоновані до матриць T_n, R_n відповідно; $W_n = R_n U_n$; L_n, K_n — $2 \times (n+1)$-, $(n+1) \times 2$-матриці відповідно виду

$$L_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \tilde{i} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1 ([7]). *Всі нееквівалентні нерозкладні матричні $\mathbb{Z}_2$зображення групи H вичерпуються наступними зображеннями:*

$$\Gamma_{1+i+2j} : a \to (-1)^i, b \to (-1)^j;$$

$$\Gamma^{(n)}_{5+i+2j} : a \to (-1)^i \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 & E_n \\ 0 & -E_n & R_n & 0 \\ 0 & 0 & E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix}, \ b \to (-1)^j \begin{pmatrix} E_n & 0 & T_n & 0 \\ 0 & -E_n & 0 & E_n \\ 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix};$$

$$\Gamma^{(n)}_{9+i+2j} : a \to (-1)^i \begin{pmatrix} E_{n+1} & 0 & 0 & U_n \\ 0 & -E_n & E_n & 0 \\ 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix}, \ b \to (-1)^j \begin{pmatrix} E_{n+1} & 0 & V_n & 0 \\ 0 & -E_n & 0 & E_n \\ 0 & 0 & -E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix};$$

$$\Delta_1 : a \to \tilde{i}, b \to E_2; \quad \Delta_2 : a \to E_2, b \to \tilde{i}; \quad \Delta_3 : a \to \tilde{i}, b \to \tilde{i};$$
$$\Delta_4 : a \to \tilde{i}, b \to -E_2; \quad \Delta_5 : a \to -E_2, b \to \tilde{i}; \quad \Delta_6 : a \to \tilde{i}, b \to -\tilde{i};$$

$$\Delta^{(n)}_7 : a \to \begin{pmatrix} E_{n+1} & 0 & 0 & E_{n+1} \\ 0 & -E_n & E_n & 0 \\ 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} \end{pmatrix}, \ b \to \begin{pmatrix} E_{n+1} & 0 & V_n & 0 \\ 0 & -E_n & 0 & T_n \\ 0 & 0 & -E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{n+1} \end{pmatrix};$$

$$\Delta^{(n)}_8 : a \to \begin{pmatrix} E_{n+1} & 0 & V_n & 0 \\ 0 & -E_n & 0 & T_n \\ 0 & 0 & -E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{n+1} \end{pmatrix}, \ b \to \begin{pmatrix} E_{n+1} & 0 & 0 & E_{n+1} \\ 0 & -E_n & E_n & 0 \\ 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} \end{pmatrix};$$

$$\Delta_9^{(n)}: a \to \begin{pmatrix} E_{n+1} & 0 & 0 & E_{n+1} \\ 0 & -E_n & E_n & 0 \\ 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} \end{pmatrix}, \; b \to \begin{pmatrix} E_{n+1} & 0 & V_n & E_{n+1} \\ 0 & E_n & -E_n & -T_n \\ 0 & 0 & -E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} \end{pmatrix};$$

$$\Delta_{10}^{(n)}: a \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 & E_n \\ 0 & -E_{n+1} & E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix}, \; b \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & T_n & 0 \\ 0 & -E_{n+1} & 0 & V_n \\ 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix};$$

$$\Delta_{11}^{(n)}: a \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & T_n & 0 \\ 0 & -E_{n+1} & 0 & V_n \\ 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}, \; b \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 & E_n \\ 0 & -E_{n+1} & E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix};$$

$$\Delta_{12}^{(n)}: a \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 & E_n \\ 0 & -E_{n+1} & E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix}, \; b \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & T_n & E_n \\ 0 & E_{n+1} & -E_{n+1} & -V_n \\ 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix};$$

$$\Theta_{1+i+2j}: a \to (-1)^i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, b \to (-1)^j \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Theta_{5+i+2j}: a \to (-1)^i \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, b \to (-1)^j \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Theta_{9+i+2j}^{(n)}: a \to (-1)^i \begin{pmatrix} E_{n+1} & 0 & 0 & E_{n+1} \\ 0 & -E_{n+1} & U_n & 0 \\ 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} \end{pmatrix}, \; b \to (-1)^j \begin{pmatrix} E_{n+1} & 0 & V_n & 0 \\ 0 & -E_{n+1} & 0 & E_{n+1} \\ 0 & 0 & -E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{n+1} \end{pmatrix};$$

$$\Theta_{13+i+2j}^{(n)}: a \to (-1)^i \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 & R_n \\ 0 & -E_{n+1} & E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} \end{pmatrix}, \; b \to (-1)^j \begin{pmatrix} E_n & 0 & T_n & 0 \\ 0 & -E_{n+1} & 0 & E_{n+1} \\ 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{n+1} \end{pmatrix};$$

$$\Psi_1: a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; b \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Psi_2: a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; b \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Psi_3: a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Psi_4 : a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; b \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Psi_5 : a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Psi_6^{(n)} : a \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 & W_n \\ 0 & -E_n & E_n & 0 \\ 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix}, \; b \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & E_n & 0 \\ 0 & -E_n & 0 & E_n \\ 0 & 0 & -E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix};$$

$$\Psi_7^{(n)} : a \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & E_n & 0 \\ 0 & -E_n & 0 & E_n \\ 0 & 0 & -E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}, \; b \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 & W_n \\ 0 & -E_n & E_n & 0 \\ 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix};$$

$$\Psi_8^{(n)} : a \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 & E_n \\ 0 & -E_n & W_n & 0 \\ 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix}, \; b \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & E_n & 0 \\ 0 & -E_n & 0 & E_n \\ 0 & 0 & -E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix};$$

$$\Psi_9^{(n)} : a \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & E_n & 0 \\ 0 & -E_n & 0 & E_n \\ 0 & 0 & -E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}, \; b \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 & E_n \\ 0 & -E_n & W_n & 0 \\ 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix};$$

$$\Psi_{10}^{(n)} : a \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & E_n & 0 \\ 0 & -E_n & 0 & E_n \\ 0 & 0 & -E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}, \; b \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & E_n & E_n \\ 0 & E_n & -W_n & -E_n \\ 0 & 0 & -E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix};$$

$$\Psi_f^{(n)} : a \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 & \Phi(f(x)) \\ 0 & -E_n & E_n & 0 \\ 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix}, \; b \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & E_n & 0 \\ 0 & -E_n & 0 & E_n \\ 0 & 0 & -E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}$$

($\Phi(f(x))$ — *нормальна форма Фробеніуса, що відповідає многочлену* $f(x)$, $f(x)$ — *многочлен, який є степенем незвідного над полем з двох елемнтів многочлена відмінного від* x*);*

$$\Psi_{11}^{(n)}: a \to \begin{pmatrix} \tilde{i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_n & 0 \\ 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_n & 0 \\ 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n \\ 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & T_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix},$$

$$b \to \begin{pmatrix} \tilde{i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_n & 0 & 0 \\ 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & R_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 & 0 & R_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 & 0 & E_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix};$$

$$\Psi_{12}^{(n)}: a \to \begin{pmatrix} \tilde{i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_n & 0 \\ 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_n & 0 \\ 0 & 0 & E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & E_{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & T_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} \end{pmatrix},$$

$$b \to \begin{pmatrix} \tilde{i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_n & 0 & 0 \\ 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & R_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 & 0 & R_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} \end{pmatrix};$$

$$\Psi_{13}^{(n)}: a \to \begin{pmatrix} E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_n & 0 & K_n \\ 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & -E_n & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & U_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{i} \end{pmatrix},$$

$$b \to \begin{pmatrix} E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & V_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & V_n & K_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{i} \end{pmatrix};$$

$$\Psi_{14}^{(n)} : a \to \begin{pmatrix} E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_n & 0 & K_n \\ 0 & E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & U_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{i} \end{pmatrix},$$

$$b \to \begin{pmatrix} E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & V_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & V_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & K_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{i} \end{pmatrix},$$

де $i, j = 0, 1$.

Теорема 2. *Всі нееквівалентні розширення групи* $M^{(s)}$ $(s \in \mathbb{N})$ *за допомогою групи* H*, що визначаються нерозкладними* $\mathbb{Z}_2$*-зображеннями степеня* s *групи* H*, вичерпуються наступними групами:*

1) $G(\Gamma_1, 0, 0, zc_0)$, $z \in \{0, 1\}$;

2) $G(\Gamma_2, xc_0, 0, zc_0)$, $x,\ z \in \{0, 1\}$;

3) $G(\Gamma_3, 0, xc_0, zc_0)$, $x,\ z \in \{0, 1\}$;

4) $G(\Gamma_4, xc_0, yc_0, 0)$, $x,\ y \in \{0, 1\}$;

5) $G(\Gamma_5^{(1)}, 0, \beta, \gamma)$, $\beta = (0, 0, 0, xc_0, 0)$, $\gamma = (xc_1, 0, xc_0, 0, xc_0)$, $x \in \{0, 1\}$;

6) $G(\Gamma_5^{(k)}, 0, 0, \gamma)$, $\gamma = (\gamma_1, 0, 0, 0)$, $\gamma_1 = (0, z_2c_0, \ldots, z_kc_0)$, $z_i \in \{0, 1\}$ $(i = 2, \ldots, k)$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$;

7) $G(\Gamma_6^{(1)}, \alpha, \beta, \gamma)$, $\alpha = (0, 0, xc_0, 0, 0)$, $\beta = (0, 0, 0, xc_0, 0)$, $\gamma = (0, 0, 0, 0, xc_0)$, $x \in \{0, 1\}$;

8) $G(\Gamma_6^{(k)}, 0, 0, \gamma)$, $\gamma = (\gamma_1, 0, 0, 0)$, $\gamma_1 = (0, z_2c_0, \ldots, z_kc_0)$, $z_i \in \{0, 1\}$ $(i = 2, \ldots, k)$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

9) $G(\Gamma_7^{(n)}, 0, 0, \gamma)$, $\gamma = (\gamma_1, 0, 0, 0)$, $\gamma_1 = (0, z_2c_0, \ldots, z_{n-1}c_0, 0)$, $z_i \in \{0, 1\}$ $(i = 2, \ldots, n-1)$, $n \in \mathbb{N}$;

10) $G(\Gamma_8^{(1)}, \alpha, 0, \gamma)$, $\alpha = (0, 0, xc_0, 0, 0)$, $\gamma = (0, xc_1, 0, xc_0, xc_0)$, $x \in \{0, 1\}$;

11) $G(\Gamma_8^{(k)}, 0, 0, \gamma)$, $\gamma = (0, \gamma_2, 0, 0)$, $\gamma_1 = (z_1c_0, \ldots, z_{k-1}c_0, 0)$, $z_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, \ldots, k-1)$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$;

12) $G(\Gamma_9^{(n)}, 0, 0, \gamma)$, $\gamma = (\gamma_1, 0, 0, 0)$, $\gamma_1 = (z_1c_0, \ldots, z_{n+1}c_0)$, $z_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, \ldots, n+1)$, $n \in \mathbb{N}$;

13) $G(\Gamma_{10}^{(n)}, \alpha, 0, \gamma)$, $\alpha = (\alpha_1, 0, 0, 0)$, $\gamma = (\gamma_1, 0, 0, 0)$, $\alpha_1 = (0, xc_0)$, $\gamma_1 = (z_1c_0, \ldots, z_{n+1}c_0)$, x, $z_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, \ldots, n+1)$, $n \in \mathbb{N}$;

14) $G(\Gamma_{11}^{(n)}, 0, \beta, \gamma)$, $\beta = (\beta_1, 0, 0, 0)$, $\gamma = (\gamma_1, 0, 0, 0)$, $\beta_1 = (yc_0, 0)$, $\gamma_1 = (z_1c_0, \ldots, z_{n+1}c_0)$, y, $z_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ $n \in \mathbb{N}$;

15) $G(\Gamma_{12}^{(n)}, \alpha, \beta, \gamma)$, $\alpha = (\alpha_1, 0, 0, 0)$, $\beta = (\beta_1, 0, 0, 0)$, $\gamma = (0, \gamma_2, 0, 0)$, $\alpha_1 = (0, xc_0)$, $\beta_1 = (yc_0, 0)$, $\gamma_2 = (z_1c_0, \ldots, z_nc_0)$, x, y, $z_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, \ldots, n)$, $n \in \mathbb{N}$;

16) $G(\Delta_1, 0, 0, 0)$;

17) $G(\Delta_2, 0, 0, 0)$;

18) $G(\Delta_3, 0, 0, 0)$;

19) $G(\Delta_4, 0, \beta, 0)$, $\beta = (yc_0, 0)$, $y \in \{0, 1\}$;

20) $G(\Delta_5, \alpha, 0, 0)$, $\alpha = (xc_0, 0)$, $x \in \{0, 1\}$;

21) $G(\Delta_6, 0, 0, \gamma)$, $\gamma = (zc_0, 0)$, $z \in \{0, 1\}$;

22) $G(\Delta_7^{(n)}, 0, 0, \gamma)$, $\gamma = (\gamma_1, 0, 0, 0)$, $\gamma_1 = (z_1c_0, \ldots, z_nc_0, 0)$, $z_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, \ldots, n)$, $n \in \mathbb{N}$;

23) $G(\Delta_8^{(n)}, 0, 0, \gamma)$, $\gamma = (\gamma_1, 0, 0, 0)$, $\gamma_1 = (z_1c_0, \ldots, z_nc_0, 0)$, $z_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, \ldots, n)$, $n \in \mathbb{N}$;

24) $G(\Delta_9^{(n)}, 0, 0, \gamma)$, $\gamma = (\gamma_1, 0, 0, 0)$, $\gamma_1 = (z_1c_0, \ldots, z_nc_0, 0)$, $z_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, \ldots, n)$, $n \in \mathbb{N}$;

25) $G(\Delta_{10}^{(n)}, 0, \beta, \gamma)$, $\beta = (0, \beta_2, 0, 0)$, $\gamma = (\gamma_1, 0, 0, 0)$, $\beta_2 = (yc_0, 0)$, $\gamma_1 = (z_1c_0, \ldots, z_nc_0)$, y, $z_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, \ldots, n)$, $n \in \mathbb{N}$;

26) $G(\Delta_{11}^{(n)}, \alpha, 0, \gamma)$, $\alpha = (0, \alpha_2, 0, 0)$, $\gamma = (\gamma_1, 0, 0, 0)$, $\alpha_2 = (xc_0, 0)$, $\gamma_1 = (z_1c_0, \ldots, z_nc_0)$, x, $z_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, \ldots, n)$, $n \in \mathbb{N}$;

27) $G(\Delta_{12}^{(n)}, 0, 0, \gamma)$, $\gamma = (0, \gamma_2, 0, 0)$, $\gamma_2 = (z_1c_0, \ldots, z_{n+1}c_0)$, $z_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, \ldots, n+1)$, $n \in \mathbb{N}$;

28) $G(\Theta_1, \alpha, 0, \gamma)$, $\alpha = (0, xc_0, 0)$, $\gamma = (zc_0, 0, 0)$, x, $z \in \{0, 1\}$;

29) $G(\Theta_2, 0, 0, \gamma)$, $\gamma = (z_1c_0, z_2c_0, 0)$, $z_1, z_2 \in \{0, 1\}$;

30) $G(\Theta_3, \alpha, \beta, \gamma)$, $\alpha = (0, xc_0, 0)$, $\beta = (yc_0, 0, 0)$, $\gamma = (zc_0, 0, 0)$, $x, y, z \in \{0, 1\}$;

31) $G(\Theta_4, 0, \beta, \gamma)$, $\beta = (yc_0, 0, 0)$, $\gamma = (zc_0, 0, 0)$, $y, z \in \{0, 1\}$;

32) $G(\Theta_5, \alpha, \beta, \gamma)$, $\alpha = (0, 0, xc_0)$, $\beta = (0, yc_0, 0)$, $\gamma = (0, xc_0, yc_0)$, $x, y \in \{0, 1\}$;

33) $G(\Theta_6, 0, \beta, \gamma)$, $\beta = (0, yc_0, 0)$, $\gamma = (0, 0, yc_0)$, $y \in \{0, 1\}$;

34) $G(\Theta_7, \alpha, 0, \gamma)$, $\alpha = (0, 0, xc_0)$, $\gamma = (0, xc_0, 0)$, $x \in \{0, 1\}$;

35) $G(\Theta_8, 0, 0, \gamma)$, $\gamma = (xc_1, xc_0, xc_0)$, $x \in \{0, 1\}$;

36) $G(\Theta_9^{(n)}, \alpha, 0, \gamma)$, $\alpha = (0, \alpha_2, 0, 0)$, $\gamma = (\gamma_1, 0, 0, 0)$, $\alpha_2 = (0, xc_0)$, $\gamma_1 = (z_1c_0, \ldots, z_{n+1}c_0)$, x, $z_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, \ldots, n+1)$, $n \in \mathbb{N}$;

37) $G(\Theta_{10}^{(n)}, 0, 0, \gamma)$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, 0, 0)$, $\gamma_1 = (z_1c_0, \ldots, z_{n+1}c_0)$, $\gamma_2 = (0, z_{n+2}c_0)$, $z_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, \ldots, n+2)$, $n \in \mathbb{N}$;

38) $G(\Theta_{11}^{(n)}, \alpha, \beta, \gamma)$, $\alpha = (0, \alpha_2, 0, 0)$, $\beta = (\beta_1, 0, 0, 0)$, $\gamma = (\gamma_1, 0, 0, 0)$, $\alpha_2 = (0, xc_0)$, $\beta_1 = (yc_0, 0)$, $\gamma_1 = (z_1c_0, \ldots, z_{n+1}c_0)$, $x, y, z_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, \ldots, n+1)$, $n \in \mathbb{N}$;

39) $G(\Theta_{12}^{(n)}, 0, \beta, \gamma)$, $\beta = (\beta_1, 0, 0, 0)$, $\gamma = (0, \gamma_2, 0, 0)$, $\beta_1 = (yc_0, 0)$, $\gamma_2 = (z_1c_0, \ldots, z_{n+1}c_0)$, $y, z_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, \ldots, n+1)$, $n \in \mathbb{N}$;

40) $G(\Theta_{13}^{(1)}, \alpha, \beta, \gamma)$, $\alpha = (0, 0, 0, 0, 0, xc_0, 0)$, $\beta = (0, 0, 0, 0, xc_0, 0, 0)$, $\gamma = ((2z + x)c_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $x, z \in \{0, 1\}$;

41) $G(\Theta_{13}^{(k)}, 0, 0, \gamma)$, $\gamma = (\gamma_1, 0, 0, 0)$, $\gamma_1 = (z_1c_0, \ldots, z_kc_0)$, $z_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, \ldots, k)$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$;

42) $G(\Theta_{14}^{(n)}, 0, 0, \gamma)$, $\gamma = (\gamma_1, 0, 0, 0)$, $\gamma_1 = (0, z_2c_0, \ldots, z_nc_0)$, $z_i \in \{0, 1\}$ $(i = 2, \ldots, n)$, $n \in \mathbb{N}$;

43) $G(\Theta_{15}^{(n)}, 0, 0, \gamma)$, $\gamma = (\gamma_1, 0, 0, 0)$, $\gamma_1 = (z_1c_0, \ldots, z_{n-1}c_0, 0)$, $z_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, $n \in \mathbb{N}$;

44) $G(\Theta_{16}^{(n)}, 0, 0, \gamma)$, $\gamma = (0, \gamma_2, 0, 0)$, $\gamma_2 = (0, z_2c_0, \ldots, z_nc_0, 0)$, $z_i \in \{0, 1\}$ $(i = 2, \ldots, n)$, $n \in \mathbb{N}$;

45) $G(\Psi_1, 0, 0, 0)$;

46) $G(\Psi_2, \alpha, \beta, \gamma)$, $\alpha = (0, xc_0, 0, xc_0)$, $\beta = (0, yc_0, yc_0, 0)$, $\gamma = (0, (x+z)c_0, (x+y+z)c_0, zc_0)$, $x,\ y,\ z \in \{0, 1\}$;

47) $G(\Psi_3, \alpha, \beta, \gamma)$, $\alpha = (0, xc_0, 0, 0)$, $\beta = (0, yc_0, 0, 0)$, $\gamma = (z_1c_0, 0, z_2c_0, 0)$, $x,\ y,\ z_1,\ z_2 \in \{0, 1\}$;

48) $G(\Psi_4, \alpha, \beta, \gamma)$, $\alpha = (0, xc_0, 0, 0, 0, 0, xc_0, 0)$, $\beta = (0, 0, 0, 0, yc_0, 0, 0, 0)$, $\gamma = (0, (x+y)c_0, (x+y)c_1, 0, xc_0, (x+y)c_0, yc_0, (x+y)c_0)$, $x,\ y \in \{0, 1\}$;

49) $G(\Psi_5, \alpha, \beta, \gamma)$, $\alpha = (0, 0, 0, xc_0, 0, 0, 0, 0)$, $\beta = (0, 0, yc_0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $\gamma = (z_1c_0, z_2c_0, 0, 0, 0, 0, z_3c_0, 0)$, $x,\ y,\ z_1,\ z_2,\ z_3 \in \{0, 1\}$;

50) $G(\Psi_6^{(n)}, 0, 0, \gamma)$, $\gamma = (\gamma_1, 0, 0, 0)$, $\gamma_1 = (z_1c_0, \ldots, z_nc_0)$, $z_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, \ldots, n)$, $n \in \mathbb{N}$;

51) $G(\Psi_7^{(n)}, 0, 0, \gamma)$, $\gamma = (\gamma_1, 0, 0, 0)$, $\gamma_1 = (z_1c_0, \ldots, z_nc_0)$, $z_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, \ldots, n)$, $n \in \mathbb{N}$;

52) $G(\Psi_8^{(n)}, \alpha, 0, \gamma)$, $\alpha = (0, \alpha_2, 0, 0)$, $\gamma = (\gamma_1, 0, 0, 0)$, $\alpha_2 = (0, xc_0)$, $\gamma_1 = (0, z_2c_0, \ldots, z_nc_0)$, $x, z_i \in \{0, 1\}$ $(i = 2, \ldots, n)$, $n \in \mathbb{N}$;

53) $G(\Psi_9^{(n)}, 0, \beta, \gamma)$, $\beta = (0, \beta_2, 0, 0)$, $\gamma = (\gamma_1, 0, 0, 0)$, $\beta_2 = (0, yc_0)$, $\gamma_1 = (0, z_2c_0, \ldots, z_nc_0)$, $y, z_i \in \{0, 1\}$ $(i = 2, \ldots, n)$, $n \in \mathbb{N}$;

54) $G(\Psi_{10}^{(n)}, 0, 0, \gamma)$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, 0, 0)$, $\gamma_1 = (0, z_2c_0, \ldots, z_nc_0)$, $\gamma_2 = (0, z_{n+1}c_0)$, $z_i \in \{0, 1\}$ $(i = 2, \ldots, n+1)$, $n \in \mathbb{N}$;

55) $G(\Psi_f^{(n)}, 0, 0, \gamma)$, $\gamma = (\gamma_1, 0, 0, 0)$, $\gamma_1 = (z_1c_0, \ldots, z_nc_0)$, $z_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, \ldots, n)$, $n \in \mathbb{N}$;

56) $G(\Psi_{11}^{(1)}, \alpha, \beta, \gamma)$, $\alpha = (0, xc_0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, xc_0, 0)$, $\beta = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, xc_0, 0, 0, 0, 0)$, $\gamma = (0, xc_0, xc_1, xc_1, 0, 0, xc_0, 0, xc_0, xc_0, 0, xc_0)$, $x \in \{0, 1\}$;

57) $G(\Psi_{11}^{(k)}, 0, 0, \gamma)$, $\gamma = (0, \gamma_2, \gamma_3, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $\gamma_2 = (0, z_2c_0, \ldots, z_kc_0)$, $\gamma_3 = (z'_1c_0, \ldots, z'_{k-1}c_0, 0)$, $z_i, z_k, z'_1, z'_j \in \{0, 1\}$ $(i = 2, \ldots, k-1)$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$;

58) $G(\Psi_{12}^{(n)}, 0, 0, \gamma)$, $\gamma = (0, \gamma_2, \gamma_3, 0, 0, 0, 0, 0, 0,)$, $\gamma_2 = (z_1c_0, \ldots, z_nc_0)$, $\gamma_3 = (0, z'_2c_0, \ldots, z'_nc_0, 0)$, $z_1, z_i, z'_i \in \{0, 1\}$ $(i = 2, \ldots, n)$, $n \in \mathbb{N}$;

59) $G(\Psi_{13}^{(n)}, \alpha, \beta, \gamma)$, $\alpha = (0, 0, 0, \alpha_4, 0, 0, 0, 0, 0)$, $\beta = (0, 0, 0, \beta_4, 0, 0, 0, 0, 0)$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \gamma_9)$, $\alpha_4 = (0, xc_0)$, $\beta_4 = (yc_0, 0)$, $\gamma_1 = (z_1c_0, \ldots, z_{n+1}c_0)$, $\gamma_2 = (z'_1c_0, \ldots, z'_nc_0)$, $\gamma_9 = (z''c_0, 0)$, $x, y, z_i, z_{n+1}, z'_i, z'' \in \{0, 1\}$ $(i = 1, \ldots, n)$, $n \in \mathbb{N}$;

60) $G(\Psi_{14}^{(n)}, \alpha, \beta, \gamma)$, $\alpha = (0, 0, 0, \alpha_4, 0, 0, 0, 0, 0)$, $\beta = (0, 0, \beta_3, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \gamma_9)$, $\alpha_4 = (0, xc_0)$, $\beta_3 = (yc_0, 0)$, $\gamma_1 = (z_1c_0, \ldots, z_{n+1}c_0)$, $\gamma_2 = (z'_1c_0, \ldots, z'_{n+1}c_0)$, $\gamma_9 = (z''c_0, 0)$, $x, y, z_i, z'_i, z'' \in \{0, 1\}$ $(i = 1, \ldots, n+1)$, $n \in \mathbb{N}$.

Доведення. Для доведення теореми розглянемо типовий випадок. Інші випадки доводяться аналогічно.

Нехай $(\alpha, \beta, \gamma) \in A(\Gamma_5^{(n)})$ та $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$, де $\alpha_i, \beta_i \in M^{(n)}$ $(i = 1, 2, 4)$, $\alpha_3, \beta_3 \in M^{(n+1)}$. Тоді з леми 1 випливає, що

$$((\Gamma_5^{(n)})_a - E_{4n+1})(\alpha) = 0, \qquad ((\Gamma_5^{(n)})_b - E_{4n+1})(\beta) = 0.$$

Звідси $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, 2\beta_2)$, де $\alpha_3 = (u, 2\alpha_2)$, $\beta_3 = (0, xc_0)$, $u \in M^{(1)}$, $x \in \{0, 1\}$. Покладемо $m = (0, 0, m_3, -\alpha_1)$, $m' = (0, 0, m'_3, -\beta_2)$, де $m_3 = (-u', -\alpha_2)$, $m'_3 = (-\beta_1, 0)$, $2u' = u$. Тоді

$$\alpha + (E_{4n+1} + (\Gamma_5^{(n)})_a)(m) = 0, \quad \beta + (E_{4n+1} + (\Gamma_5^{(n)})_b)(m') = (0, 0, \beta_3, 0) = \beta'.$$

Отже

$$(\alpha, \beta, \gamma) + B(\Gamma_5^{(n)}) = (0, \beta', \gamma') + B(\Gamma_5^{(n)})$$

для деякого $\gamma' \in M^{(4n+1)}$. Нехай $\gamma' = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, де γ_1, γ_2, $\gamma_4 \in M^{(n)}$, $\gamma_3 \in M^{(n+1)}$. Тоді з леми 1 випливає, що

$$(E_{4n+1} + (\Gamma_5^{(n)})_a)(\gamma) = 0, \qquad (E_{4n+1} + (\Gamma_5^{(n)})_b)(\gamma) = (0, R_n\beta_3, 0, 0).$$

Отже

$$\gamma_3 = (zc_0, 0),\ z \in \{0, 1\};\ \gamma_4 = R_n\beta_3,\ 2\gamma_1 = -\gamma_4;\ 2\gamma_1 = -T_n\gamma_3.$$

Звідси

$$T_n\gamma_3 = R_n\beta_3. \tag{3}$$

У випадку $n = 1$ з (3) випливає $z = x$, $\gamma_1 = (2y + x)c_1$, $y \in \{0, 1\}$. Отже в даному випадку $\gamma' = ((2y + x)c_1, \gamma_2, xc_0, 0, xc_0)$. Покладемо $m = (0, 0, yc_0, 0, 0)$, $m' = (0, 0, 0, -\gamma_2, 0)$. Тоді

$$(E_5 + (\Gamma_5^{(1)})_a)(m) = 0,\ (E_5 + (\Gamma_5^{(1)})_b)(m') = 0,$$

$$\gamma' + (E_5 - (\Gamma_5^{(1)})_b)(m) + ((\Gamma_5^{(1)})_a - E_5)(m') = (xc_1, 0, xc_0, 0, xc_0).$$

Тепер у випадку $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ з (3) слідує, що $z = x = 0$. Отже $\beta' = 0$, $\gamma' = (\gamma_1, \gamma_2, 0, 0)$, де $\gamma_1 = (z_1c_0, \dots, z_nc_0)$, $z_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Покладемо $m = (0, 0, m_3, 0)$, $m' = (0, 0, m_3', 0)$, де $m_3 = (z_1c_0, 0)$, $m_3' = (0, -\gamma_2)$. Тоді

$$(E_{4n+1} + (\Gamma_5^{(n)})_a)(m) = 0, \quad (E_{4n+1} + (\Gamma_5^{(n)})_b)(m') = 0,$$

$$\gamma' + (E_{4n+1} - (\Gamma_5^{(n)})_b)(m) + ((\Gamma_5^{(n)})_a - E_{4n+1})(m') = (\gamma_1', 0, 0, 0),$$

де $\gamma_1' = (0, z_2c_0, \dots, z_nc_0)$. З вище сказаного слідує, що

$$A(\Gamma_5^{(k)})/B(\Gamma_5^{(k)}) \cong \{(0, 0, \gamma) \mid \gamma = (\gamma_1, 0, 0, 0),\ \gamma_1 = (0, z_2c_0, \dots, z_kc_0),$$

$$z_i \in \{0, 1\},\ (i = 2, \dots, k)\}, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Теорема доведена.

Нехай $\Omega = \{\Gamma_7^{(1)}, \Gamma_7^{(2)}, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Theta_{14}^{(1)}, \Theta_{15}^{(1)}, \Theta_{16}^{(1)}, \Psi_1\}$.

Наслідок 1. *Нехай Γ — $\mathbb{Z}_2$-зображення степеня s групи H виду $\Gamma = n_1\Gamma_1' + \ldots + n_r\Gamma_r'$, $n_i \geq 1$, де $\Gamma_i' \in \Omega$, $(i = 1, \dots, r)$. Тоді розширення 2-групи $M^{(s)}$ за допомогою групи H, що визначаєтьcя зображенням Γ розщеплюване.*

Автор висловлює подяку професору П. М. Гудивку за допомогу, надану при написанні роботи.

1. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. –384 с.
2. *Курош А. Г.* Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
3. *Robinson D. J. S.* Finitness conditions and generalized soluble groups. – Berlin: Springer, 1972. – 464 p.
4. *Kegel O., Wehrfritz B. A.* Locally finite groups. – Amsterdam: North Holland Publ. Co., 1973. – 210 p.
5. *Baumslag G., Blackburn N.* Groups with cyclic upper central factors // Proc. London Math. Soc. – 1960. – **10**. – P. 531–544.
6. *Hartley B.* A dual approach to Chernikov modules // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1977. – P. 215–239.
7. *Назарова Л. А.* Целочисленные представления четверной группы // Докл. АН СССР. – 1961. – **140** №5. – С. 1011–1014.
8. *Гудивок П. М., Дроботенко В. С.* Про циклічні розширення повних абелевих груп // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1966. – №10. – С. 1239–1242.
9. *Гудивок П. М., Ващук Ф. Г., Дроботенко В. С.* Черниковские p-группы и целочисленные p-адические представления конечных групп // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, №26. – С. 742–753.
10. *Гудивок П. М., Шапочка И. В.* О расширениях абелевых p-групп // Доп. НАН України. – 1995.– №2. – С. 8–9.
11. *Шапочка І. В.* Про класифікацію p-груп Чернікова // Деп. в ДНТБ України 17.07.1995. – №581-Ук 95. – С. 1–15.
12. *Гудивок П. М., Шапочка І. В.* Про p-групи Чернікова // Тези доповідей Всеукраїнської наукової конференції, присвяченої 70-річчю від дня народження П. С. Казімірського. – Львів, 1995. – Ч. 1. – С. 21.
13. *Маклейн С.* Гомология. – М.: Мир, 1966. – 543 с.